Exponentialfunktionen

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!
   a) $2 \cdot e^{\ln 0.5}$ b) 4^{2x} c) $e^{-\ln 11}$

2. Bilden Sie die erste Ableitung! Vereinfachen ist nicht erforderlich.
   a) $f(x) = e^{-2x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$ c) $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{1+t}$

3. Ermitteln Sie das unbestimmte Integral!
   a) $\int (e^2 + e^{-x})\,dx$ b) $\int (e^x + e^{-2x})^2\,dx$

4. Berechnen Sie **den exakten Wert** des bestimmten Integrals! Runden Sie dann auf Hundertstel!
   a) $\int_1^2 (e^x - x)\,dx$ b) $\int_0^1 (e^{-3x} + 1)\,dx$

5. a) Weisen Sie nach, dass $F(x) = -(x+1) \cdot e^{2-x} - \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^{2-x} - x$ ist!
   b) Ermitteln Sie die Fläche, die durch den Graphen von f (x) und die x-Achse begrenzt wird!

Lösungen

1. Vereinfachen Sie so weit wie möglich!

a) $2 \cdot e^{\ln 0.5} = 2 \cdot 0{,}5 = \mathbf{1}$ b) $4^{2x} = (4^2)^x = \mathbf{16^x}$ c) $e^{-\ln 11} = \frac{1}{e^{\ln 11}} = \mathbf{\frac{1}{11}}$

2. Bilden Sie die erste Ableitung! Vereinfachen ist nicht erforderlich.

a) $f(x) = e^{-2x+3}$ $f'(x) = \mathbf{-2e^{-2x+3}}$

b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = \frac{e^{2x}}{x^{0,5}}$ $f'(x) = \frac{2e^{2x} \cdot x^{0,5} - e^{2x} \cdot 0,5x^{-0,5}}{x} = \mathbf{\frac{2e^{2x} \cdot \sqrt{x} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x}}$

(Quotientenregel)

oder:

$f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}} = e^{2x} \cdot x^{-0,5}$ $f'(x) = 2e^{2x} \cdot x^{-0,5} + e^{2x} \cdot (-0,5x^{-1,5}) = \mathbf{\frac{2e^{2x}}{\sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x^3}}}$

(Produktregel)

c) $f(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$ $f'(t) = \mathbf{\frac{-e^{-t} \cdot (1+t) - e^{-t}}{(1+t)^2}}$

Selbstverständlich sind die beiden Terme von 2 b) identisch:

$$\frac{2e^{2x} \cdot \sqrt{x} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2e^{2x} \cdot \sqrt{x}}{x} - \frac{e^{2x}}{2x \cdot \sqrt{x}} = \frac{2e^{2x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{x \cdot \sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}} = \frac{2e^{2x} \cdot x}{x \cdot \sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x^3}} = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{x}} - \frac{e^{2x}}{2\sqrt{x^3}}$$

3. Ermitteln Sie das unbestimmte Integral!

a) $\int (e^2 + e^{-x})\,dx = e^2 \int dx + \int e^{-x}\,dx = \mathbf{e^2 \cdot x - e^{-x} + c}$

b) $\int (e^x + e^{-2x})^2\,dx = \int (e^x)^2 + 2e^x \cdot e^{-2x} + (e^{-2x})^2\,dx = \int (e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x})\,dx$

$= \int e^{2x}\,dx + 2\int e^{-x}\,dx + \int e^{-4x}\,dx = \mathbf{\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-4x} + c}$

4. Berechnen Sie **den exakten Wert** des bestimmten Integrals! Runden Sie dann auf Hundertstel!

a) $\int_1^2 (e^x - x)\,dx = \int_1^2 e^x\,dx - \int_1^2 x\,dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = (e^2 - 2) - (e - \frac{1}{2}) = \mathbf{e^2 - e - \frac{3}{2}} \approx 3{,}17$

b) $\int_0^1 (e^{-3x} + 1)\,dx = \int_0^1 e^{-3x}\,dx + \int_0^1 dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x} + x\right]_0^1 = (-\frac{1}{3}e^{-3} + 1) - (-\frac{1}{3}e^0 + 0) = \mathbf{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}e^{-3}} \approx$ 1,32

5. a) Weisen Sie nach, dass $F(x) = -(x+1) \cdot e^{2-x} - \frac{1}{2}x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^{2-x} - x$ ist!

F'(x) $= -1 \cdot e^{2-x} - (x+1) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{1}{2}x = -e^{2-x} + (x+1) \cdot e^{2-x} - x = -e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} + e^{2-x} - x$

$= x \cdot e^{2-x} - x$ **= f(x)** w. z. b. w.

b) **Ermitteln** Sie die Fläche, die durch den Graphen von f (x) und die x-Achse begrenzt wird!

$x \cdot e^{2-x} - x = 0 \rightarrow x_{01} = 0$ und $x_{02} = 2$ (GTR: G-SOLVE / ROOT)

$A = \int_0^2 (x \cdot e^{2-x} - x)\,dx \rightarrow$ **A ≈ 2,39 FE** (GTR: G-SOLVE / $\int dx$)

oder:

$x \cdot (e^{2-x} - 1) = 0 \rightarrow x = 0$ oder $e^{2-x} - 1 = 0$; $e^{2-x} = 1$; $2 - x = 0$; $x = 2$

$A = \int_0^2 (x \cdot e^{2-x} - x)\,dx = F(2) - F(0) = (-3e^0 - 2) - (-e^2 - 0) = e^2 - 5 \approx$ **2,39 FE**

Anwendungen zu Exponential- und Logarithmusfunktionen

1. In einem See verringert sich je 1 m Wassertiefe die Beleuchtungsstärke um 40 %. In 1 m Wassertiefe zeigt der Beleuchtungsmesser 3000 Lux. Wie groß ist die Beleuchtungsstärke E in 2 m, 3 m bzw. in x Metern Tiefe? Gib die Funktionsgleichung $E = f(x)$ an!

2. Strontium-90 hat eine Halbwertszeit von 28 Jahren. Zu Beginn der Beobachtung sind 100 mg vorhanden. Wie lautet die zugehörige Exponentialfunktion? Wie viel Strontium ist nach 50 Jahren noch vorhanden? Hinweis : Die Funktionsgleichung besitzt die Form $m = b \cdot a^t$ (m: Masse, t: Zeit)

3. Ein Radium-Isotop besitzt eine Halbwertszeit von 5 Tagen. Anfangs sind 50 mg vorhanden. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung! Nach welcher Zeit sind nur noch 10 mg Radium vorhanden?

4. Eine Wassermelone wiegt 0,3 kg. Sie verdoppelt unter idealen Bedingungen alle 6 Tage ihre Masse. Für die Masse m in Abhängigkeit von der Zeit t gilt: $m = b \cdot a^t$. Ermittle a und b!

5. 1975 lebten auf der Erde ungefähr 4 Mrd. Menschen. Von 1975 bis 1980 stieg die Erdbevölkerung jährlich um 1,8 % an.
   a) Lege für die genannten Jahre eine Wertetabelle an und zeichne das Bevölkerungs-Zeit-Diagramm!
   b) Bestimme die Zeit, in der sich die Erdbevölkerung verdoppelt, wenn man gleichmäßiges Wachstum annimmt!
   c) Mit welcher Bevölkerungszahl wäre unter dieser Voraussetzung für das Jahr 2010 zu rechnen?

6. 1975 lebten in Afrika etwa 406 Mio. Menschen. 1980 waren es 469 Mio. Menschen.
   a) Um wie viel Prozent wuchs die afrikanische Bevölkerung jährlich, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzt?
   b) 1985 lebten in Afrika 545 Mio. Menschen. Hat sich die Annahme exponentiellen Wachstums bestätigt?
   c) Mit wie viel Bewohnern musste man im Jahr 2000 rechnen?

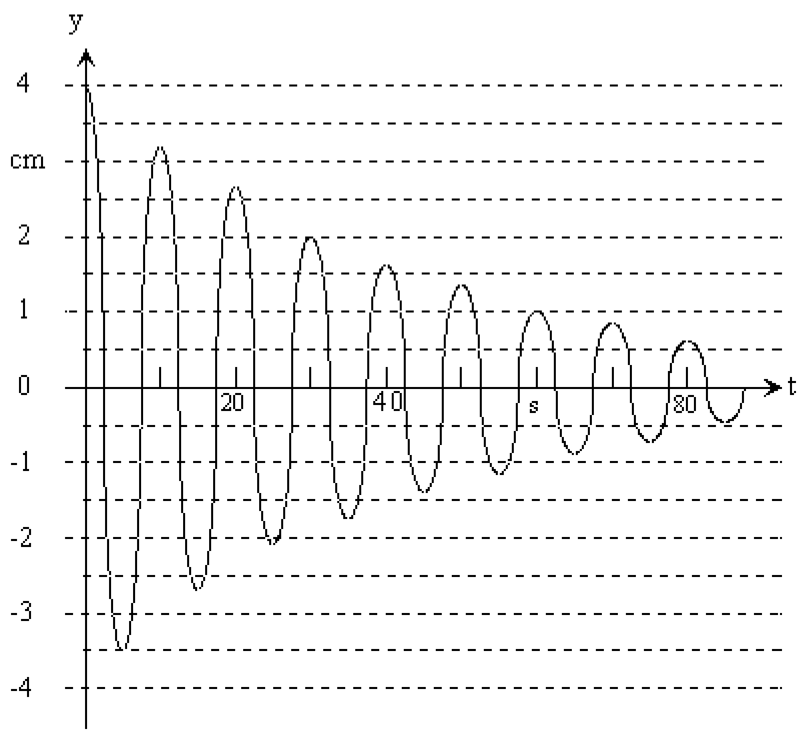
7. Mexiko hatte 1970 etwa 50 Mio. Einwohner. Gib die Wachstumsfunktion an, wenn die Bevölkerung jährlich um 3,5% zunimmt! Wann war in Mexiko mit 75 Mio. Einwohnern zu rechnen?

8. Die gedämpfte Schwingung eines Federpendels wurde aufgezeichnet. Die Amplitude y_{max} nimmt mit der Zeit exponentiell ab.

   a) Bestimme die Amplitude nach jeweils 10 s! Lege dazu eine Wertetabelle an!

   b) Um wie viel Prozent nimmt die Amplitude nach jeweils 10 s ab?

   c) Gib die Funktionsgleichung $y_{max} = f(t)$ an!



9. In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9%. Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Schaumhöhe 10 cm. Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit", wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls größer als 110 Sekunden ist. Zeichne das Schaumhöhe-Zeit-Diagramm für 300 s und überprüfe, ob sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt!

10. Ein Guthaben von 7000 € wird mit jährlich 6% verzinst. In wie vielen Jahren hat es sich **mit Zinseszins** verdoppelt?

11. Ein Pkw verliert jährlich etwa 20% seines Wertes. Ein Mercedes hat einen Neupreis von 87.900 €. Wie lange kann man ihn fahren, um für den Gebrauchtwagen noch 50.000 € zu erhalten?

12. Der Luftdruck nimmt je 1 km Höhe um etwa 12% ab. In 1400 m Höhe wird ein Luftdruck von 847 hPa gemessen, auf einem Berg 447 hPa. Wie hoch ist der Berg?

13.

Schallstärke J / J_o	Lautstärke L in Phon	Beispiel
1	0	Hörschwelle
100	20	Flüstern
10000	40	Unterhaltung
1000000	60	lautes Sprechen
100000000	80	Rasenmäher
1000000000	90	Motorrad
10000000000	100	Kesselschmiede
1000000000000	120	Presslufthammer
10000000000000	130	Schmerzschwelle

a) Um welchen Faktor ändert sich die Lautstärke, wenn statt eines Motorrades zehn Motorräder gehört werden? Es gilt $L = 10 \cdot \lg (J : J_o)$

b) Bestimme die Lautstärke von drei Rasenmähern!

14. An einem geladenen Kondensator liegt eine anfängliche Spannung U_o an. Durch einen Widerstand wird der Kondensator entladen. Nach einer Sekunde beträgt die Spannung am Kondensator 7,36 Volt, nach zwei Sekunden nur noch 2,71 Volt. Während des Entladevorgangs gilt für die Spannung $U = b \cdot a^{-t}$.

a) Gib die Funktionsgleichung $U = f(t)$ an!

b) Wie groß ist die Spannung U_o?

c) Nach welcher Zeit beträgt die Spannung nur noch 1 Volt?

15. Für den Entladevorgang eines Kondensators gilt: $U = Uo \cdot e^{-\frac{t}{d}}$.

Ein Kondensator mit einer Kapazität von 200 µF wird durch einen Widerstand R = 10kΩ entladen. Nach einer Sekunde beträgt die Spannung am Kondensator 6,07 V, nach zwei Sekunden noch 3,68 V.

a) Bestimme die Konstanten U_o und d!

b) Vergleiche d mit dem Produkt $R \cdot C$!

c) Welche Spannung liegt am Kondensator nach zwei Sekunden an, wenn der Widerstand nur 4 kΩ beträgt?

Lösungen

1.)

Tiefe x in m	Beleuchtungsstärke E in lx
0	$3000 \cdot 0{,}6^{-1} = 5000$
1	$3000 \cdot 0{,}6^{0} = 3000$
2	$3000 \cdot 0{,}6^{1} = \mathbf{1800}$
3	$3000 \cdot 0{,}6^{2} = \mathbf{1080}$
4	$3000 \cdot 0{,}6^{3} = 648$
x	$3000 \cdot 0{,}6^{x-1}$

$E(x) = 3000 \cdot 0{,}6^{x-1} = 3000 \cdot 0{,}6^{x} \cdot 0{,}6^{-1}$

$\mathbf{E(x) = 5000 \cdot 0{,}6^{x}}$

2.) 0 Jahre : 100 mg $\rightarrow$ $100 = b \cdot a^{0}$ $\rightarrow$ $b = 100$

28 Jahre : 50 mg $\rightarrow$ $50 = b \cdot a^{28}$ $\rightarrow$ $a \approx 0{,}976$

$\mathbf{m(t) = 100 \cdot 0{,}976^{t}}$ $\quad$ $\mathbf{m(50) = 29{,}7\ mg}$

3.) 0 Tage : 50 mg $\rightarrow$ $50 = b \cdot a^{0}$ $\rightarrow$ $b = 50$

5 Tage : 25 mg $\rightarrow$ $25 = b \cdot a^{5}$ $\rightarrow$ $a \approx 0{,}871$

$\mathbf{m(t) = 50 \cdot 0{,}871^{t}}$

$10 = 50 \cdot 0{,}871^{t}$ $\rightarrow$ $\mathbf{t \approx 11{,}7}$ **Tage**

4.) 0 Tage : 0,3 kg $\rightarrow$ $0{,}3 = b \cdot a^{0}$ $\rightarrow$ $b = 0{,}3$

6 Tage : 0,6 kg $\rightarrow$ $0{,}6 = b \cdot a^{6}$ $\rightarrow$ $a \approx 1{,}122$

$\mathbf{m(t) = 0{,}3 \cdot 1{,}122^{t}}$

5.)

Jahr	Zeit t in Jahren	Bevölkerung B in Mrd.
1975	0	4
1976	1	$4 \cdot 1{,}018^{1} = 4{,}072$
1977	2	$4 \cdot 1{,}018^{2} = 4{,}145$
1978	3	$4 \cdot 1{,}018^{3} = 4{,}220$
1979	4	$4 \cdot 1{,}018^{4} = 4{,}296$
1980	5	$4 \cdot 1{,}018^{5} = 4{,}373$

b) $B(t) = 4 \cdot 1{,}018^{t}$

$8 = 4 \cdot 1{,}018^{t}$

$\mathbf{t \approx 39}$ **Jahre**

c) $B(35) = 4 \cdot 1{,}018^{35}$

$\mathbf{B(35) = 7{,}468}$ **Mrd.**

6.)

Jahr	Zeit t in Jahren	Bevölkerung B in Mio.
1975	0	406
1980	5	469
:	:	:
1985	10	B(10)
2000	25	B(25)

$B(t) = 406 \cdot 1{,}029^{t}$

a) $1{,}029 \rightarrow 102{,}9\ \%$

Wachstum um **2,9 %**

b) $B(10) \approx 540$ Mio. (real : 545 Mio.)

also: **Annahme bestätigt**

c) $\mathbf{B(25) \approx 830}$ **Mio.**

7.) $\mathbf{B(t) = 50 \cdot 1{,}035^{t}}$ $\rightarrow$ $75 = 50 \cdot 1{,}035^{t}$ $\rightarrow$ $t \approx 11{,}8$ Jahre $\rightarrow$ **1982**

(Haack-Atlas, Ausgabe 1983: 75 Mio. Einwohner)

8.)

t in s	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y_{max} in cm	4,0	3,2	2,6	2,0	1,6	1,3	1,0	0,8	0,7
Abnahme a in %		80,0	81,3	76,9	80,0	81,3	76,9	80,0	87,5

b) Mittelwert $\bar{a} \approx 80\ \%$, also **Abnahme um 20 %**

c) $\mathbf{y_{max} = 4{,}0 \cdot 0{,}8^{t}}$