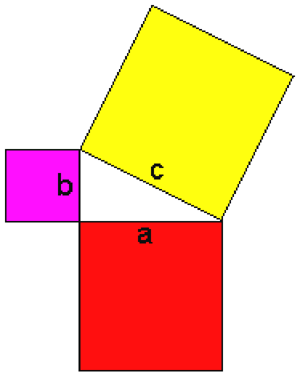


Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Maßzahlen der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

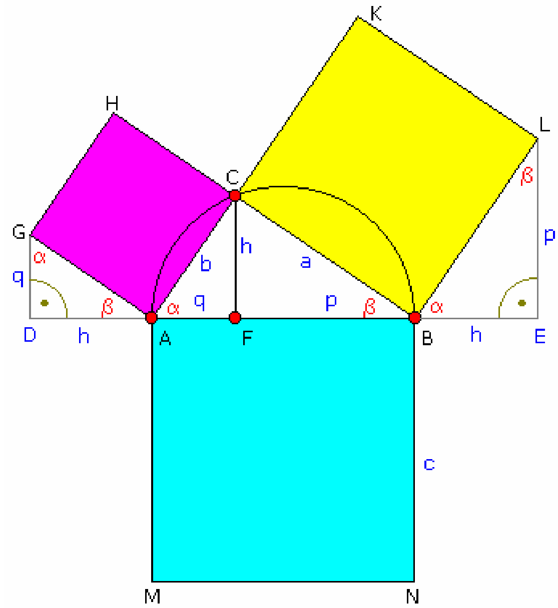
$$c^2 = a^2 + b^2$$

- erstmals nachgewiesen um 1900-1600 v.Chr. auf babylonischer Tafel
- weder Pythagoras (560-480 v.Chr.) noch einem Vertreter seiner Schule gelang der Beweis des Satzes
- Euklid veröffentlichte um 300 v.Chr. in seinem Werk "Elemente" einen der ersten Beweise

Wird das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C so in ein Koordinatensystem gelegt, dass A sich im Ursprung befindet und die Hypotenuse auf der positiven x-Achse liegt, so ergeben sich für die Punkte der Pythagoras-Figur:

A (0 ; 0)	B (c ; 0)
C (q ; h)	F (q ; 0)
D (-h ; 0)	E (c + h ; 0)
G (-h ; q)	H (-h + q ; q + h)
L (c + h ; p)	K (c + h - p ; p + h)
M (0 ; -c)	N (c ; -c)

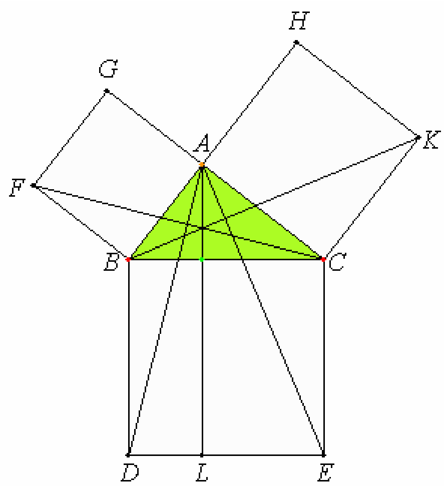
Satz des Pythagoras - Euklidischer Beweis



"Elemente": § 47 (L. 33):

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

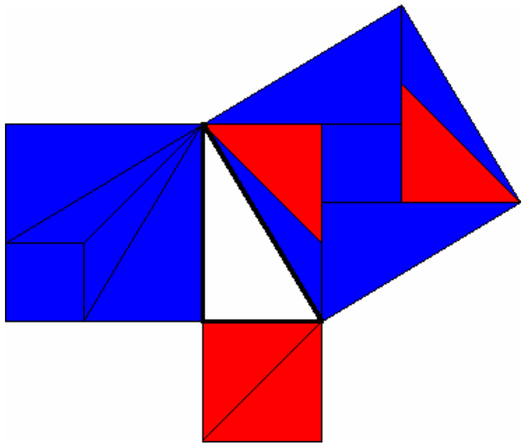
ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, dass BC² = BA² + AC². Man zeichne nämlich über BC das Quadrat BDEC (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A AL || BD oder CE und ziehe AD, FC.
Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen = 2 R. sind; also setzt CA AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist ∠ DBC = FBA; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2). Da ferner DB = BC und FB = BA (I, Def. 22), sind die zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC überkreuz entsprechend gleich; und ∠ DBA = ∠ FBC; also ist Grdl. AD = Grdl. FC ind Δ ABD = Δ FBC (I, 4).



Ferner ist Pgm. BL = 2 Δ ABD; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat GB = 2 Δ FBC; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, QC. Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).
Also ist Pgm. BL = Quadrat GB. Ähnlich lässt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, dass auch Pgm. CL = Quadrat HC; also ist das ganze Quadrat BDEC den zwei Quadraten GB + HC gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat BDEC über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. – S.

Satz des Pythagoras - Beweis

Historischer Beweis von Liu Hui:



In dem chinesischen Mathematikbuch "Jiuzhang suanshu" (Arithmetik in 9 Kapiteln) aus dem 1.Jahrhundert v.Chr. finden sich im 9.Kapitel 24 Probleme und deren Lösung, allerdings ohne Nachweis. Die ersten Fragen sind:
1. Wenn die [Länge der kleineren] Kathede [eines rechtwinkligen Dreiecks] 3 chi, und die längere Kathede 4 chi ist, wie lang ist die Hypotenuse ?
Antwort: 5 chi.
2. Ist die Hypotenuse 5 chi, und die kurze Kathete 3 chi, wie lang ist die lange Kathete?
Antwort: 4 chi.
3. Ist die lange Kathete 4 chi, und die Hypotenuse 5 chi, wie lang ist die kurze Kathete ?
Antwort: 3 chi.
Im 3.Jahrhundert kommentiert Liu Hui das Werk und gibt folgenden Zerlegungsbeweis: Die kurze Kathete mit sich selbst multipliziert ist das rote Quadrat, die lange Kathete mit sich selbst multipliziert das blaue Quadrat. Verschiebt man die Abschnitte dieser Quadrate (siehe Skizze) in das Quadrat über die Hyotenuse, wird dieses vollständig überdeckt.

Satz des Pythagoras - Beweis mit Heronscher Dreiecksformel

Gegeben: Dreieck mit Seiten a, b und c, Halbumfang $p = (a + b + c)/2$ und Flächeninhalt A. Nach Herons Dreiecksformel ist dann:

$$A^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Ist das Dreieck rechtwinklig und c die Hypotenuse, wird $A = ab/2$. Dann ist
$p - a = (- a + b + c)/2$ $\qquad$ $p - b = (a - b + c)/2$
$p - c = (a + b - c)/2$

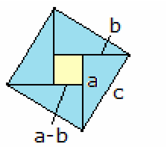
$$(a + b + c)(- a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) =$$
$$=2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$$

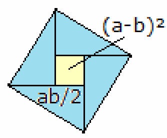
und weiter $4a^2b^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)$

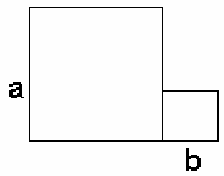
$$(a4 + 2a^2b^2 + b4) - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 = 0$$
$$(a^2 + b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) + c^4 = 0 \text{ und so } [(a^2 + b^2) - c^2]^2 = 0$$

Satz des Pythagoras - Bhaskara

Durch den indischen Mathematiker Bhaskara (1114-1185) wurde ebenfalls ein origineller Beweis des Satzes von Pythagoras angegeben. Dabei verwendet er Mittel, die schon den Babyloniern bekannt waren:

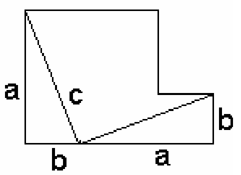




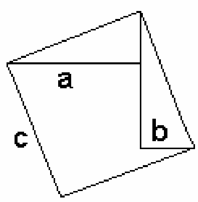


Das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c sei viermal so angeordnet wie in der Abbildung, dann ergibt sich das äußere Quadrat mit der Seitenlänge c und das innere Quadrat mit der Seitenlänge (b - a).
Der Flächeninhalt des äußeren Quadrates ist genauso groß wie die Summe aus dem inneren Quadrat und den vier rechtwikligen Dreiecken:

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot (ab)/2$$
$$c^2 = b^2 - 2ab + a^2 + 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

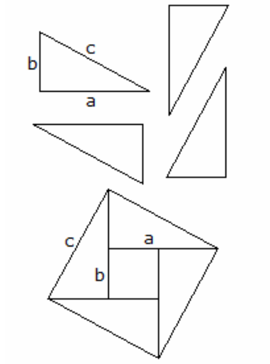


Beweis 3



gegeben: Zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b. Deren Gesamtfläche beträgt a^2+b^2.
Trägt man an der waagerechten Seite b ab und verbindet entsprechend der 2.Skizze, so ergibt sich die Hypotenuse c. (Thãbit ibn Qurra, 836-901):
Durch Drehung der beiden entstandenen Dreiecke um jeweils 90°, ergibt sich ein Quadrat mit der Seitenlänge c und der Fläche c^2. D.h. $a^2 + b^2 = c^2$

Beweis 4

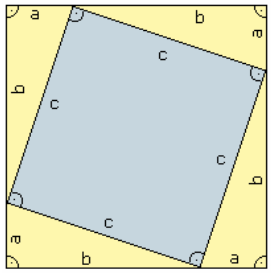


Ausgehend von vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, werden drei Dreiecke um 90°, 180° und 270° gedreht. Jedes dieser Dreiecke hat eine Fläche von ab/2. Diese vier Dreiecke werden zu einem Quadrat mit der Seitenlänge c zusammengeschoben. (untere Skizze). Dabei bleibt im Inneren ein Quadrat mit der Seitenlänge a-b und eine Fläche von $(a-b)^2$ frei.
Die vier Dreiecke (Fläche 4 * ab/2) und dieses kleine Quadrat ergeben:

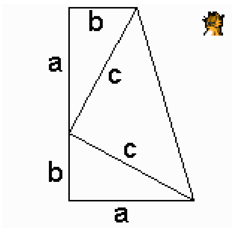
$$4 * ab/2 + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

c^2 ist die Fläche des großen Quadrates. w.z.z.w.

Beweis 5

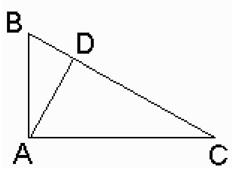


Werden die vier Dreiecke so zu einem Quadrat zusammengelegt, dass dieses eine Seitenlänge a+b besitzt, so bleibt im Innern ein Quadrat der Seitenlänge c frei. Damit wird : $(a+b)^2 = 4*ab/2+c^2$ und entsprechend weiter.
Der Spezialfall dieses Beweise für ein 3-4-5-Dreieck findet man schon in dem antiken chinesischen Mathematiklehrbuch "Chou Pei Suan Ching", das auf eine Entstehungszeit zwischen 300 v.u.Z. und 200 u.Z. datiert wird.



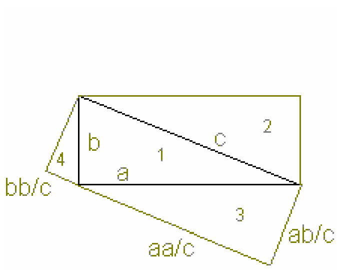
Beweis 6

Dieser Beweis stammt von dem US-amerikanischen Präsidenten(!) J.A.Garfield von 1876.
Zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke werden wie in der Skizze zusammengestellt. Das gebildete Trapez hat eine Fläche von (a+b)/2 * (a+b).
Die Fläche der 3 Dreiecke ergibt sich zu ab/2 + ab/2 + c*c/2. Und damit $a^2+b^2 = c^2$.



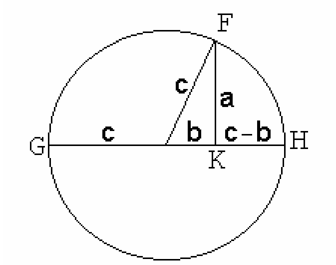
Beweis 7

Im Ausgangsdreieck ABC wird die Höhe auf BC gefällt, der Höhenfußpunkt ist D.
Dann sind die Dreiecke ABC, BDA und ADC ähnlich, wodurch die Seitenverhältnisse AB/BC = BD/AB und AC/BC = DC/AC gelten.
Daraus wird AB*AB = BD*BC und AC*AC=DC*BC. Durch Addition beider Gleichungen wird AB*AB+AC*AC = BD*BC+DC*BC = (BD+DC)*BC = BC*BC



Satz des Pythagoras - Beweis 8

Aus das rechtwinklige Dreieck (1) werden, wie in der Abbildung, die ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke (2) bis (4) aufgesetzt. Damit entsteht ein Rechteck (1+3+4) und das Dreieck (2) oder das Rechteck (1+2) und zwei Dreiecke (3) und (4).
Es wird: $ab/c * (a^2+b^2)/c + ab/2 = ab + (ab/c * a^2/c + ab/c * b^2/c)/2$
und somit $ab/c * (a^2+b^2)/c/2 = ab/2$ bzw. $(a^2+b^2)/c^2 = 1$

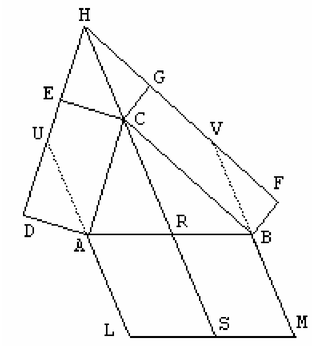


Beweis 9

In einem Kreis mit dem Radius c wird wie dargestellt das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten a und b eingezeichnet.
Dann gilt: Die Punkte F, G und H liegen auf dem Kreis und bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit FK als Höhe der Länge a. Die Hypotenuse dieses Dreiecks wird im Verhältnis (c+b)/(c-b) geteilt.
Somit wird $a^2 = (c+b)(c-b) = c^2 - b^2$.

Beweis 10

Pappusscher Parallelogrammsatz

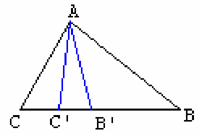


Dieser Beweis verallgemeinert den Satz des Pythagoras. Zum einen werden nicht nur rechtwinklige Dreiecke betrachtet, zum anderen werden über den Dreiecksseiten Parallelogramme errichtet. Erstmals wurde dieser Beweis von Pappus von Alexandria im Buch IV seiner "Collectiones" gegeben.
Über den Seiten werden Parallelogramme CADE und CBFG errichtet. Die Geraden DE und FG schneiden sich in H. Durch A und B werden die Geraden AL und BM parallel und gleichlang zu HC gezeichnet.
Dann ist $\text{Fläche}_{ABML} = \text{Fläche}_{CADE} + \text{Fläche}_{CBFG}$
Da bei einer Scherung der Flächeninhalt erhalten bleibt, wird

$\text{Fläche}_{CADE} = \text{Fläche}_{CAUH} = \text{Fläche}_{SLAR}$

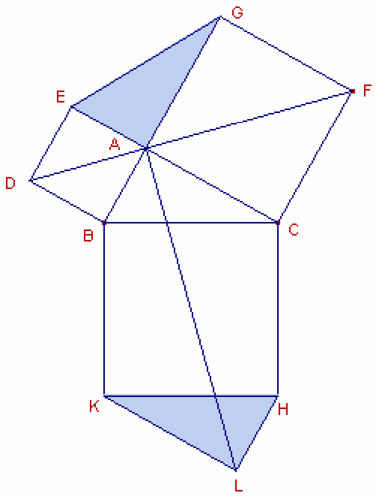
$\text{Fläche}_{CBFG} = \text{Fläche}_{CBVH} = \text{Fläche}_{SBMR}$

und damit das Gesuchte. Der Pappussche Parallelogrammsatz wird auch Satz von Clairaut genannt.



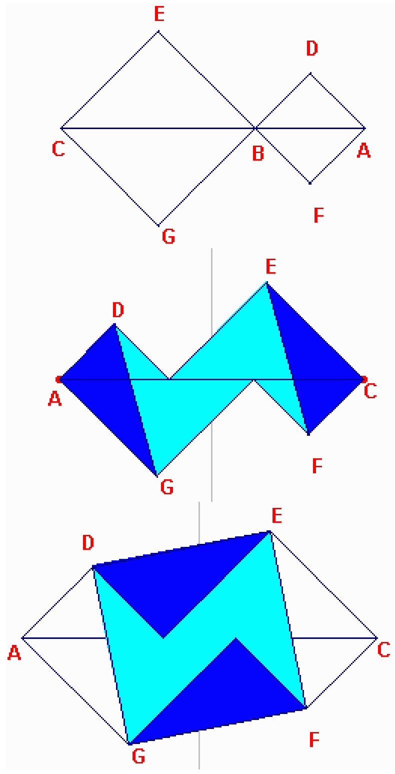
Beweis 11

2. Beweis von Tabit ibn Qurra (836-901): Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC. Wenn die Winkel CAB, AC'B und AB'C gleich sind, dann gilt $AC^2 + AB^2 = BC\,(CB' + BC')$
Dann sind die Dreiecke ABC, AC'B und AB'C ähnlich und somit AB / BC' = BC / AB und AC / CB' = BC / AC.
Ist der Winkel bei A ein rechter Winkel, so folgt daraus unmittelbar der Satz des Pythagoras.



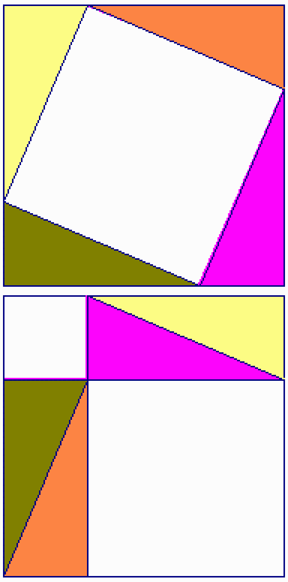
Beweis 12

nach Tempelhof, 1769:
Die Pythagoras-Figur wird im Punkt A und an der Seite KH um jeweils ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck ergänzt.
Dann entstehen zueinander kongruente Vierecke BDFC, DFGE und ABKL, ACHL.
Über den Vergleich der Flächen dieser Vierecke unter Abzug der zwei jeweils auftretenden Ausgangsdreiecke ergibt sich der Satz des Pythagoras.



Beweis 13

Beweis nach Leonardo da Vinci:
Ausgangspunkt sind zwei Quadrate ABDF und BECG mit den Seitenlängen a und b. Die Quadrate sind so angeordnet, dass die Diagonalen AB und BC auf einer Geraden liegen.
Die Punkte werden nun nacheinander an der Strecke AC und an der Mittelsenkrechten von AC gespiegelt. Dabei ergibt sich die zweite Abbildung.
Mit Drehung des Dreiecks ADG um D und das Dreiecks ECF um F entsteht die dritte Abbildung, womit die beiden Quadratflächen zur Deckung mit einem Quadrat der Hypotenusenlänge c gebracht wurden.

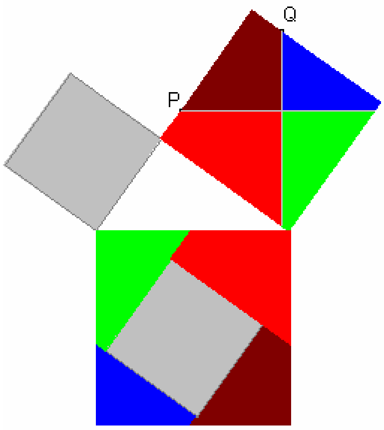


Satz des Pythagoras - Beweis 14

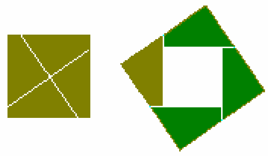
Dieser Zerlegungsbeweis des chinesischen Mathematikers Chou-Pei Suan-Ching (um 1100) ähnelt dem Beweis Nr.5.
Die im Quadrat mit der Seitenlänge (a+b) eingefügten vier rechtwinkligen Dreiecke (Seitenlängen a und b) werden wie in der zweiten Abbildung angeordnet. Durch Vergleich der Flächen unter Abzug der vier Dreiecke ergibt sich in beiden Darstellungen das gleiche Ergebnis und somit $a^2 + b^2 = c^2$, wobei c die Seitenlänge des oben "frei bleibenden" Quadrates ist.

Satz des Pythagoras - Beweis 15

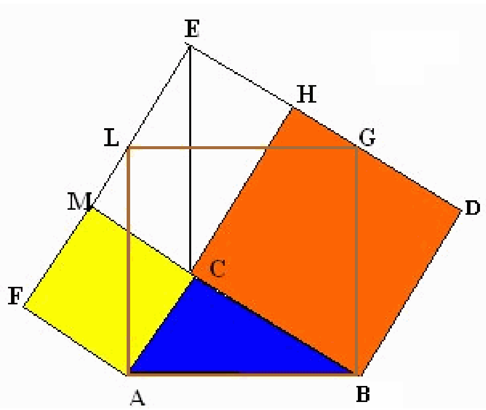
Dieser Zerlegungsbeweis stammt von dem englischen Mathematiker Henry Perigal (1801-1898), den er 1830 veröffentlichte.



Satz des Pythagoras - Beweis 16



Der unten dargestellte Beweis wird H.E.Dudeney (1917) zugeschrieben.
Es schneidet das Quadrat auf der größeren Seite in vier Teile, die dann mit dem kleineren kombiniert werden, um das Quadrat zu bilden, das auf der Hypothenuse errichtet wird.
Wahrscheinlich wurde dieser Beweis schon 1873 von Henry Perigal, einem Londoner Börsenmakler, veröffentlicht.

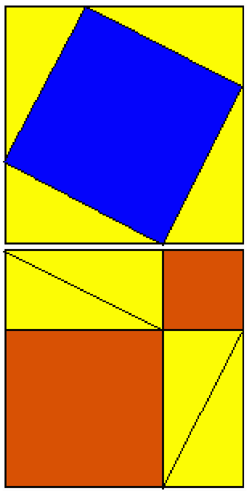


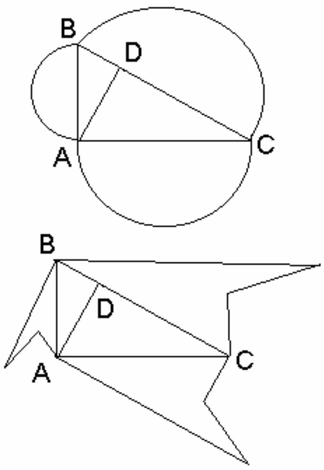
Beweis 17

3. Beweis von Tabit ibn Qurra (836-901):
In der Figur sind die Dreiecke ABC, CEH, CEM, BGD, EGL, AFL zueinander kongruent. Für den Flächeninhalt des Fünfecks ABDEF ergibt sich
ABDEF = $AC^2 + BC^2 + \Delta ABC + \Delta CEH + \Delta CEM$
aber auch
ABDEF = $AB^2 + \Delta BGD + \Delta EGL + \Delta AFL$
Durch Gleichsetzen und Subtraktion des jeweils 3 kongruenten Dreiecke ergibt sich unmittelbar der Satz des Pythagoras.

Beweis 18

Der rechte Zerlegungsbeweis ergibt sich allein aus der Darstellung.
Der Beweis wurde u.a. von Rufus Isaac im Mathematics Magazine, Vol. 48 (1975), veröffentlicht.



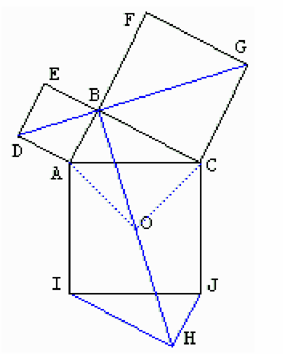


Beweis 19

Beweis aus der englischen Euklid-Übersetzung von Sir Thomas L. Heath: In right-angled triangles the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly described figures on the sides containing the right angle.

Let ABC be a right-angled triangle having the angle BAC right; I say that the figure on BC is equal to the similar and similarly described figures on BA, AC. Let AD be drawn perpendicular. Then since, in the right-angled triangle ABC, AD has

been drawn from the right angle at A perpendicular to the base BC, the triangles ABD, ADC adjoining the perpendicular are similar both to the whole ABC and to one another [VI.8]. And, since ABC is similar to ABD, therefore, as CB is to BA so is AB to BD [VI.Def.1]. And, since three straight lines are proportional, as the first is to the third, so is the figure on the first to the similar and similarly described figure on the second [VI.19]. Therefore, as CB is to BD, so is the figure on CB to the similar and similarly described figure on BA.
For the same reason also, as BC is to CD, so is the figure on BC to that on CA; so that, in addition, as BC is to BD, DC, so is the figure on BC to the similar and similarly described figures on BA, AC. But BC is equal to BD, DC; therefore the figure on BC is also equal to the similar and similarly described figures on BA, AC. Therefore etc. Q.E.D.

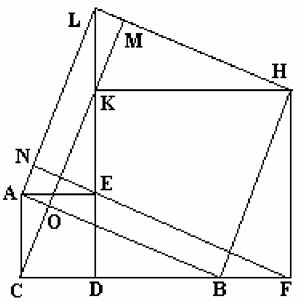


Beweis 20

Dieser Beweis wird ebenfalls Leonardo da Vinci zugeschrieben.
Alle Vierecke ABHI, JHBC, ADGC und EDGF sind ähnlich. Dies folgt aus der Tatsache, dass der Winkel ABH gleich 45° ist. Dies ergibt sich, da ABC rechtwinklig ist und die Mitte des Quadrates ACJI auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegt.
Offensichtlich ist auch Winkel ABO gleich 45°. Und damit:

A(ABHI) + A(JHBC) = A(ADGC) + A(EDGF).

Jede Summe enthält zwei Flächen die ABC gleich sind (IJH oder BEF).
Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz des Pythagoras.

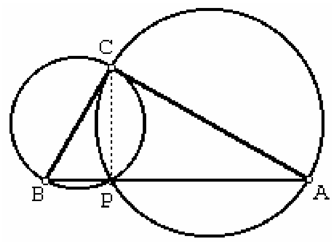


Beweis 21

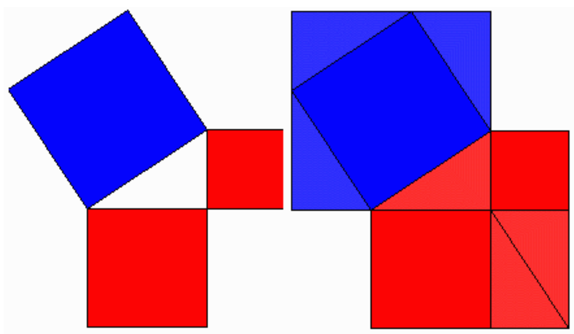
B.F.Yanney (1903): Die Flächen LMOA, LKCA und ACDE; d.h. AC²; sind als Scherungen gleich, ebenso die Flächen HMOB, HKCB und HKDF, d.h. BC², und somit BC = DF.
Daraus folgt AC² + BC² = Fläche(LMOA) + Fläche(HMOB) = Fläche(ABHL) = AB².

Beweis 22

Dieser Beweis benutzt den Sekanten-Tangenten-Satz am Kreis, nachdem das Produkt aus der Länge einer Sekante und ihrem äußeren Abschnitt gleich dem Quadrat der Tangentenlänge ist.

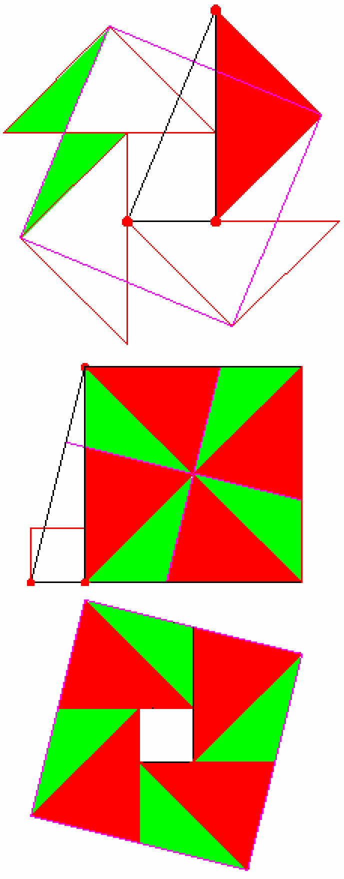


Gegeben sei wieder das rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Der Lotfußpunkt von C auf der Hypotenuse sei P. Da der Winkel CPB gleich 90° ist, liegt der Punkt P auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC, analog P auf dem Kreis mit Durchmesser AC. Damit bildet die Schnittsehne beider Kreise die Strecke CP und ist senkrecht auf AB. Somit sind die Kreisdurchmesser AC und BC jeweils Tangente des anderen Kreises. Sind x und y die Längen der Strecken BP und PA sowie a , b, c die Längen der Seiten ABC, so ist x + y = c.
Da bei C der rechte Winkel liegt und BC Tangente zum Kreis mit Durchmesser CA ist wird nach dem Sekanten-Tangenten-Satz b² = x * c; und analog a² = y * c. Addition beider Gleichungen ergibt
a² + b² = xc + yc = c².



Beweis 23

Bei dieser Variante eines Beweis über den Vergleich von Flächen, wird die Pythagoras-Figur zu zwei Fünfecken ergänzt.
Das rote ist dem blauen Fünfeck offensichtlich flächengleich. Durch Wegnahme von je drei kongruenten Dreiecken ergibt sich somit das Satz des Pythagoras.
Beweis nach Monty Phister, Gnarly Mathe
Der erste Beweis in dieser Art wurde schon 1988 durch den nierderländischen Mathematiker Eduard Douwes Dekker unter dem Pseudonym Multatuli veröffentlicht.

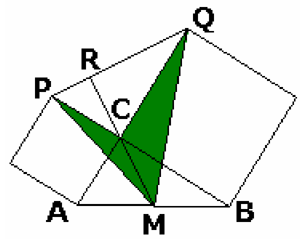


Beweis 24

Beweis aus R.Nelsens "Proofs without words II", 1999:
Ausgangspunkt ist die Konstruktion von vier gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecken, von denen das erste (rot gezeichnet) die Hypotenuse gleich einer der Katheten des Ausgangsdreiecks hat, o.B.d.A. zum Beispiel b. Weiterhin werden die vier Dreiecke so platziert, dass sie im Inneren ein Quadrat mit einer Seitenlänge gleich der zweiten Kathete ergeben.

Dann bilden die vier, am rechten Winkel gelegenen Ecken dieser Dreiecke ein Quadrat mit der Seitenlänge c (Hypotenuse).
Von vier Paaren kongruenter Dreiecke (ein Paar ist grün dargestellt) liegt jeweils ein Dreieck innerhalb des Quadrates, eines außerhalb. Jedes der gleichschenkligen Dreiecke hat einen Flächeninhalt von $b^2/4$. Und damit ergibt sich $a^2 + 4\, b^2/4 = c^2$
Die zwei unteren Abbildungen zeigen veränderte Anordnungen der auftretenden Dreiecke.

Beweis 25

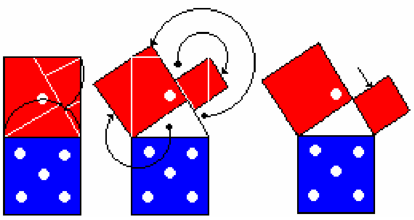


Beweis von Ann Condit, 1938, US-amerikanische High-School-Studentin:
Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC, dessen Seiten wie üblich bezeichnet werden.
Auf den Katheten werden wie in der Darstellung Quadrate errichtet. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind dann die Dreiecke ABC und PCQ kongruent und somit die Winkel ∠ QPC = ∠ CAB.
M sei der Mittelpunkt der Hypotenuse. Der Schnittpunkt der Geraden MC und PQ sei R. Da M der Mittelpunkt des Umkreises ist, ist das Dreieck CMB gleichschenklig und die Winkel ∠ MBC = ∠ MCB. Da auch ∠ PCR = ∠ MCB ist und ∠ QPC = ∠ CAB, folgt dass der Winkel ∠ CRP ein rechter ist, d.h. MR steht senkrecht auf PQ.
Die Höhe von M auf PC ist gleich AC/2 = b/2, ebenso PC = b. Damit ist der Flächeninhalt von MCP = $b^2/4$. Anderseits ist

Fläche(MCP) = CM * PR/2 = c * PR/4
Fläche(MCQ) = $a^2/4$
Fläche(MCQ) = CM * RQ/2 = c * RQ/4

Summiert man die Flächeninhalte, wird

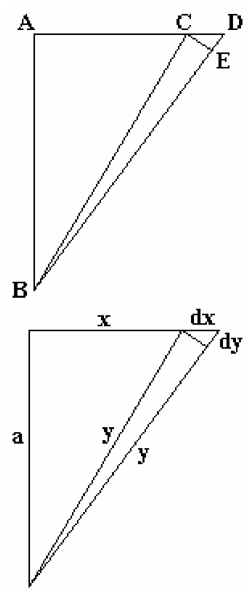
$a^2/4 + b^2/4 = c * PR/4 + c * RQ/4 = c * c/4$, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$



Beweis 26

In der Darstellung ist ein schöner Beweis von Mario Pacek zu sehen.

Beweis 27

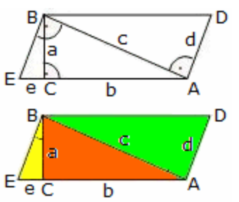


Michael Hardy, Universität von Toledo, veröffentlicht in "The Mathematical Intelligencer" 1988:
ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse BC, weiterhin AC = x und BC = y. Bewegt sich C längs von AC, so verändern sich x umd dy und y um dy. Das Dreieck CDE ist dann näherungsweise rechtwinklig und auf Grund des gleichen Winkels D ähnlich zum Dreieck ABD, womit x / y = dy / dx gilt. Damit ergibt sich die Differenzialgleichung $y \cdot dy - x \cdot dx = 0$
Nach Integration wird $y^2 - x^2 = \text{const.}$ Der konstante Wert ergibt sich aus der Anfangsbedingung für x = 0: $y(0) = a$ $y^2 = x^2 + a^2$ für alle x.
Anmerkung zu dem "näherungsweise rechtwinkligen" Dreieck CDE:
Aus $AB^2 + AC^2 = BC^2$ und $AB^2 + AD^2 = BD^2$, d.h.
$x^2 + a^2 = y^2$ und $(x + dx)^2 + a^2 = (y + dy)^2$
wird $y \cdot dy - x \cdot dx = (dx^2 - dy^2)/2$

Für kleine dx und dy streben dx^2 und dy^2 stärker gegen Null und können vernachlässigt werden. Damit ergibt sich

$$y \cdot dy - x \cdot dx = 0$$

und CDE ist näherungsweise rechtwinklig.
Ein merkwürdiger Nachweis des Satzes von Pythagoras, bei dem man den Eindruck nicht loswird, dass hier ein Zirkelschluss und somit kein korrekter Beweis vorliegt.



Beweis 28
Parallelogramm

Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck ABC. Durch Senkrechte und Parallelverschiebung konstruiert man die Dreiecke BAD und ECB. Die 3 Dreiecke sind zueinander ähnlich, Dreieck ABE ist kongruent zu Dreieck BAD. Der Ähnlichkeit wegen gilt

$$e/a = a/b \rightarrow e = a^2/b \qquad d/a = c/b \rightarrow d = ac/b$$

Der Kongruenz wegen gilt:

Dreieck BEC + Dreieck ABC = Dreieck DBA

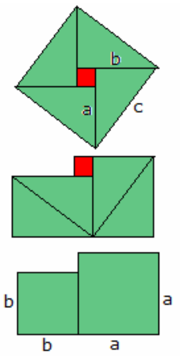
gelb + orange = grün

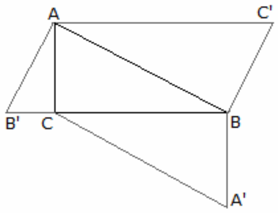
und folglich $ea/2 + ab/2 = dc/2$; Multiplikation mit 2 und e, d ersetzen

$$(a^2\ 2/b) \cdot a + ba = c \cdot (ac/b) \qquad a^2/b + b = c2/b \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

Satz des Pythagoras-Beweis 29

In diesem weiteren Zerlegungsbeweis werden die vier Dreiecke und das Quadrat auf eine besondere Art angeordnet.





Satz des Pythagoras-Beweis 30

untere Abbildung

Die Dreiecke $\Delta ABC'$, $\Delta BCA'$ und $\Delta ACB'$ werden an das Dreieck ΔABC so angefügt, wie in der Zeichnung zu sehen. Offensichtlich sind die vier Dreiecke zueinander ähnlich.

Auf Grund der Konstruktion ist $\Delta ABC = \Delta A'BC$. Ebenso sind die Dreiecke $\Delta ABB'$ und $\Delta ABC'$ gleich. Daraus folgt

$$\text{Fläche}_{A'BC} + \text{Fläche}_{AB'C} = \text{Fläche}_{ABC'}$$

Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke ist

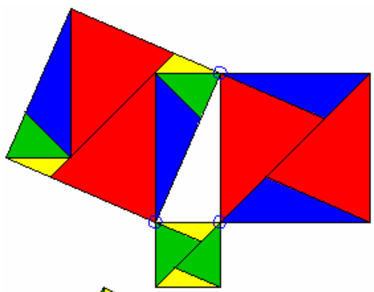
$$B'C = AC^2/BC \text{ und } BC' = AC \cdot AB/BC$$

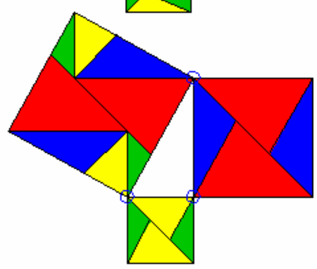
und zusammen

$$AC \cdot BC + (AC^2/BC) \cdot AC = AB \cdot (AC \cdot AB/BC),$$

d.h.

$$BC^2 + AC^2 = AB^2$$





Satz des Pythagoras-Beweis 31

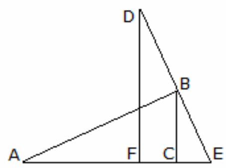
In der oberen und mittleren Darstellung sind zwei weitere Zerlegungsbeweise zu sehen.

Der erste stammt von J.E.Böttcher. Im zweiten von S.K.Stein (Mathematics: The Man-Made Universe, Dover, 1999) wurden die Teile etwas verändert angeordnet.

Satz des Pythagoras-Beweis 32

untere Abbildung; nach Michelle Watkins, Math Spectrum 1997/98

ΔABC und ΔDEF seine zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke die so angeordnet sind, dass B auf DE liegt und A, F, C, E kollinear sind.



Es ist BC = EF = a, AC = DF = b, AB = DE = c. Außerdem ist AB senkrecht zu DE. Es soll die Fläche des Dreiecks ΔADE bestimmt werden.

$$\text{Fläche}_{\Delta ADE} = AB \cdot DE/2 = c^2/2 \ ;$$

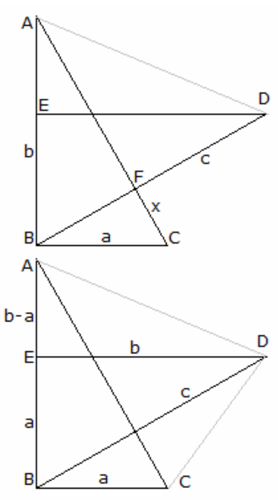
$$\text{Fläche}_{\Delta ADE} = DF \cdot AE/2 = b \cdot AE/2 \text{ und}$$

$$AE = AC + CE = b + CE.$$

CE kann aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔBCE und ΔDFE ermittelt werden

$$CE = BC \cdot FE/DF = a \cdot a / b$$

Und damit $c^2/2 = b(b + a^2/b)/2$



Satz des Pythagoras-Beweis 33

Dieser Beweis stammt von Tao Tong ("Mathematics Teacher", Feb. 1994).
ABC und BED sind kongruente, rechtwinklige Dreiecke, wober E auf AB liegt. Der Flächeninhalt von ΔABD wird auf zwei verschiedene Arten berechnet:

$A_{\Delta ABD} = BD \cdot AF/2 = DE \cdot AB/2.$

Mit der Schreibweise in der oberen Abbildung wird

$c\ (c - x)/2 = b \cdot b/2.$

Die Strecke x = CF ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BFC und ABC

$x = a^2/c$

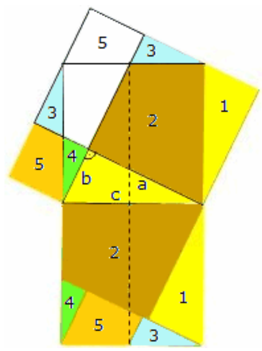
und durch einfaches Einsetzen der Satz des Pythagoras.

Satz des Pythagoras-Beweis 34

Dieser Beweis wurde von John Kawamura (Head-Rouce School, Oakland) gefunden.
Er ähnelt dem Beweis 33, nur wird dieses Mal die Fläche des Vierecks ABCD ermittelt.
Die zwei Diagonalen des Vierecks haben die Länge c, so dass für die Fläche c²/2 wird.

$c^2/2 = A_{ABCD} = A_{BCD} + A_{ABD} = a \cdot a/2 + b \cdot b/2$

und damit erneut der Satz des Pythagoras.



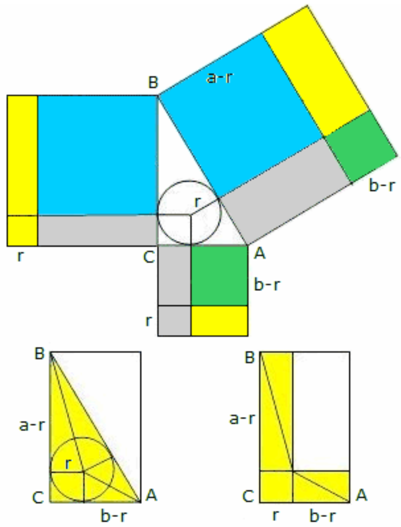
Satz des Pythagoras-Beweis 35

Beweis durch Flächenzerlegung

Jede auftretende Strecke ist zu einer Quadratseite parallel.
Die Teilflächen 1 bis 5 im Hypotenusenquadrat finden sich in den Kathetenquadraten wieder. Also muss nachgewiesen werden, dass die einzelnen Teilflächen 1 bis 5 zueinander kongruent sind.

Die Dreiecke 1 haben die Seiten a und c gemeinsam, außerdem den spitzen Winkel (Scheitelwinkel) an der Ecke, an der sie sich schneiden.
Die Vierecke 2 haben die Seiten a und c gemeinsam sowie in jeweils zwei rechten Winkeln. Betrachtet man die Winkel der Vierecke 2 zwischen ihren Seiten a und c, dann erkennt man, dass auch sie übereinstimmen. Da die Kongruenzsätze für Dreiecke gelten, müssen noch die Diagonalen in den Vierecken 2 betrachtet werden.

Auf Grund der gestrichelten schwarzen Linie haben die blauen Dreiecke 3 die größere Seite gemeinsam, außerdem besitzen beide einen rechten Winkel. Einen zweiten gemeinsamen Winkel kann man leicht nachweisen.
Zwei kongruente Winkel in den Dreiecken 4 zu finden, ist kein Problem. Damit sind die Dreiecke ähnlich, jeodch noch nicht kongruent. Dies findet man, wenn man die größere der beiden Katheten von Dreieck 4 betrachtet, die ist so groß wie b im Ausgangsdreieck ABC.
Die Vierecke 5 stimmen in ihrer kleineren Seite mit der kleineren Kathete von Dreieck 3 überein, in einer anderen mit der größeren Kathete von Dreieck 4. Ferner haben beide Vierecke jeweils zwei rechte Winkel. Da sie auch in einem dritten Winkel übereinstimmen, stimmen sie in 4 Winkeln überein.
Der Beweis ist arabischen Ursprungs.

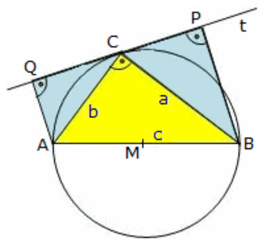


Satz des Pythagoras-Beweis 36

Am rechtwinkligen Dreieck wird der Inkreis konstruiert. Die senkrecht auf den Dreiecksseiten stehenden Inkreisradien verlängert man wie in der Abbildung.
Blaues und grünes Quadrat in den Kathetenquadraten finden sich im Hypotenusenquadrat wieder. Man zeigt, dass die Summe der gelben Flächen in den Kathetenquadraten gleich dem gelben Rechteck im Hypotenusenquadrat ist.

Man betrachtet unten in der linken Figur das Dreieck ABC mit dem Inkreis, zusätzlich zwei Winkelhalbierende. Zwei Dreiecke links oben und die zwei Dreiecke rechts unten sind jeweils kongruent. Damit kann man das linke Rechteck in das rechte überführen.
Da das linke weiße Dreieck den Flächeninhalt ab/2 besitzt, muss das rechte weiße Rechteck ebenfalls den Flächeninhalt $(a - r)(b - r) = ab/2$
aufweisen, die Summe der farbigen Flächen im rechten Rechteck natürlich auch $r(a - r) + r(b - r) + r^2 = ab/2$
Analog vergleicht man noch die gelben Flächen in der oberen Abbildung mit den Flächen im rechten Rechteck der unteren Abblidung und ebenso die grauen aus der oberen Abbildung.

Satz des Pythagoras-Beweis 37

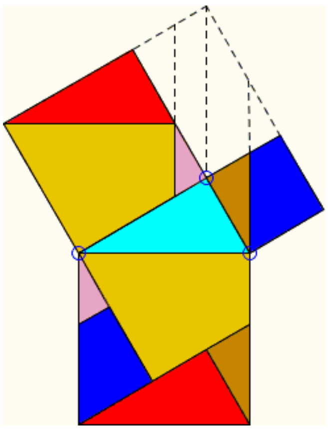


Dieser Beweis wurde von der 14jährigen iranischen Schülerin Sina Shieyan aus Sahzevar an den Betreiber der Seite http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml gesandt.

Im Kreis mit dem Mittelpunkt M sei die Strecke AB der Durchmesser und C auf der Peripherie des Kreises. Dann ist das Dreieck ABC natürlich rechtwinklig bei C. Durch Punkt C gehe die Tangente t, von A und B seien die Lote auf t gefällt. Die Dreiecke ABC, ACQ und CBP sind damit ähnlich zueinander. Man addiert die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ und CBP $ACQ + CBP = CQ \cdot QA/2 + PC \cdot PB/2$
M ist Mittelpunkt von Strecke AB, Strecke MC ist senkrecht zu t und Mittelpunkt von Strecke PQ, damit wird

$$ACQ + CBP = ½\, PQ \cdot QA/2 + ½\, PQ \cdot PB/2$$
$$ACQ + CBP = ½\, (PQ \cdot ((QA + PB)/2))$$

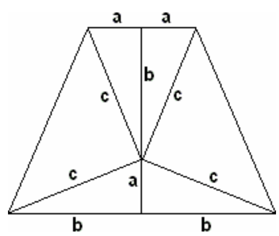
D.h.: Die Summe der Flächeninhalte der blau gefärbten Dreiecke ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes ABPQ.
Somit ist der Flächeninhalt des gelben Dreieckes ABC ist genau so groß wie die Summe der Flächeninhalte der blauen Dreiecke ACQ und CBP. Das führt unmittelbar zur Gleichung des Satzes von Pythagoras.



Satz des Pythagoras-Beweis 38

Dieser Beweis findet sich in der Sammlung von E.S.Loomis "The Pythagorean Proposition" von 1968.
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml#Loomis
Erstmals wurde dieser Zerlegungsbeweis 1914 von J.Versluys angegeben.
Der Beweis ist durch das Einzeichnen von Hilfslinien selbsterklärend.
Eine dynamische Version findet man unter
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/PythLoomis25G.shtml

Satz des Pythagoras-Beweis 39

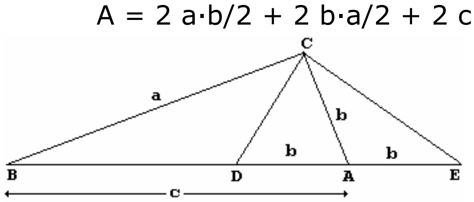


Dieser Bewies wurde 1995 in "The Mathematics Teacher" veröffentlicht und stammt von der Highschool-Schülerin Jamie deLemos.
Ausgangspunkt ist ein gleichseitiges Trapez, wie in der Abbildung zu sehen.
Für den Flächeninhalt des Trapezes erhält man mit der üblichen Trapezformel

$$A = (2a + 2b)/2 \cdot (a + b)$$

Anderseits kann das Trapez aus sechs Dreiecken zusammengesetzt werden, d.h.

$$A = 2\, a \cdot b/2 + 2\, b \cdot a/2 + 2\, c^2/2$$

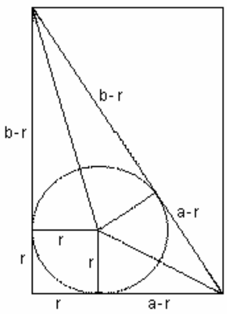


Gleichsetzen und Umformen führt sofort zu $a^2 + b^2 = c^2$.
Dieser Beweis ähnelt dem von James A.Garfield.

Satz des Pythagoras-Beweis 40

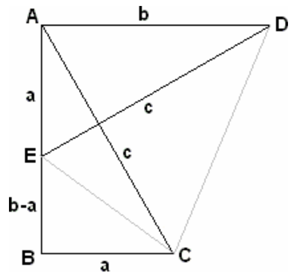
Veröffentlicht von J. Barry Sutton in "The Math Gazette", v 86, 2002:
Es sei im Dreieck ∆ ABC der Winkel bei C = 90° und AB = c, AC = b, BC = a. Zwei Punkte D und E werden auf der Geraden AB so festgelegt, dass AD = AE = b gilt.

C liegt damit auf einen Kreis um A mit dem Radius b. Damit ist auch der Winkel $\angle$ DCE ein rechter, d.h. $\angle$ DCE = 90°. Somit ist $\angle$ BCD = $\angle$ ACE. Da Δ ACE gleichschenklig ist, wird $\angle$ CEA = $\angle$ ACE.
Die Dreiecke DBC und EBC haben den Winkel $\angle$ DBC gemeinsam, d.h. $\angle$ BCD = $\angle$ BEC. Damit sind die Dreiecke Δ DBC und Δ EBC ähnlich.
Aus BC / BE = BD / BC wird $a / (c + b) = (c - b) / a$
und $a^2 = c^2 - b^2$ $a^2 + b^2 = c^2$



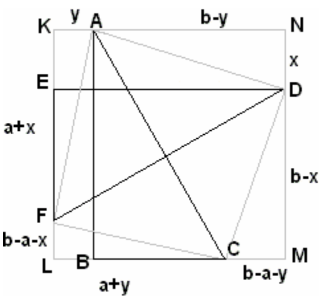
Satz des Pythagoras-Beweis 41

Beweis nach Jack Oliver in "Mathematical Gazette 81", März 1997, Seite 117-118:
Die Fläche das Dreiecks ist $A = r s$
wobei r der Inkreisradius und $s = (a + b + c)/2$ der halbe Dreiecksumfang ist.
In der Abbildung ist die Hypotenuse $c = (a - r) + (b - r)$
d.h. $r = s - c$
Die Fläche des Dreiecks kann dann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden
$s (s - c) = ab/2$, $(a + b + c)(a + b - c) = 2ab$
oder $(a + b)^2 - c^2 = 2ab$
Damit wird $a^2 + b^2 - c^2 = 0$



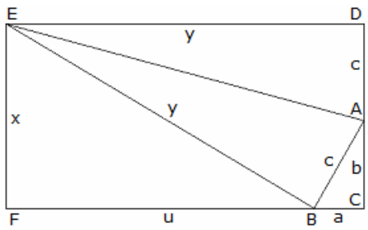
Satz des Pythagoras-Beweis 42

Beweis nach W.J.Dobbs in "The Mathematical Gazette 8", 1916: In der Abbildung sind zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke ABC und ADE zu sehen, wobei E auf AB liegt. Die Fläche des Trapezes ABCD wird nun auf zwei verschiedene Arten berechnet.
$F(ABCD) = F(AECD) + F(BCE) = c\cdot c/2 + a(b - a)/2$
wobei $c\cdot c$ das Produkt der beiden zueinander senkrechten Diagonalen des Vierecks AECD ist. $F(ABCD) = AB \cdot (BC + AD)/2 = b(a + b)/2$
Kombiniert man beide Gleichungen, so wird
$c^2/2 = a^2/2 + b^2/2$ d.h. $c^2 = a^2 + b^2$



Satz des Pythagoras-Beweis 43

Die Fläche des großen Quadrates KLMN ist b^2. Die Fläche kann in vier Dreiecke und ein Viereck zerlegt werden.
b^2 = Fläche(KLMN) = Fläche(AKF) + Fläche(FLC) + Fläche(CMD) + Fläche(DNA) + Fläche(AFCD)
$= y(a+x)/2 + (b-a-x)(a+y)/2 + (b-a-y)(b-x)/2 + x(b-y)/2 + c^2/2$
$= [y(a+x) + b(a+y) - y(a+x) - x(b-y) - a\cdot a + (b-a-y)b + x(b-y) + c^2]/2$
$= [b(a+y) - a\cdot a + b\cdot b - (a+y)b + c^2]/2 = b^2/2 - a^2/2 + c^2/2.$

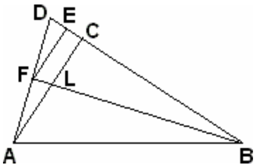


Satz des Pythagoras-Beweis 44

Beweis von Larry Hoehn ("The Mathematics Teacher" 88, 1995):
Die Kathete AC des rechtwinkligen Dreiecks ABC wird zu einem Punkt D verlängert, sodass AD = AB = c, wie in der Abbildung, gilt.
In D wird die Senkrechte zu CD gezeichnet, in A die Winkelhalbierende des Winkels BAD. Beide Geraden schneiden sich im Punkt E. Außerdem sei EF senkrecht zu CF.

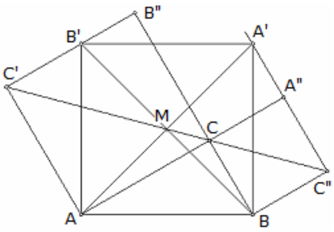
Nach Konstruktion haben die Dreiecke ABE und ADE die Seite AE gemeinsam und zwei weitere gleiche Seiten AD = AB. Außerdem ist $\angle$ BAE = $\angle$ DAE. Damit sind die Dreiecke ABE und ADE nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, d.h. der Winkel $\angle$ ABE ist ein rechter. Folglich wird in den rechtwinkligen Dreiecken ABC und BEF, $\angle$ ABC + $\angle$ EBF = 90°, $\angle$ ABC = $\angle$ BEF und $\angle$ BAC = $\angle$ EBF.
Die zwei Dreiecke sind ähnlich, d.h. $x/a = u/b = y/c$
Da aber EF = CD, also $x = b + c$, gilt, ergibt sich $u = b(b + c)/a$ und $y = c(b + c)/a$
Andererseits ist $y = u + a$ und somit $c(b + c)/a = b(b + c)/a + a$

Einfache Umformungen ergeben dann $c^2 = a^2 + b^2$.



Satz des Pythagoras-Beweis 45

B.F.Yanney und J. A. Calderhead in "Am. Math Monthly" 6/7 (1896):
ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C.
Die Seite BC wird nach einem Punkt D verlängert, so dass BD = AB ist. A und D werden verbunden. Von E, dem Mittelpunkt der Strecke CD, wird eine Senkrechte auf AD gezogen mit dem Fußpunkt F. B und F werden ebenfalls verbunden.
Das Dreieck ∆ ADC ist ähnlich zum Dreieck ∆ BFE. Dann ist $AC / BE = CD / EF$
Aus $CD = BD - BC = AB - BC$ wird $BE = BC + CD/2 = BC + (AB - BC)/2 = (AB + BC)/2$
und $EF = AC/2$. Und damit $AC \cdot AC/2 = (AB - BC) \cdot (AB + BC)/2$
Dies führt einfach zu $AB^2 = AC^2 + BC^2$

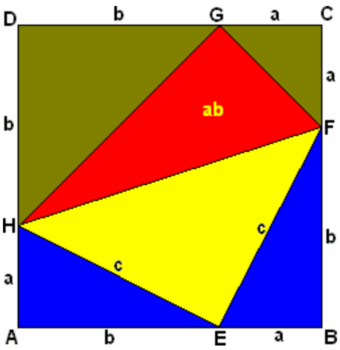


Satz des Pythagoras-Beweis 46

Beweis von Floor van Lamoen:
In der Abbildung sei M der Mittelpunkt des Quadrats ABA'B'. Das Dreieck ∆ AB'C' entsteht durch Rotation des Dreiecks ∆ ABC.
Punkt B' liegt auf on C'B''; A' liegt auf A''C''. Es sind damit AA'' und BB'' gleich a + b. Der Abstand von M zu AC' bzw. zu B'C' ist gleich (a + b)/2. Dann folgt

$$\text{Fläche}(AMB'C') = \text{Fläche}(MAC') + \text{Fläche}(MB'C')$$
$$= (a + b)/2 \cdot b/2 + (a + b)/2 \cdot a/2 = a^2/4 + ab/2 + b^2/4.$$

Es ist aber auch $\text{Fläche}(AMB'C') = \text{Fläche}(AMB') + \text{Fläche}(AB'C') = c^2/4 + ab/2$.
woraus $a^2/4 + b^2/4 = c^2/4$ und somit der Satz des Pythagoras.



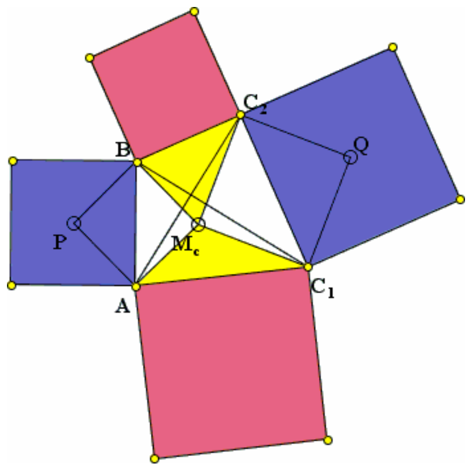
Satz des Pythagoras-Beweis 47

Beweis von Floor van Lamoen:
Die Strecke FH teilt ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a + b in zwei kongruente Vierecke ABFH und CDHF.

Das untere Viereck besteht aus zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken mit der Fläche ab/2 und einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche $c^2/2$.
Das obere Viereck CDHF enthält zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke, eines mit dem Flächeninhalt $a^2/2$, das andere mit $b^2/2$, sowie einem rechtwinkligen Dreieck mit der Fläche ab.
Werden gleichgroße Flächen bei beiden Vierecken abgezogen, so wird

$$a^2/2 + b^2/2 = c^2/2.$$

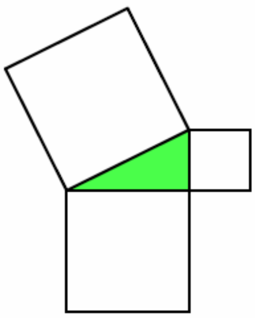
Satz des Pythagoras-Beweis 48



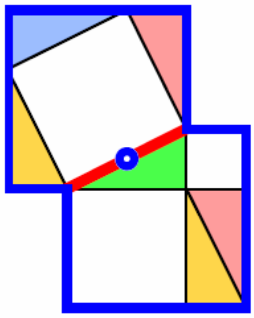
Beweis von Floor van Lamoen:
Gegeben seien zwei Quadrate $APBM_c$ und $C_1M_cC_2Q$ mit der gemeinsamen Ecke M_c.
Bei einer Rotation von 90° um M_c in positiver Richtung gehen C_1M_c in C_2M_c über und BM_c in AM_c. Das bedeutet, dass DBM_cC_1 in DAM_cC_2 überführt wird und somit AC_2 und BC_1 zueinander senkrecht sind.

Das Viereck ABC_2C_1 hat somit orthogonale Diagonalen und die roten und blauen Quadrat der Abbildung haben jeweils zusammen die gleiche Fläche. Die Summe der Flächen der Originalquadrate $APBM_c$ und $C_1M_cC_2Q$ ist halb so groß.
Verschiebt man nun M_c in den Schnittpunkt der Diagonalen ergibt sich aus Symmetriegründen, dass die roten Quadrate flächengleich sind und die Flächeninhalte von $APBM_c$ und $C_1M_cC_2Q$ zusammen gerade den roten Quadraten entsprechen!

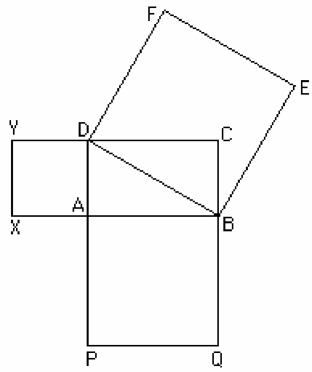
Satz des Pythagoras-Beweis 49



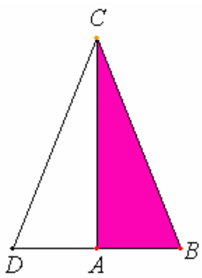
Beweis von Hans Walser, 2004:
Die klassische Figur zum Satz des Pythagoras wird wie in der unteren Abbildung ergänzt.
Diese neue Figur hat einen punktsymmetrischen Umriss; das Symmetriezentrum ist der Mittelpunkt der Hypotenuse. Zum Beweis wird die Figur an der Taille in zwei gleiche Teile zerlegt.
Der untere Teil ist flächenmäßig gleich groß wie der obere Teil. Es bezeichne Δ den Flächeninhalt des Dreieckes. Damit ist: $a^2 + b^2 + 3\Delta = c^2 + 3\Delta$
und somit $a^2 + b^2 = c^2$



Satz des Pythagoras in den Sulbasutras



Das Sulbasutras waren Anhänge zu den indischen Veden, in denen Richtlinien für das Konstruieren der Altare gegeben wurden. Sie sind damit die ältesten mathematischen Schriften Indiens und wurden über Jahrhunderte hinweg ergänzt. In diesen findet sich auch der Satz des Pythagoras.
Das Baudhayana Sulbasutra (800 v.Chr.) gibt nur einen speziellen Fall vom Theorem:
"Das Seil, das über die Diagonale eines Quadrats ausgedehnt wird, produziert einen Bereich doppelter Größe des ursprünglichen Quadrats."
Das Katyayana Sulbasutra (200 v.Chr.) jedoch, gibt eine allgemeinere Version (siehe Abbildung): "Das Seil, das entlang die Länge der Diagonale eines Viereckes ausgedehnt wird, produziert einen Bereich den die vertikalen und horizontalen Seiten zusammen bilden."
Die Aussagen wurden in "Seilen" ausgedrückt, da diese zur Konstruktion der Altäre genutzt wurden. An weiteren Stellen der Sulbasutras finden sich viele Beispiele für pythagoraische Dreiergruppen, zum Beispiel: (5, 12, 13), (12, 16, 20), (8, 15, 17), (15, 20, 25), (12, 35, 37), (15, 6, 39), (5/2 , 6, 13/2) und (15/ 2, 10 ,25/ 2)

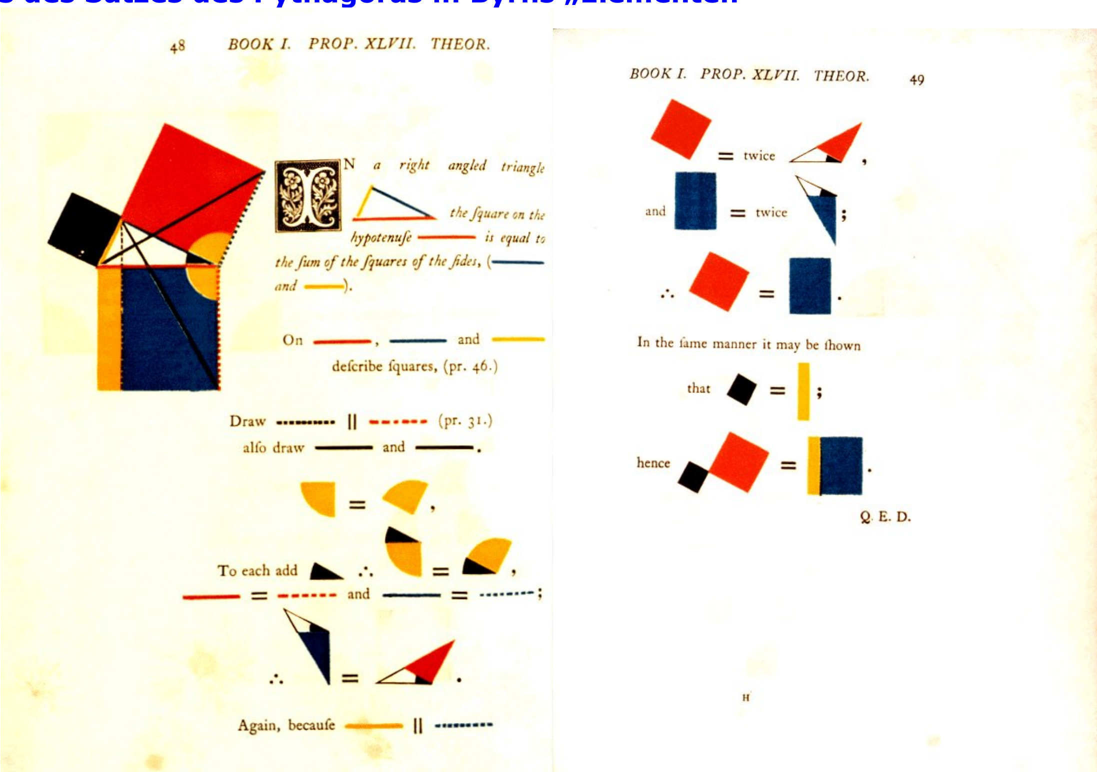


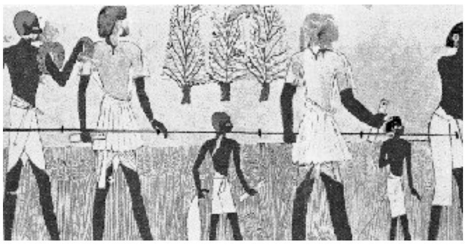
Satz des Pythagoras - Umkehrung

Euklids "Elemente": § 48 (L. 34):
Wenn an einem Dreieck das Quadrat über einer Seite den Quadraten über den beiden anderen Seiten zusammen gleich ist, dann ist der von diesen beiden übrigen Seiten des Dreiecks umfasste Winkel ein Rechter.

Am Dreieck ABC sei nämlich das Quadrat über den einen Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich. Ich behaupte, dass $\angle$ BAC ein Rechter ist. Man ziehe AD vom Punkte A aus $\perp$ zur geraden Linie AC (I, 11), mache AD = BA und ziehe AC. Da DA = AB, ist auch $DA^2 = AB^2$. Man füge AC^2 beiderseits hinzu; dann sind $DA^2 + AC^2 = BA^2 + AC^2$. Aber $DA^2 + AC^2 = DC^2$; denn $\angle$ DAC ist ein Rechter (I, 47). Andererseits ist $BA^2 + AC^2 = BC^2$; dies hatten wir nämlich vorausgesetzt. Also ist $DC^2 = BC^2$, so dass auch die Seite DC = BC. Da ferner DA = AB ist und AC gemeinsam, so sind zwei Seiten DA, AC zwei Seiten BA, AC gleich; auch ist Grdl. DC = Grdl. BC; also ist $\angle$ DAC = $\angle$ BAC (I, 8). DAC ist aber ein Rechter; also ist auch BAC ein Rechter.

Beweis des Satzes des Pythagoras in Byrns „Elementen“





Satz des Pythagoras in Ägypten

Über die Entstehung des Lehrsatzes von Pythagoras existieren keine gesicherten Erkenntnisse. Sicher ist, dass der Lehrsatz bereits vor Pythagoras in vielen Hochkulturen bekannt war.
Bereits im antiken Ägypten zur Zeit Amenemats I. um 2300 v.u.Z. war das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 3, 4, 5 bekannt.

Die sogenannten Seilspanner, die Harpenodapten, hatten die Aufgabe, rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 zu konstruieren. Dazu verwendeten sie ein 12 Längeneinheiten langes Seils, das im Abstand einer Längeneinheit einen Knoten hatte und an beiden Enden zusammen geknotet wurde. Wird das Seil nun am ersten, vierten und achten Knoten festgehalten und gespannt, entsteht am vierten Knoten ein rechter Winkel. Abbildung: Malerei im Grab des Mena in Theben (1420 v.u.Z.)

Ein Inschrift am Tempel von Abydos beschreibt die Gründung des Tempels durch Pharao Sethos I (um 1445 v.u.Z.):
"Die Göttin Sefech spricht zu ihm: Der Schlegel in meiner Hand war von Gold, als ich schlug den Pflock mit ihm, und Du warst bei mir in Deiner Eigenschaft als Harpedonapt. Deine Hand hielt den Spaten beim Feststellen der vier Ecken des Tempels in Genauigkeit gemäß den vier Seiten des Himmel."
Auf den zugehörigen Bildern sieht man den König mit der Osiris-Krone, ihm gegenüber die Göttin. Beide halten in der Rechten eine Keule und schlagen damit je einen langen Pflock in den Boden. Um die zwei Pfeile läuft ein an den Ecken zusammengebundenes Seil, das straff angezogen wird.

Pythagoreische Dreiecke in der Antike

Westeuropa:
In der Jungsteinzeit (4500-2000 v.u.Z.) entstanden monumentale, megalithische Grabmäler und Kulturstätten. Die meisten dieser Kultstätten findet man in Südengland, z.B. in Stonehenge.
Sie sind ringförmig von großen Steinen umgeben. Im Laufe der Zeit wurden auch Ellipsen verwendet. Bei Ellipsen bilden die Halbachsen und die lineare Exzentrizität ein rechtwinkliges Dreieck, mit der großen Halbachse als Hypotenuse. Man geht davon aus, dass den Erbauern

dieser Monumente, die Tatsache, dass man aus primitiven pythagoreischen Zahlentripeln rechtwinklige Dreiecke erhält, bekannt gewesen ist.

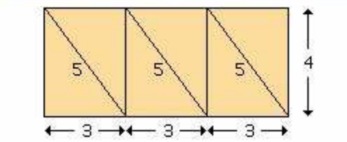
Ägypten:
In Ägypten gehören die Pyramiden, Kolossalstatuen und Tempel zur megalithischen Architektur. In den Plänen der Stufenpyramide des Djoser findet man Dreiecke, von welchen sich einige als pythagoreische Dreicke mit folgenden primitiven pythagoreischen Zahlentripeln, nachweisen ließen:
(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8,15,17), (13, 84, 85), (20, 21, 29), (44,117,125), (48, 55, 73), …
Es ist fraglich, ob dem Erbauer die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ bekannt war.

Babylonier:
Aus der Zeit um 1700 v.u.Z. stammt eine Tontafel mit altbabylonischer Keilschrift, bekannt unter dem Namen "Plimpton 322", die erkennen lässt, dass die Babylonier zur damaligen Zeit bereits über ein Verfahren zur Konstruktion pythagoreischer Zahlentripel verfügten.
Auch die Kenntnis des Zusammenhanges dieser Zahlentripel mit den Seiten und Diagonalen eines Rechtecks, d.h. mit dem Lehrsatz des Pythagoras, ist sich auf Grund einer geometrischen Deutung auf der Tontafel nachweisbar.
Sind p, q natürliche Zahlen mit $p>q$ und $ggT(p,q)=1$, so wird mit $r = p/q$ aus

$$((r/2) + (1/2r))^2 = ((r/2) - (1/2r))^2 + 1$$

mit $(p^2 + q^2)^2 = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2$ ein pythagoreisches Zahlentripel.

Pythagoras von Samos:
"Zu jeder ungeraden Zahl u lässt sich die Quadratzahl u^2 als ein "Haken" (Gnomon) darstellen, der das Quadrat mit der Seitenlänge $(u^2 - 1)/2$ zu einem Quadrat mit der Seitenlänge $(u^2 + 1)/2$ ergänzt, weshalb sich das Tripel $((u^2 - 1)/2, u , (u^2 + 1)/2)$ als ein pythagoreisches Tripel erweist, das überdies stets primitiv ist."

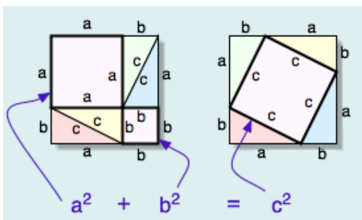


Bergers 4:9-Theorie

1980 veröffentlichte der Schweizer Historiker E.Berger in seinem Buch "Bauwerk und Plastik des Parthenon" (Basel) seine 4:9-Theorie.
Berger geht davon aus, dass auch beim Bau des Tempels der Athena Parthenon auf der Akropolis der Satz des Pythagoras eine zentrale Rolle spielte.
Dabei ist ein Verhältnis von 4:9 grundlegend. Das Basisrechteck mit den Seitenlängen 4 und 9 wurde dabei erzeugt, in dem 3 Rechtecke mit den Seitenlängen 3 und 4 und der Diagonale 5 nebeneinander angeordnet wurden. Damit gelang es auch, die rechten Winkel absolut exakt zu konstruieren.

Die Länge des Parthenontempels ist 69,5 m, die Breite 30,88 m und die Höhe 13,72 m. In sehr hoher Genauigkeit ergeben sich dann die Verhältnisse Breite : Länge = 4 : 9 und Höhe : Breite = 4 : 9.
Quelle: J.J. O'Connor, E.F. Robertson

Pythagoras-Gedicht



Durch den englischen Astronomen George Airy wurde ein Beweis des Satzes des Pythagoras in Gedichtform verfasst:

"I am, as you can see,
$a^2 + b^2 - ab$
When two triangles on me stand,
Square of hypothenuse is plann'd
But if I stand on them instead
The squares of both sides are read."

Pythagoras-Gedicht (2)

Ich weiß nicht, was soll es bedeuten,
Dass ich so traurig bin.

Ein Lehrsatz aus alten Zeiten,
Der kommt mir nicht aus dem Sinn.

Drei Winkel, wovon ein rechter,
Sind mit drei Seiten verwandt.
Und diese noblen Geschlechter
Regieren Leut' und Land.

Die schönste der Hypotenusen
Thront oben wunderbar.
Es schlummert an ihrem Busen
Ein holdes Kathetenpaar!
Sie thront auf hohem Quadrate
Und singt ein Lied dabei,
Das hat eine pythagorate
Gewaltige Melodei.

Der Welt unendlich Getriebe
Ergreift es mit wildem Weh,
Sie schwärmt in glühender Liebe
Für a^2, b^2, c!
Sogar die kühlen Kometen
Erfasst ein feuriger Wahn, -
Und das hat mit ihren Katheten
Die Hypotenuse getan.
(frei nach Heinrich Heine)

Satz des Pythagoras - Rätsel

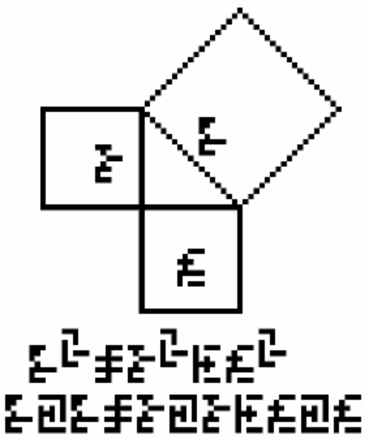
Da der Satz des Pythagoras zu den bekanntesten mathematischen Sätzen überhaupt gehört, findet er auch schon immer Einzug in Kinder- und Jugendliteratur. So tritt im Heft 27 "Die neue Sonne" (Februar 1959!) der DDR-Comiczeitschrift "Mosaik" folgendes Rätsel auf: Von Süden bis nach Norden geh,

das Planetarium und das Kreuz
sind B und C.
Von C geh ostwärts bis nach A,
der Drei, Vier, Fünf gedenke da.
Des Kreises Zentrum dich zum
Ziele führt,
der mit den Seiten a, b, c tangiert.

Gelöst wird das Rätsel in dem Comic vom Wissenschaftler Sinus Tangentus, der als Lösung das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 und als Zielpunkt den Mittelpunkt des Inkreises dieses Dreiecks erkennt.

Belchendreieck

Im Dreiländereck Frankreich, Schweiz und Deutschland erheben sich drei Berge, die alle den gleichen Namen tragen: Belchen; einer liegt im Westen in den Vogesen, einer im Osten im Schwarzwald und einer im Süden im Jura.
Zum Frühlings- und Herbstanfang geht die Sonne, vom westlichen Belchen aus gesehen, direkt über dem östlichen auf; umgekehrt geht die Sonne, vom östlichen aus gesehen, genau hinter dem westlichen unter. Im Winter, am Tag der Sonnenwende, spielt sich das gleiche zwischen dem westlichen und dem südlichen Belchen ab.
Der östliche und der südliche Gipfel liegen mit geringer Abweichung in der Nord-Südachse, so dass das Belchendreieck annähernd rechtwinklig ist.
Interessant ist, dass sich das Seitenverhältnis des Dreiecks des elsässer Belchen, des badischen Belchen und des Basler Belchen wie 3 : 4 : 5 (ägyptisches, pythagoreisches Dreieck) verhält, mit einer Abweichung zwischen 3 und 4 von etwa 3 %.
Das die Bezeichnung der Berge nicht Zufall ist, zeigt die Bedeutung des Wortes "Belchen" sowie die geometrische Anordnung der Berge. Die vom indoeuropäischen "bhel" hergeleitete Wurzel mit der Bedeutung "glänzend, schimmernd, hell" liegt auch dem Namen des keltischen Sonnengottes "Belenus" zu Grunde.
siehe http://www.regbas.ch/d_belchendreieck.cfm
Bedauerlich ist, dass das Belchendreieck heute (2011) zum Tummelplatz esoterischer Spinner verkommen ist.

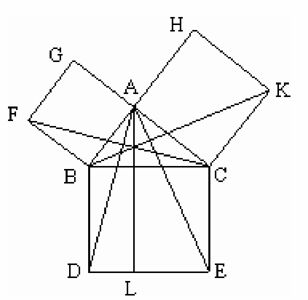


Satz des Pythagoras, Episode

Der Satz des Pythagoras wurde im Zuge der Suche nach außerirdischer Intelligenz am 24.5.1999 ins All gefunkt.
Die kanadischen Astronomen Dutil und Dumas fokussierten an diesem Tag eine 23-seitige Botschaft in, hoffentlich, kulturunabhängiger Codierung auf Nachbarsterne unserer Galaxis, die als mögliche "Sonnen" von Planetensystemen in Frage kommen.
Die Botschaft wurde vom Observatorium in Evpatoriya (Ukraine) ausgesandt. Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt.
Hoffentlich schließen die Aliens nicht daraus, dass wir den Satz des Pythagoras nur für gleichschenklige Dreiecke kennen.
Quelle: Manfred Boergens - Briefmarke des Monats Juli - August 2002

The Wizard of Oz

Im Film "Der Zauberer von Oz" von 1939 rezitiert die Vogelscheuche, nachdem sie vom Zauberer ein Gehirn erhalten hat, den Satz von Pythagoras; natürlich falsch!!!
"The sum of the square roots of any two sides of an isosceles triangle is equal to the square root of the remaining side."
d.h., die Summe der Quadratwurzeln von zwei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel aus der restlichen Seite. Da Millionen von Kindern so den Satz von Pythagoras zum ersten Mal hören, kann man nur hoffen, dass sie nicht zuhören. :-)
Übrigens zitiert Homer J.Simpson in der 5.Staffel von "The Simpsons" die Vogelscheuche, und natürlich wieder falsch!
In der deutschen Synchronfassung nennt der Scheuch den Satz des Pythagoras korrekt! Absicht oder Übersetzungsfehler?



Satz des Pythagoras, Episode 2

Der heute als Satz des Pythagoras bekannte Zusammenhang am rechtwinkligen Dreieck wurde in früheren Zeiten nicht nach Pythagoras benannt.
In Bezug auf die Form der geometrischen Figur oder die Bedeutung wurde der berühmte Satz auch Braut-Satz (antikes Griechenland)
Brautstuhl (antike Hindu-Mathematik)
Figur der Verheirateten (persische Mathematik)
Meister der Mathematik (Mittelalter)
genannt. Im Französischen sprach man auch von "Invention digne d'une hécatombe" oder "Pont-aux-ânes" (Binsenwahrheit).
Die wörtliche Übersetzung von "Invention digne d'une hécatombe" = "Würdige Entdeckung mit 100 Stieropfern" bezieht sich auf die Legende, dass Pythagoras die Entdeckung des Lehrsatzes mit 100 geopferten Stieren gefeiert haben soll.
Bei Diogenes Laërtus heißt es dazu:

"Als Pythagoras einst die berühmte Zeichnung gefunden,
Brachte als Opfer er dar herrliche Stiere dem Gott"

Da Pythagoras Vegetarier war und an Seelenwanderung glaubte, ist die Legende äußerst fragwürdig.

Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgaben

1. Ein rechteckiger Holzrahmen ist 90 cm lang und 56 cm breit. Er wird durch eine Latte in der Diagonalen verstärkt. Wie lang muss die Latte sein?

2. Eine Leiter von 34 Metern Länge steht 3 Meter von der Mauer entfernt. In welcher Höhe liegt die Leiter an der Mauer an?

3. Ein quadratisches Schild mit einer Seitenlänge von 110 cm wird in zwei gegenüberliegenden Ecken befestigt. Wie weit liegen die Ecken auseinander?

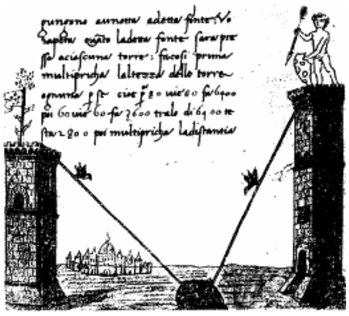
4. Ein Hotel brennt im zweiten Stock, der sich 8 Meter über dem Boden befindet. Das Feuerwehrauto hält in 3 Metern Entfernung. Wie lang muss die Leiter ausgefahren werden, damit gelöscht werden kann?

5. Ein Brückenpfeiler, der 25 Meter hoch ist, soll in einer Entfernung von 15 Metern mit einem Stahlseil im Boden verankert werden. Wie lang ist das Stahlseil?

6. Eine Seiltanzgruppe will von der Spitze eines 60 Meter hohen Turmes ein 250 Meter langes Seil zur Erde spannen. Reicht der vor dem Turm liegende Platz von 220 Metern Breite dazu aus?

7. Eine 4,5 Meter lange Eiche steht von einer Hauswand 1,8 Meter entfernt. Bei Sturm kippt die Eiche gegen die Wand. In welcher Höhe berührt sie die Hauswand?

Lösungen
1. 1,06 Meter, 2. 33,87 Meter, 3. 1,56 Meter, 4. 8,54 Meter, 5. 29 Meter, 6. Nein, der Platz ist 22,69 Meter zu kurz, 7. 4,12 Meter



Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgaben

Aufgabe 1
Die Zeichnung stammt aus dem handgeschriebenen und reich bebilderten Rechenbuch des Fillipo Calandri aus dem Jahre 1491. Es wird in der Bibliothek von Florenz aufbewahrt.
Auf einem ebenen Feld stehen zwei Türme, einer 60 Fuß hoch, der andere 80 Fuß hoch. Ihr Abstand beträgt 100 Fuß. Für die beiden Vögel ist der Weg von der Turmspitze bis zu einem Brunnen zwischen den Türmen gleich weit.
Wie weit ist der Brunnen von den Türmen entfernt?
Lösung:
d: Abstand des linken Turms vom Brunnen in Fuß;
(100-d): Abstand des rechten Turms vom Brunnen in Fuß
s: Abstand der beiden Turmspitzen vom Brunnen in Fuß

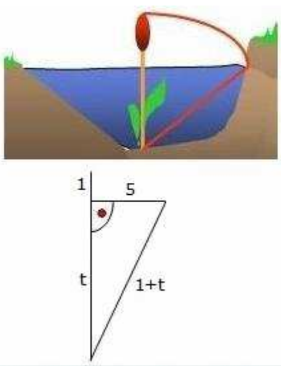
$60^2 + d^2 = s^2$ und $80^2 + (100-d)^2 = s^2$

$60^2 + d^2 = 80^2 + (100-d)^2 \rightarrow d = 64$

Der linke Turm steht 64 Fuß und der rechte 36 Fuß vom Brunnen entfernt.

Aufgabe 2
In einem Glockenturm hängt das Seil zum Läuten der Glocke. Wenn man das Ende des Seils um 2 m seitlich aus der Ruhelage bewegt, so hebt sich das Seilende dabei um 10 cm.
Berechne die Länge des gespannten Seils.
Lösung: l … Länge des Seils in m

$(l - 0{,}01)^2 + 2^2 = l^2 \rightarrow l = 20{,}05$ … Das Seil ist 20,05 m lang.



Aufgabe 3: China, 13.Jahrhundert
Fünf Fuß vom Ufer eines Teiches entfernt rage ein Schilfrohr einen Fuß über das Wasser empor. Man ziehe seine Spitze an das Ufer wie in der Abbildung, dann berühre sie gerade den Wasserspiegel. Wie tief ist der Teich?
Lösung: $5^2 + t^2 = (1 + t)^2$ … $t = 12$

Aufgabe 4: aus einem Rechenbuch des 15.Jahrhunderts
Ein 10 Fuß hoher Baum ist so geknickt, dass seine Spitze 3 Fuß entfernt den Boden berührt. Wie hoch liegt der Bruch?
Lösung: $3^2 + x^2 = y^2$ und $y = 10 - x$
Die quadratische Gleichung ergibt 4,05 Fuß Höhe für den noch stehenden Baumstumpf und den Rest bis 10 Fuß für die Krone mit Teilstamm.

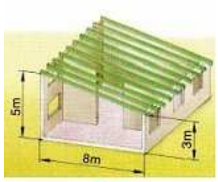
Aufgabe 5:

(untere Abbildung) Herr Mustermann fühlt sich mit seinem Kleinwagen von 3,20 m Länge und 1,60 m Breite hoffnungslos zugeparkt, weil nach vorn und hinten jeweils nur 30cm Rangierplatz sind.
Die Diagonale des Kleinwagens hat die Länge:

$$d = \sqrt{(3,22 + 1,62)} = 3,58 \text{ m}.$$

Der Platz zwischen den äußeren Wagen ist aber 3,20 m + 2 · 0,30 m = 3,80 m. Es ist zwar knapp, aber mit etwas Mühe kann man noch ausparken.

Aufgabe 6: Dachsparren
Berechne für jedes abgebildete Gebäude die Länge eines Dachsparren. Jeder Dachsparren soll dabei 40 cm überstehen.
Lösung: Sparrenlängen (a) = 5,4 m ; (b) 9,05 m ; (c) 9,67 m



Aufgabe 7: Wäscheleine
Zwischen zwei Pfählen mit einem Abstand von 3,80 m ist waagerecht eine dehnbare Wäscheleine straff gespannt.
(a) Hängt man z.B. in die Mitte der Leine einen Bügel mit einem nassen Wäschestück, senkt sich die Wäscheleine um 20 cm. Wie stark hat sich die Wäscheleine gedehnt?
(b) Die Wäscheleine ist bis zu 8% ihrer Länge dehnbar. Um wie viel cm dürfte sich die Wäscheleine höchstens senken, ohne zu zerreißen?
Lösung: (a) Dehnung 2,1 cm ; (b) Senkung maximal 60 cm

Aufgabe 8: Zahnradbahn
(a) Die steilste Zahnradbahn der Welt fährt auf den Pilatus (Schweiz). Auf einem Streckenabschnitt von 1130m Länge überwindet sie gleichmäßig einen Höhenunterschied von 489 m.
Wie lang erscheint dieser Steckenabschnitt auf einer Karte im Maßstab 1 : 25000?
(b) Eine andere Zahnradbahnstrecke erscheint auf einer Karte 12 cm lang (Maßstab 1 : 10000). Die wirkliche Streckenlänge beträgt 1250 m. Wie groß ist der Höhenunterschied?
Lösung: (a) Strecke 1018,71 m; auf der Karte 4,07 cm ; (b) Höhenunterschied = 350 m

Aufgabe 9: Pfostenschuss
Elfmeter! Olaf knallt den Ball in einer Höhe von 1,50 m an den Pfosten. Welche Strecke legt der Ball dabei mindestens zurück? Das Tor ist 7,32 m breit und 2,44 m hoch.
Lösung: Strecke minimal 11,69 m

⑤ Вычислите наименьшую диагональ правильного пятиугольника, сторона которого равна a = 1 см.

⑥La ortanto de egallatera triangulo estas dek du centimetroj. Kalkulu triangulajn laterojn kaj radiuson de ĉirkaŭskribita cirklo.

Aufgabe 10
A small candle is in the shape of a cone which fits exactly on top of a cylinder. The cylinder has a radius of length 2 cm. The slant length of the cone is 2.5 cm. The volume of the cylinder is 5 times the volume of the cone.
Calculate (i) the height, h, of the cone (ii) the total height of the candle.

Aufgabe 11
Soit un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 6 cm. La perpendiculaire à (BD) passant par A coupe BD en H. Calculer AH.

Aufgabe 12
Dans un trapèze isocéle MNPQ ((NP) || (MQ)): MN = 6,5 cm; NP = 4 cm; MQ = 9 cm. 1° Faire une figure
2° Calculer la hauteur de ce trapèze et son aire
3° Donner la longueur à 0,1 centimètre près de chacune des diagonales.

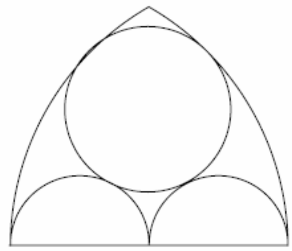
Aufgabe 13
Triangulum rectangulum isosceles est. Longitudo hypotenusae quinque centimetri. Quantus cathetus est?

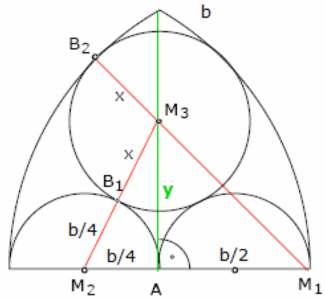
Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgabe

Dem Mittelstürmer Hofinger beim FC Pythagoras, an sich ein sicherer Elfmeterschütze, gelang einmal das Kunststück, in einem Spiel gleich 4 Elfmeter zu verschießen.
a) Einmal traf er den Fuß des Tormanns, der genau in der Mitte des Tores auf der Linie stand.
b) Dann traf er genau in der Mitte die Querlatte des Tores.
c) Beim dritten Versuch prallte der Ball an die linke untere Stange.
d) Und beim vierten Versuch traf der Schütze mit dem Ball genau das Lattenkreuz!
Berechnen Sie in allen Fällen die Entfernung vom Elfmeterpunkt!
Hinweis: Ein Fußballtor ist 8 yards breit (1 yard = 914,4 mm) und 8 feet hoch (1 foot = 304,8 mm). Der Elfmeter wird aus einer Entfernung von 12 yards geschossen.
Lösung: Die Abmessungen: Tor 7,32 m x 2,44 m; Elfmeter 10,97 m
a) 10,97 m ; b) 11,24 m ; c) 11,56 m ; d) 11,82 m

Aufgabe 2: Ein Handballtor hat folgende Abmessungen: Breite 3m, Höhe 2m. Welche Diagonale muss ein Tormann somit abdecken?
Ergebnis: 3,61 m

Satz des Pythagoras, Anwendungsaufgabe





Aufgabe: Berechne die unbekannten Radien aus der Breite b der Figur.
Lösung:
Als grundsätzliche Überlegung gilt: Wenn sich zwei Kreise berühren, dann liegen der Berührungspunkt und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden.
Werden die Berührungsradien eingezeichnet, so liegt B_1 auf einer Geraden mit M_2 und M_3, B_2 liegt auf der Geraden M_1M_3 (rot). Die grüne Linie ist die Symmetrieachse.
Die Strecke AM_1 = y kann entweder aus dem Dreieck links AM_2M_3 oder aus dem Dreieck rechts AM_1M_3 berechnet werden. Es wird

$M_2M_3 = M_2B_1 + B_1M_3 = b/4 + x$

$M_1M_3 = M_1B_2 - B_2M_3 = b - x$

d.h. $(x + b/4)^2 - (b/4)^2 = y^2 = (b - x)^2 - (b/2)^2$

$x^2 + xb/2 + b^2/16 - b^2/16 = b^2 - 2bx + x^2 - b^2/4$

$bx/2 + 2bx = b^2 - b^2/4$

$5/2\ bx = 3/4\ b^2$

$x = 3/10\ b$

Die Halbkreise haben die Radien b/4 und der eingezeichnete volle Kreis den Radius 3/10 b.

Satz des Pythagoras, historische Aufgaben

In altbabylonischen Texten, altindischen Handbüchern und chinesischen Rechenbüchern spielt die Berechnung von Diagonalen aus Rechteckseiten in vielen Aufgaben eine bedeutende Rolle.

Chinesisches Rechenbuch

"Ein Bambusstamm ist 10 Fuß hoch. Die Spitze wurde abgeknickt und berührt den Boden in 3 Fuß Entfernung von der Wurzel. In welcher Höhe befindet sich die Knickstelle?"
Lösung:
Die Knickstelle befindet sich in x Fuß Höhe. Es gilt $3^2 + x^2 = (10 - x)^2$, daraus folgt x = 91/20 Fuß.

"Im Mittelpunkt eines quadratischen Teiches von 10 Fuß Seitenlänge wächst ein Schilfrohr, das sich 1 Fuß über das Wasser erhebt. Treibt der Wind das Schilfrohr ans Ufer zur Mitte einer Seite hin, so berührt es gerade den Rand des Teiches. Wie tief ist der Teich?"
Lösung:
Die Wassertiefe sei x Fuß. Es gilt $x^2 + 5^2 = (x + 1)^2$, daraus folgt x = 12 Fuß.

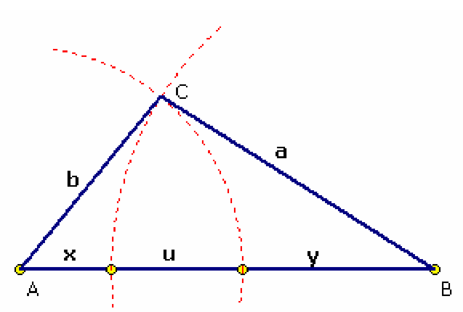
Altbabylonischer Text

"Ein Balken ist 30 Ellen lang. Von oben ist er um 6 Ellen herabgekommen. Wie weit hat er sich von unten entfernt?"

Lösung:
Die Entfernung zwischen dem Berührungspunkt des Balkens am Boden und der Wand wird mit x Ellen angenommen. Es ist $x^2 + (30-6)^2 = 30^2$, daraus folgt $x = 18$.

Indische Aufgabensammlung

"Zwei Vögel sitzen auf verschieden hohen Stangen; Sie fliegen nun auf ein zwischen den Stangen am Boden liegendes Ziel zu. Wo muss dieser Zielpunkt liegen, wenn die Wege der beiden Vögel gleich lang sein sollen?"
Lösung:
a und b seien die Höhen der Stangen mit a > b, d sei ihre Entfernung am Boden und x die Entfernung des Punktes von der kürzeren Stange.
Daraus folgt: $b^2 + x^2 = a^2 + (d - x)^2$ und $x = (a^2 - b^2 + d^2)/(2d)$



Allgemeiner Satz des Pythagoras

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC. Um A und B werden Kreisbögen mit den Radien b und a gezeichnet und mit der Seite c zum Schnitt gebracht, wodurch 3 Abschnitte entstehen. Der bei A beginnende Abschnitt der Seite c sei x, der mittlere Abschnitt u und der bei B endende Abschnitt y.
Dann gilt:

$c = x + u + y$; $a = u + y$; $b = u + x$

$c^2 = (x + u + y)^2 = u^2 + x^2 + y^2 + 2ux + 2uy +$
2uz
und somit als allgemeiner Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 - u^2 + 2xy$$

Für rechtwinklige Dreiecke ergibt sich mit $u^2 = 2xy$ der Satz des Pythagoras. Außerdem wird auch

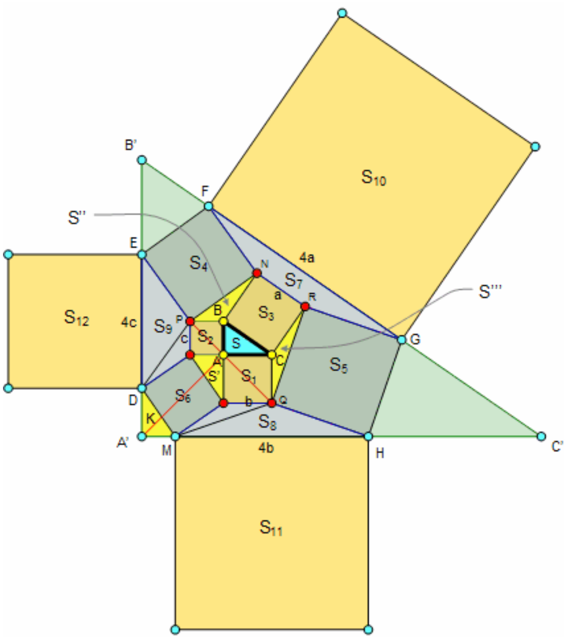
$$u^2 - 2xy = 2\ ab \cos \gamma$$

woraus sich der Kosinussatz ergibt $c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos \gamma$
Edsger Wybe Dijkstra erweiterte den Satz von Pythagoras auf alle Dreiecke:

Satz von Dijkstra

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und α, β, γ die gegenüberliegenden Innenwinkel, so gilt $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$
Für rechtwinklige Dreiecke wird $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$ und somit $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Für spitzwinklige Dreiecke ist die Summe $\alpha + \beta - \gamma > 0$, und damit $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$ positiv. Folglich muss $a^2 + b^2 > c^2$ sein.

Pythagoras-Kuriosität



Durch Antonio Gutierrez wird unter
http://www.gogeometry.com
folgende Pythagoras-"Kuriosität" beschrieben:

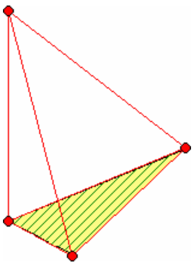
ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche S, BC = a, AC = b und AB = c. S1, S2, S3 seien die Flächen der auf die Katheten b, c und die Hypotenuse a aufgesetzten Quadrate. S4, S5, S6; S7, S8, S9 sowie S10, S11, S12 seien die Flächeninhalte, der in der Zeichnung markierten Quadrate, Vierecke, Dreiecke und S', S", S"', K Flächeninhalte in den bezeichneten Dreiecken.
Dann gilt:

$S_3 = S_1 + S_2$; Satz des Pythagoras
PD = PE , QM = QH
S, S' und K sind kongruente Dreiecke
S_3 und S_6 sind kongruente Quadrate
S = S' = S" = S"' = K
DE || AB, FB || BC, HM || AC
Δ A'B'C' ist ähnlich zu Δ ABC

S_7, S_8, S_9 sind Trapeze
DE = 4c, FG = 4a, HM 4b
$S_7 = S_8 = S_9 = 5S$
$S_4 + S_5 = 5\ S_3 = 5\ S_6$
A'A ist Winkelhalbierende bei A und A'
A'A ist senkrecht zu PQ
$S_{10} = 16\ S_3$, $S_{11} = 16\ S_1$, $S_{12} = 16\ S_2$ $\qquad$ $S_{10} = S_{11} + S_{12}$

Verallgemeinerter Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras kann auf höhere Dimensionen erweitert werden:



Satz von de Gua, Satz des Pythagoras im R³

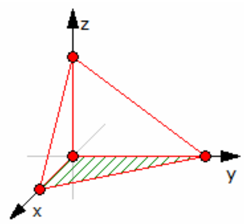
Besitzt ein Tetraeder eine Ecke mit rechten Winkeln, d.h. eine Würfelecke, dann ist das Quadrat des Flächeninhaltes der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der Flächeninhalte der anderen drei Seitenflächen.
Sind a, b, c und d die Flächeninhalte der vier Tetraederseiten, so gilt dann

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

J.P.de Gua de Malves (1712-1785) stellte 1783 diesen Satz der Pariser Akademie vor. Allerdings war er schon Descartes bekannt.

Die Tabelle enthält die Längen der drei ganzzahligen, rechte Winkel bildenden Tetraederkanten x, y, z sowie die Flächeninhalte a, b, c, d der vier Seitenflächen eines oben beschriebenen Tetraeders sowie das Quadrat d². Ein derartiges Tetraeder wird pythagoreisches Tetraeder genannt.
Beispiellösungen

x	y	z	a	b	c	d	d²
1	2	8	1	4	8	9	81
2	2	4	2	4	4	6	36
3	4	9	6	13	18	23	529
4	5	48	10	96	120	154	23716
5	8	14	20	35	56	69	4761
6	6	12	18	36	36	54	2916
7	8	26	28	91	104	141	19881
8	8	16	32	64	64	96	9216
9	12	32	54	144	192	246	60516



Satz: Besitzt ein Tetraeder eine Ecke mit rechten Winkeln, d.h. eine Würfelecke, dann ist das Quadrat des Flächeninhaltes der dieser Ecke gegenüberliegenden Seite gleich der Summe der Quadrate der Flächeninhalte der anderen drei Seitenflächen.
Sind a, b, c und d die Flächeninhalte der vier Tetraederseiten, so gilt dann $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$

Nachweis: Ist das Tetraeder orthogonal mit der orthogonalen Ecke im Koordinatenursprung, so können die Ortsvektoren der anderen Ecken durch skalare Multiplikationen der Basisvektoren $e_1^{\to}$, $e_2^{\to}$, $e_3^{\to}$ dargestellt werden:

$$x_1^{\to} = a\ e_1^{\to},\ x_2^{\to} = b\ e_2^{\to},\ x_3^{\to} = c\ e_3^{\to}$$

Die Kanten von Ecke 1 zu den Ecken 2 und 3 sind dann die Differenz dieser Vektoren

$$k_{1,2}^{\to} = b\ e_2^{\to} - a\ e_1^{\to} \qquad k_{1,3}^{\to} = c\ e_3^{\to} - a\ e_1^{\to}$$

Der Flächeninhalt A des schräg stehenden Dreiecks ist gleich dem halben Parallelogramm, das von den zwei Kantenvektoren gebildet wird

$$A = 1/2\ |(b\ e_2^{\to} - a\ e_1^{\to}) \times (c\ e_3^{\to} - a\ e_1^{\to})| \qquad \text{d.h.} \qquad A^2 = 1/4\ ((ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2)$$

Die orthogonalen Seitenflächen des Tetraeders sind rechtwinklige Dreiecke, deren Flächeninhalte sich einfach ergeben zu

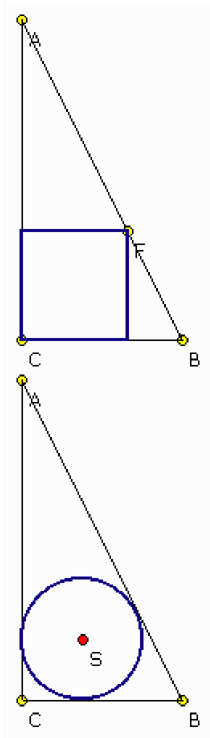
$$A_1^2 = 1/4\ (ab)^2 \qquad A_2^2 = 1/4\ (ac)^2 \qquad A_3^2 = 1/4\ (bc)^2$$

woraus sofort die obige Gleichung folgt.

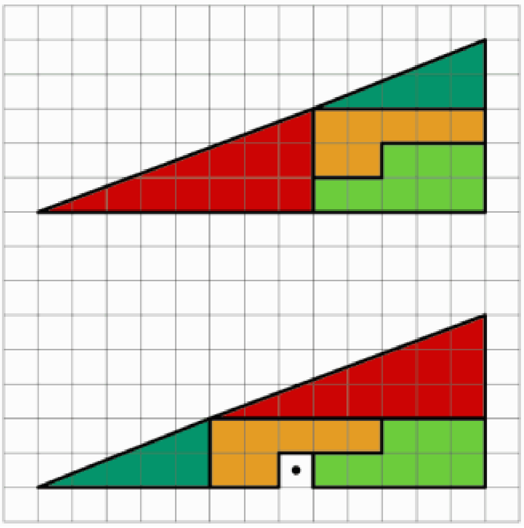
Satz von Dijkstra

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und α, β, γ die gegenüberliegenden Innenwinkel, so gilt $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = \operatorname{sgn}(a^2 + b^2 - c^2)$
Für rechtwinklige Dreiecke wird $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma) = 0$ und somit $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. Für spitzwinklige Dreiecke ist die Summe $\alpha + \beta - \gamma > 0$, und damit $\operatorname{sgn}(\alpha + \beta - \gamma)$ positiv. Folglich muss $a^2 + b^2 > c^2$ sein.

Inkreis im rechtwinkligen Dreieck

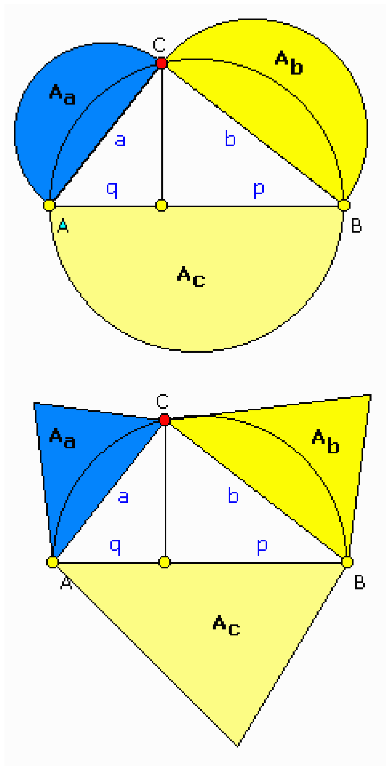


In dem antiken chinesischen Werk "Chiu-chang suan-shu" ("Neun Bücher über Mathematik") aus dem 3. bis 1.Jahrhundert v.Chr. finden sich zwei interessante Aufgaben zum rechtwinkligen Dreieck.
Zum einen ist nach der Seitenlänge s des größtmöglichen Quadrates in einem rechtwinkligen Dreieck gefragt, wenn ein Punkt des Quadrates am rechten Winkel liegt. Mit der Bezeichnung "kou" für die waagerechte Kathete, "ku" für die senkrechte und "hsien" für die Hypotenuse, gibt der chinesische Mathematiker die Lösung $s = (ku * kou) / (ku + kou)$
Als Lösungsweg werden die zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke betrachtet, die vom Quadrat herausgeschnitten werden. Für diese gilt
$ku / kou = (ku - s) / s$ woraus die Lösung folgt.
In der zweiten Aufgabe wird nach dem Radius r des größtmöglichen Kreis gefragt, der die Dreiecksseiten von innen berührt; nach heutigem Verständnis nach dem Inkreis.
Über einen Zerlegungsbeweis des Dreiecks erhält man
$r = (ku * kou) / (ku + kou + hsien)$
Wenn man bedenkt, dass diese Aufgabe vor über 2000 Jahren gelöst wurde, kann man die antike chinesische Mathematik nur bewundern.



Zerlegungsbeweis

Im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras wurden im Laufe der Zeit sehr viele Zerlegungsbeweise konstruiert. Dabei werden die flächengleichen Bereiche durch unterschiedlich angeordnete flächengleiche Dreiecke, Vierecke, ... so überdeckt, dass die beabsichtigte Flächengleichheit ersichtlich wird.

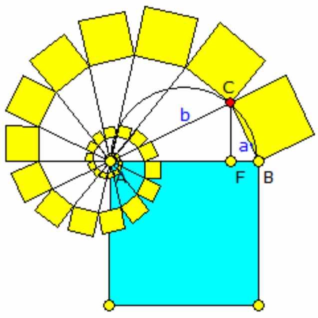


Derartige Beweise dürfen aber nicht auf der reinen Anschauung beruhen, sondern sollten arithmetisch unterlegt sein.
Dass das menschliche Auge irren kann, ist in der Abbildung zu sehen. Gleiche Flächen wurden unterschiedlich positioniert und ergeben in der unteren Anordnung eine größere Fläche!
Dabei handelt es sich um eine Täuschung, da die zwei großen rechtwinkligen Dreiecke gar keine sind und die kleinen rechtwinkligen Dreiecke nicht zu einander ähnlich sind (Innenwinkel 20,556° zu 21,801°) und so gar nicht oben und unten die gleichen Gesamtfiguren entstehen.
Ein ähnliches Paradoxon kann mit einem Quadrat konstruiert werden.

Figuren am rechtwinkligen Dreieck / Pythagoreische Figuren

Als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras gilt:
Die Summe der Flächen der Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Halbkreises über der Hypotenuse.

großer Halbkreis: $A = 1/2\ \pi\ (c/2)^2 = \pi/8\ c^2$
kleine Halbkreise: $A = 1/2\ \pi\ (a/2)^2 + 1/2\ \pi\ (b/2)^2 = \pi/8\ c^2$
Die Summe der Flächen zueinander ähnlicher Dreiecke über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des zu diesen ähnlichen Dreiecks über der Hypotenuse. Und allgemein: Sind F_a, F_b und F_c zueinander ähnlicher Figuren über den Seiten a, b und c eines rechtwinkligen Dreiecks mit c als Hypotenuse, so gilt für ihre Flächeninhalte: $F_a + F_b = F_c$

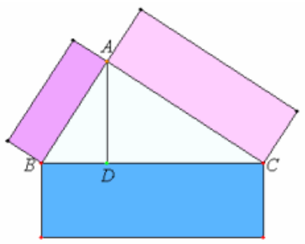


Pythagoreische Spirale

Die klassische Pythagoras-Figur kann nicht nur durch Aufsetzen von ähnlichen N-Ecken modifiziert werden, es ist durchaus auch möglich, an die Katheten weitere, ähnliche rechtwinklige Dreiecke anzufügen und dort Quadrate bzw. andere Figuren aufzusetzen.
Wiederholt man dies immer wieder, so entsteht eine Pythagoreische Spirale wie in der Abbildung.

Dabei gilt: Das blaue Quadrat ist jeweils flächengleich der Summe der Flächen der an die Katheten angesetzten, hier gelben, Quadrate.

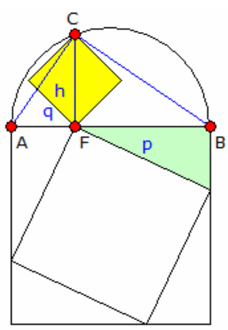
Das blaue Quadrat hat den Flächeninhalt c². Das erste gelbe Quadrat hat den Flächeninhalt a².
Das zweite gelbe Quadrat ist gegenüber dem ersten gelben Quadrat längenmäßig mit dem Faktor b/c verkleinert, flächenmäßig also mit dem Faktor b²/c².
Das dritte gelbe Quadrat ist gegenüber dem zweiten Quadrat ebenso flächenmäßig mit dem Faktor b²/c² verkleinert, und so weiter.
Damit erhält man für die Summe der Flächeninhalte der gelben Quadrate als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe: $\Sigma_{n=0}^{\infty}\ (b/c)^{2n}\ a^2 = a^2 / (1-b^2/c^2) = c^2$

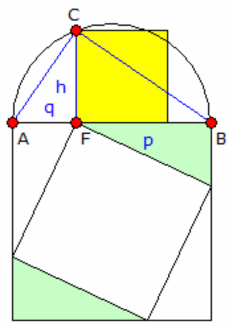


Pythagoreische Figuren bei Euklid

Euklids "Elemente": Buch VI § 31 (L. 21):
Im rechtwinkligen Dreieck ist eine Figur über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ähnlichen, über den den rechten Winkel umfassenden Seiten ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, dass eine Figur über BC den ähnlichen, über BA, AC ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich ist.
Man zeichne das Lot AD.
Da man dann im rechtwinkligen Dreieck ABC aus dem rechten Winkel bei A auf die Grundlinie BC das Lot AD gefällt hat, sind die Dreiecke am Lot, nämlich ABD, ADC sowohl dem ganzen Δ ABC aus auch einander ähnlich (VI, 8). Da ABC ~ ABD, ist CB : BA = AB : BD.
Da hier drei Strecken in Proportion stehen, verhält sich eine Figur über der ersten zu der ähnlichen, über der zweiten ähnlich gezeichneten, wie die erste Strecke zur dritten (VI, 20; V, Def.9); also verhält sich, wie CB:BC, so die Figur über CB zu der ähnlichen über BA ähnlich gezeichneten, und auch aus demselben Grund auch, wie BC:CD, so die Figur über BC zu der über CA.
Folglich verhält sich auch, wie BC:(BD+DC)m so die Figur über BC zu den ähnlichen, über BA, AC ähnlich gezeichneten zusammen (V, 24).
Nun ist BC = BD+DC. Also ist auch die Figur über BC den ähnlichen, über BA, AC ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich (V, Def.5) - S.





Höhensätze

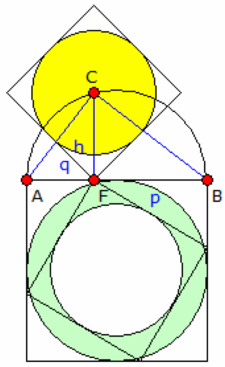
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC gelten neben dem klassischen Höhensatz $h^2 = p\ c$ weitere ähnliche Beziehungen.

1) Das Quadrat (obere Abbildung) mit einer Diagonalenlänge gleich der Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten p und q des Ausgangsdreiecks.

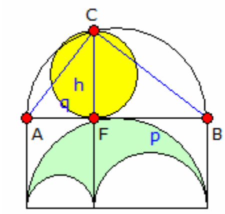
Nachweis:
Seitenlänge des Quadrates $a = h / \sqrt{2}$
Fläche des Quadrates $A_Q = h^2 / 2$
Fläche des Dreiecks $A_D = p\, q / 2 = h^2 / 2 = A_Q$

2) Das Quadrat (untere Abbildung) mit der Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks als Seitenlänge ist flächengleich zwei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten p und q des Ausgangsdreiecks.
Nachweis:
Fläche des Quadrates $A_Q = h^2$
Fläche der 2 Dreiecke $A_D = 2\,(p\, q / 2) = p\, q = h^2 = A_Q$

3) Das Quadrat (keine Abbildung) mit einer Diagonalenlänge gleich der doppelten Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks ist flächengleich vier rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten p und q des Ausgangsdreiecks.
Nachweis erfolgt analog.



4) Der Kreis, welcher einem Quadrat (obere Abbildung) mit der doppelten Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks als Seitenlänge, eingeschrieben ist, ist flächengleich dem Kreisring mit dem äußeren Radius c/2 und dem inneren Radius gleich $1/2\, \sqrt{(p^2+q^2)}$.
Nachweis:
Radius des Kreises $r = h / \sqrt{2}$
Fläche des Kreises $A_K = \pi/2\, h^2$
Fläche des Kreisrings $A_R = \pi\, c^2/4 - \pi\, (\sqrt{(p^2+q^2)}/2)^2 =$
$= \pi/4\, (c^2 - (p^2+q^2)) = \pi/4\, ((p+q)^2 - p^2 - q^2) = \pi/4\, (2pq) = \pi/2\, h^2 = A_K$



5) Der Kreis (untere Abbildung) mit der Höhe h des rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser ist flächengleich dem Arbelos mit der Grundseite c und der Teilung am Fußpunkt der Höhe h_c.
Nachweis:
Fläche des Kreises $A_K = \pi/4\, h^2$
Allgemeiner Flächeninhalt des Arbelos mit der Grundseite l und den Teilstrecken r und (l-r)
Fläche des Arbelos $A = \pi/4 \cdot r \cdot (l - r)$
Fläche des Arbelos $A_A = \pi/4\, q\, (c-q) = \pi/4\, pq = \pi/4\, h^2 = A_K$