Aufgaben: Vektorrechnung Ebenen und Geraden

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und der Punkt $A(5|-5|1)$.

a. Bestimmen Sie eine zur E orthogonale Gerade g, die den Punkt A enthält.
b. Bestimmen Sie den Schnittpunkt F der Geraden g mit der Ebene E.
c. A wird an E gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes A'.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene $E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gleichung der Geraden g, die E im Stützpunkt senkrecht schneidet.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Gerade g und die Ebene E auf Orthogonalität bzw. Parallelität.

a.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

b.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

c.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$E: \quad x + 2y - 4z = 0$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Ebene $E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ sowie der Punkt $A(-2|1|2)$.

Gesucht ist eine Ebene E_2, die A enthält und orthogonal zu E_1 ist. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2.

Lösung

Aufgabe 1: Als Stützvektor der Geraden wählt man A, als Richtungsvektor kann man

den Normalenvektor der Ebene E benutzen.

$$a)\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b)\quad F(1/-4/2)\quad (F\ heißt\ Lotfusspunkt)$$

$$c)\quad \overrightarrow{Sp}=\overrightarrow{OA}+2\,\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}\quad Sp(-3/-3/3)$$

Aufgabe 2:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

$$a)\ -\tfrac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}\quad g\ senkrecht\ E\qquad b)\ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix}=0\quad g\ parallel\ E\qquad c)\ weder\ \ noch$$

Aufgabe 4:

$$E_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\qquad E_1\cap E_2=\left[E_2-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0\qquad \begin{pmatrix}-2+2\mu\\1+\lambda+\mu\\1-2\mu\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=0$$

$$\lambda=-9\mu+5\qquad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+(-9\mu+5)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-8\\2\end{pmatrix}$$