

## Aufgaben: Vektorrechnung Ebenen und Geraden

### Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene  $E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  und der Punkt  $A(5|-5|1)$ .

- Bestimmen Sie eine zur  $E$  orthogonale Gerade  $g$ , die den Punkt  $A$  enthält.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt  $F$  der Geraden  $g$  mit der Ebene  $E$ .
- $A$  wird an  $E$  gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes  $A'$ .

### Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Gesucht ist die Gleichung der Geraden  $g$ , die  $E$  im Stützpunkt senkrecht schneidet.

### Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Gerade  $g$  und die Ebene  $E$  auf Orthogonalität bzw. Parallelität.

a.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: x + 2y - 4z = 0$$

### Aufgabe 4

Gegeben ist die Ebene  $E_1: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$  sowie der Punkt  $A(-2|1|2)$ .

Gesucht ist eine Ebene  $E_2$ , die  $A$  enthält und orthogonal zu  $E_1$  ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden  $g$  von  $E_1$  und  $E_2$ .

## Lösung

**Aufgabe 1:** Als Stützvektor der Geraden wählt man A, als Richtungsvektor kann man den Normalenvektor der Ebene E benutzen.

$$a) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad F(1/-4/2) \quad (F \text{ heißt Lotfußpunkt})$$

$$c) \quad \vec{Sp} = \vec{OA} + 2\vec{AF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Sp(-3/-3/3)$$

**Aufgabe 2:**  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 3:**

$$a) \quad -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad g \text{ senkrecht } E \quad b) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad g \text{ parallel } E \quad c) \text{ weder noch}$$

**Aufgabe 4:**

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad E_1 \cap E_2 = \left[ E_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} -2+2\mu \\ 1+\lambda+\mu \\ 1-2\mu \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda = -9\mu + 5 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-9\mu + 5) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$