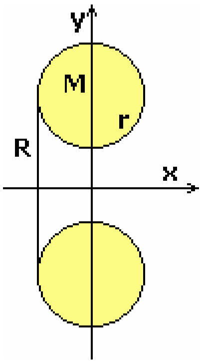
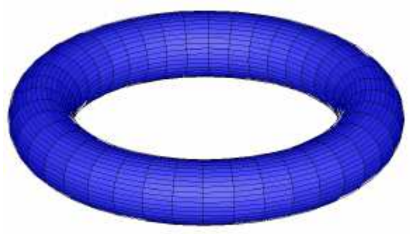
Übungsaufgaben: Anwendung der Integralrechnung

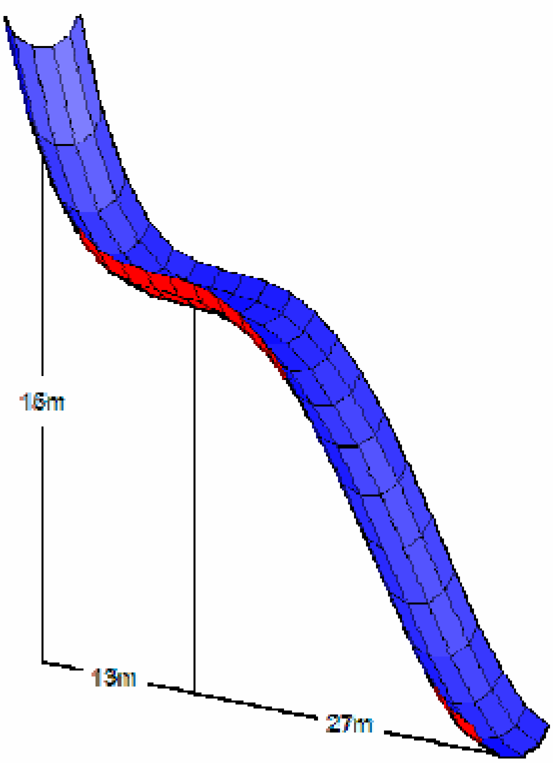


Aufgabe 1:
Ein Schwimmreifen hat die Form eines Torus (Kreisringfläche) mit dem Meridiankreisradius r = 5 cm und dem Mittenkreisradius R = 25 cm.



a) Wie viel Luft passt in den Schwimmreifen, wenn er voll aufgeblasen wird?
b) Wie lange dauert das Aufblasen, wenn pro Atemzug etwa 0,5 Liter Luft ausgeatmet werden und man in Ruhe etwa 15 Atemzüge pro Minute macht?

Guldinsche Regel
Das Volumen eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche A und dem Umfang des von ihrem Schwerpunkt beschriebenen Kreises.

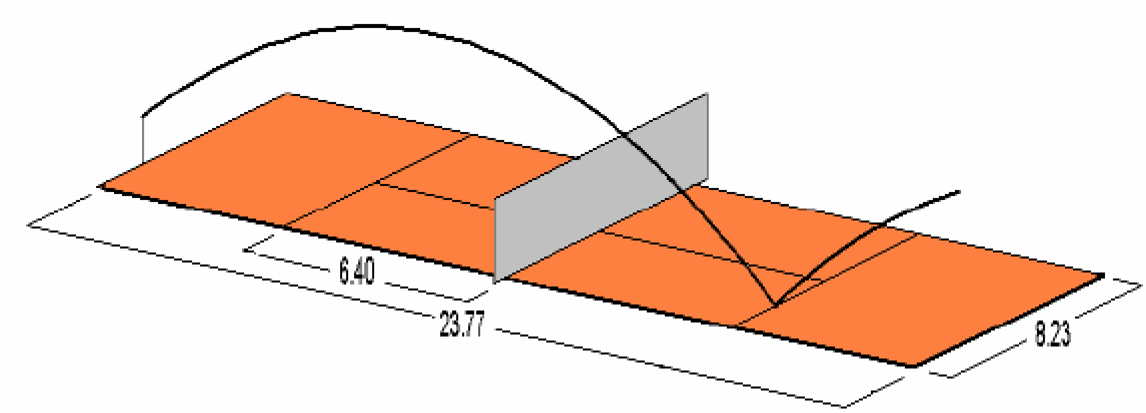


Aufgabe 2:
Eine Wasserrutsche wird durch die Polynomfunktion
$f(x) = 0{,}00005267\, x^4 - 0{,}004635\, x^3 + 0{,}127x^2 - 1{,}424\, x + 15 \quad ; x \text{ in } [0;40]$
beschrieben.
Wie lang ist die durch f(x) definierte Rutsche?

Aufgabe 3:
Wird ein Tennisball auf der Grundlinie in 0,6m Höhe so getroffen, dass er parallel zum Feldrand das Netz in 2,0m Höhe überquert und das gegnerische Feld auf der Aufschlaglinie trifft, dann wird die Flugbahn durch die Funktion

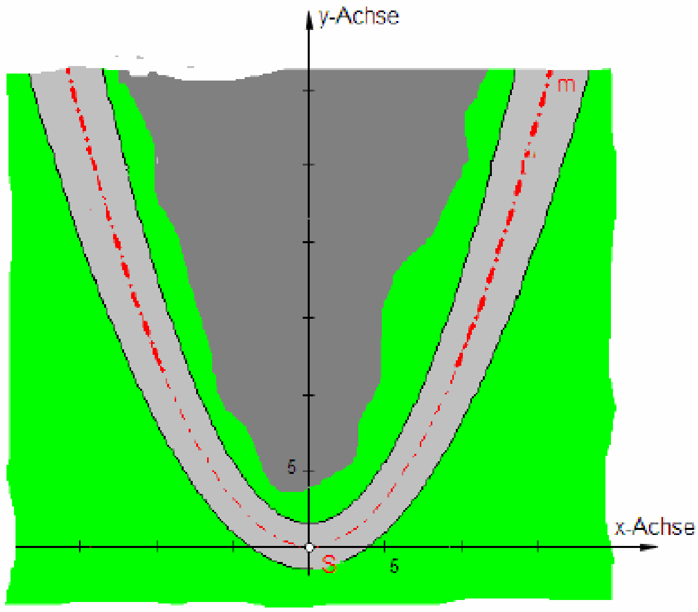
$f(x) = -0{,}024\, x^2 + 0.397\, x + 0{,}6$

beschrieben.



a) Welchen Weg legt der Ball (eigentlich der Schwerpunkt des Balls) zurück?
b) Welche durchschnittliche Geschwindigkeit hat der Ball, wenn die Flugzeit etwa 1,5 Sekunden beträgt?
c) Wie schnell müsste der Tennisspieler (ohne Berücksichtigung des Netzes) durchschnittlich laufen, wenn er den Ball auf der Grundlinie anspielt und danach auf der gegnerischen Aufschlaglinie den Ball wieder anspielen wollte?

Aufgabe 4:



Die (gedachte) Mittellinie m einer Straßenkurve wird näherungsweise durch die Funktion

$y = 0{,}125\ x^2$

beschrieben.

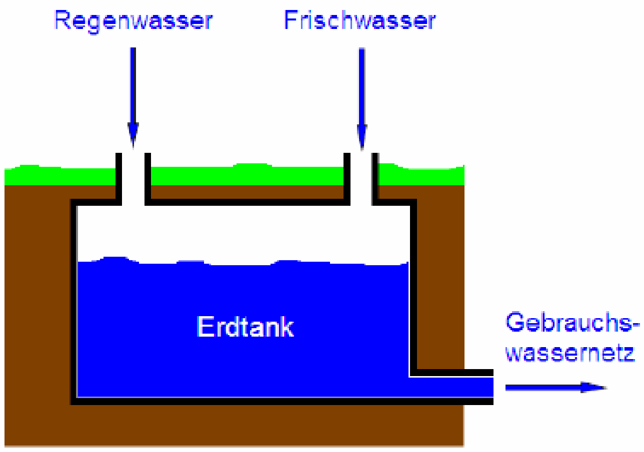
Da sich die Kurve im Bereich des Scheitels verengt und aufgrund der Geländeform die Sicht in die Kurve hinein eingeschränkt ist, sollen 30m vom Kurvenscheitel entfernt zwei über der Straßenmitte hängenden Ampeln aufgestellt werden.

a) Wo müssen die Ampeln (bezüglich des x-y-Systems) angebracht werden?

b) Wie lange benötigt ein PKW zum Passieren der Kurve, wenn er die Strecke von Ampel zu Ampel mit durchschnittlich 25 km/h zurücklegt?

Hinweis: $\int \sqrt{1+(x/4)^2}dx = 2\ln(\sqrt{x^2+16}+x)+\frac{x\sqrt{x^2+16}}{8}+C$

Aufgabe 5:



Eine Familie nutzt Regenwasser zur Bewässerung des Gartens und im Haushalt (WC). Dazu wird Regenwasser in einem 2 m hohen Erdtank gesammelt und der Tank in regenarmen Zeiten auch mit Frischwasser gefüllt.

Man kann annehmen, dass der Füllstand sich an einem Regentag um etwa 6 cm erhöht, sich durch Bewässern des Gartens um etwa 6 cm und durch Nutzung im Sanitärbereich (WC) um etwa 2 cm pro Tag verringert. Dann kann der Füllstand (in cm) des Regenwassertanks in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden.

$h(t) = -0{,}2\ t^3 + 3{,}6\ t^2 - 15{,}2\ t + 150$; t aus [0 ; 13]

Der Hersteller empfiehlt eine Sollfüllhöhe von $h_0=150$ cm.

a) Stelle die Funktion dar.

b) Wann wurde die maximale, wann die minimale Füllhöhe erreicht?

c) Wie groß ist die mittlere Füllhöhe, d.h. das Integral $\frac{1}{13}\int_0^{13} h(t)dt$?

d) Wie groß ist die mittlere Abweichung von der Sollfüllhöhe?

Lösung:

Lösungen

Aufgabe 1:
a) Torusvolumen V = 2 π^2 r² R = 12,34 dm³
b) 24,68 Atemzüge ... 1,7 min

Aufgabe 2:
Bogenlänge 44,3 m

Aufgabe 3:
a) Wurfweite 18,285 m , d.h. Bogenlänge von 0 bis 18,285 ... 37,741 m
b) 25,16 m/s = 90,6 km/h
c) 18,825 m / 1,5 s = 12,19 m/s = 43,9 km/h

Aufgabe 4:
a) Bogenlänge $= \int_0^r \sqrt{1+(0.25x)^2}\,dx = 30$

$\left[2\ln(\sqrt{x^2+16}+x)+\frac{x\sqrt{x^2+16}}{8}\right]_0^r = 30$ wird numerisch gelöst r = 14,1607

Punkte für die Ampeln (14,2 | 25,2) und (-14,2 | 25,2)
b) Wegstrecke zwischen A und B = 60,3 m Zeit 8,6 s

Aufgabe 5:
b) lokales Maximum bei 9,266 mit 159 cm
lokales Minimum bei 2,734 mit 121,4 cm
c) mittlere Füllhöhe $= \frac{1}{13}\int_0^{13} h(x)\,dx =$ 144,15
d) mittlere Abweichung $= \frac{1}{13}\int_0^{13} |h(x)-150|\,dx =$ 9,978