**Aufgaben zur Binomial- und Normalverteilung**

Bei den Aufgaben 1-7 handelt es sich um **binomialverteilte Zufallsgrößen**, die näherungsweise mit der Normalverteilung berechnet werden.

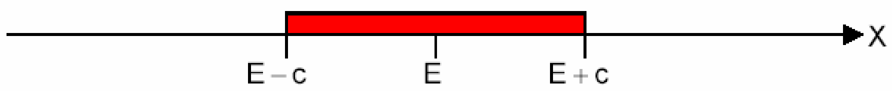
1. Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit n = 250 und p = 0,3. Berechne P(X=65), P(X=80).
2. Ein Würfel trägt 3 Einser, 2 Zweier und eine Sechs. Er wird 1000 mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
   (a) genau 450 Einser (b) genau 300 Zweier
   (c) genau 170 Sechsen (d) 800 mal keine Sechs?
3. Bei einer Meinungsumfrage werden 500 Personen befragt. Zum Zeitpunkt der Umfrage sind 30 % der Bevölkerung Anhänger der Partei A. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Umfrage zwischen 28% und 32% der Befragten Anhänger der Partei A sind?
4. Ein Drittel aller Ehepaare sind im Mittel Kinderlos. X sei die Anzahl der kinderlosen Paare unter 120 zufällig ausgewählten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich darunter
   a) nicht mehr als 48 kinderlose Paare,
   b) mehr als 30 aber höchstes 50 kinderlose Ehepaare?
5. Ein dressiertes Versuchstier betätigt auf ein Lichtsignal hin einen Hebel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$. Dieses Signal wird 72 mal gegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Versuchstier dabei
   a) den mindestens Hebel 50 mal,
   b) mindestens 40 und höchstens 60 mal betätigt?
6. 1968 hatte die Bundesrepublik Deutschland 60 184 000 Einwohner. Darunter waren 28 558 000 männlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) unter 100 Personen höchstens 50 Frauen sind
   b) mindestens 40 und höchstens 60 Frauen sind?
7. Zwei Maschinen produzieren Einzelteile A1 und A2 für den Zusammenbau eines Gerätes. Dieses arbeitet nur dann einwandfrei, wenn beide Teile in Ordnung sind. Es ist bekannt, dass beide Maschinen unabhängig voneinander 5 % Ausschuss produzieren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeiten unter 1000 zusammengebauten Geräten mindestens 950 einwandfrei?

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf **normalverteilte** Größen.

8. Ein Automat produziert Schrauben. 10 % der Produktion sind unbrauchbar. Aus der Produktion werden zufällig 400 Schrauben ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter höchstens 55 unbrauchbare?
9. Eine Maschine produziert Scheiben mit einem Durchmessermittelwert 50 mm und einer Standardabweichung von 1,5 mm. Eine Scheibe gilt dann als verwendbar, wenn ihr Durchmesser vom Sollwert nicht mehr als den Betrag c abweicht. Welche Toleranzgrenze c ist zulässig, wenn im Mittel höchstens 6 % Ausschuss erzeugt werden soll?
10. Die Köpergröße eines bestimmten Jahrgangs ist normalverteilt mit den Werten $\mu$ = 95 cm und $\sigma$=7cm. Wie viel Prozent dieser Kinder sind im Mittel
    a) kleiner als 1 m,
    b) größer als 1,05,
    c) zwischen 88 cm und 103 cm?

Lösungen

| | |
|---|---|
| 1 | $P(X=65)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(-1{,}38)=\frac{1}{7{,}25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(-1{,}38)^2}=0{,}0212$<br>$P(X=80)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(0{,}6897)=\frac{1}{7{,}25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}0{,}6897^2}=0{,}4545$ (oder mit Tabellenwerk!) |
| 2a | $P(X=450)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(-3{,}16)=\frac{1}{15{,}8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(-3{,}16)^2}=0{,}00017$ (oder mit Tabellenwerk!) |
| 2b | $P(X=300)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(-2{,}23)=\frac{1}{7{,}25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(-2{,}23)^2}=0{,}0022$ (oder mit Tabellenwerk!) |
| 2c | $P(X=170)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(0{,}27)=\frac{1}{11{,}8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot 0{,}27^2}=0{,}0326$ (oder mit Tabellenwerk!) |
| 2d | $P(X=800)=\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(2{,}82)=\frac{1}{11{,}8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot 2{,}82^2}=0{,}00063$ (oder mit Tabellenwerk!) |
| 3 | $P(140<X<160)=P(X\le 159)-P(X\le 140)=\Phi\left(\frac{159+0{,}5-150}{10{,}2}\right)-\Phi\left(\frac{140+0{,}5-15}{10{,}2}\right.$<br>$\Phi(0{,}90)-\Phi(-0{,}93)=0{,}81594-(1-0{,}82381)=0{,}63975$ |
| 4a | $P(X\le 48)=\Phi\left(\frac{48+0{,}5-40}{5{,}16}\right)=\Phi(1{,}65)=0{,}95053$ |
| 4b | $P(30<X\le 50)=P(X\le 50)-P(X\le 30)=\Phi\left(\frac{50+0{,}5-40}{5{,}16}\right)-\Phi\left(\frac{30+0{,}5-40}{5{,}16}\right)=$<br>$\Phi(2{,}03)-\Phi(-1{,}84)=0{,}97882-(1-0{,}96712)=0{,}94594$ |
| 5a | $P(X\ge 50)=1-P(X\le 49)=1-\Phi\left(\frac{49+0{,}5-48}{4}\right)=1-\Phi(0{,}38)=1-0{,}64803=0{,}3519$ |
| 5b | $P(40\le X\le 60)=P(X\le 60)-P(X\le 39)=\Phi\left(\frac{60+0{,}5-48}{4}\right)-\Phi\left(\frac{39+0{,}5-48}{4}\right)=$<br>$\Phi(3{,}13)-\Phi(-2{,}13)=0{,}99913-(1-0{,}98341)=0{,}98254$ |
| 6a | $P(X\le 50)=\Phi\left(\frac{50+0{,}5-52{,}5}{5}\right)=\Phi(-0{,}4)=1-\Phi(0{,}4)=1-0{,}65542=0{,}34458$ |
| 6b | $P(40\le X\le 60)=P(X\le 60)-P(X\le 39)=\Phi\left(\frac{60+0{,}5-52{,}5}{5}\right)-\Phi\left(\frac{39+0{,}5-52{,}5}{5}\right)=$<br>$\Phi(1{,}60)-\Phi(-2{,}60)=0{,}94520-(1-0{,}99534)=0{,}94054$ |

| | |
|---|---|
| 7 | Die Wahrscheinlichkeit daß eine Maschine gute Teile produziert, ist 0,95.<br>Sollen beide gute Teile produzieren, dann ist dies zweistufig und weil<br>die Maschinen unabhängig voneinander arbeiten gilt:<br><br>$p(M_1 \text{ gut und } M_2 \text{ gut}) = p(M_1 \text{ gut}) \cdot p(M_2 \text{ gut}) = 0,95 \cdot 0,95 = 0,9025$<br><br>X sei die Zahl der einwandfrei arbeitenden Geräte.  X ist binomialverteilt.<br>Erwartungswert: $E(X) = np = 1000 \cdot 0,9025 = 902,5$<br>Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,9025 \cdot 0,0975} = 9,38 > 3$<br>$P(X \geq 950) = 1 - P(X \leq 149) = 1 - \Phi\left(\frac{949 + 0,5 - 902,5}{9,38}\right) = 1 - \Phi(5,03) = 1 - 1 = 0$<br>(Die Werte von $\Phi$ kann man ab 4,42 als 1 ansehen.)<br>Man kann also nicht mit diesem Ergebnis rechnen. |
| 8 | $P(X \leq 55) = \Phi(2,5) = 0,9938 \approx 99\%$. |
| 9 | X sei die Größe des Scheibendurchmessers.<br>Gegeben ist  E = 50  und  $\sigma = 1,5$.<br>X kann man als normalverteilt ansehen.<br>Maximal 6 % Ausschuß bedeutet, daß mindestens 94 % innerhalb des Toleranz-<br>bereiches liegen:  $P(\lvert X - E \rvert \leq c) \geq 0,94$<br><br><br>$P(\lvert X - E \rvert \leq c) = P(E - c \leq X \leq E + c) = \Phi\left(\frac{E + c - E}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{E - c - E}{\sigma}\right)$<br>$= \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)\right] = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$<br>Gegeben ist die Bedingung: $P(\lvert X - E \rvert \leq c) \geq 0,94$<br>d.h. $2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1 \geq 0,94$<br>$2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) \geq 1,94$<br>$\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) \geq 0,97$<br>Aus der Funktionentafel für  $\Phi$  entnimmt man  $\frac{c}{\sigma} \geq 1,88$<br>Also folgt: $c \geq 1,88 \cdot \sigma = 1,88 \cdot 1,5 = 2,82$<br>Die kleinste Toleranzgrenze wird also durch den Radius  c = 2,82  bestimmt. |
| 10 a | $P(X < 100) = P(X \leq 100) = \Phi\left(\frac{100 - 95}{7}\right) = \Phi(0,71) = 0,7611 \approx 76\%$ |
| 10 b | $P(X > 105) = 1 - P(X \leq 105) = 1 - \Phi\left(\frac{105 - 95}{7}\right) = 1 - \Phi(1,43)$<br>$= 1 - 0,9236 = 0,0764 \approx 8\%$ |
| 10 c | $P(88 < X < 103) = P(88 \leq X \leq 103) = \Phi\left(\frac{103 - 95}{7}\right) - \Phi\left(\frac{88 - 95}{7}\right) = \Phi(1,14) - \Phi(-1)$<br>$= \Phi(1,14) - [1 - \Phi(1)] = \Phi(1,14) + \Phi(1) - 1 = 0,8729 + 0,8413 - 1 = 0,7142 \approx 71\%$ |