

$$f(x) = \frac{1}{3}(4x^3 - x^4)$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{1}{3}(4x^3 - x^4) = \frac{x^3}{3}(4 - x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(12x^2 - 4x^3) = \frac{4x^2}{3}(3 - x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}(24x - 12x^2) = \frac{12x}{3}(2 - x) = 4x(2 - x)$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

DEFINITIONSBEREICH: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

SYMMETRIE: KEINE ERKENNBARE

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

Es genügt x^3 zu untersuchen!

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{1}{3}(4x^3 - x^4) = \frac{x^3}{3}(4 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{1}{3}(12x^2 - 4x^3) = \frac{4x^2}{3}(3 - x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

WENDEPUNKTE

$$f''(x) = \frac{1}{3}(24x - 12x^2) = 4x(2 - x) = 0$$

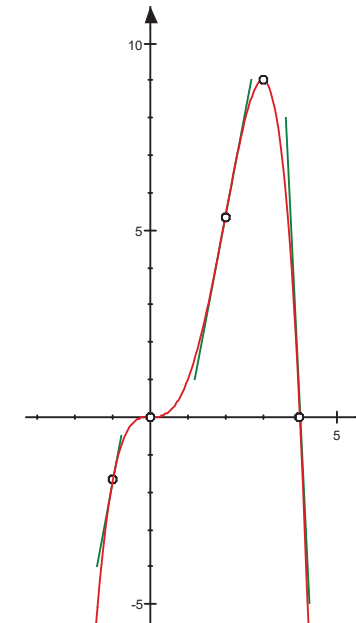
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	0	Terrassenpunkt und Nullstelle
4	0	$-21\frac{1}{3}$	Nullstelle
3	9	0	Maximum
2	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Wendepunkt
-1	$-1\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

GRAPH



$$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$$

Berechnen Sie zusätzlich den Funktionswert und die Steigung. Lassen Sie dafür die Steigung in den nicht ganzzahligen Nullstellen weg.

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 - 6x - 9) = \frac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = \frac{3}{5}(x - 3)(x + 1)$$

$$f''(x) = \frac{3}{5}(2x - 2) = \frac{6}{5}(x - 1)$$

Die Zerlegung der 1. Terms ist nicht ganz einfach; die Untersuchung der Nullstellen wird deshalb auf später verschoben.

DEFINITIONSBEREICH

$$ID = \mathbb{R}$$

SYMMETRIE

Keine erkennbare

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

Es genügt x^3 zu untersuchen!

NULLSTELLEN

Diese Gleichung 3. Grades ist aufwendiger zu lösen; wir verschieben das Traktandum auf später.

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = \frac{3}{5}(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Selbstverständlich können Sie auch die quadratische Gleichung $\frac{3}{5}(x^2 - 2x - 3) = 0$ auflösen, wenn Sie die Faktorzerlegung nicht auf Anhieb finden.

WENDEPUNKTE

$$f''(x) = \frac{6}{5}(x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

NULLSTELLEN

Wenn wir die gefundenen Punkte einzeichnen, dann sieht man leicht, dass zwischen 0 und 1 eine nicht ganzzahlige Nullstelle liegt und deshalb auch eine zweite nicht ganzzahlig ist. Man kann aber auch vermuten, dass -2 eine Nullstelle ist, und das durch Einsetzen verifizieren. Mit Polynomdivision erhalten wir:

$$f(x) = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2) = \frac{1}{5}(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$$

und die Nullstellen: $x_1 = -2, x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

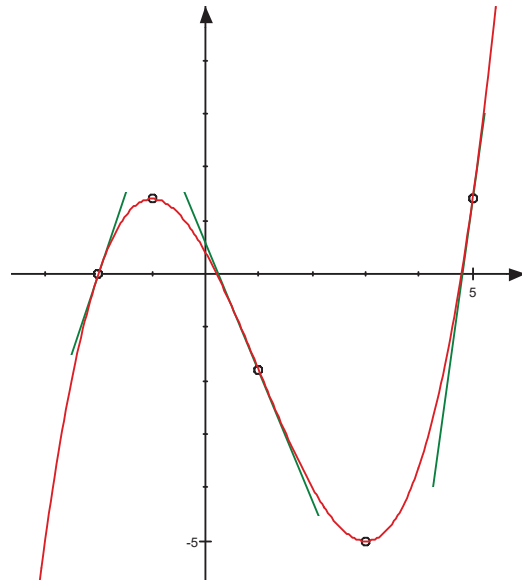
G: Gleichungen: höhern Grades. Aufg. 2
[Online](#) | [Offline](#)

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
-1	1.4	0	Extremum
3	-5	0	Extremum
1	-1.8	-2.4	Wendepunkt
5	1.4	7.2	Zusatzpunkt
-2	0	3	Nullstelle
	0	---	Nullstelle
	0	---	Nullstelle

Beim Zeichnen des Graphen zeigt sich, dass ein zusätzlicher Punkt nützlich wäre.

GRAPH



$$f(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) \quad \text{Zusätzlich: Wert und Steigung für } x=1 \text{ und } x=4$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) = \frac{x^2}{3}(x^2 - 8x + 18)$$

Wenn immer möglich faktorisieren; das erleichtert die Übersicht.

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4x^3 - 24x^2 + 36x) = \frac{4x}{3}(x^2 - 6x + 9) = \frac{4x}{3}(x-3)^2$$

$$f''(x) = \frac{1}{3}(12x^2 - 48x + 36) = \frac{12}{3}(x^2 - 4x + 3) = 4(x-3)(x-1)$$

DEFINITIONSBEREICH $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

SYMMETRIE Keine erkennbare

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

Es genügt x^4 zu untersuchen!

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^4 - 8x^3 + 18x^2) = \frac{x^2}{3}(x^2 - 8x + 18) = 0 \quad x=0$$

Einzige Lösung; die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{4x}{3}(x-3)^2 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

WENDEPUNKTE

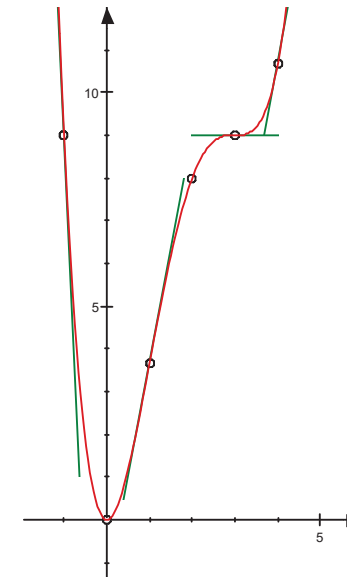
$$f''(x) = 4(x-3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 3$$

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	0	Nullstelle und Minimum
3	9	0	Terrassenpunkt
1	$3\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Wendepunkt
4	$10\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt
-1	9	$-21\frac{1}{3}$	Zusatzpunkt

GRAPH



$$f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{2}$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{2} = \frac{x^2(6 - x^2)}{2}$$

$$f'(x) = \frac{12x - 4x^3}{2} = \frac{4x(3 - x^2)}{2} = 2x(3 - x^2)$$

$$f''(x) = \frac{12 - 12x^2}{2} = 6(1 - x^2)$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

DEFINITIONSBEREICH $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

SYMMETRIE

Symmetrisch zur y-Achse; es hat nur gerade Exponenten.

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

Es genügt $-x^4$ zu untersuchen!

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{x^2(6 - x^2)}{2} = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{6}$$

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = 2x(3 - x^2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

WENDEPUNKTE

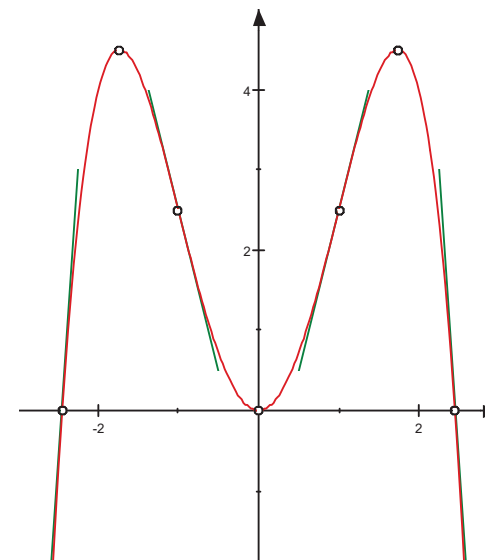
$$f''(x) = 6(1 - x^2) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	0	Minimum und Nullstelle
$\pm\sqrt{6}$	0	$f'(\pm\sqrt{6}) = \pm 2\sqrt{6}(3 - 6) = \mp 6\sqrt{6}$	Nullstellen
$\pm\sqrt{3}$	4.5	0	Maxima
± 1	2.5	4	Wendepunkte

GRAPH



$$f(x) = \frac{12x - x^3}{4}$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{12x - x^3}{4} = \frac{x(12 - x^2)}{4}$$

$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{4} = \frac{3(4 - x^2)}{4}$$

$$f''(x) = \frac{3(-2x)}{4} = -\frac{3x}{2}$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

DEFINITIONSBEREICH $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

SYMMETRIE

Symmetrisch zum Ursprung. Die Gleichung weist nur ungerade Exponenten auf.

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

Es genügt $-x^3$ zu untersuchen!

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{x(12 - x^2)}{4} = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{4} = \frac{3(4 - x^2)}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

WENDEPUNKTE

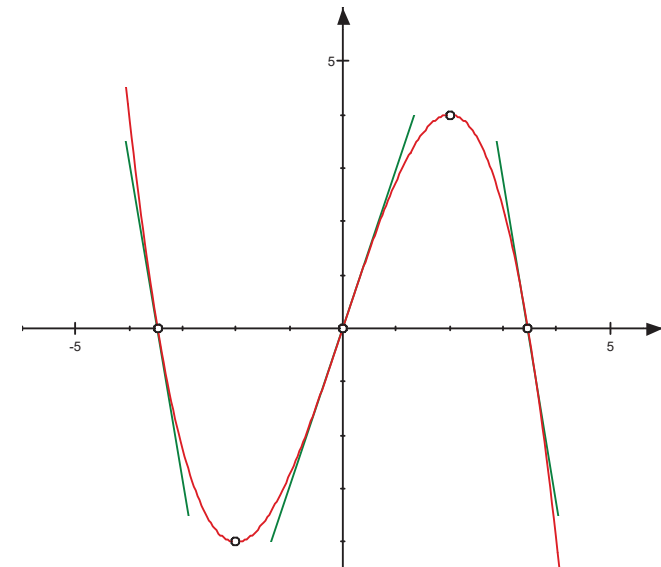
$$f''(x) = -\frac{3x}{2} = 0$$

$$x = 0$$

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
0	0	3	Wendepunkt und Nullstelle
$\pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.5$	0	-6	Nullstellen
2	4	0	Maximum
-2	-4	0	Minimum

GRAPH



$$f(x) = \frac{1}{25}(x^4 - 32x^2 + 31)$$

VORBEREITUNGEN

$$f(x) = \frac{1}{25}(x^4 - 32x^2 + 31) = \frac{1}{25}(x^2 - 31)(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{25}(4x^3 - 64x) = \frac{4x}{25}(x^2 - 16)$$

$$f''(x) = \frac{4}{25}(3x^2 - 16)$$

Wenn immer möglich faktorisieren;
das erleichtert die Übersicht.

DEFINITIONSBEREICH ID = IR

SYMMETRIE

Symmetrisch zur y-Achse; nur gerade Exponenten von x.

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$$

NULLSTELLEN

$$f(x) = \frac{1}{25}(x^4 - 32x^2 + 31) = \frac{1}{25}(x^2 - 31)(x^2 - 1) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{31} \quad x_{3,4} = \pm 1$$

Falls die Faktorzerlegung nicht gelingt: siehe →

G: Gleichungen: Höhern Grades:
Aufg. 1
[Online](#) | [Offline](#)

STELLEN MIT WAAGRECHTEN TANGENTEN

$$f'(x) = \frac{4x}{25}(x^2 - 16) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 4$$

WENDEPUNKTE

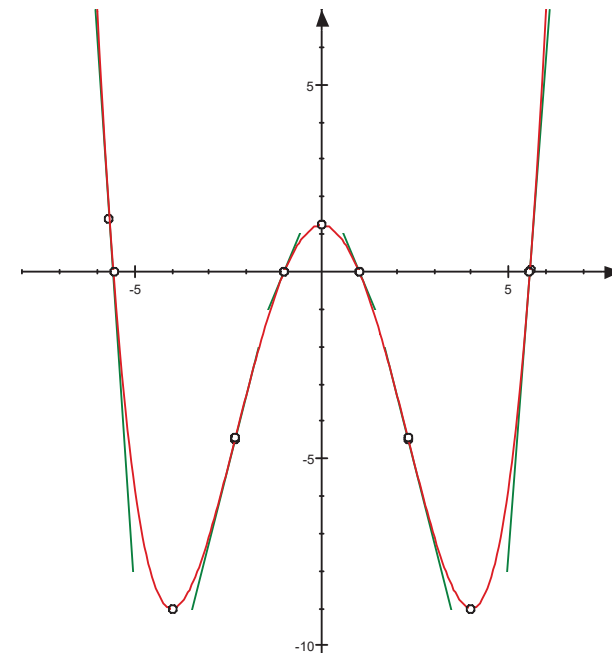
$$f''(x) = \frac{4}{25}(3x^2 - 16) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$$

ÜBERSICHT

x	f(x)	f'(x)	
$\pm\sqrt{31} \approx \pm 5.6$	0	$\pm 2.5\sqrt{31} \approx 13.4$	Nullstellen
± 1	0	∓ 2.4	Nullstellen
0	1.24	0	Maximum
± 4	-9	0	Minima
$\pm\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \pm 2.3$	$\approx \pm 8.3$	$\approx \mp 3.1$	Wendepunkte

GRAPH



$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

VORBEREITUNGEN

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

→ A: Ableitungen: Quotientenregel: Aufg. 1
[Online](#) | [Offline](#)

→ A: Ableitungen: Kettenregel: Aufg. 4
[Online](#) | [Offline](#)

DEFINITIONSBEREICH UND POLE

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) = 0$$

Pole bei: $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$, beide sind ungerade.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm \infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Grad des Nenners (2) ist grösser als der Grad des Zählers (1):
 die x-Achse ist Asymptote: $y = 0$

NULLSTELLEN

$$x = 0$$

Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!

EXTREMA

$x^2 + 1$ kann nicht 0 sein: keine Extrema.

WENDEPUNKT

$$2x(x^2 + 3) = 0$$

$$x = 0$$

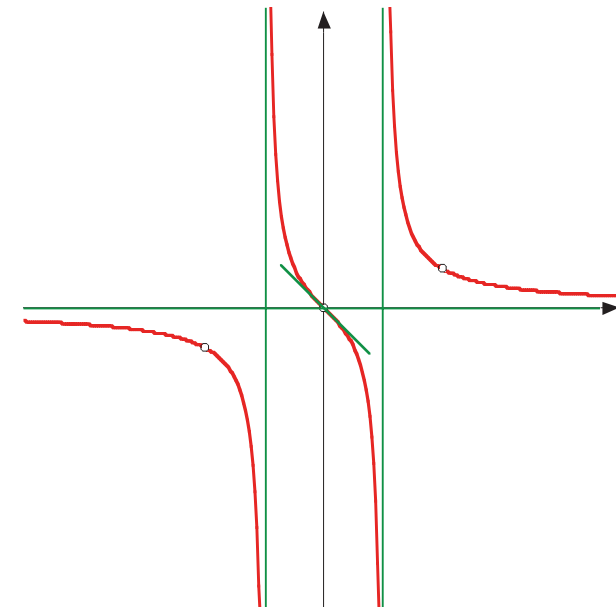
ZUSAMMENSTELLUNG

Asymptoten: $x = 1$ $x = -1$ $y = 0$

Pole sind auch Asymptoten!

	x	f(x)	f'(x)
Nullstellen u. Wendepunkt	0	0	-1
Zusatzpunkt 1	2	$\frac{2}{3}$	
Zusatzpunkt 2	-2	$-\frac{2}{3}$	

GRAPH



$$y = \frac{12x - x^2 - 6}{x^2 + 3} \quad \text{Ohne Wendepunkte.}$$

VORBEREITUNGEN

$$y = \frac{12x - x^2 - 6}{x^2 + 3} = -\frac{x^2 - 12x + 6}{x^2 + 3} = \frac{-x^2 - 3}{x^2 + 3} + \frac{12x - 3}{x^2 + 3} = -1 + \frac{12x - 3}{x^2 + 3}$$

$$y' = \frac{-6(2x^2 - x - 6)}{(x^2 + 3)^2} \quad \rightarrow \quad \text{A: Ableitungen: Quotientenregel: Aufg. 2}$$

DEFINITIONSBEREICH UND POLE

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner kann nicht Null sein!

Keine Pole
 $D = \mathbb{R}$

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Betrachten Sie $y = -1 + \frac{12x - 3}{x^2 + 3}$

Der Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$ ist -1

Asymptote: $y = -1$, eine Parallele zur x-Achse

NULLSTELLEN

$$x^2 - 12x + 6 = 0 \quad \text{Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!}$$

$$x_1 = 0.52, \quad x_2 = 11.48 \quad (\text{Taschenrechner!})$$

EXTREMA

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1.5 \quad (\text{Taschenrechner!})$$

WENDEPUNKTE

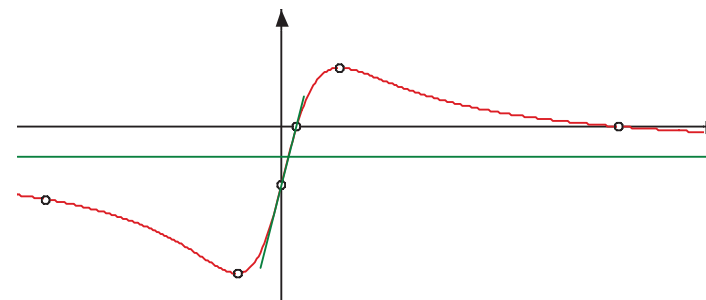
Die Funktion hat zwar 3 Wendepunkte; die zu lösende Gleichung 3. Grades kann nur mit besseren Taschenrechnern gelöst werden.

ZUSAMMENSTELLUNG

Asymptote: $y = -1$

	x	f(x)	f'(x)
Nullstellen	0.52	0	
	11.48	0	
Maximum	2	2	-1
Minimum	-1.5	-5	
Zusatzpunkt 1	0	-2	4
Zusatzpunkt 2	-8	-2.5	

GRAPH



$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x}$$

VORBEREITUNGEN

$$y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} = x - 2 - \frac{1}{x}$$

Die 2. Form eignet sich sehr gut zum Ableiten!

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3}$$

DEFINITIONSBEREICH UND POLE

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

Pole bei: $x_1 = 0$, ungerade.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Wir betrachten die ausdividierte Form: $y = x - 2 - \frac{1}{x} \rightarrow x - 2$ für $x \rightarrow \infty$

Die Gerade $y = x - 2$ ist Asymptote.

NULLSTELLEN

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

Ein Bruch ist nur dann Null, wenn der Zähler Null ist!

Nullstellen bei $x_1 = 2.4$, $x_2 = -0.4$ (Taschenrechner)

$$\text{Exakt (von Hand): } x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

EXTREMA

$x^2 + 1$ kann nicht 0 sein: keine Extrema.

WENDEPUNKT

y'' ist nie Null; kein Wendepunkt.

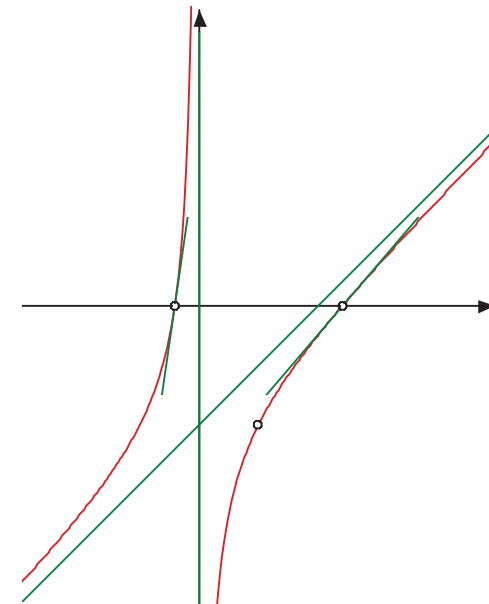
ZUSAMMENSTELLUNG

Asymptoten: $y = x - 2$ $x = 0$

Pole sind auch Asymptoten!

	x	f(x)	f'(x)
Nullstellen	2.4	0	1.2
	-0.4	0	6.8
Zusatzpunkt	1	-2	

GRAPH



$$y = \frac{x^3 - 8}{4x}$$

VORBEREITUNGEN

$$y = \frac{x^3 - 8}{4x} = \frac{x^3}{4x} - \frac{8}{4x} = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x}$$

Die 3. Form eignet sich sehr gut zum Ableiten!

$$y' = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^3 + 4}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{1}{2} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

DEFINITIONSBEREICH UND POLE

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Der Nenner darf nicht Null sein!

Pol bei: $x_1 = 0$, ungerade.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

VERHALTEN FÜR $x \rightarrow \pm\infty$

Sehr wichtig bei gebrochenen Funktionen!

Wir betrachten die ausdividierte Form: $y = \frac{x^2}{4} - \frac{2}{x} \rightarrow \frac{x^2}{4}$ für $x \rightarrow \infty$

Die Parabel $y = \frac{x^2}{4}$ ist Asymptote.

Das ist interessant, wenn Sie gut Parabeln zeichnen können.

NULLSTELLEN

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= 0 \\ x^3 &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

EXTREMUM

$$x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4} \approx -1.6$$

WENDEPUNKT

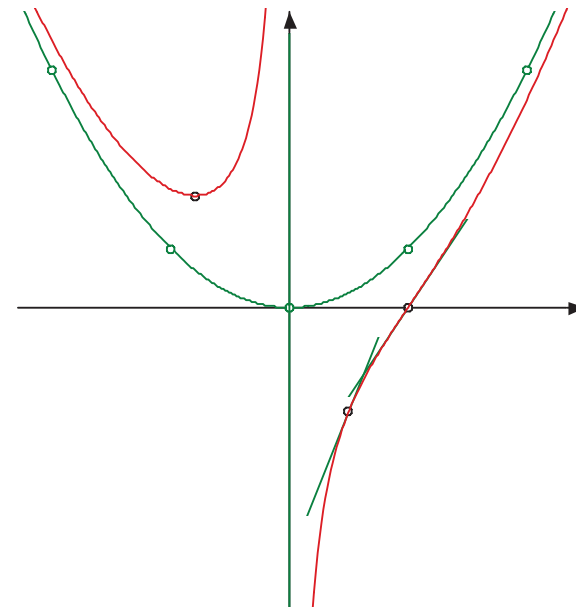
$x^3 - 8 = 0$; die eine Nullstelle ist auch Wendepunkt.

ZUSAMMENSTELLUNG

Pol: $x = 0$

	x	f(x)	f'(x)
Nullstelle und Wendepunkt	2	0	1.5
Extremum	-1.6	1.9	
Zusatzpunkt	1	-1.75	2.5

GRAPH



Diskutieren und skizzieren Sie die Funktion $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$.

(Definitionsbereich, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Asymptoten, Krümmungsverhalten)

[Matur TSME 02, Aufgabe 4]

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 - 3x^{-1} + 2x^{-2}$$

$$y' = 3x^{-2} - 4x^{-3} = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$y'' = -6x^{-3} + 12x^{-4} = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{12 - 6x}{x^4}$$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen: $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$

Extrema: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ und $y = -\frac{1}{8}$

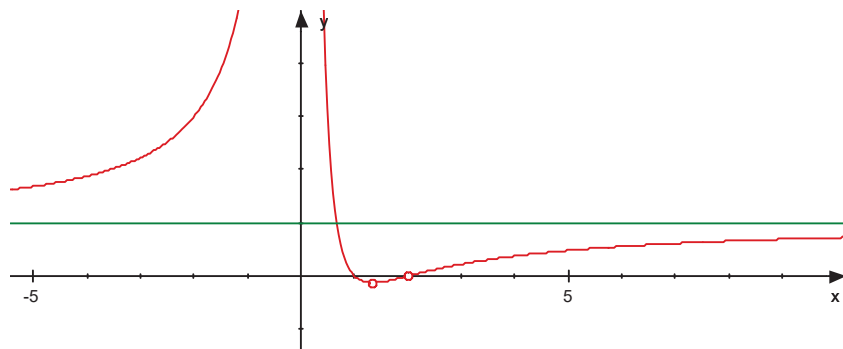
für $x < \frac{4}{3}$ ist y' negativ, für $x > \frac{4}{3}$ ist y' positiv: relatives Minimum

Wendepunkt: $12 - 6x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow W(2|0)$

Bis zum Wendepunkt weist die Kurve eine Linkskrümmung auf: $y'' < 0$
dann ergibt sich eine Rechtskrümmung.

Gerader Pol für $x=0$

Wagrechte Asymptote: $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty \Rightarrow y = 1$



$$y = \sqrt{4x - 8}$$

VORBEREITUNGEN

$$y = \sqrt{4x - 8}$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x - 8}}$$

$$y'' = -\frac{4}{\sqrt{(4x - 8)^3}}$$

→ A: Ableitungen: Kettenregel. Aufg. 3
[Online](#) | [Offline](#)

DEFINITIONSBEREICH

Der Radikand darf nicht negativ sein!

$$4x - 8 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$\mathbb{D} = [2; \infty]$$

NULLSTELLEN

$$y = \sqrt{4x - 8} = 0$$

$$4x - 8 = 0$$

$$x = 2$$

EXTREMA UND WENDEPUNKTE

Weder y' noch y'' kann 0 sein: weder Extrema noch Wendepunkte

Bitte nächste Seite beachten!

VERHALTEN AM RAND DES DEFINITIONSBEREICHS

Sehr wichtig bei Wurzelfunktionen!

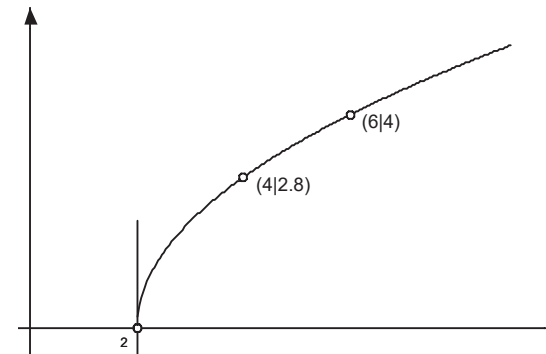
$$f(2) = 0$$

$f'(2)$ ist nicht definiert; wir setzen: $x = 2 + h$ ein:

$$f'(2 + h) = \frac{2}{\sqrt{4(2 + h) - 8}} = \frac{2}{\sqrt{4h}} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow \infty \text{ für } h \rightarrow 0$$

d.h. die Kurve hat an dieser Stelle eine senkrechte Tangente.

GRAPH



Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$
 (Definitionsbereich, Extrema, Verhalten am Rand des Definitionsbereichs, Graph)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot 2(x-5) \cdot 1 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{4}(x-5)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2}{8\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{2} + \frac{(x-5)^2\sqrt{x}}{8x} = \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(4x+x-5) \\ &= \frac{(x-5)\sqrt{x}}{8x}(5x-5) = \frac{5(x-5)(x-1)\sqrt{x}}{8x} \end{aligned}$$

Oder: Sie schreiben die gegebene Funktion um:

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)^2\sqrt{x} = \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 25) \cdot x^{0.5} = \frac{1}{4}(x^{2.5} - 10x^{1.5} + 25x^{0.5})$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}(2.5x^{1.5} - 15x^{0.5} + 12.5x^{-0.5}) \quad \Big| \cdot \frac{x}{x} \\ &= \frac{1}{4x} \left(\frac{5}{2}x^{2.5} - \frac{30}{2}x^{1.5} + \frac{25}{2}x^{0.5} \right) = \frac{x^{0.5}}{8x}(5x^2 - 30x + 25) \\ &= \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x^2 - 6x + 5) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1) \end{aligned}$$

Definiert ist die Funktion für $x \geq 0$.

Nullstellen bei: $x = 0$ und $x = 5$

Extrema: $(1|4)$ und $(5|0)$

Steigungsverhalten: wir klären die Vorzeichen von $f'(x) = \frac{5\sqrt{x}}{8x}(x-5)(x-1)$ ab.

Der Bruch ist im ganzen Definitionsbereich positiv.

Für $(x-5)(x-1)$ gilt:

$0 < x < 1$	\Rightarrow	$x-5 < 0$ und $x-1 < 0$	positiv, steigend
$1 < x < 5$	\Rightarrow	$x-5 < 0$ und $x-1 > 0$	negativ, fallend
$5 < x < \infty$	\Rightarrow	$x-5 > 0$ und $x-1 > 0$	positiv, steigend

Daraus ergibt sich: $(1|4)$ ist ein Maximum und $(5|0)$ ist ein Minimum

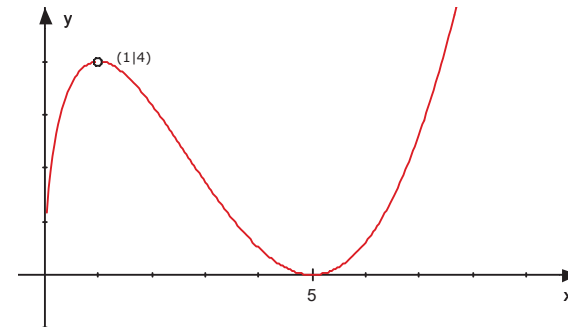
Verhalten am Rand:

$$x = 0 : y = 0$$

in $f'(x) = \frac{1}{4}(2.5x^{1.5} - 15x^{0.5} + 12.5x^{-0.5})$ gehen für $x \rightarrow 0$ die ersten beiden Glieder gegen 0 und das dritte gegen unendlich; die Steigung ist senkrecht.

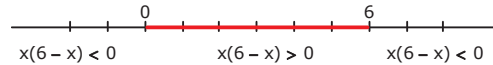
Für $x \rightarrow \infty$ werden sowohl der y-Wert als auch die Steigung beliebig gross.

Graph



$$y = \sqrt{6x - x^2}$$

$y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{x(6-x)}$ hat **Nullstellen** bei 0 und 6.



Setzen Sie in jedem Teil irgend-
eine Zahl ein, z.B. -2, 3, 8

Die Funktion ist **definiert** im Bereich $[0;6]$

Ableitung:

$$y = \sqrt{6x - x^2} = \sqrt{x(6-x)}$$

$$y' = \frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}}$$

Kettenregel!

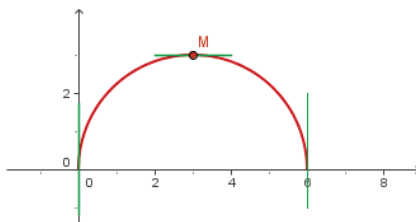
Extremum: $y' = 0 \Rightarrow 3-x = 0 \Rightarrow x = 3, y = 3$

Randpunkte:

(0|0): für $x \rightarrow 0$ geht der Zähler von y' gegen 3, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

(6|0): für $x \rightarrow 6$ geht der Zähler von y' gegen -3, der Nenner gegen 0;
also geht die Steigung y' gegen unendlich,
die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

Graph:



ein Halbkreis!

Die zweite Ableitung ist sehr sehr aufwendig und kompliziert – und bringt nichts, es gibt keine Wendepunkte!

Geeignete Form der 1. Ableitung zum Weiterrechnen, vermeidet Doppelbrüche:

$$y' = \frac{6-2x}{2\sqrt{6x-x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} = (3-x)(6x-x^2)^{-0.5}$$

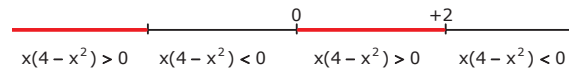
$$\begin{aligned} y'' &= -1 \cdot (6x-x^2)^{-0.5} + (3-x) \cdot (-0.5)(6x-x^2)^{-1.5} \cdot (6-2x) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} - \frac{0.5(3-x)(6-2x)}{(\sqrt{6x-x^2})^3} = -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{(3-x)(3-x)}{(\sqrt{6x-x^2})^3} = -\frac{1}{\sqrt{6x-x^2}} + \frac{(3-x)^2}{(\sqrt{6x-x^2})^3} \\ &= -\frac{6-x^2}{(\sqrt{6x-x^2})^3} + \frac{(3-x)^2}{(\sqrt{6x-x^2})^3} = -\frac{9}{(\sqrt{6x-x^2})^3} \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{4x - x^3}$$

$$y = \sqrt{4x - x^3} = \sqrt{x(4 - x^2)}$$

Nullstellen bei $0, \pm 2$

Definitionsbereich:



Setzen Sie in jedem Teil irgend-eine Zahl ein, z.B. $-3, -1, 1, 3$

$$D =]-\infty; -2] \cup [0; 2]$$

Ableitung und Extremum:

$$y' = \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} = 0 \Rightarrow 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3}$$

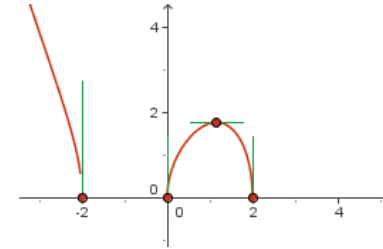
Die negative Lösung liegt nicht im Definitionsbereich;

Maximum in $(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} | 1.755) \approx (1.155 | 1.755)$

Randpunkte:

- $(-2|0)$: für $x \rightarrow -2$ geht der Zähler von y' gegen -8 , der Nenner gegen 0 ; also geht die Steigung y' gegen unendlich, die Kurve hat eine senkrechte Tangente.
- $(0|0)$: für $x \rightarrow 0$ geht der Zähler von y' gegen 4 , der Nenner gegen 0 ; also geht die Steigung y' gegen unendlich, die Kurve hat eine senkrechte Tangente.
- $(2|0)$: für $x \rightarrow 2$ geht der Zähler von y' gegen -8 , der Nenner gegen 0 ; also geht die Steigung y' gegen unendlich, die Kurve hat eine senkrechte Tangente.

Graph:



Wendepunkte:

Weglassen, die 2. Ableitung ist wieder sehr mühsam – und es gibt keine.

Für Ableitungsfreaks, Mathegenies und Masochisten:

$$y' = \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}}$$

$$y'' = \frac{-3x \cdot 2\sqrt{4x - x^3} - \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} \cdot (4 - 3x^2)}{(2\sqrt{4x - x^3})^2} = 0$$

mit dem Nenner multiplizieren

$$-3x \cdot 2\sqrt{4x - x^3} - \frac{4 - 3x^2}{2\sqrt{4x - x^3}} \cdot (4 - 3x^2) = 0 \quad | \cdot 2\sqrt{4x - x^3}$$

$$-12x(4x - x^3) - (4 - 3x^2)^2 = 0$$

$$-48x^2 + 12x^4 - 16 + 24x^2 - 9x^4 = 0$$

$$3x^4 - 24x^2 - 16 = 0$$

- Zwei Lösungen: $+2.94$ ist nicht im Definitionsbereich
 -2.94 ist keine Wendestelle, die Steigung der Kurve ist vorher und nachher negativ (-2.8 und -3 einsetzen)

$$y = \frac{(x^2 - 10x)\sqrt{x}}{10}$$

Definitionsbereich: $D = [0; \infty[$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} (x^2 - 10x)\sqrt{x} &= 0 \\ x(x-10)\sqrt{x} &= 0 \quad \Rightarrow \text{Nullstellen bei 0 und 10} \end{aligned}$$

Verhalten für $x \rightarrow \infty$: $y \rightarrow \infty$

Ableitung und Extrema:

$$y = \frac{(x^2 - 10x)\sqrt{x}}{10} = \frac{x^{2.5} - 10x^{1.5}}{10}$$

$$y' = \frac{2.5x^{1.5} - 15x^{0.5}}{10} = \frac{2.5x\sqrt{x} - 15\sqrt{x}}{10} = \frac{2.5\sqrt{x} \cdot (x - 6)}{10} = 0$$

Ein Minimum bei (6|-5.88), im Nullpunkt eine waagrechte Tangente.

Steigung der Kurve in der andern Schnittstelle $x = 10$: $f'(10) = 3.16$

Wendepunkt:

$$y' = \frac{\sqrt{x} \cdot (x - 6)}{4} = \frac{x^{1.5} - 6x^{0.5}}{4}$$

$$y'' = \frac{1.5x^{0.5} - 3x^{-0.5}}{4} = 0$$

$$\begin{aligned} 1.5x^{0.5} - 3x^{-0.5} &= 0 & \left| \cdot x^{0.5} \right. \\ 1.5x - 3 &= 0 & \Rightarrow x = 2, \quad W(2|-2.26) \end{aligned}$$

Graph:

