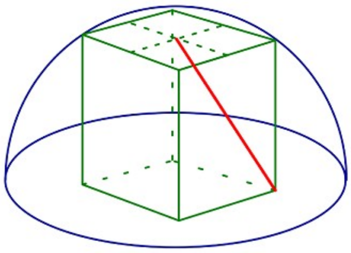
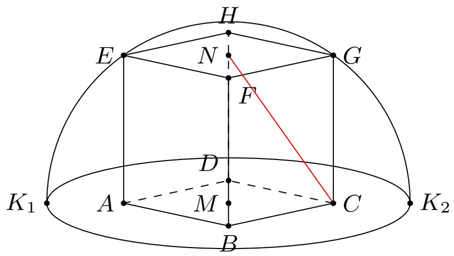
Würfel in Halbkugel

"Mathematisches Rätsel"von Heinrich Hemme Spektrum.de 25.4.2022

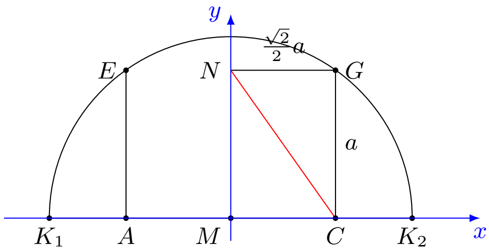


Wie lang ist die rote Diagonale?
Im Inneren einer Halbkugel vom Radius 10 steckt ein Würfel, der mit seinen vier oberen Ecken die Oberfläche der Halbkugel berührt.

Lösung:
Die Eckpunkte der Würfeldeckfläche liegen auf der Kugel. Damit liegen jeweils 2 gegenüberliegende Punkte auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist und dessen Radius $r = 10$ cm ist; in der Abbildung z.B. die Punkte E und G. Auf diesem Kreis liegen auch die zwei Punkte K_1 und K_2 der Halbkugel.



Schneidet man die Halbkugel mit der Ebene K_1K_2GE auf, so entsteht ein Halbkreis. Legt man zusätzlich ein Koordinatensytem mit seinen Achsen (wie in der nachfolgenden Abbildung) ein, so wird:



In diesem Koordinatensystem hat der Halbkreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 = 100 \tag{1}$$

Auf diesem Kreis liegen die zwei Punkte E und G. G hat die y-Koordinate $y = a$, wenn a die Kantenlänge des gesuchten Würfels ist. Der Abstand $\overline{EG}$ ist gleich der Länge der Flächendiagonale des Würfels. Die Diagonale d eines Würfels ist gleich $d = \sqrt{2}a$. Damit ist die x-Koordinaten von G gleich $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}a$.
Die Koordinaten des Punktes $G\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a, a\right)$ müssen die Gleichung (1) erfüllen, da G auf dem Halbkreis liegt:

$$x_G^2 + y_G^2 = 100 \quad , \quad \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 + a^2 = 100$$

Vereinfachen der Gleichung ergibt $\dfrac{3a^2}{2} = 100$ mit der Lösung $a = \frac{10}{3}\sqrt{6} \approx 8{,}165$ cm. Die zweite, negative Lösung entfällt.
Für die Diagonale d wird damit $d = \sqrt{2}a = \frac{20}{3}\sqrt{3} \approx 11{,}547$ cm.

Die gesuchte rote Linie ist die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck MCN, wobei N der Mittelpunkt der Deckfläche ist. (siehe 1. und 2.Abbildung) Dort gilt

$$\overline{CM}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{CN}^2$$

Mit $\overline{CM} = \frac{1}{2}d$ und $\overline{NM} = a$ wird

$$\overline{CN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{10\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$