Binomialverteilung

Aufgabe 1
Eine Urne enthält 4 schwarze, 3 rote und 3 weiße Kugeln. Es wird 10-mal mit Zurücklegen gezogen. Wie wahrscheinlich ist es, genau 5 schwarze Kugeln zu ziehen?

Aufgabe 2
Ein fairer Würfel wird 36 mal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augenzahl 6 in der erwarteten Anzahl, also 6-mal, eintritt.

Aufgabe 3
Der Anteil der Nichtschwimmer an einer Schule beträgt 10%. In einer Klasse werden vier Schüler zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer der Schüler Nichtschwimmer ist?

Aufgabe 4
In einem Keller sind alte Weine gelagert; man weiß, dass im Durchschnitt 20% davon nicht mehr genießbar sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) von zehn Flaschen acht noch genießbar sind, b) von 20 Flaschen 16 noch genießbar sind.

Aufgabe 5
Der Computer eines Heiratsvermittlungsbüros kombiniert aus den Interessenten "Traumpaare". Längere Beobachtungen haben ergeben, dass 30% der "Produktion" unbrauchbar ist. Man lässt nun den Computer 10 Paare zusammenstellen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 gute Paare entstanden sind?

Aufgabe 6
Bei einer Qualitätskontrolle hat man mit einem Ausschuss von 5% zu rechnen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) unter 10 Artikeln kein Ausschuss
b) unter 20 Artikeln höchstens ein Artikel defekt ist.

Aufgabe 7
Eine Firma liefert Ventile in Packungen zu 20 Stück. Jede Packung darf nach den Lieferbedingungen höchstens 2 defekte Ventile enthalten. Ein Händler prüft eine Packung, indem er ihr 5 Ventile ohne zurücklegen entnimmt. Ist von diesen höchstens ein Ventil unbrauchbar, nimmt er die Packung an, andernfalls lehnt er sie ab.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens wird eine Packung abgelehnt, wenn sie den Lieferbedingungen entspricht?

Aufgabe 8
Die Ausschusswahrscheinlichkeit eines mit einer bestimmten Maschine hergestellten Massenartikels sei erfahrungsgemäss 1%. Die Gegenstände werden in Packungen zu je 200 Stück versandt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Packung höchstens ein Ausschussstück befindet?

Aufgabe 9
Durch Versuche sei festgestellt worden, dass 5% der Zwiebeln einer großen Menge einer bestimmten Blumenzwiebelsorte nicht keimen. Diese Zwiebelsorte wird in Zehnerpackungen auf den Markt gebracht, und es wird eine Keimgarantie von 90% gegeben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Packung dieses Garantieversprechen nicht erfüllt ? Wie ändert sich die Lage, wenn eine Keimgarantie von nur 80 % gegeben wird ?

Aufgabe 10
Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel, mit einem Ausschussanteil von p=4%. Berechnen Sie unter der Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

Aufgabe 11
In den vergangenen Jahren nahmen immer mehr sächsische Schüler an dem jeweils im März stattfindenden "Känguru-Wettbewerb" teil. In diesem mathematischen Wettbewerb werden 30 Aufgaben mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist, gestellt. Die Teilnehmer einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik trainieren anhand von Aufgabenserien früherer Jahre für den neuen Wettbewerb. Dabei legt der AG-Leiter fest, dass bei jeder Aufgabe genau eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden muss.
a) Geben Sie an, wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung der Kreuze auf dem Antwortzettel es gibt.
b) Einige AG-Teilnehmer diskutieren ihre Erfolgsaussichten, wenn sie alle Kreuze zufällig setzen würden. Ermitteln Sie für diesen Fall die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Genau zehn Antworten sind richtig.
B: Mehr als 3, aber höchstens 8 Antworten sind richtig.
C: Mehr Antworten sind richtig, als man erwarten kann.

c) Die Aufgaben sind in drei Gruppen zu je 10 Aufgaben eingeteilt. AG-Teilnehmerin Simone weiß aus Erfahrung, dass sie eine Aufgabe der Aufgabengruppe 1 (Aufgabennummern 1 bis 10) mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, eine Aufgabe der Gruppe 2 (Aufgabennummern 11 bis 20) mit 70 % und eine Aufgabe der Gruppe 3 (Aufgabennummern 21 bis 30) immerhin noch mit 65 % richtig löst.
Das Ankreuzen der Antworten erfolgt in der Reihenfolge der gestellten Aufgaben. Ermitteln Sie für Simone die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

D: Simone kreuzt bei allen Aufgaben die richtige Lösung an.
E: Simone begeht ihren ersten Fehler in der Aufgabe mit der Nummer 12.
F: Simone kreuzt bei allen Aufgaben der Gruppe 2 die richtige Lösung an.
G: Simone löst alle Aufgaben der Gruppen 1 und 2 richtig und genau zwei Aufgaben der Gruppe 3 falsch.

Aufgabe 12
Ein Unternehmen beauftragt eine Werbeagentur, für eines seiner Produkte eine große Fernsehwerbung durchzuführen. Sollte nach Beendigung der Werbeaktion der Bekanntheitsgrad des Produkts mehr als 40% betragen, so ist das Unternehmen bereit, über den vereinbarten Preis für die Werbeaktion hinaus einen zusätzlichen Betrag an die Werbeagentur zu zahlen.
Zur Entscheidung darüber soll eine Umfrage unter 100 zufällig ausgewählten Personen durchgeführt werden.
a) Angenommen, der Bekanntheitsgrad sei 40%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 50 Personen das Produkt kennen?
b) Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit das Risiko für das Unternehmen, zu Unrecht mehr zu zahlen, höchstens 1% beträgt?
c) Angenommen, das Unternehmen zahlt die Prämie, wenn mindestens 55 Personen das Produkt kennen: wie groß ist dann das Risiko der Werbeagentur, den zusätzlich vereinbarten Betrag nicht zu erhalten, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nach der Werbeaktion bei 50% liegt?

Aufgabe 13
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 20 Geburten in einem Spital mehr als 12 und weniger als 15 Mädchen darunter sind? (Annahme: p(k) = p(m) = 50%)

Aufgabe 14
Die Wahrscheinlichkeit einer Zwillingsgeburt beträgt etwa 1/80. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den nächsten 100 Geburten, die in einem Spital erwartet werden, mindestens drei Zwillingsgeburten stattfinden?

Aufgabe 15
Die Schülervertretung einer Schule besteht aus 12 Schülern. Jeder Schüler kommt mit der Wahrscheinlichkeit von 0,4 zu einer einberufenen Versammlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens zwei Drittel der Schülervertreter anwesend?

Aufgabe 16
Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt 0,486.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit drei Kindern nur Jungen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit vier Kindern mehr Mädchen als Jungen?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit fünf Kindern mindestens ein Mädchen und mindestens einen Jungen?

Aufgabe 17
Die Erfolgsrate für eine Ölbohrung beträgt 16 %.
a) An einem Ort werden drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stößt man auf Öl?
b) An fünf Orten werden je drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man an mehr als drei Orten Öl?
c) Wie oft muss eine Probebohrung durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Bohrung auf Öl stößt?

Aufgabe 18
Silke lernt mit einem Computerprogramm Vokabeln und hat dabei eine Erfolgsquote von 93 %.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kennt sie von 35 Vokabeln vier nicht?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die 35. Vokabel die vierte, die sie nicht kennt?

Aufgabe 19
Jemand kauft eine Packung mit 50 DVD-Rohlingen, bei denen der Brennvorgang erfahrungsgemäß in 90 % der Fälle gelingt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
a) Höchstens 40 Brennvorgänge sind erfolgreich.
b) Mehr als 45 Brennvorgänge sind erfolgreich.
c) Mindestens 2, aber höchstens 8 Brennvorgänge schlagen fehl.

Aufgabe 20
Ein Betrieb mit 50 Mitarbeitern richtet einen überdachten Fahrradparkplatz ein. Zur Zeit kommen durchschnittlich 40% der Beschäftigten mit dem Fahrrad zur Arbeit.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 20 Parkplätze?
Wie viele Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
Durch die Einrichtung der überdachten Fahrradparkplätze erhöht sich der Anteil der Radfahrer auf 60 %. Wie viele Parkplätze müssen jetzt zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?

Lösungen

1. 4 schwarze und 6 farbige Kugeln; p(schwarz) = 0,4
   $p = \binom{10}{5}\, 0{,}4^5\, 0{,}6^5 = 20{,}1\ \%$
2. $p = \binom{36}{6}\, (1/6)^6\, (5/6)^{30} = 17{,}6\ \%$
3. $p = \binom{4}{1}\, 0{,}1^1\, 0{,}9^3 = 29{,}2\ \%$
4. a) $p = \binom{10}{8}\, 0{,}8^8\, 0{,}2^2 = 30{,}2\ \%$ b) $p = \binom{20}{16}\, 0{,}8^{16}\, 0{,}2^4 = 21{,}8\ \%$
5. $p = \binom{10}{7}\, 0{,}7^7\, 0{,}3^3 = 26{,}7\ \%$
6. a) $p = 0{,}95^{10} = 59{,}9\ \%$; b) 73,6 %
7. p(defekt) = 0,1 ; Ablehnung, obwohl den Lieferbedingungen entsprechend
   p = 0,08146
8. p = 0,405
9. $p_1 = 8{,}6\ \%$; $p_2 = 1{,}15\ \%$
10. $p = \Sigma_{k=2}^{6} \binom{100}{k} \cdot 0{,}04^k \cdot 0{,}69^{100-k} = 0{,}806$
11. a) Anzahl aller Möglichkeiten: 5^{30}
    b) Wahrscheinlichkeiten Ereignis A: $P(A) \approx 0{,}0355$; Ereignis B: $P(B) \approx 0{,}7486$; Ereignis C: $P(C) \approx 0{,}3930$
    c) Ereignis D: $P(D) \approx 0{,}0001$; Ereignis E: $P(E) \approx 0{,}0732$; Ereignis F: $P(F) \approx 0{,}0282$; Ereignis G: $P(G) \approx 0{,}0017$
12.

a) $p = \Sigma_{k=51}^{100} \binom{100}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{100-k} = 1{,}7\ \%$
Die Firma geht ein Risiko von 1,7% ein, eine zusätzliche Prämie zu zahlen, obwohl der Bekanntheitsgrad des Produkts nicht über 40% liegt.
b) $p = \Sigma_{k=x}^{100} \binom{100}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{100-k} \leq 0{,}01$
Für x = 51 erhält man p = 1,0005 %. Wenn die Prämie dann bezahlt wird, wenn 52 oder mehr Personen das Produkt kennen, dürfte die Bedingung erfüllt sein.
c) Die Werbeagentur erhält den vereinbarten Betrag dann nicht, wenn weniger als 55 Personen das Produkt kennen
$p = \Sigma_{k=0}^{54} \binom{100}{k}\, 0{,}5^k\, 0{,}5^{100-k} \leq 81{,}6\ \%$

13. $P = \Sigma_{k=13}^{14} \binom{20}{k}\, 0{,}5^k\, 0{,}5^{20-k} = 11{,}1\ \%$
14. $P = \Sigma_{k=3}^{100} \binom{100}{k}\, (1/80)^k\, (79/80)^{100-k} = 13{,}0\ \%$
15. Die Bedingung macht nur Sinn, wenn man sie als "mindestens zwei Drittel" ließt.
    $P = \Sigma_{k=8}^{12} \binom{12}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{12-k} = 5{,}7\ \%$
16. a) $P(X = 0) = 0{,}1358$; b) 0,2918 ; c) 0,9370
17. a) 0,4073 ; b) 22,48 % ; $n > 13$
18. a) $P(X = 31) = 0{,}1325$; b) 0,0151
19. a) 0,0245 ; b) 0,4312 ; c) 0,9083
20. X = Anzahl der Mitarbeiter, die mit dem Fahrrad kommen; n = 50
    $p = 0{,}4$; $P(X \leq 20) = 0{,}5610$
    $p = 0{,}4$; $P(X \leq k) \geq 0{,}99 \Rightarrow k \geq 28$.
    Mindestens 28 Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden.
    $p= 0{,}6$; $k \geq 38$

Binomialverteilung

1. Bei einer Qualitätskontrolle hat man mit einem Ausschuss von 5% zu rechnen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   a) unter 10 Artikeln kein Ausschuss
   b) unter 20 Artikeln höchstens ein Artikel defekt ist.

2. Eine Firma liefert Ventile in Packungen zu 20 Stück. Jede Packung darf nach den Lieferbedingungen höchstens 2 defekte Ventile enthalten. Ein Händler prüft eine Packung, indem er ihr 5 Ventile ohne zurücklegen entnimmt. Ist von diesen höchstens ein Ventil unbrauchbar, nimmt er die Packung an, andernfalls lehnt er sie ab.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens wird eine Packung abgelehnt, wenn sie den Lieferbedingungen entspricht?

3. Die Ausschusswahrscheinlichkeit eines mit einer bestimmten Maschine hergestellten Massenartikels sei erfahrungsgemäß 1%. Die Gegenstände werden in Packungen zu je 200 Stück versandt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Packung höchstens ein Ausschussstück befindet?

4. Durch Versuche sei festgestellt worden, dass 5% der Zwiebeln einer großen Menge einer bestimmten Blumenzwiebelsorte nicht keimen. Diese Zwiebelsorte wird in Zehnerpackungen auf den Markt gebracht, und es wird eine Keimgarantie von 90% gegeben.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Packung dieses Garantieversprechen nicht erfüllt ? Wie ändert sich die Lage, wenn eine Keimgarantie von nur 80 % gegeben wird ?

5. Eine Firma produziert einen bestimmten Massenartikel, mit einem Ausschussanteil von p=4%. (Die folgenden beiden Aufgaben sind unabhängig voneinander.)
Berechnen Sie unter der Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Artikeln mindestens 2 und höchstens 6 Ausschussartikel befinden.

6. Englische Zeitungsnotiz: The Mitcham Public Health Department found an unexpected boom in boy births during May. There were 60 boys and 35 girls born during the month. Die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt ist p = 0,514. Ist diese Beobachtung eine echte Sensation?

7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 20 Geburten in einem Spital mehr als 12 und weniger als 15 Mädchen darunter sind? (Annahme: p(k) = p(m) = 50%)

8. Die Wahrscheinlichkeit einer Zwillingsgeburt beträgt etwa 180. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den nächsten 100 Geburten, die in einem Spital erwartet werden, mindestens drei Zwillingsgeburten stattfinden?

9. Die Schülervertretung einer Schule besteht aus 12 Schülern. Jeder Schüler kommt mit der Wahrscheinlichkeit zu einer einberufenen Versammlung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei Drittel der Schülervertreter anwesend?

Lösungen

1. a) $p = 0{,}95^{10} = 59{,}9\ \%$; b) 73,6 %

2. p(defekt) = 0,1 ; Anlehnung, obwohl den Lieferbedingungen entsprechend
   $p = 0{,}08146$

3. $p = 0{,}405$

4. $p_1 = 8{,}6\ \%$; $p_2 = 1{,}15\ \%$

5. $p = \Sigma_{k=2}^{6} \binom{100}{k} \cdot 0{,}04^k \cdot 0{,}69^{100-k} = 0{,}806$

6. Man berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 60 Knaben geboren werden
   $P = \Sigma_{k=60}^{95} \binom{95}{k}\, 0{,}514^k\, 0{,}486^{95-k} = 1{,}4\ \%$ ... also wirklich selten!

7. $P = \Sigma_{k=13}^{14} \binom{20}{k}\, 0{,}5^k\, 0{,}5^{20-k} = 11{,}1\ \%$

8. $P = \Sigma_{k=3}^{100} \binom{100}{k}\, (1/80)^k\, (79/80)^{100-k} = 13{,}0\ \%$

9. $P = \Sigma_{k=8}^{12} \binom{12}{k}\, 0{,}4^k\, 0{,}6^{12-k} = 5{,}7\ \%$

Binomialverteilung

Aufgabe 1
Ein Taxistandplatz ist für 10 Taxen vorgesehen. Die Erfahrung zeigt, dass ein Wagen sich durchschnittlich 12 Minuten pro Stunde am Standplatz aufhält. Genügt es, den Standplatz für 3 wartende Wagen anzulegen, ohne dass dadurch in mehr als 15% aller Fälle ein Taxi keinen Platz findet? Welche Anzahl von Taxen wird man am häufigsten am Standplatz antreffen?

Aufgabe 2
In einem Postamt gibt es einen Schalter I für Brief- und Geldverkehr und einen Schalter II für Pakete. Für jeden eintretenden Kunden betrage die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zum Schalter I bzw. zum Schalter II geht, 4/5 bzw. 1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 5 Kunden
a) genau 4 b) höchstens 4 zu Schalter I gehen?

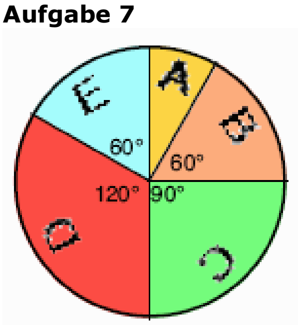
Aufgabe 3
Der Bürgermeister eines Ortes von 2000 Einwohnern kennt jeden fünften Einwohner persönlich. Eines Tages trifft er auf seinen Heimweg 10 verschiedene Personen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau zwei Bekannte dabei?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens 2 Bekannte dabei?

Aufgabe 4
Jemand behauptet, außersinnliche Wahrnehmung zu besitzen. Um diese Behauptung zu prüfen, wird ein Glücksrad mit drei gleichgroßen Sektoren un der Beschriftung 0, 1 und 2 insgesamt 10 mal gedreht. Die Versuchsperson errät
a) 6
b) 7 Ergebnisse richtig.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, durch bloßes Raten ein so gutes oder noch besseres Ergebnis zu erzielen?

Aufgabe 5
Auf einem Wohltätigkeitsfest wird eine Tombola veranstaltet, bei der in der Lostrommel 100 Lose liegen, von denen 45 Nieten sind. Jemand kauft zu Beginn 4 Lose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er mindestens 2 Gewinne?

Aufgabe 6
Auf einem Glücksrad sind die Ziffern aufgemalt; jede Ziffer ist gleichwahrscheinlich.
a) Das Rad wird 15 mal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit genau dreimal eine 6 zu erhalten?
b) Das Rad wird 20 mal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens dreimal eine 6 zu erhalten?
c) Das Rad wird 20 mal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 und höchstens 12 der Zahlen ungerade sind?

Aufgabe 7



Geben Sie die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse beim gezeichneten Glücksrad an

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
a) Das Rad wird 3mal gedreht: es bleibt jedes Mal auf D stehen.
b) Das Rad wird 3mal gedreht: es bleibt der Reihe nach auf A, B, C stehen.
c) Das Rad wird 3mal gedreht: es bleibt auf A, B, C stehen, wobei die Reihenfolge diesmal egal ist.
d) Wenn das Rad E zeigt, muss ich ausscheiden. Wie oft kann gespielt werden, wenn das Risiko auszuscheiden nicht kleiner als 5% sein soll?
e) Das Rad wird 4mal gedreht: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens einmal C zeigt?
f) Wie oft muss das Rad gedreht werden, damit man mit einer Sicherheit von 95% mindestens einmal ein A erhält?

Lösungen

1	p(Taxi anwesend) = 0,2			
	3 Taxis = 0,121 ... Platz genügt			
	Probieren ergibt: 2 Taxis = 0,268 als höchsten Wert			
2	a)	0,410	b)	0,672
3	a)	0,302	b)	0,642
4	a)	0,07	b)	0,020
5	p(Gewinn) = 0,55 ... p = 0,759			
6	a)	0,1285	b)	0,323
	c)	0,737		
8	P(A) = 1/12 ; P(B) = 1/6 ; P(C) = 1/4 ; P(D) = 1/3 ; P(E) = 1/6			
	a)	p(DDD) = 1/27		
	b)	p(ABC) = 1/288		
	c)	1/48		
	d)	16 mal		
	e)	175/256		
	f)	35 mal		