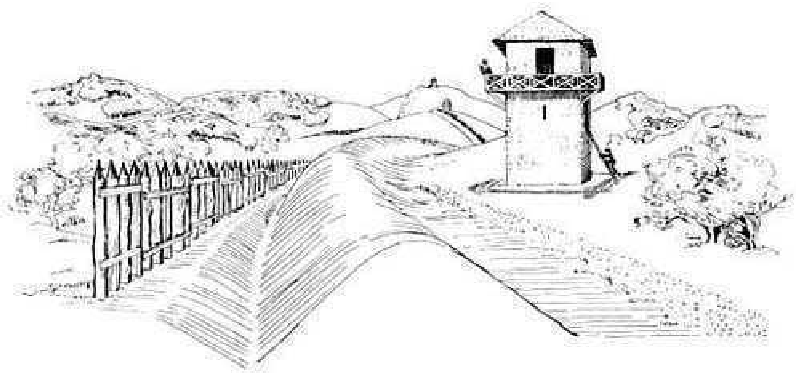
Übung Grenzwerte
Analysis



Limes (lateinisch: Grenzweg, Grenze, Grenzwall), Bezeichnung für die in der Kaiserzeit seit dem 1. Jahrhundert n. Chr. errichteten, militärisch gesicherten Grenzanlagen des römischen Imperiums.

Unter dem Kurznamen *Limes* bekannt ist heute insbesondere der 548 Kilometer lange obergermanisch-rätische Limes, der sich zwischen Rheinbrohl bei Neuwied bis Kelheim an der Donau erstreckt.

Bezugnehmend auf den römischen Grenzwall, die Grenze, bezeichnet man in der Mathematik mit Limes den Grenzwert einer Zahlenfolge, einer Reihe oder einer Funktion.

Aufgabe: Ermitteln Sie folgende Grenzwerte (evtl. auch uneigentliche und links- und rechtsseitige)!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n(n-1)}{n+1}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{n-1}}{n^n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

(e) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{|x|}{x+1}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(3n^2+1)(1-2n)}{3(n^2-3)^2}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2(1-2x)(1+x)}{3x^2+7x}$

(h) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$

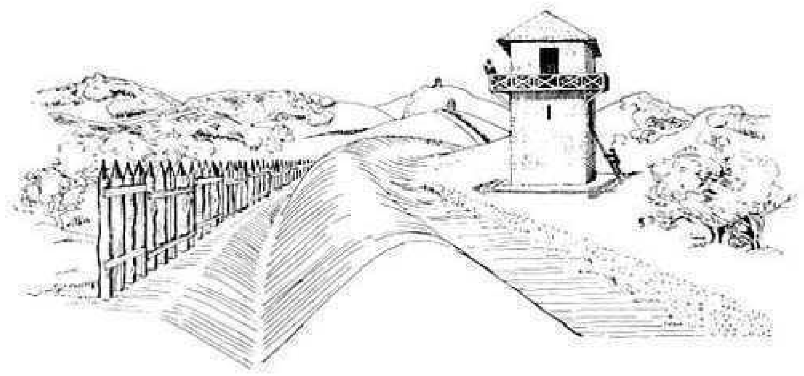
(i) $\lim\limits_{x\to0} \frac{(3+x)^2-9}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x}{x+2}$

(k) $\lim\limits_{x\to0} (x-1)\frac{\sin x}{x}$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3-n+1}$

Übung Grenzwerte
Analysis
Lösung



Limes (lateinisch: Grenzweg, Grenze, Grenzwall), Bezeichnung für die in der Kaiserzeit seit dem 1. Jahrhundert n. Chr. errichteten, militärisch gesicherten Grenzanlagen des römischen Imperiums.

Unter dem Kurznamen *Limes* bekannt ist heute insbesondere der 548 Kilometer lange obergermanisch-rätische Limes, der sich zwischen Rheinbrohl bei Neuwied bis Kelheim an der Donau erstreckt.

Bezugnehmend auf den römischen Grenzwall, die Grenze, bezeichnet man in der Mathematik mit Limes den Grenzwert einer Zahlenfolge, einer Reihe oder einer Funktion.

Aufgabe: Ermitteln Sie folgende Grenzwerte (evtl. auch uneigentliche und links- und rechtsseitige)!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n(n-1)}{n+1} = \infty$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+n)^{n-1}}{n^n} = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+\sqrt{n^3+2}}{n^2-n+1} = 3$

(d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = 2$

(e) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{|x|}{x+1} = \pm\infty$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(3n^2+1)(1-2n)}{3(n^2-3)^2} = -2$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2(1-2x)(1+x)}{3x^2+7x} = -\frac{4}{3}$

(h) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3+x)^2-9}{x} = 6$

(j) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x}{x+2} = \pm\infty$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} (x-1)\frac{\sin x}{x} = -1$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+9+...+n^2}{n^3-n+1} = \frac{1}{3}$

Grenzwerte von Funktionen

Zu bestimmen sind folgende Grenzwerte

1\. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{|x|}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\cos x}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{|x|}}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+2^{-|x|}\right)$

Lösungen

1 a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) =$ **2**

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) =$ **0**

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{|x|} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{|x|}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x}\right) =$ **1**

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{|x|}\right) + \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{-x}\right) =$ **(-1)**

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) =$ **$-\infty$**

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} =$ **0** (Der Zähler schwankt zwischen -1 und 1, der Nenner wächst unbeschränkt.)

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{\cos x}$ existiert nicht. (Der Zähler wächst unbeschränkt, der Nenner schwankt zwischen -1 und 1.)

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x\sqrt{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x}\right) = \infty$ (für $x \to +\infty$ gilt: $|x| = x$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{-x}}\right) + \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x\sqrt{-x}}{-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{-x}\right) =$ **$-\infty$** (für $x \to -\infty$ gilt: $|x| = -x$)

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3+2^{-|x|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-|x|} = 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{|x|}}\right) = 3 + \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2^{x}}\right) = 3 + 0 =$ **3**

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3+2^{-|x|}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-|x|} = 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-(-x)} = 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} 2^{x} = 3 + 0 =$ **3**