Johannes-Kepler-Gymnasium
12V2 26.9.2013

Aufgaben

1. Wird ein Körper unter dem Einfluss der konstanten Kraft F parallel zur Kraftrichtung um die Strecke Δx verschoben, dann wird die Arbeit $\Delta W = F \cdot \Delta x$ verrichtet. Für eine konstante Kraft gilt also

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = F\,.$$

Ist F nicht konstant sondern eine Funktion von x, dann gilt diese Beziehung nur noch im Grenzfall $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = W'(x) = F$$

Bei bekannter Kraftfunktion $F(x)$ ist also die Arbeit, um den Körper von x_1 nach x_2 zu bringen:

$$\Delta W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) x bezeichne die Dehnung einer Feder mit der Federkonstanten D. Berechne die Arbeit ΔW, um die Dehnung der Feder von x_1 auf x_2 zu erhöhen.

(b) Für ein Gummiseil gilt im x-Intervall $[0; 1{,}2\,\mathrm{m}]$ der Kraft-Weg-Zusammenhang

$$F(x) = Dx + Cx^{20} \quad \text{mit} \quad D = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \quad \text{und} \quad C = 105\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}}.$$

Zeichne den Grafen von F im Intervall $[0; 1{,}0\,\mathrm{m}]$. Berechne die Arbeit $W(x)$, um das Gummiband von null bis x zu dehnen. Berechne speziell $W(1{,}0\,\mathrm{m})$ und $W(1{,}2\,\mathrm{m})$.

(c) Die Gravitationskraft auf einen Körper der Masse m in der Entfernung r zum Erdmittelpunkt ist für $r \geqq R$ ($R = 6380\,\mathrm{km}$ ist der Erdradius)

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

mit $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ (Gravitationskonstante) und $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ (Erdmasse). Berechne die Arbeit $W(r)$, um die Masse m von der Erdoberfläche bis in die Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu befördern. Wie groß ist $W(r)$ für $r \to \infty$? Mit welcher Mindestgeschwindigkeit v_0 müsste man einen Körper an der Erdoberfläche senkrecht nach oben abschießen (keine Luftreibung), damit er die Erde endgültig verlassen kann?

Lösung: (a) $F(x) = Dx \quad \Longrightarrow \quad \Delta W = D\int_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}x = \frac{D}{2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$

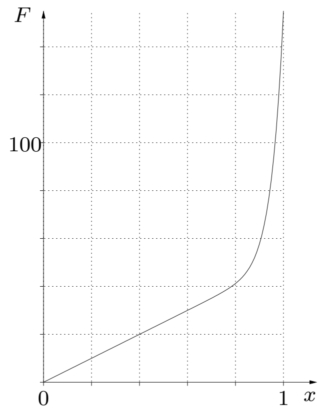
(b)

$$W(x) = \int_0^x F(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_0^x (D\tilde{x} + C\tilde{x}^{20})\,\mathrm{d}\tilde{x} =$$

$$= \left[\frac{D}{2}\tilde{x}^2 + \frac{C}{21}\tilde{x}^{21}\right]_0^x = \frac{D}{2}x^2 + \frac{C}{21}x^{21} =$$

$$= 25\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot x^2 + 5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^{20}}\cdot x^{21}$$

$W(1\,\mathrm{m}) = 30\,\mathrm{J}, \quad W(1{,}2\,\mathrm{m}) = 260\,\mathrm{J}$



(c)

$$W(r) = \int_R^r F(x)\,\mathrm{d}x = \int_R^r \frac{GMm}{x^2}\,\mathrm{d}x = GMm\int_R^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$

$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_R^r = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\lim_{r\to\infty} W(r) = \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{GMm}{R} \quad\Longrightarrow\quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

2. $x(t)$ ist der Ort eines Körpers zur Zeit t. Seine Geschwindigkeit ist definiert durch $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ und seine Beschleunigung durch $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.
   (a) Die Beschleunigung a ist eine bekannte Funktion von t. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch Integralfunktionen mit der unteren Grenze t_0 aus.
   (b) a ist jetzt konstant. Drücke $v(t)$ und $x(t)$ durch die Anfangswerte $v_0 = v(t_0)$ und $x_0 = x(t_0)$ aus.
   (c) Die Masse eines Lastwagens, der stetig Sand verliert, ist $m(t) = m_0 - \alpha t$ für $0 \leqq t \leqq t_1$ mit $m(t_1) = \frac{m_0}{2}$. Für $0 \leqq t \leqq t_1$ wirkt die konstante Antriebskraft F auf den LKW. Berechne $v(t)$ und $x(t)$.
   Zeichne für $F = 10^4\,\mathrm{N}$, $\alpha = 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$, $v(0) = 0$, $x(0) = 0$ und $m_0 = 10^4\,\mathrm{kg}$ die Grafen von v und x im Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$. Zeichne zum Vergleich die Grafen der Geschwindigkeit und des Ortes eines gleichartigen LKWs, der keinen Sand verliert.

Lösung: (a) $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

(b) $v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a\,\mathrm{d}\tau = v_0 + a(t - t_0)$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)]\,\mathrm{d}\tau = x_0 + \left[v_0\tau + \frac{a}{2}(\tau - t_0)^2\right]_{t_0}^t =$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2$$

(c) Aus $m_0 - \alpha t_1 = \frac{m_0}{2}$ folgt $t_1 = \frac{m_0}{2\alpha}$.

$$\dot{v}(t) = a(t) = \frac{F}{m(t)} = \frac{F}{m_0 - \alpha t}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \int\limits_0^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0 + F\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{m_0 - \alpha\tau} = \\ &= v_0 + F\left[\frac{1}{-\alpha}\left(\ln|m_0 - \alpha\tau|\right)\right]_0^t = v_0 - \frac{F}{\alpha}\left(\ln(m_0 - \alpha t) - \ln m_0\right) = \\ &= v_0 - \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0 - \alpha t}{m_0} = v_0 + \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int\limits_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_0 + \int\limits_0^t \left(v_0 + \frac{F}{\alpha}\ln\frac{m_0}{m_0 - \alpha\tau}\right)\mathrm{d}\tau = \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha}\int\limits_0^t \ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right)\mathrm{d}\tau = \\ &= x_0 + v_0 t - \frac{F}{\alpha}\left(-\frac{m_0}{\alpha}\right)\left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right)\cdot\left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}\tau\right) - 1\right\}\right]_0^t = \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{Fm_0}{\alpha^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right)\cdot\left\{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{m_0}t\right) - 1\right\} + 1\right] = \\ &= x_0 + v_0 t + \frac{Fm_0}{\alpha^2}\left[\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right)\cdot\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{m_0}\right) + \frac{\alpha t}{m_0}\right] \end{aligned}$$

Für die speziellen Zahlenwerte gilt:

$$v(t) = -100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ln\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)$$

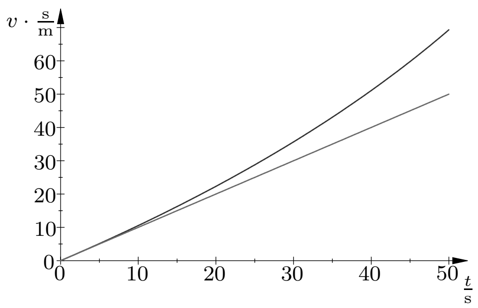
und

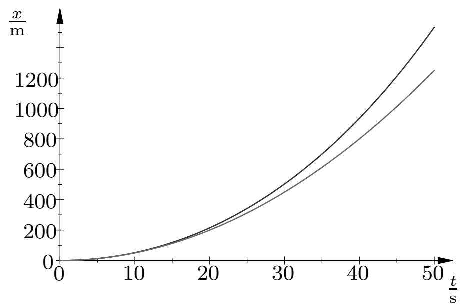
$$x(t) = 10^4\,\mathrm{m}\left[\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right)\ln\left(1 - \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right) + \frac{t}{100\,\mathrm{s}}\right]$$

Mit $t_1 = 50\,\mathrm{s}$ folgt $v(t_1) = 69{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $x(t_1) = 1{,}53\,\mathrm{km}$.

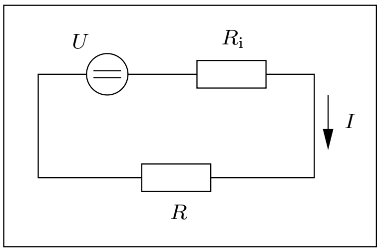
Ohne Sandverlust: $\overline{v}(t) = \frac{F}{m_0}\,t = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t$ und $\overline{x}(t) = \frac{F}{2m_0}\,t^2 = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t^2$.

$\overline{v}(t_1) = 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\overline{x}(t_1) = 1{,}25\,\mathrm{km}$.





3. An eine Stromquelle mit dem Innenwiderstand R_i wird ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen. P sei die im Verbraucher umgesetzte Leistung.
   (a) Für welche Wahl des Widerstandes R ist P maximal? Wie groß ist das maximale P?
   (b) Zeichnen Sie $P(R)$ für $U = 1\,\mathrm{V}$ und $R_\mathrm{i} = 1\,\Omega$.



Lösung: (a) $P(R) = R\,I^2 = U^2 \cdot \dfrac{R}{(R+R_\mathrm{i})^2}$

$$P'(R) = U^2 \cdot \frac{R_\mathrm{i} - R}{(R+R_\mathrm{i})^3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad R = R_\mathrm{i}$$

$$P''(R) = U^2 \cdot \frac{2\,R - 4\,R_\mathrm{i}}{(R+R_\mathrm{i})^4} \quad \Longrightarrow \quad P''(R_\mathrm{i}) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$P_\mathrm{max} = P(R_\mathrm{i}) = \frac{U^2}{4\,R_\mathrm{i}}$$

4. Zur Messung der elektrischen Stromstärke verwendet man in der Regel Drehspulinstrumente. Der Strom fließt durch eine im Magnetfeld drehbar aufgehängte Spule, die durch die magnetische Wirkung des Stroms ausgelenkt wird. In einem speziellen Drehspulinstrument kann zwischen zwei Messmethoden gewählt werden:
   I: Die Stärke des Magnetfeldes ist konstant und der Strom fließt nur durch die drehbare Spule.
   II: Das Magnetfeld wird durch eine stromdurchflossene Spule erzeugt, die mit der drehbaren Spule in Serie geschaltet ist.

   Der Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Auslenkung x der drehbaren Spule wird für $x < 90°$ durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:

   $I_I(x) = 0{,}04\,\dfrac{x}{\cos(x)}$ bzw. $I_{II}(x) = 0{,}2\sqrt{\dfrac{x}{\cos(x)}}$, I jeweils in A, x Maßzahl des Winkels im Gradmaß.

   (a) Für welche Ströme ist die Auslenkung mit der ersten Methode größer?
   (b) Welche Ströme müssen jeweils fließen, damit man die Auslenkungswinkel 10°, 20°, 40°, 60° und 80° erhält?
   (c) Zeichnen Sie die Funktionen für $x \in [\,0\,;\,90°\,[$.
   (d) Unter der Empfindlichkeit eines Stromstärkemessgerätes versteht man den Quotienten $\frac{\Delta x}{\Delta I}$. Erklären Sie, warum diese Definition sinnvoll ist.
   Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen der Ableitung $I'(x)$ der Funktion und der Empfindlichkeit.

(e) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen und stellen Sie sie mit einer geeigneten Software graphisch dar. Diskutieren sie folgende Punkte:
Für welche Auslenkungswinkel bzw. Stromstärken ist die Messanordnung I empfindlicher?
Für welchen Auslenkungswinkel bzw. für welche Stromstärke ist die Empfindlichkeit der Messanordnung II maximal?

Lösung: (a) $I_I(x) = I_{II}(x)$ für $I(x) = 0$ oder $I(x) = 1$. Aus der Berechnung eines geeigneten Funktionswertes z. B. $I_I(20°) = 0{,}85 < 0{,}92 = I_{II}(20°)$ folgt, dass für $I < 1$ die Anordnung II größere Ausschläge liefert.

(b) $I_I(0°) = 0$, $I_I(10°) = 0{,}4$, $I_I(20°) = 0{,}85$, $I_I(40°) = 2{,}1$, $I_I(60°) = 4{,}8$, $I_I(80°) = 18{,}40$
$I_{II}(0°) = 0$, $I_{II}(10°) = 0{,}6$, $I_{II}(20°) = 0{,}92$, $I_I(40°) = 1{,}4$, $I_I(60°) = 2{,}2$, $I_I(80°) = 4{,}3$

(c)

(d) Große Empfindlichkeit bedeutet großes Δx für ein fest vorgegebenes ΔI. Empfindlichkeit$=\frac{1}{I(x)'}$

(e)

$$I_I'(x) = 0{,}04\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$
$$I_{II}'(x) = 0{,}1\sqrt{\frac{\cos x}{x}}\;\frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

5. In den verschiedensten Bereichen der Physik, wie z. B. der Akustik und der Elektrodynamik, treten Schwingungen auf. Wird ein schwingungsfähiges System von außen mit der Frequenz f angeregt (maximale Anregungskraft konstant), hängt seine Reaktion (Amplitude) stark von der Anregungsfrequenz f ab.
Die Amplitude $A(f)$ kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$A(f) = \frac{C}{\sqrt{({f_0}^2 - f^2)^2 + (f\gamma)^2}}$$

Neben Konstanten des Systems (C enthält die maximale Anregungskraft und den Reibungsfaktor γ) hängt $A(f)$ von der Eigenfrequenz f_0 des Systems und der Anregungsfrequenz f ab. Hier werden nur Fälle mit $\gamma < \frac{f_0}{\sqrt{2}}$ betrachtet.

(a) Untersuchen Sie, wie sich die Amplitude $A(f)$ für $f \to 0$ und für $f \to \infty$ verhält und interpretieren Sie die Ergebnisse.

(b) Berechnen Sie allgemein die Resonanzfrequenz (Frequenz, bei der die Amplitude maximal ist) f_R des Systems.

(c) Von welchen Parametern hängt die Resonanzfrequenz in welcher Weise ab? Skizzieren Sie qualitativ die Resonanzfrequenz in Abhängigkeit vom Reibungsfaktor.

(d) Stellen Sie $A(f)$ für $C = 50$, $f_0 = 5$ und $\gamma = 1{,}1$ für $f \in [0; 15]$ graphisch dar.

(e) Diskutieren Sie mit Hilfe einer geeigneten Software, wie sich der Verlauf von $A(f)$ in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern ändert.

Lösung: (a) $\lim\limits_{f\to 0} A(f) = \dfrac{C}{f_0^2}$ System folgt exakt dem Erreger.

$\lim\limits_{f\to\infty} A(f) = 0$ System kommt nicht mehr mit.

(b) $f_R = \sqrt{f_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$

(c) f_R nimmt mit der Eigenfrequenz f_0 des Systems zu und mit dem Reibungsfaktor γ ab. Für kleine Reibungen gilt $f_R \approx f_0$.

6. Reale Gase lassen sich durch die Van-der-Waals-Gleichung $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ beschreiben. Dabei ist p der Druck, V das Volumen pro *kmol* ($6{,}022 \cdot 10^{26}$ Teilchen) und T die Temperatur des Gases. a und b sind Materialkonstanten des Gases und R ist die allgemeine Gaskonstante ($8{,}3144 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kkmol}}$).

   (a) Zeigen Sie, dass die Van-der-Waals-Gleichung für große Volumina (d. h. $V \gg a, b$) in die bekannte Zustandsgleichung idealer Gase $\frac{p \cdot V}{T} = \text{const}$ übergeht.

   (b) Lösen Sie die Van-der Waals-Gleichung nach p auf.

   (c) Für Temperaturen oberhalb eines kritischen Wertes T_k lassen sich Gase auch bei sehr hohem Druck nicht mehr verflüssigen. Für diese Temperatur hat die Funktion $p(V)$ genau einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.
   Bestimmen Sie V_k, T_k und p_k allgemein aus der Van-der-Waals-Gleichung.

   (d) Berechnen Sie V_k, T_k und p_k für Sauerstoff ($a = 137 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{Nm}^4}{\mathrm{kmol}^2}$, $b = 0{,}0316 \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kmol}}$).

Lösung: (a) $V \gg a, b \Rightarrow \frac{a}{V^2} \approx 0, V - b \approx V$
Also $pV \approx TR$.

(b) $p(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

(c) Bedingung I: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$
Bedingung II: $\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$
I in II einsetzen liefert $V_k = 3b$.
$V_k = 3b$ in I einsetzen liefert $T_k = \frac{8a}{27bR}$.
$T_k = \frac{8a}{27bR}$ in $p(V)$ einsetzen liefert $p_k = \frac{a}{27b^2}$.

(d) $T_{k,\text{Sauerstoff}} = 154{,}5\,\mathrm{K}$, $p_{k,\text{Sauerstoff}} = 5{,}08\mathrm{MPa}$,
$V_{k,\text{Sauerstoff}} = 0{,}0948\, \frac{m^3}{kmol}$

7. Die Stromstärke durch eine Schaltung aus einem Widerstand, einer Spule und einem Kondensator hängt von der Frequenz f und der anliegenden Wechselspannung ($\omega = 2\pi f$) ab. Sie berechnet sich nach der Formel

$$I(\omega) = \sqrt{\frac{100 - 2\omega^2}{100R^2 + \omega^2} + 0{,}01\omega^2} \qquad D = \mathbb{R}_0^+.$$

   Für R setzt man dazu die Maßzahl des enthaltenen ohmschen Widerstandes und für f die Maßzahl der Frequenz ein. $I(\omega)$ liefert dann die Maßzahl der Stromstärke.

   (a) Betrachten Sie die Funktion $I(\omega)$ zunächst für $R = 0$.

i. Vereinfachen Sie die Funktionsgleichung und geben Sie die Nullstellen der Funktion an.
ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
iii. Untersuchen Sie, ob die Funktion im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist.
iv. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
v. Zeichnen Sie die Funktion für $\omega \in [0; 25]$.

(b) Betrachten Sie nun die allgemeine Form der Funktion

i. Berechnen Sie $I(10)$ in Abhängigkeit von R.
ii. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für ω gegen Null und gegen Unendlich.
iii. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion.
iv. Zeichnen Sie die Funktion für $R = 0{,}2$.
v. Zeichnen Sie $I(\omega)$ mit einer geeigneten Software für $R \in \{0; 0{,}1; 0{,}2; ...\}$ und beschreiben Sie die Veränderungen der Funktion.
vi. Für welche Frequenz ist $I(\omega)$ unabhängig von R?

Hinweis: Die diskutierte Funktion beschreibt den Anregungsstrom eines Parallelschwingkreises mit $L = 0{,}1$ und $C = 0{,}1$. Die allgemeine Funktion heißt

$$I_{\text{ges}} = \sqrt{\frac{1 - 2LC\omega^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \omega^2 C^2}.$$

Lösung: (a)
i. $I(\omega) = |\frac{1}{0{,}1\omega} - 0{,}1\omega|$, $N(10|0)$
ii. $\lim\limits_{\omega\to 0} I(\omega) = \infty$; $\lim\limits_{\omega\to\infty} I(\omega) = \infty$
iii. Bei $\omega = 10$ nicht differenzierbar!
iv. Für $\omega < 10$ streng monoton fallend und für $\omega > 10$ streng monoton steigend.

(b)
i. $I(10) = \sqrt{1 - \frac{1}{1+R^2}} = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$
ii. $\lim\limits_{\omega\to 0} I(\omega) = \dfrac{1}{R}$; $\lim\limits_{\omega\to\infty} I(\omega) = \infty$
iii. waagrechte Tangente bei $\omega = 0$;
Minimum bei $\omega = 10\sqrt{\sqrt{1+2R^2} - R^2}$
iv.
v. $I(0)$ sinkt; $I(Minimum)$ steigt
vi. $\omega = \sqrt{50}$

8. Mit dem Tröpfchenmodell zur Beschreibung eines Atomkerns läßt sich die Bindungsenergie des Kerns in Abhängigkeit von der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z berechnen. Für die Bindungsenergie erhält man:

$$W(Z, N) = (m_p Z + m_n N)\ c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{2/3} + \beta\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta\frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

(a) Geben Sie die Bindungsenergie für feste Nukleonenzahl $A = Z + N$ an.

(b) Für welche Protonenzahl ist bei fester Nukleonenzahl A die Bindungsenergie mininal? Verwenden Sie dazu $\alpha = (m_n - m_p)\, c^2 = 0{,}78\,\text{MeV}$, $\beta = 0{,}639\,\text{MeV}$ und $\eta = 21{,}7\,\text{MeV}$.

(c) Vergleichen Sie das in (b) erhaltene Ergebnis mit der einfachen Annahme, dass sich in einem Atomkern etwa gleich viele Protonen und Neutronen befinden.

Lösung: (a) $W(Z) = (m_p - m_n)c^2 Z + m_n A c^2 - 6\varepsilon A + 6\varepsilon A^{\frac{2}{3}} + \beta \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \eta \frac{(A-2Z)^2}{A}$

(b) $W'(Z) = -\alpha + Z\left(\frac{2\beta}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{8\eta}{A}\right) - 4\eta \Rightarrow$
minimale Bindungsenergie für

$$Z = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{4\eta}}{1 + \frac{\beta}{4\eta} A^{\frac{2}{3}}} = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 + 9 \cdot 10^{-3}}{1 + 7{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$

(c) Für kleine A erhält man etwa gleich viele Neutronen und Protonen. Je größer A ist, umso mehr weicht die Protonenzahl von $\frac{A}{2}$ ab (kleiner).
TIP: $Z(A)$ und $\frac{A}{2}$ mit Funktionsplotprogramm zeichnen!

9. Zerodur ist eine Glaskeramik, die über einen weiten Temperaturbereich nur eine sehr kleine Temperaturausdehnung aufweist. Aus diesem Grund findet es Anwendung als Spiegelträger in der Lasertechnik und in Teleskopen.
Die Längenausdehnung $f(T)$ (in $\frac{\mu\text{m}}{°\text{C}}$) eines 10 m langen Zerodurstabes in Abhängigkeit von der Temeratur T in °C lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(T) = -0{,}6 + 1{,}63 \cdot \frac{T}{100\,°\text{C}} - 2{,}91 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^2 - 2{,}49 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^3$$

(a) Untersuchen Sie den Kurvenverlauf von $f(T)$.

(b) Zeichnen Sie $f(T)$ mit einer geeigneten Software im Bereich von $-100\,°\text{C}$ bis $100\,°\text{C}$.

(c) Eine exaktere Beschreibung der Längenausdehnung liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(T) &= f(T) + \\ &\quad +2{,}74 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^4 + 1{,}43 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^5 - \\ &\quad -0{,}62 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^6 - 0{,}26 \cdot \left(\frac{T}{100\,°\text{C}}\right)^7\end{aligned}$$

Zeichnen Sie $\tilde{f}(T)$ mit einer geeigneten Software und vergleichen Sie den Graphen mit dem von $f(T)$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Lösung: (a) Substitution: $x = \dfrac{T}{100\,^\circ\mathrm{C}}$,

Maximum $(0{,}22| - 0{,}41)$, Minimum $(-1{,}00| - 2{,}65)$,
Wendepunkt $(-0{,}39| - 1{,}53)$

(b)

(c) Im Temperaturbereich von $-25\,^\circ$C bis $25\,^\circ$C weicht $\tilde{f}(T)$ von $f(T)$ nur geringfügig ab. Hier stellt also $f(T)$ eine genügend gute Näherung dar.
Betrachtet man aber einen größeren Temperaturbereich, muss $\tilde{f}(T)$ verwendet werden.
z. B. $|f(50\,^\circ\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})| = 0{,}204$, $\dfrac{|f(50\,^\circ\mathrm{C}) - \tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})|}{\tilde{f}(50\,^\circ\mathrm{C})} = 33\%$
Dem Diagramm entnimmt man, dass die Längenänderung $\tilde{f}(T)$ eines 10 m langen Stabes im Temperaturbereich von $-100\,^\circ$C bis $100\,^\circ$C ca. $1{,}0\frac{\mu\mathrm{m}}{^\circ\mathrm{C}}$ beträgt. Dies entspricht einer Längenausdehung um 0,00001% pro °C!

Literatur: *Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt*, Werner Schmidt, Ernst Klett Verlag, 1984

.