Analysis Parameteraufgaben zu Funktionen, Differenzialrechnung Klasse 11

1. Der Punkt P(0/4) ist Wendepunkt, Q(1/3) ist Extrempunkt der Funktion f(x). f(x) ist eine ganzrationale Funktion 3. Ordnung. Ermittle die Funktionsgleichung. Überprüfe das Ergebnis (Probe).

2. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit dem Tiefpunkt P(1/-2) deren Wendepunkt im Koordinatenursprung liegt.

3. Der Punkt P(0/0) ist Tiefpunkt der ganzrationalen Funktion 3. Grades f(x). Bei x = 2 hat die Funktion einen Wendepunkt. Die Tangente im Wendepunkt hat die Steigung 4. Bestimme die Funktionsgleichung. Überprüfe das Ergebnis (Probe).

4. Der Punkt W(2/6) ist Wendepunkt der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, die Wendetangente hat die Steigung 4. Ermittle bitte die Funktionsgleichung. Überprüfe das Ergebnis (Probe).

5. Eine ganzrationale Funktion f(x) dritten Grades hat die Nullstelle bei x = - 4 und x = 4. Der Graph geht durch die Punkte P(0/-8) und Q(-2 /- 4) Bestimme die Funktionsgleichung. (Probe).

6. Bestimme eine ganzrationale Funktion dritten Grades so dass gilt: Der Punkt (0/0) liegt auf dem Graphen, W(2 / 4) ist Wendepunkt. Die zugehörige Wendetangente hat die Steigung m = -3. (Probe).

7. Eine zum Ursprung punktsymmetrische ganzrationale Funktion 5. Grades hat in P(0/0) die Steigung 7 und in Q(1/0) einen Wendepunkt. Bestimme die Funktionsgleichung (Probe).

8. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat im P(-1/ 2) eine Tangente, die parallel zur x-Achse verläuft, und in Q(0/ 4) einen Wendepunkt. Bestimme die Funktionsgleichung (Probe)

9. Bei x = -1 schneidet die Funktion die x- Achse, Q(-2 / - 4) ist Tiefpunkt einer ganzrationalen Funktion 4. Ordnung. Die Funktion verläuft durch das Koordinatenkreuz (0/0) und durch den Punkt R(1 / 14). Ermittle bitte die Funktionsgleichung. Überprüfe das Ergebnis (Probe).

10. Eine ganzrationale Funktion 4. Grades besitzt bei x = 0 ein Extremum und bei x = - 1 einen Sattelpunkt. Die Tangente bei x = 1 hat die Gleichung y(x) = 48x – 48. Wie lautet die Funktionsgleichung?

11. Der Graph einer Ganzrationalen Funktion 3.Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und schneidet den Graphen von $g(x) = 0{,}5(4x^3 + x)$ im Ursprung senkrecht. Ein zweiter Schnittpunkt mit g liegt bei x = 1. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Lösungen

$Nr.1 \quad f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x + 4$

$Nr.2 \quad f(x) = x^3 - 3x$

$Nr.3 \quad f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

$Nr.4 \quad f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

$Nr.5 \quad f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x - 8$

$Nr.6 \quad f(x) = \frac{5}{4}x^3 - 7{,}5x^2 + 12x$

$Nr.7 \quad f(x) = x^5 - 10x^3 + 7x$

$Nr.8 \quad f(x) = -x^3 + 3x + 4$

$Nr.9 \quad f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

$Nr.10 \quad f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 17$

$\mathrm{Nr.11} \quad f(x) = 4{,}5x^3 - 2x$

Lösung 1: Die Grundfunktion einer Funktion 3. Grades lautet: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir wissen, dass der Punkt (0/4) auf der Funktion liegt und können daran erkennen, dass die Funktion bei y = 4 die y-Achse schneidet. Somit ist **d = 4.**
Nun braucht nur noch a, b und c ermittelt zu werden. Man muss nun aus den gegebenen Daten drei Gleichungen erstellen, die wie folgt lauten:

1. Gleichung: Punkt (0/4) ist ein Wendepunkt. Daraus folgt:
$f''(x) = 0$
$f''(x) = 6xa + 2b$
$0 = 6 \cdot 0a + 2b$
Wir wissen jetzt also, dass **b = 0** ist.
2. Gleichung:
$f(1) = 3 \qquad 3 = a + c + 4 \qquad -1 = a + c$
3.Gleichung:
$f'(1) = 0 \qquad 0 = 3a + c$
Nun können wir a durch Subtrahieren der beiden Gleichungen isolieren,
$-1 = a + c$ **a = 0,5**
Jetzt kann man c durch Einsetzen von a in einer Gleichung erhalten.
$-1 = a + c$ **c = -1,5**
Setzt man nun die ermittelten Werte für Variablen a, b, c und d in die Gleichung f(x) ein, so erhält man: $\mathbf{f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x + 4}$

Lösung 2: Die Grundfunktion einer Funktion 3. Grades lautet: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Wir wissen, dass der zugehörige Graph der Funktion durch den Koordinatenursprung geht, daraus folgt, das **d = 0 ist**.
Jetzt müssen nur noch a, b und c ermittelt werden. Aus den gegebenen Angaben in der Aufgabe erstellen wir drei Gleichungen, die wie folgt lauten:

I. $f(1) = -2$ Punktbedingung

II. $f'(1) = 0$ Extrempunktbedingung

III. $f''(0) = 0$ Wendepunktbedingung

1. Ableitung: $3ax^2 + 2bx + c$

2. Ableitung: $6ax + 2b$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

I. $-2 = a + c$

II. $0 = 3a + c$

III. $b = 0$

Durch Subtrahieren können wir die beiden Gleichungen isolieren:

$-2 = a + c$ **$1 = a$**

Jetzt kann c durch einsetzen der ermittelten Werte errechnet werden:

$-2 = 1 + c$ **$-3 = c$**

Setzt man nun die ermittelten Werte der Variablen a, b, c und d in die Gleichung f(x) ein, so erhält man: **$f(x) = x^3 - 3x$**

Lösung 3:

Die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion 3. Grades: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die erste Ableitung: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Die zweite Ableitung: $f''(x) = 6ax + 2b$

P(0/0) ist Punkt auf dem Graphen von f:

$f(0) = a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0$ $d = 0$

P(0/0) ist Tiefpunkt:

$f'(0) = 3a0^2 + 2b0 + c = 0$ $c = 0$

Bei xw = 2 ist ein Wendepunkt:

$f''(2) = 12a + 2b = 0$ $0 = 6a + b$

Die Tangente bei xw = 2 hat die Steigung 4. Das bedeutet, dass dort die 1. Ableitung den Wert 4 annimmt.

$f'(2) = 12a + 4b = 4$ $2 = 6a + 2b$

Aus den letzten beiden Bedingungen schließen wir:

$b = 2$ $a = -1/3$

Die Funktionsgleichung lautet somit:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$$

Lösung 4:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

Die Grundfunktion dieser Funktion lautet:

Da die Funktion 3 Parameter enthält, nämlich a, b und c folgt, dass man drei Gleichungen aufstellen muß, die sich aus dem Text der Aufgaben erschließen lassen. Da im Punkt x = 2 laut Aufgabenstellung eine Wendestelle existiert, ist dort die zweite Ableitung Null. (Notwendiges Kriterium) Die Steigung beträgt in diesem Punkt 4. Somit ergibt sich die zweite Aussage. Des weiteren existiert der Punkt x = 2 und hat den Wert y = 6. Die drei Gleichungen lauten deshalb:

$$f''(2) = 0, \qquad f'(2) = 4, \qquad f(2) = 6$$

Mit Hilfe der obigen Aussagen läßt sich nun folgendes lineares Gleichungssystem aufstellen:

$6 = 16a + 4b + c$

$0 = 48a + 2b$

Das Gleichungssystem läßt sich recht einfach lösen, wenn man zunächst einmal die letzten beiden Gleichungen betrachtet. Aus ihnen ergibt sich, dass

$$a = -\frac{1}{16} \quad b = \frac{3}{2} \qquad c = 1$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet somit:

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1$$