Aufgaben: Vektorrechnung Ebenen und Geraden

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und der Punkt $A(5|-5|1)$.

a. Bestimmen Sie eine zur E orthogonale Gerade g, die den Punkt A enthält.
b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt F der Geraden g mit der Ebene E.
c. A wird an E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes A'.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gleichung der Geraden g, die E im Stützpunkt senkrecht schneidet.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die Gerade g und die Ebene E auf Orthogonalität bzw. Parallelität.

a.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

b.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

c.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad x + 2y - 4z = 0$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Ebene $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ sowie der Punkt $A(-2|1|2)$.

Gesucht ist eine Ebene E_2, die A enthält und orthogonal zu E_1 ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

Lösung

Aufgabe 1: Als Stützvektor der Geraden wählt man A, als Richtungsvektor kann man

den Normalenvektor der Ebene E benutzen.

$$a) \quad g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad F(1/-4/2) \quad (F \text{ heißt Lotfusspunkt})$$

$$c) \quad \overrightarrow{Sp} = \overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Sp(-3/-3/3)$$

Aufgabe 2:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad g:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

$$a) \ -\tfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad g \text{ senkrecht } E \qquad b) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad g \text{ parallel } E \qquad c) \text{ weder noch}$$

Aufgabe 4:

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad E_1 \cap E_2 = \left[E_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -2+2\mu \\ 1+\lambda+\mu \\ 1-2\mu \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda = -9\mu + 5 \qquad g:\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-9\mu + 5) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$