$f(x) = \frac{1}{3}\left(4x^3 - x^4\right)$

Vorbereitungen

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(4x^3 - x^4\right) = \frac{x^3}{3}(4-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(12x^2 - 4x^3\right) = \frac{4x^2}{3}(3-x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(24x - 12x^2\right) = \frac{12x}{3}(2-x) = 4x(2-x)$$

Wenn immer möglich faktorisieren; das erleichtert die Übersicht.

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie: Keine erkennbare

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$

Es genügt x^3 zu untersuchen!

Nullstellen

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(4x^3 - x^4\right) = \frac{x^3}{3}(4-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(12x^2 - 4x^3\right) = \frac{4x^2}{3}(3-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

Wendepunkte

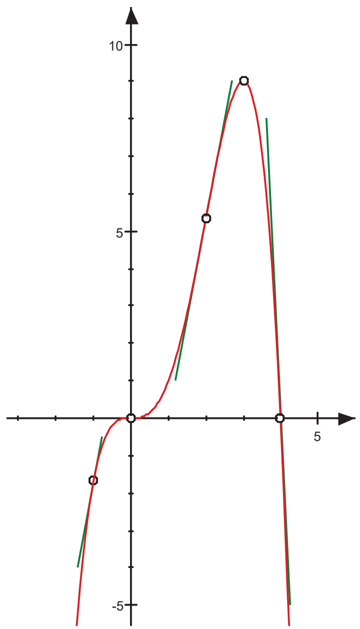
$$f''(x) = \frac{1}{3}\left(24x - 12x^2\right) = 4x(2-x) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Übersicht

x	f (x)	f′ (x)	
0	0	0	Terrassenpunkt und Nullstelle
4	0	$-21\frac{1}{3}$	Nullstelle
3	9	0	Maximum
2	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Wendepunkt
-1	$-1\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

Graph



$$f(x) = \tfrac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 2\right)$$

Berechnen Sie zusätzlich den Funktionswert und die Steigung. Lassen Sie dafür die Steigung in den nicht ganzzahligen Nullstellen weg.

Vorbereitungen

$$f(x) = \tfrac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9) = \tfrac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = \tfrac{3}{5}(x - 3)(x + 1)$$
$$f''(X) = \tfrac{3}{5}(2x - 2) = \tfrac{6}{5}(x - 1)$$

Die Zerlegung der 1. Terms ist nicht ganz einfach; die Untersuchung der Nullstellen wird deshalb auf später verschoben.

Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie

Keine erkennbare

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$$
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$$

Es genügt x^3 zu untersuchen!

Nullstellen

Diese Gleichung 3. Grades ist aufwendiger zu lösen; wir verschieben das Traktandum auf später.

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$f'(x) = \tfrac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = \tfrac{3}{5}(x - 3)(x + 1) = 0 \qquad x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Selbstverständlich können Sie auch die quadratische Gleichung $\tfrac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = 0$ auflösen, wenn Sie die Faktorzerlegung nicht auf Anhieb finden.

Wendepunkte

$$f''(x) = \tfrac{6}{5}\left(x - 1\right) = 0 \qquad x = 1$$

Nullstellen

Wenn wir die gefundenen Punkte einzeichnen, dann sieht man leicht, dass zwischen 0 und 1 eine nicht ganzzahlige Nullstelle liegt und deshalb auch eine zweite nicht ganzzahlig ist. Man kann aber auch vermuten, dass −2 eine Nullstelle ist, und das durch Einsetzen verifizieren. Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$f(x) = \tfrac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 2\right) = \tfrac{1}{5}\left(x + 2\right)\left(x^2 - 5x + 1\right) = 0$$

und die Nullstellen: $x_1 = -2,\ x_{2,3} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

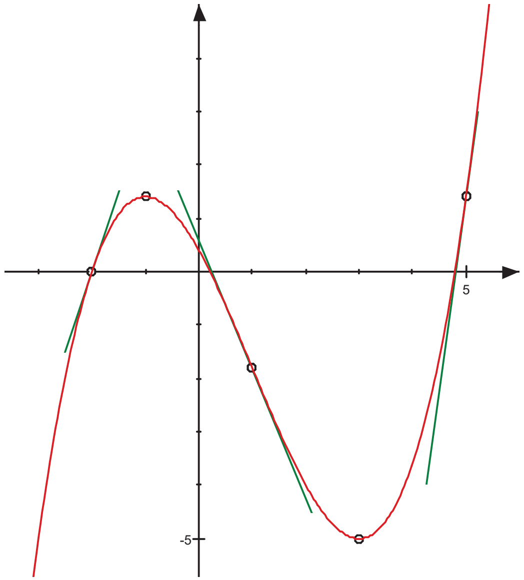
G: Gleichungen: höhern Grades. Aufg. 2
Online | Offline

Übersicht

x	f (x)	f′ (x)	
-1	1.4	0	Extremum
3	-5	0	Extremum
1	-1.8	-2.4	Wendepunkt
5	1.4	7.2	Zusatzpunkt
-2	0	3	Nullstelle
	0	---	Nullstelle
	0	---	Nullstelle

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

GRAPH



$$f(x) = \tfrac{1}{3}\left(x^4 - 8x^3 + 18x^2\right)$$

Zusätzlich: Wert und Steigung für $x=1$ und $x=4$

Vorbereitungen

Wenn immer möglich faktorisieren; das erleichtert die Übersicht.

$$f(x)=\tfrac{1}{3}\left(x^4 - 8x^3 + 18x^2\right)=\frac{x^2}{3}\left(x^2 - 8x + 18\right)$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}\left(4x^3 - 24x^2 + 36x\right)= \frac{4x}{3}\left(x^2 - 6x + 9\right)= \frac{4x}{3}\left(x - 3\right)^2$$

$$f''(x) = \tfrac{1}{3}\left(12x^2 - 48x + 36\right)= \frac{12}{3}\left(x^2 - 4x + 3\right)= 4\left(x - 3\right)\left(x - 1\right)$$

Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie

Keine erkennbare

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

Es genügt x^4 zu untersuchen!

Nullstellen

$$f(x)=\tfrac{1}{3}\left(x^4 - 8x^3 + 18x^2\right)=\frac{x^2}{3}\left(x^2 - 8x + 18\right)=0 \qquad x=0$$

Einzige Lösung; die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$f'(x) = \frac{4x}{3}\left(x - 3\right)^2 = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

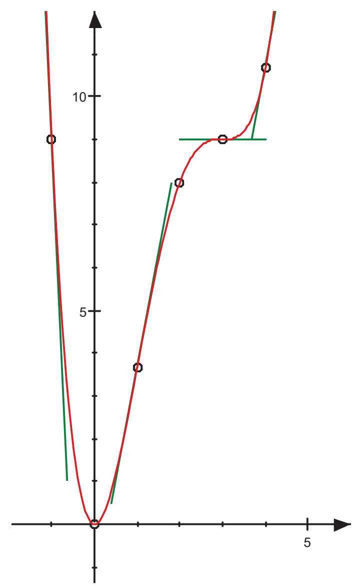
Wendepunkte

$$f''(x) = 4\left(x - 3\right)\left(x - 1\right)= 0 \qquad x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

Übersicht

x	f (x)	f′ (x)	
0	0	0	Nullstelle und Minimum
3	9	0	Terrassenpunkt
1	$3\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Wendepunkt
4	$10\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt
-1	9	$-21\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt

Graph



$f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{2}$

Vorbereitungen

$$f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{2} = \frac{x^2(6-x^2)}{2}$$
$$f'(x) = \frac{12x - 4x^3}{2} = \frac{4x(3-x^2)}{2} = 2x(3-x^2)$$
$$f''(x) = \frac{12-12x^2}{2} = 6(1-x^2)$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie

Symmetrisch zur y-Achse; es hat nur gerade Exponenten.

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

Es genügt $-x^4$ zu untersuchen!

Nullstellen

$$f(x) = \frac{x^2(6-x^2)}{2} = 0$$

$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{6}$

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$f'(x) = 2x(3-x^2) = 0$$

$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$

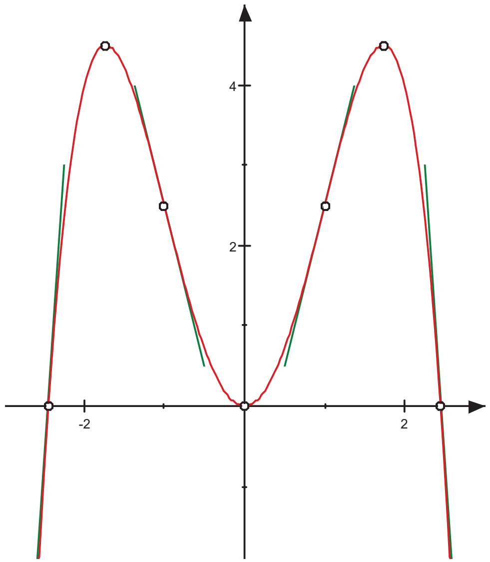
Wendepunkte

$f''(x) = 6(1-x^2) = 0 \qquad x_{1,2} = \pm 1$

Übersicht

x	f (x)	f′ (x)	
0	0	0	Minimum und Nullstelle
$\pm\sqrt{6}$	0	$f'(\pm\sqrt{6}) = \pm 2\sqrt{6}(3-6) = \mp 6\sqrt{6}$	Nullstellen
$\pm\sqrt{3}$	4.5	0	Maxima
± 1	2.5	4	Wendepunkte

Graph



$$f(x) = \frac{12x - x^3}{4}$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{12x - x^3}{4} = \frac{x(12 - x^2)}{4}$$
$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{4} = \frac{3(4 - x^2)}{4}$$
$$f''(x) = \frac{3(-2x)}{4} = -\frac{3x}{2}$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

DEFINITIONSBEREICH $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

SYMMETRIE

Symmetrisch zum Ursprung. Die Gleichung weist nur ungerade Exponenten auf.

VERHALTEN FÜR $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

Es genügt $-x^3$ zu untersuchen!

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{x(12 - x^2)}{4} = 0$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{4} = \frac{3(4 - x^2)}{4} = 0$$

$x_{1,2} = \pm 2$

WENDEPUNKTE

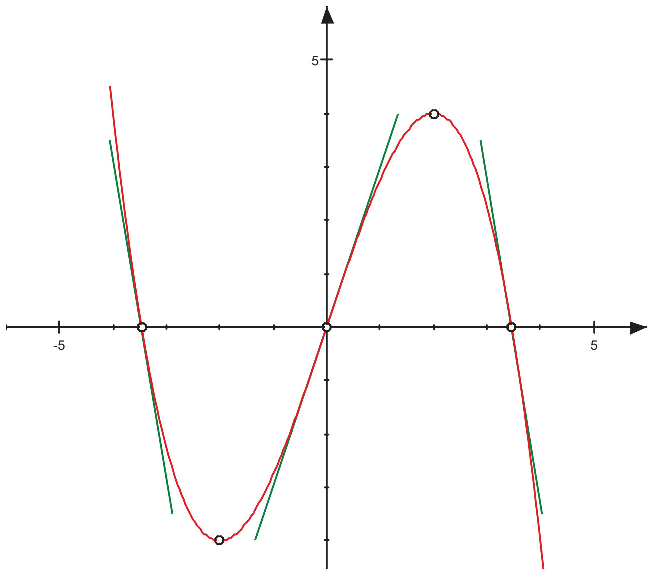
$$f''(x) = -\frac{3x}{2} = 0$$

$x = 0$

ÜBERSICHT

x	f (x)	f′ (x)	
0	0	3	Wendepunkt und Nullstelle
$\pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.5$	0	-6	Nullstellen
2	4	0	Maximum
-2	-4	0	Minimum

GRAPH



$f(x) = \frac{1}{25}\left(x^4 - 32x^2 + 31\right)$

Vorbereitungen

$$f(x) = \tfrac{1}{25}\left(x^4 - 32x^2 + 31\right) = \tfrac{1}{25}\left(x^2 - 31\right)\left(x^2 - 1\right)$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{25}\left(4x^3 - 64x\right) = \frac{4x}{25}\left(x^2 - 16\right)$$

$$f''(x) = \tfrac{4}{25}\left(3x^2 - 16\right)$$

Wenn immer möglich faktorisieren; das erleichtert die Übersicht.

Definitionsbereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie

Symmetrisch zur y-Achse; nur gerade Exponenten von x.

Verhalten für $x \to \pm\infty$

$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$

Nullstellen

$$f(x) = \tfrac{1}{25}\left(x^4 - 32x^2 + 31\right) = \tfrac{1}{25}\left(x^2 - 31\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{31} \qquad x_{3,4} = \pm 1$

Falls die Faktorzerlegung nicht gelingt: siehe ➔ G: Gleichungen: Höhern Grades: Aufg. 1
Online | Offline

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$f'(x) = \frac{4x}{25}\left(x^2 - 16\right) = 0$$

$x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \pm 4$

Wendepunkte

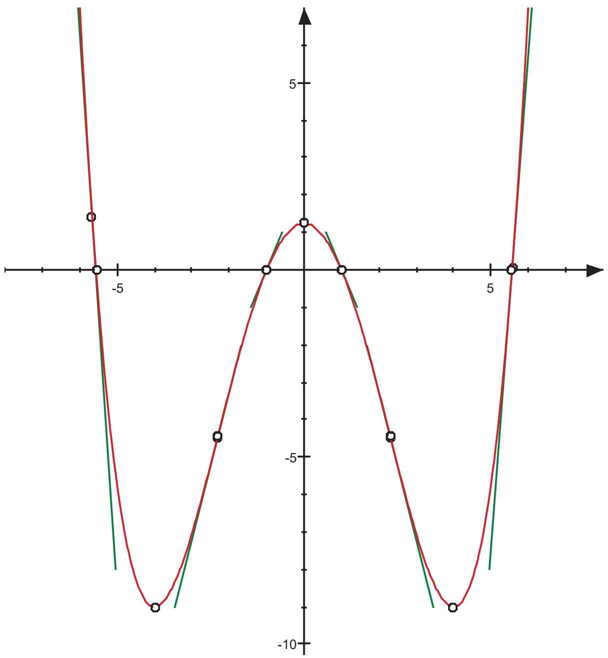
$$f''(x) = \tfrac{4}{25}\left(3x^2 - 16\right) = 0$$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$

Übersicht

x	f (x)	f′ (x)	
$\pm\sqrt{31} \approx \pm 5.6$	0	$\pm 2.5\sqrt{31} \approx 13.4$	Nullstellen
± 1	0	∓ 2.4	Nullstellen
0	1.24	0	Maximum
± 4	-9	0	Minima
$\pm\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2.3$	$\approx \pm 8.3$	$\approx \mp 3.1$	Wendepunkte

Graph



$y = \frac{x}{x^2 - 1}$

Vorbereitungen

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$ → A: Ableitungen: Quotientenregel: Aufg. 1
Online | Offline

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$ → A: Ableitungen: Kettenregel: Aufg. 4
Online | Offline

Definitionsbereich und Pole

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) = 0$$

Pole bei: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$, beide sind ungerade.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{1, -1\right\}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Grad des Nenners (2) ist grösser als der Grad des Zählers (1):
die x-Achse ist Asymptote: $y = 0$

Nullstellen

$x = 0$

Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!

Extrema

$x^2 + 1$ kann nicht 0 sein: keine Extrema.

Wendepunkt

$$2x(x^2 + 3) = 0$$
$$x = 0$$

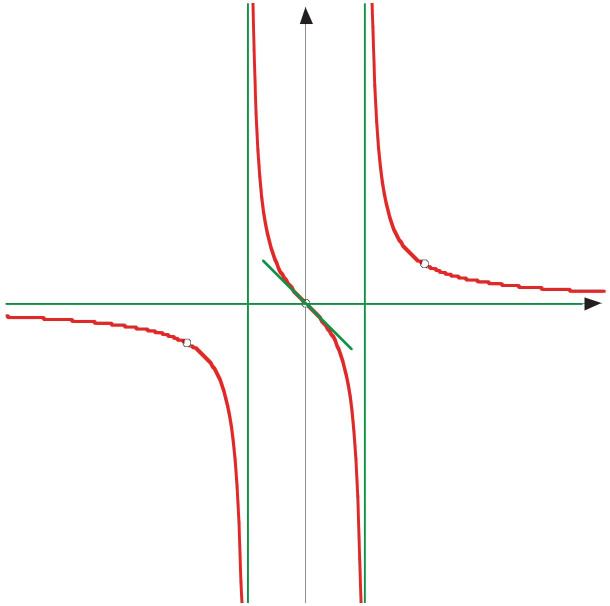
Zusammenstellung

Asymptoten: $x = 1$ $x = -1$ $y = 0$

Pole sind auch Asymptoten!

	x	f (x)	f'(x)
Nullstellen u. Wendepunkt	0	0	-1
Zusatzpunkt 1	2	$\frac{2}{3}$	
Zusatzpunkt 2	-2	$-\frac{2}{3}$	

Graph



$$y = \frac{12x - x^2 - 6}{x^2 + 3}$$ Ohne Wendepunkte.

Vorbereitungen

$$y = \frac{12x - x^2 - 6}{x^2+3} = -\frac{x^2 - 12x + 6}{x^2+3} = \frac{-x^2-3}{x^2+3} + \frac{12x-3}{x^2+3} = -1 + \frac{12x-3}{x^2+3}$$

$$y' = \frac{-6(2x^2 - x - 6)}{(x^2+3)^2}$$ $\rightarrow$ A: Ableitungen: Quotientenregel: Aufg. 2

Definitionsbereich und Pole

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner kann nicht Null sein!

Keine Pole
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Betrachten Sie $y = -1 + \frac{12x-3}{x^2+3}$
Der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ ist −1

Asymptote: $y = -1$, eine Parallele zur x-Achse

Nullstellen

$x^2 - 12x + 6 = 0$ Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!

$x_1 = 0.52, \ x_2 = 11.48$ (Taschenrechner!)

Extrema

$2x^2 - x - 6 = 0$

$x_1 = 2, \ x_2 = -1.5$ (Taschenrechner!)

Wendepunkte

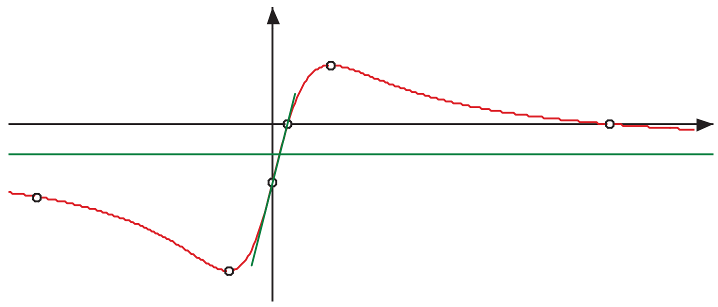
Die Funktion hat zwar 3 Wendepunkte; die zu lösende Gleichung 3. Grades kann nur mit bessern Taschenrechnern gelöst werden.

Zusammenstellung

Asymptote: $y = -1$

	x	f (x)	f'(x)
Nullstellen	0.52	0	
	11.48	0	
Maximum	2	2	−1
Minimum	−1.5	−5	
Zusatzpunkt 1	0	−2	4
Zusatzpunkt 2	-8	−2.5	

Graph



$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$

Vorbereitungen

$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} = x - 2 - \frac{1}{x}$ Die 2. Form eignet sich sehr gut zum Ableiten!

$y' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$

$y'' = -\frac{2}{x^3}$

Definitionsbereich und Pole

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

Pole bei: $x_1 = 0$, ungerade.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Wir betrachten die ausdividierte Form: $y = x - 2 - \frac{1}{x} \to x - 2$ für $x \to \infty$

Die Gerade $y = x - 2$ ist Asymptote.

Nullstellen

$x^2 - 2x - 1 = 0$ Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!

Nullstellen bei $x_1 = 2.4$, $x_2 = -0.4$ (Taschenrechner)

Exakt (von Hand): $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

Extrema

$x^2 + 1$ kann nicht 0 sein: keine Extrema.

Wendepunkt

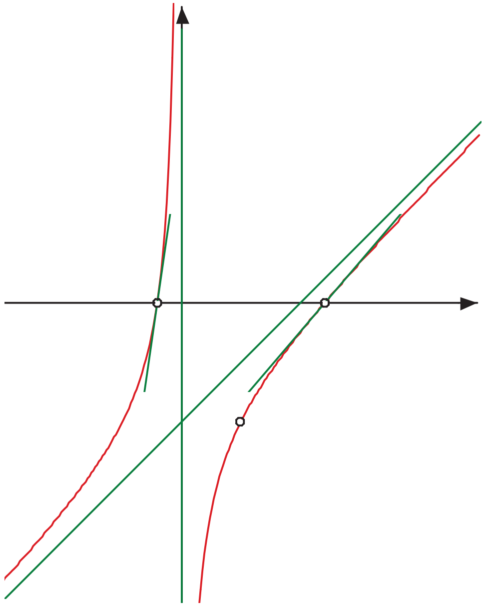
y" ist nie Null; kein Wendepunkt.

Zusammenstellung

Asymptoten: $y = x - 2$ $x = 0$ Pole sind auch Asymptoten!

	x	f (x)	f'(x)
Nullstellen	2.4	0	1.2
	−0.4	0	6.8
Zusatzpunkt	1	−2	

Graph



$$y = \frac{x^3 - 8}{4x}$$

Vorbereitungen

$$y = \frac{x^3-8}{4x} = \frac{x^3}{4x} - \frac{8}{4x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x}$$

Die 3. Form eignet sich sehr gut zum Ableiten!

$$y' = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^3+4}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{1}{2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

Definitionsbereich und Pole

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

Pol bei: $x_1 = 0$, ungerade.

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Wir betrachten die ausdividierte Form: $y = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} \to \frac{x^2}{4}$ für $x \to \infty$

Die Parabel $y = \frac{x^2}{4}$ ist Asymptote.

Das ist interessant, wenn Sie gut Parabeln zeichnen können.

Nullstellen

$$x^3 - 8 = 0$$
$$x^3 = 8$$
$$x = 2$$

Extremum

$$x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4} \approx -1.6$$

Wendepunkt

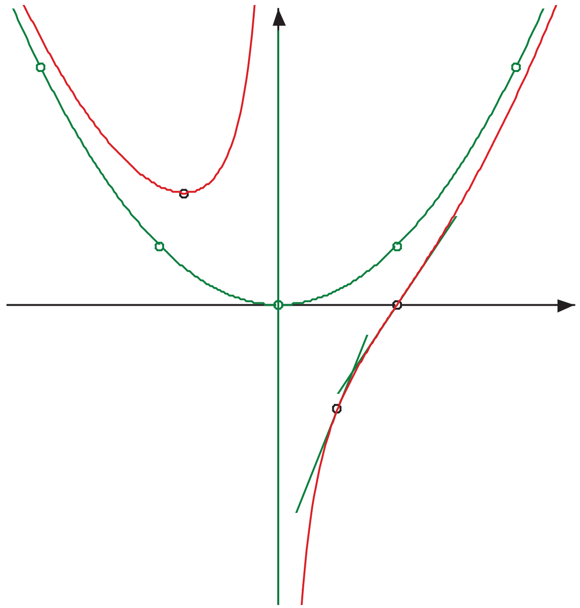
$x^3 - 8 = 0$; die eine Nullstelle ist auch Wendepunkt.

Zusammenstellung

Pol: $x = 0$

	x	f (x)	f'(x)
Nullstelle und Wendepunkt	2	0	1.5
Extremum	−1.6	1.9	
Zusatzpunkt	1	−1.75	2.5

Graph



Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Krümmungsverhalten)

[Matur TSME 02, Aufgabe 4]

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$y' = 3x^{-2} - 4x^{-3} = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y'' = -6x^{-3} + 12x^{-4} = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{12 - 6x}{x^4}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen: $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

Extrema: $3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}$ und $y = -\frac{1}{8}$

für $x < \frac{4}{3}$ ist y' negativ, für $x > \frac{4}{3}$ ist y' positiv: relatives Minimum

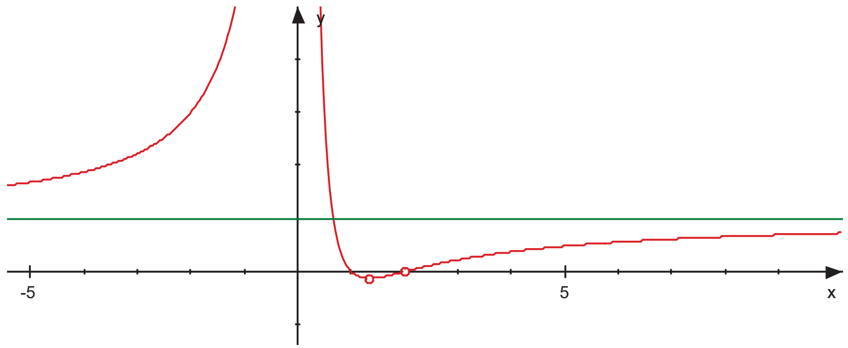
Wendepunkt: $12 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad W(2|0)$

Bis zum Wendepunkt weist die Kurve eine Linkskrümmung auf: $y'' < 0$

dann ergibt sich eine Rechtkrümmung.

Gerader Pol für x=0

Wagrechte Asymptote: $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad y = 1$



$y = \sqrt{4x-8}$

Vorbereitungen

$$y = \sqrt{4x-8}$$
$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x-8}}$$
$$y'' = -\frac{4}{\sqrt{(4x-8)^3}}$$

→ A: Ableitungen: Kettenregel. Aufg. 3
Online | Offline

Definitionsbereich

Sehr wichtig bei Wurzelfunktionen!

Der Radikand darf nicht negativ sein!

$$4x - 8 \geq 0$$
$$x \geq 2$$

$$\mathbb{D} = [2; \infty]$$

Nullstellen

$$y = \sqrt{4x-8} = 0$$
$$4x - 8 = 0$$
$$x = 2$$

Extrema und Wendepunkte

Weder y' noch y" kann 0 sein: weder Extrema noch Wendepunkte

Bitte nächste Seite beachten!

Verhalten am Rand des Definitionsbereichs

Sehr wichtig bei Wurzelfunktionen!

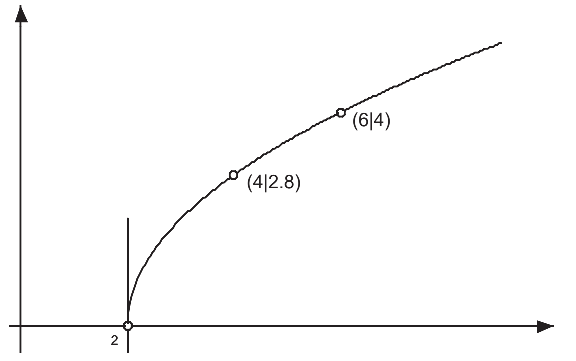
$f(2) = 0$

$f'(2)$ ist nicht definiert; wir setzen: $x = 2 + h$ ein:

$$f'(2+h) = \frac{2}{\sqrt{4(2+h)-8}} = \frac{2}{\sqrt{4h}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to \infty \text{ für } h \to 0$$

d.h. die Kurve hat an dieser Stelle eine senkrechte Tangente.

Graph



$y = 2x + \sqrt{25 - x^2}$ (ohne Wendepunkte)

Definitionsbereich

$$\begin{aligned} 25 - x^2 &\geq 0 \\ 25 &\geq x^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \left[-5;5\right]$$

Wichtig bei Wurzelgleichungen!

Ableitungen

$$y = 2x + \sqrt{25 - x^2}$$

$$y' = 2 - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

→ A: Ableitungen: Kettenregel Aufg. 2
Online | Offline

Nullstellen

$$y = 2x + \sqrt{25 - x^2} = 0$$

$$x = -\sqrt{5}$$

→ G: Gleichungen: Wurzelgleich.. Aufg. 2
Online | Offline

$$f'\left(-\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5}$$

Stellen mit waagrechten Tangenten

$$y' = 2 - \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$$

→ G: Gleichungen: Wurzelgleich.. Aufg. 3
Online | Offline

$$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad / \quad y = 4\sqrt{5} + \sqrt{25 - 20} = 4\sqrt{5} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Bitte nächste Seite beachten!

Randpunkte

$\left(5 \mid 10\right)$

$f'(5)$ ist nicht definiert:

$$f'(5 - h) = 2 - \frac{5 - h}{\sqrt{25 - (5 - h)^2}} == 2 - \frac{5 - h}{\sqrt{10h - h^2}} \to \infty \quad \text{für } h \to 0$$

$\left(-5 \mid -10\right)$

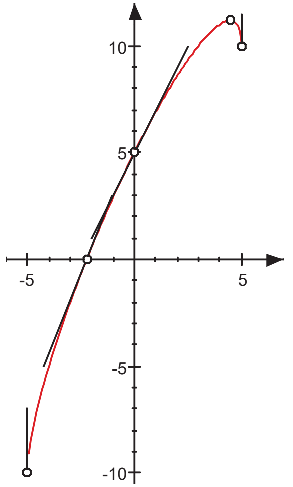
$f'(-5)$ ist nicht definiert:

$$f'(-5 + h) = 2 - \frac{-5 + h}{\sqrt{25 - (-5 + h)^2}} == 2 - \frac{-5 + h}{\sqrt{10h - h^2}} \to \infty \quad \text{für } h \to 0$$

Bei +h bzw. –h muss darauf geachtet werden, dass man innerhalb des Definitionsbereichs verbleibt!

Graph

Zusatzpunkt: $\left(0 \mid 5\right)$ $\quad f'(0) = 2$



Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$
(Definitionsbereich, Extrema, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs, Graph)

$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$

$$f'(x) = \tfrac{1}{4}\cdot 2(x-5)\cdot 1\cdot\sqrt{x} + \tfrac{1}{4}(x-5)^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2}{8\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2\sqrt{x}}{8x} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(4x+x-5)$$

$$= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(5x-5) = \frac{5(x-5)(x-1)\sqrt{x}}{8x}$$

Oder: Sie schreiben die gegebene Funktion um:

$$f(x) = \tfrac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x} = \tfrac{1}{4}(x^2-10x+25)\cdot x^{0.5} = \tfrac{1}{4}(x^{2.5}-10x^{1.5}+25x^{0.5})$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{4}(2.5x^{1.5}-15x^{0.5}+12.5x^{-0.5}) \quad \Big|\cdot\frac{x}{x}$$

$$= \tfrac{1}{4x}\left(\tfrac{5}{2}x^{2.5}-\tfrac{30}{2}x^{1.5}+\tfrac{25}{2}x^{0.5}\right) = \frac{x^{0.5}}{8x}(5x^2-30x+25)$$

$$= \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x^2-6x+5) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1)$$

Definiert ist die Funktion für $x \geq 0$.

Nullstellen bei: $x = 0$ und $x = 5$

Extrema: $(1|4)$ und $(5|0)$

Steigungsverhalten: wir klären die Vorzeichen von $f'(x) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1)$ ab.

Der Bruch ist im ganzen Definitionsbereich positiv.

Für $(x-5)(x-1)$ gilt:	$0 < x < 1$	$\Rightarrow$	$x-5<0$ und $x-1<0$	positiv, steigend
	$1 < x < 5$	$\Rightarrow$	$x-5<0$ und $x-1>0$	negativ, fallend
	$5 < x < \infty$	$\Rightarrow$	$x-5>0$ und $x-1>0$	positiv, steigend

Daraus ergibt sich: $(1|4)$ ist ein Maximum und $(5|0)$ ist ein Minimum

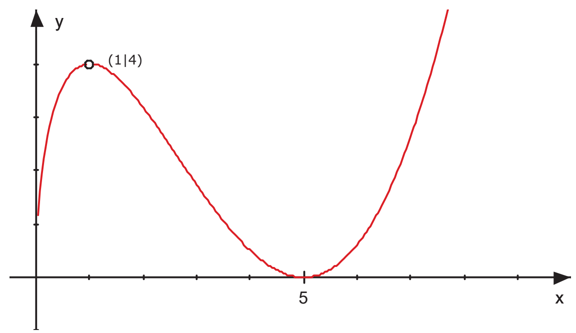
Verhalten am Rand:

$x = 0$: $y = 0$

in $f'(x) = \frac{1}{4}(2.5x^{1.5}-15x^{0.5}+12.5x^{-0.5})$ gehen für $x \to 0$ die ersten beiden Glieder gegen 0 und das dritte gegen unendlich; die Steigung ist senkrecht.

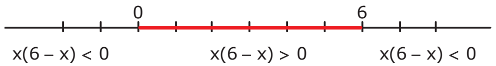
Für $x \to \infty$ werden sowohl der y-Wert als auch die Steigung beliebig gross.

Graph



$y = \sqrt{6x - x^2}$

$y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{x(6-x)}$ hat **Nullstellen** bei 0 und 6.



Setzen Sie in jedem Teil irgend-eine Zahl ein, z.B. –2, 3, 8

Die Funktion ist **definiert** im Bereich $[0;6]$

Ableitung:

$y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{x(6-x)}$

$$y' = \frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}$$

Kettenregel!

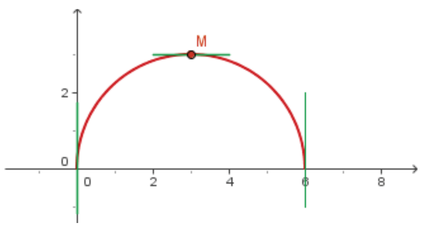
Extremum: $y' = 0 \;\Rightarrow\; 3 - x = 0 \;\Rightarrow\; x = 3,\; y = 3$

Randpunkte:

(0|0): für $x \to 0$ geht der Zähler von y' gegen 3, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

(6|0): für $x \to 6$ geht der Zähler von y' gegen -3, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

Graph:



ein Halbkreis!

Die zweite Ableitung ist sehr sehr aufwendig und kompliziert – und bringt nichts, es gibt keine Wendepunkte!

Geeignete Form der 1. Ableitung zum Weiterrechnen, vermeidet Doppelbrüche:

$$y' = \frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} = (3-x)(6x-x^2)^{-0.5}$$

$$y'' = -1\cdot(6x-x^2)^{-0.5} + (3-x)\cdot(-0.5)(6x-x^2)^{-1.5}\cdot(6-2x)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} - \frac{0.5(3-x)(6-2x)}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3} = -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{(3-x)(3-x)}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3} = -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{(3-x)^2}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3}$$

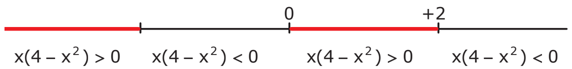
$$= -\frac{6-x^2}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3} + \frac{(3-x)^2}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3} = -\frac{9}{\left(\sqrt{6x-x^2}\right)^3}$$

$y = \sqrt{4x - x^3}$

$y = \sqrt{4x - x^3} = \sqrt{x(4 - x^2)}$

Nullstellen bei $0, \pm 2$

Definitionsbereich:



Setzen Sie in jedem Teil irgend-eine Zahl ein, z.B. –3, -1, 1, 3

$D =]-\infty; -2] \cup [0; 2]$

Ableitung und Extremum:

$$y' = \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

Die negative Lösung liegt nicht im Definitionsbereich;
Maximum in $\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{3} \middle| 1.755\right) \approx (1.155|1.755)$

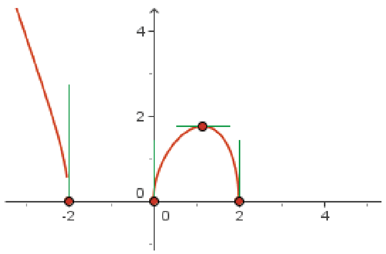
Randpunkte:

(-2|0): für $x \to -2$ geht der Zähler von y' gegen -8, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

(0|0): für $x \to 0$ geht der Zähler von y' gegen 4, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

(2|0): für $x \to 2$ geht der Zähler von y' gegen -8, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

Graph:



Wendepunkte:

Weglassen, die 2. Ableitung ist wieder sehr mühsam – und es gibt keine.

Für Ableitungsfreaks, Mathegenies und Masochisten:

$$y' = \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}}$$

$$y'' = \frac{-3x \cdot 2\sqrt{4x - x^3} - \dfrac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} \cdot (4 - 3x^2)}{\left(2\sqrt{4x - x^3}\right)^2} = 0$$

mit dem Nenner multiplizieren

$$-3x \cdot 2\sqrt{4x - x^3} - \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} \cdot (4 - 3x^2) = 0 \quad \Big|\cdot 2\sqrt{4x - x^3}$$

$$-12x(4x - x^3) - (4 - 3x)^2 = 0$$

$$-48x^2 + 12x^4 - 16 + 24x^2 - 9x^4 = 0$$

$$3x^4 - 24x^2 - 16 = 0$$

Zwei Lösungen: +2.94 ist nicht im Definitionsbereich

-2.94 ist keine Wendestelle, die Steigung der Kurve ist vorher und nachher negativ (-2.8 und –3 einsetzen)

$$y = \frac{\left(x^2 - 10x\right)\sqrt{x}}{10}$$

Definitionsbereich: $D = \left[0\,;\infty\right[$

Nullstellen:

$$(x^2 - 10x)\sqrt{x} = 0$$
$$x(x-10)\sqrt{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{Nullstellen bei 0 und 10}$$

Verhalten für x → : $y \to \infty$

Ableitung und Extrema:

$$y = \frac{\left(x^2 - 10x\right)\sqrt{x}}{10} = \frac{x^{2.5} - 10x^{1.5}}{10}$$

$$y' = \frac{2.5x^{1.5} - 15x^{0.5}}{10} = \frac{2.5x\sqrt{x} - 15\sqrt{x}}{10} = \frac{2.5\sqrt{x}\cdot(x-6)}{10} = 0$$

Ein Minimum bei (6|-5.88), im Nullpunkt eine waagrechte Tangente.

Steigung der Kurve in der andern Schnittstelle $x = 10$: $f'(10) = 3.16$

Wendepunkt:

$$y' = \frac{\sqrt{x}\cdot(x-6)}{4} = \frac{x^{1.5} - 6x^{0.5}}{4}$$

$$y'' = \frac{1.5x^{0.5} - 3x^{-0.5}}{4} = 0$$

$$1.5x^{0.5} - 3x^{-0.5} = 0 \qquad \Big|\cdot x^{0.5}$$
$$1.5x - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 2, \quad W\left(2\middle|-2.26\right)$$

Graph: