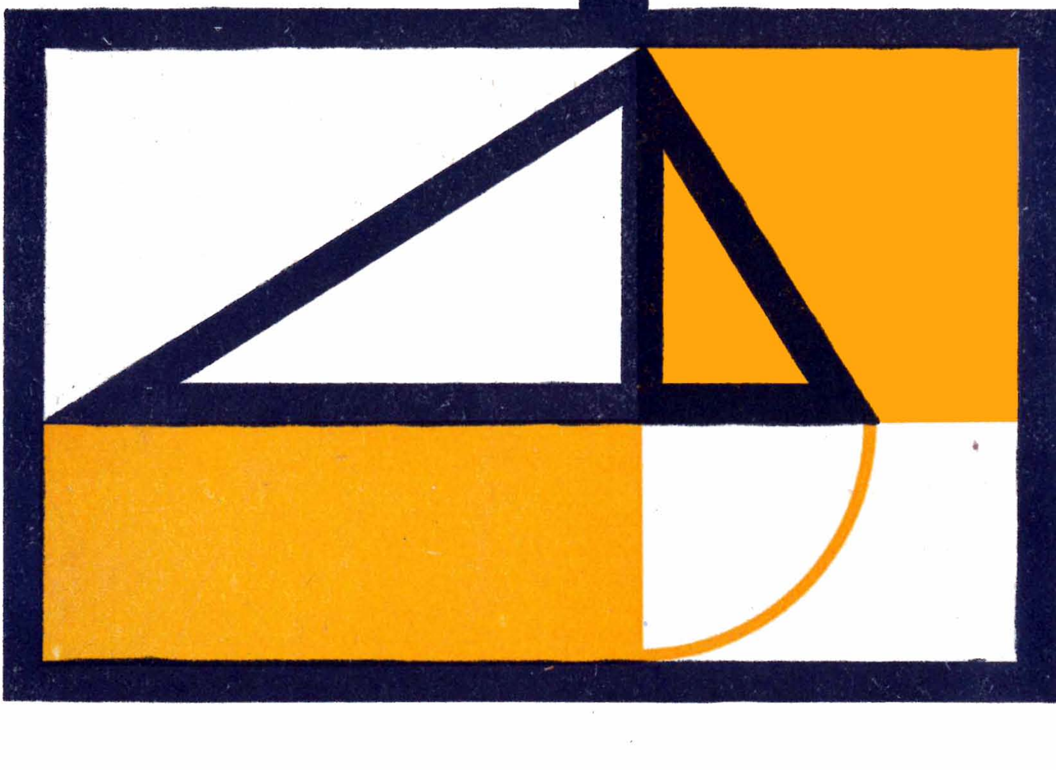
Mathematische Schülerzeitschrift

# alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

# Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 4

**Redaktionskollegium:**
Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger (Bad Doberan); StR J. Lehmann (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle); OStR Dr. H. Weiß (Berlin)
**Aufgabengruppe:**
NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; OL K. Krüger (Bad Doberan): Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10
**Gutachtergruppe:**
NPT H. Kästner; R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)
**Redaktion:**
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)
**Anschrift der Redaktion:**
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
**Anschrift des Verlags:**
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 97); G. Monge, nach einer unbezeichneten Lithographie in Schneider, Lehrb. der darst. Geometrie, 1828 (S. 107); S. Meier, Dresden (S. 112), Vignetten: J. Görke, Berlin (S. 102 bis 105); H.-J. Jordan, Leipzig
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß: 1. 6. 1967

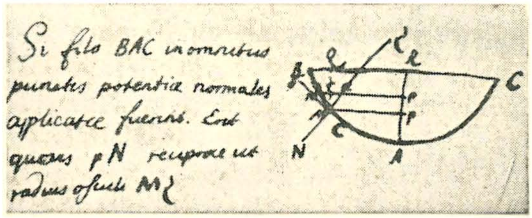
# Inhalt



* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

# Leonhard Euler

## 1707 bis 1783



Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Der Vater, ein hochgebildeter Mann, erteilte dem Sohn den ersten Unterricht, doch sehr bald schickte er ihn zu Johann Bernoulli in die mathematische Schule. Seine Söhne, Nikolaus und Daniel, folgten 1725 einem Ruf an die Petersburger Universität. Zwei Jahre später holten sie Euler in ihren Kreis. Obgleich die Regierungen, die einander nach dem Tode von Peter I. rasch ablösten, der Akademie wenig geneigt waren, konnte der *Mathematiker* Euler einigermaßen sicher vor mißtrauischen Machthabern leben. Dennoch folgte er 1741 gern einem Ruf an die Berliner Akademie.

Euler beschäftigte sich nicht nur mit theoretisch-mathematischen Problemen, sondern auch mit zahlreichen praktischen Dingen. Er hatte sich in Petersburg mit der Überprüfung von Waagen befaßt, ein Werk über den Schiffbau geschrieben, auf den Gebieten der Kriegswissenschaft, des Maschinenbaues und des Geldwesens gearbeitet. In Berlin oblag es ihm, den Bau des Finowkanals zu überwachen, Methoden zur Ausbeutung der Salzbergwerke anzugeben und Gutachten über die Wasserwerke zu Sanssouci, über Lotteriepläne und Finanzreformen anzufertigen. Im Laufe der Zeit verschlechterte sich infolge der Despotenwillkür und der Deutschenverachtung Friedrichs II. das Verhältnis zwischen Euler und ihm stark. Obwohl Euler jahrelang die Geschäfte des Akademiepräsidenten besorgt hatte, ernannte der König D'Alembert zum neuen Präsidenten. Diese kränkende Zurücksetzung konnte Euler nie verwinden. Er hegte den Wunsch, an die Petersburger Akademie zurückzukehren, einen Wunsch, den ihm Katharina II. im Jahre 1766 erfüllte.

Am 7. September 1783 nahm dem inzwischen völlig Erblindeten der Tod die Feder aus der Hand, mit der er noch am selben Tag anläßlich der Ballonfahrt von Montgolfier eine schwierige Rechnung (Integration) ausgeführt hatte. Es war Eulers Lebensaufgabe, die reine mathematische Theorie auf eine höhere Stufe zu heben, die Mathematik von ihrer Schwerfälligkeit zu befreien und zu jener Eleganz zu entwickeln, die eine fruchtbare Anwendung auf naturwissenschaftliche Fragen erlaubt. Euler machte die Mathematik durch zahlreiche Lehrbücher einem breiten Kreis interessierter Menschen zugänglich.

Insgesamt schrieb er 28 Bücher und 788 Abhandlungen. Er beschäftigte sich u. a. mit Zahlentheorie, mit unendlichen Reihen, entdeckte den Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion und führte die uns heute geläufige Definition des Logarithmus sowie die Symbole $e$, $\pi$, $i$ und $f(x)$ ein. Auf ihn gehen die Anfänge der Variationsrechnung zurück. Seine bedeutendste Leistung liegt auf dem Gebiet der Integralrechnung.

Er arbeitete darüber hinaus über Hydrostatik und -dynamik, führte die nach ihm benannten Bewegungsgleichungen ein. Auch in der Astronomie, der Optik und der Musik leistete Euler Hervorragendes.

H. Bernhardt

# Vollständige Anleitung zur Algebra

*Lehrbuch von L. Euler*

Im Jahre 1770 gab Euler, der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus. Dieses Lehrbuch erschien zunächst in russischer Sprache in Petersburg, dem heutigen Leningrad, und wurde in viele Sprachen übersetzt. Das Buch war mehr als hundert Jahre lang eines der beliebtesten und meistgelesenen Lehrbücher. Es enthält zahlreiche schöne Aufgaben, leichtere und schwerere. In einer etwas modernisierten Fassung geben wir hier einige wieder:

**99** Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Talern. Nach seinem Testament soll der erste Sohn 200 Taler mehr erhalten als der zweite, der zweite aber 100 Taler mehr als der dritte. Wieviel Taler erhält jeder der drei Söhne? 5

**100** Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere Summand 49 mal so groß wie der kleinere Summand ist. 6

**101** Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multipliziert 24 ergibt. Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 7

**102** Zwei Bäuerinnen besitzen zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 8 teile, verbleibt ein Rest von 7." Da erwidert die zweite: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 10 teile, verbleibt auch ein Rest von 7." Wieviel Eier besitzt jede Bäuerin? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 8

**103** Man suche zwei positive reelle Zahlen mit den folgenden Eigenschaften: Die Summe dieser beiden Zahlen ist gleich ihrem Produkt und außerdem gleich der Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen. 9

**104** Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler. Wieviel Pferde und wieviel Ochsen sind es gewesen? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 10

Ausgewählt von Dr. R. Lüders


Für unsere Jungen Philatelisten wurden von Arbeitsgemeinschaftsleiter W. Unze, Sonderschuleinrichtung für Körperbehinderte, Leipzig, alle über L. Euler herausgegebenen Briefmarken zur Verfügung gestellt: DDR 1950, 1 Pf und 1957 10 Pf; Schweiz 1957, 5 Cent und 5 Cent; UdSSR 1957, 40 Kopeken; Lipsia-Katalog Nr. 98; 422; 651; 1944.

# Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre

$A = \{1; 2\}$ $A \cap B = \{2\}$
$T_8 = \emptyset$ $(A \cup B) \cap C$

In den bisherigen Heften von „alpha“ haben wir allerlei über Mengen erfahren. Diesmal wollen wir keine neuen Dinge dazu lernen, sondern nur das anwenden, was wir schon wissen. Damit das aber nicht langweilig wird, kommen neben einfachen Aufgaben auch etwas schwierigere vor.

## Aufgaben zum Thema „Teilmengen“

Wie uns schon bekannt ist, bezeichnen wir eine Menge $N$ genau dann als Teilmenge von $M$ (geschrieben $N \subseteq M$), wenn jedes Element von $N$ auch zu $M$ gehört.

● Die drei Freunde Alfred, Bernd und Christian treffen sich, um Tischtennis zu spielen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür? (Es können ja immer nur *zwei* gegeneinander antreten!)

□ Wir haben die Menge $F = \{a; b; c\}$ gegeben. Es wird gefragt, wieviel verschiedene Teilmengen mit genau zwei Elementen man aus $F$ herausgreifen kann. Das ist leicht anzugeben: $T_1 = \{a; b\}$, $T_2 = \{a; c\}$ und $T_3 = \{b; c\}$. Weitere Möglichkeiten gibt es offenbar nicht. Es sind also genau *drei* verschiedene Spielansetzungen möglich.

● Wieviel verschiedene Teilmengen kann man aus der eben betrachteten Menge $F$ überhaupt herausgreifen?

□ Wie wir schon gesehen haben, gibt es *drei* verschiedene Teilmengen mit genau *zwei* Elementen. Außerdem müssen wir alle Teilmengen mit *einem* Element berücksichtigen: $T_4 = \{a\}$, $T_5 = \{b\}$ und $T_6 = \{c\}$. Das sind also auch drei. Dazu kommt die Menge $F$ selbst (als unechte Teilmenge): $T_7 = F = \{a; b; c\}$. Bis jetzt haben wir also insgesamt *sieben* verschiedene Teilmengen von $F$. Das sind aber noch nicht alle, denn wir dürfen die *leere* Menge nicht vergessen! Sie ist Teilmenge *jeder* Menge, also auch Teilmenge von $F$: Die Bedingung, daß jedes Element der leeren Menge auch zu $F$ gehört, ist auf jeden Fall erfüllt, denn zur leeren Menge gehören ja keine Elemente! Somit gilt: $T_8 = \emptyset$.
Wir können also aus der Menge $F$, die drei Elemente enthält, insgesamt *acht* verschiedene Teilmengen herausgreifen.

● Wieviel Teilmengen besitzt die Menge $A = \{1; 2\}$?

□ Wir geben alle Teilmengen an: $T_1 = \emptyset$, $T_2 = \{1\}$, $T_3 = \{2\}$, $T_4 = \{1; 2\}$. Es sind also insgesamt *vier*.

● Wieviel verschiedene Teilmengen besitzt die Menge $Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$?

□ Zur Menge $Z$ gehören *zehn* Elemente. Um die Menge aller Teilmengen zu finden, müßten wir neben der leeren Menge und $Z$ selbst alle Teilmengen mit genau einem Element, alle mit zwei Elementen, alle mit drei Elementen usw. bis zur Menge aller Teilmengen mit neun Elementen berücksichtigen. Das wäre eine sehr mühsame Arbeit, bei der man noch dazu leicht etwas übersehen könnte. Da ist es schon besser, wir versuchen einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge und der Anzahl ihrer Teilmengen zu finden, um unsere Aufgabe *rechnerisch* lösen zu können.

(a) Die leere Menge besitzt *null* Elemente und es ist *eine* Teilmenge vorhanden, nämlich die leere Menge selbst.

(b) Eine Menge $B$, die *ein* Element enthält, besitzt *zwei* Teilmengen: $T_1 = \emptyset$, $T_2 = B$.

(c) Mengen mit *zwei* bzw. *drei* Elementen haben wir schon untersucht — sie besitzen *vier* bzw. *acht* Teilmengen.

Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente mit $n$ und die Anzahl der Teilmengen mit $t$, so können wir bis jetzt folgende Tabelle aufstellen:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $t$ | 1 | 2 | 4 | 8 |

Das sieht so aus, als würde sich die Anzahl der Teilmengen jedesmal *verdoppeln*, wenn ein weiteres Element zur Menge dazu kommt. Überprüft einmal den Fall $n = 4$ -- wer sorgfältig arbeitet, findet in der Tat 16 Teilmengen!

Für $n = 0$ bis $n = 4$ wissen wir also: $t = 2^n$. Ist das auch für $n = 10$ noch so? Wir können das aus unseren wenigen Beispielen nicht schließen. Mit mathematischen Hilfsmitteln, die im Unterricht erst in höheren Klassen behandelt werden, kann man aber *beweisen*, daß die Beziehung $t = 2^n$ für *jede* natürliche Zahl $n$ gilt, also auch für $n = 10$. Unsere Menge $Z$ hat also $2^{10} = 1024$ verschiedene Teilmengen! (Da hätten wir lange zu tun gehabt, um sie alle aufzuschreiben!)

## Aufgaben zur Vereinigungs- und Durchschnittbildung

Wir erinnern uns, daß zur Vereinigung der Mengen $M$ und $N$ (geschrieben: $M \cup N$) genau die Elemente gehören, die in $M$ oder in $N$ liegen. Der Durchschnitt $M \cap N$ umfaßt dagegen genau jene Elemente, die *sowohl* zu $M$ *als auch* zu $N$ gehören.

● Gegeben sind die Mengen $A = \{2; 4; 8\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ und $C = \{2; 3; 5; 7\}$. Es ist die Menge $(A \cup B) \cap C$ zu bestimmen.

□ Wir bilden zunächst $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 8\}$ und anschließend den Durchschnitt dieser Menge mit $C$. Es ergibt sich: $(A \cup B) \cap C = \{2; 3\}$.

● Es ist die Menge $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ zu bestimmen.

□ Es ist $A \cap C = \{2\}$ und $B \cap C = \{2; 3\}$. Die Vereinigung beider Mengen ergibt: $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 3\}$.

Mancher wird jetzt vielleicht fragen, ob es Zufall ist, daß beide Aufgaben auf das gleiche Ergebnis führen. Nun, es ist *kein* Zufall, sondern es gilt *stets*
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Es würde hier zu weit führen, einen *Beweis* für dieses Gesetz anzugeben. Jeder kann es sich aber anschaulich klar machen, wenn er $A$, $B$ und $C$ durch ebene Punktmengen darstellt, wie wir das früher schon einmal gemacht haben.

● Bestimme $(A \cap B) \cup C$!

□ $A \cap B = \{2\}$, $(A \cap B) \cup C = \{2; 3; 5; 7\}$.

● Bestimme $(A \cup C) \cap (B \cup C)$!

□ $A \cup C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, $B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ und
$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2; 3; 5; 7\}$.

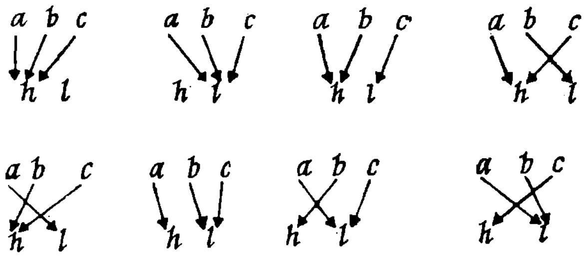
Auch die Übereinstimmung der Lösungen der letzten beiden Aufgaben ist *kein* Zufall! Es gilt nämlich *stets*: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

## Aufgaben zum Thema „Abbildungen“

Beim letzten Mal haben wir gelernt, wann wir von einer *Abbildung* sprechen können: Es mußten Mengen $M$ und $N$ vorliegen, wobei Elementen aus $M$ Elemente aus $N$ zugeordnet sind.

● Von den uns schon bekannten Freunden Alfred, Bernd und Christian wissen wir, daß jeder von ihnen in den Ferien genau eine Stadt besucht hat. Vor den Ferien hatten sie Halle oder Leipzig als mögliche Reiseziele angegeben. Wie kann es nun wirklich gewesen sein?

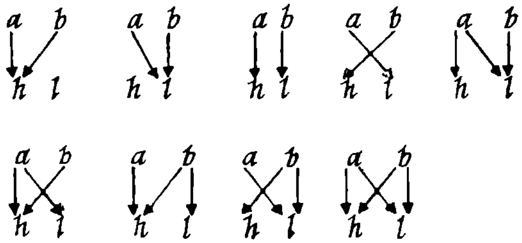
□ Gegeben sind also zwei Mengen, nämlich $F = \{a; b; c\}$ und $S = \{h; l\}$. Gefragt wird, welche *eindeutigen* Abbildungen *von* $F$ in $S$ möglich sind. Es ist nicht schwierig, alle Abbildungen dieser Art anzugeben. Man muß dazu nur bedenken, daß entweder alle drei Freunde in die gleiche Stadt gefahren sind oder daß zwei in der einen waren und einer in der anderen. So findet man folgende Fälle:



Es gibt also insgesamt *acht* Möglichkeiten.

● Welche Möglichkeiten (und wie viele) gibt es, wenn nur *zwei* unserer Freunde (Alfred und Bernd) verreist waren, wobei aber jeder von ihnen auch *beide* Städte besucht haben kann?

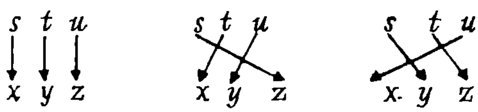
□ Wir haben jetzt die Mengen $F^* = \{a; b\}$ und $S = \{h; l\}$ gegeben. Die Aufgabe bedeutet, *alle* möglichen Abbildungen *von* $F$ in $S$ zu bestimmen. Bei systematischem Vorgehen findet man folgende Fälle:



Es gibt also *neun* Möglichkeiten.

● Zwei Schachmannschaften von je drei Spielern wollen einen Wettbewerb durchführen, bei dem jeder Spieler der einen Mannschaft gegen jeden Spieler der anderen Mannschaft genau einmal antreten muß. Wieviel Runden sind notwendig, wenn in jeder Runde drei Spiele ausgetragen werden?

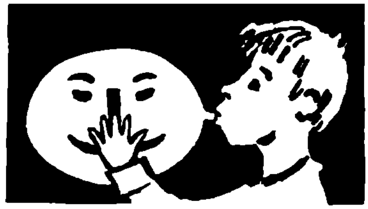
□ Wir haben eine Menge $M_1 = \{s; t; u\}$ und eine Menge $M_2 = \{x; y; z\}$ gegeben. Gefragt wird in der Aufgabe nach der Anzahl aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen von $M_1$ auf $M_2$, die man bilden kann, ohne daß eine Paarung (eine Spielansetzung) doppelt vorkommt. Folgende Abbildungen erfüllen diese Bedingungen:



Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Es sind also drei Spielrunden notwendig.
Damit wollen wir es für diesmal genug sein lassen.

W. Walsch

# Guter Mond, du gehst so stille...



**Punkt, Punkt, Komma, Strich,**
**fertig ist das Mondgesicht**

Mit einer Art Mondgesicht wollen wir uns hier einige Scherze erlauben. Stellt euch das Gesicht in Abb. 1 auf einer nach allen Seiten gleichmäßig gespannten Gummihaut gezeichnet vor. Die Quadrate in dem unterlegten Netz mögen die Seitenlängen $b$ haben. Zunächst bringen wir den Mond einmal zum Lachen. In Abb. 2 haben wir die Spannung der Gummihaut verändert. Das kann zum Beispiel dadurch geschehen, daß man die Hände rechts und links auf die Ränder aufsetzt und vorsichtig nach außen dehnt, und zwar mit den Daumenballen stärker als mit den Fingerspitzen. Der Mund, der vorher streng gerade war, ist jetzt leicht im Bogen nach oben gezogen, und auch die Nase hat

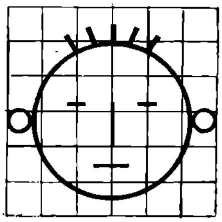


Abb. 1

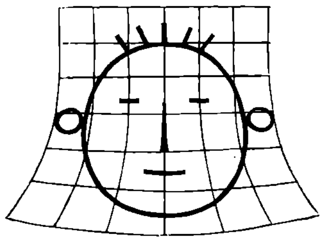


Abb. 2

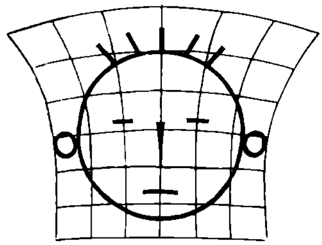


Abb. 3

ihre Form sichtlich geändert. In Abb. 3 macht der Mond ein trauriges Gesicht. Wir haben jetzt mit den Fingerspitzen stärker gedehnt als mit den Ballen. Die Mundwinkel sind nach unten gezogen, die Nase hat einen anderen Schwung bekommen. Würden wir in dieser Art weiter dehnen, so würden wir das Gesicht noch weinerlicher machen: Die äußeren Augen- und Mundwinkel würden noch weiter nach unten gezogen. Dabei muß man allerdings darauf achten, daß keine Falten entstehen und daß die Haut nicht reißt.[1] Das Gesicht wird sich dabei immer weiter verzerren. Immer aber behält der Mond seine Nase im Gesicht. Auch Augen, Mund, alle inneren Punkte der Gesichtsumrahmung sind nach der Dehnung wieder innere Punkte, wie nahe sie auch der Umrandung kommen mögen. Die Ohren bleiben am Rand angeheftet, und auch Haare braucht der Mond bei der Prozedur nicht zu lassen. Aus den Quadraten sind in Abb. 2 und 3 mehr oder weniger gekrümmte Kurvenvierecke geworden.
Jetzt denken wir uns die Haut in Abb. 1 zwischen zwei waagerechte Stäbe gespannt, den oberen Stab festgehalten und den unteren parallel nach unten bewegt. Dadurch spannen wir die Haut senkrecht zur Stabrichtung. Ihr wißt sicher, daß bei einer solchen

[1]) Wenn ihr den Versuch nachmachen wollt, müßt ihr weichen Gummi nehmen und ihn, um darauf zeichnen zu können, mit Talkum einpudern. Ein aufgeschnittener Luftballon ist dafür ungeeignet, da sich diese Gummihaut nicht als Ebene aufspannen läßt. Die Krümmungen in Abb. 2 und 3 sind leicht übertrieben, um die Wirkung besser sichtbar zu machen.

Dehnung jedes kleinste Masseteilchen um den gleichen Faktor in der Spannungsrichtung gedehnt wird. Wir haben es mit einer gleichmäßigen Dehnung nach einer Richtung, nämlich senkrecht zu einer gegebenen Achse, zu tun, mit einer sogenannten *axialen Streckung*. Bei genügender Spannung werden aus den Quadraten von Abb. 1 kongruente Rechtecke mit den Seiten $b$ und $\frac{3}{2}b$. (Abb. 4) Jede Strecke, die parallel zur Achse verläuft, behält ihre Länge, während jede dazu senkrechte Strecke im Verhältnis 3:2 gedehnt wird. Das Kreisrund des Gesichts wird zu einer Ellipse, was für den, der die charakteristischen Eigenschaften einer Ellipse kennt, nicht schwer zu beweisen ist. Der Mond macht ein langes Gesicht dazu.

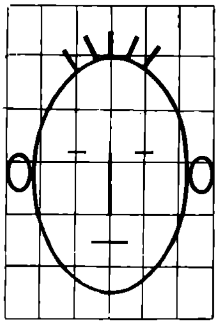


Abb. 4

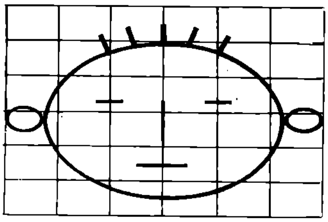


Abb. 5

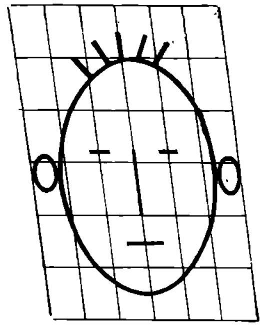


Abb. 6

Nun spannen wir, wieder von Abb. 1 ausgehend, die Haut in der dazu senkrechten Richtung, indem wir einen links angebrachten Stab festhalten und den rechten bewegen. (Abb. 5) Aus den Quadraten werden flache Rechtecke, aus dem Kreis eine liegende Ellipse, das Gesicht geht in die Breite.
Ihr erkennt aus den Abbildungen 4 und 5, daß aus den Strecken von Abb. 1 — im Gegensatz zu Abb. 2 und 3 — wieder geradlinige Strecken geworden sind, deren Länge sich allerdings teilweise geändert hat. Wir kommen später darauf zurück.
Jetzt gehen wir von Abb. 4 aus und schieben nach der axialen Streckung den unteren Stab in seiner Richtung nach rechts. (Abb. 6) Aus den Rechtecken sind Parallelogramme, aus dem Kreis ist eine schräg liegende Ellipse geworden. Der Mond macht ein schiefes Gesicht.
Schließlich kehren wir zu Abb. 1 zurück und verstärken diesmal die nach allen Seiten gleichmäßig wirkende Spannung (*Zentrische Streckung*, Abb. 7). Dabei sind aus den Quadraten wieder Quadrate geworden, die bei genügender Spannung die Seitenlänge $\frac{3}{2}b$ haben. Der Kreis ist zu einem Kreis mit größerem Radius geworden. Nasenlänge, Ohrenbreite, alle Strecken sind offenbar verlängert und haben dabei ihre Richtung beibehalten. Das Mondgesicht hat eine ganz regelmäßige Vergrößerung erfahren. Sein Ausdruck ist dabei gleich geblieben, wie bei der Vergrößerung einer Fotografie.

Um das ganze Geschehen mathematisch zu erfassen, gehen wir von Abb. 1 aus, denken uns aber jetzt die Gummihaut nach allen Richtungen hin ins Unendliche verlängert (d. h., ersetzt durch eine Ebene *ohne* Berandung). In der so veranschaulichten Ebene ist das Mondgesicht nur eine von unendlich vielen möglichen Figuren. Nun werden mit der ganzen Ebene die oben beschriebenen Verzerrungen vorgenommen, die wir als *geometrische Abbildungen der Ebene* bezeichnen. Bei jeder Abbildung stellen wir uns wieder die ganze Ebene vor. Jedesmal entspricht einem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt, in den er bei der Abbildung übergeht.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Kreises, der in Abb. 1 den Gesichtsumriß darstellt, mit $M$. Er liegt etwa in der Mitte der Nase. Diesen Punkt $M$ halten wir fest, während wir die Ebene gleichmäßig nach allen Richtungen hin dehnen. Das wird veranschaulicht durch Abb. 7. Wir denken sie so auf Abb. 1 gelegt, daß die zentrische Streckung von $M$ aus deutlich wird. Der Bildpunkt von $M$ fällt dabei wieder auf $M$; dies ist aber der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft, der einzige *Fixpunkt*[2], wie man in der Geometrie sagt. Jede von $M$ ausgehende Strecke wird auf das $m$fache gedehnt. Dabei ist $m$ eine feste Zahl, in Abb. 7 ist $m = \frac{3}{2}$.

Auch jede beliebige Strecke, die auf einer durch $M$ gehenden Geraden liegt, wird auf die $m$fache Länge gedehnt. Das könnt ihr leicht errechnen, wenn ihr untersucht, was mit den Abständen zwischen ihren Endpunkten und $M$ geschieht. Wir wollen uns davon überzeugen, daß auch jede andere Strecke $\overline{AB}$[3], die auf keiner durch $M$ gehenden Geraden liegt, wieder in eine Strecke übergeht und nicht etwa in ein gekrümmtes Kurvenstück wie in Abb. 2 oder 3. Dazu zeichnen wir $\overline{AB}$, wobei die Gerade $AB$ nicht durch $M$ geht, und konstruieren auf dem Strahl $MA$ den Bildpunkt $A'$ von $A$ so, daß $|\overline{MA'}| : |\overline{MA}| = m$ ist. Durch $A'$ zeichnen wir die Parallele zu $AB$ und bringen sie mit dem Strahl $MB$ zum Schnitt. Der neue Punkt heiße $B'$. (Abb. 8) Dann ist $B'$ nach dem Strahlensatz (erster Teil) das Bild von $B$, denn es gilt

$$|\overline{MB'}| : |\overline{MB}| = |\overline{MA'}| : |\overline{MA}| = m.$$

Wo auch $B$ auf der Geraden $AB$ liegen mag, stets liegt sein Bild $B'$ auf der Parallelen zu $AB$ durch $A'$. Bei der zentrischen Streckung geht also jede Gerade wieder in eine Gerade über. Diese Eigenschaft der Abbildung bezeichnen wir als *Kollinearität*[4]. In unserem Fall wissen wir sogar noch mehr: Jede Gerade geht bei der Streckung entweder in sich selbst (wann?) oder in eine andere von gleicher Richtung über. Demnach bleibt auch die Größe jedes Winkels erhalten. Für eine beliebige Strecke $\overline{AB}$ und ihr Bild

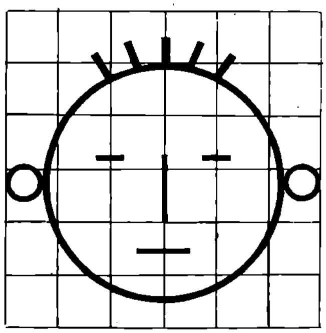


Abb. 7

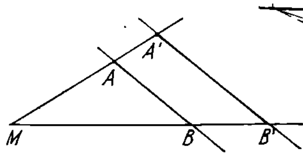



Abb. 8

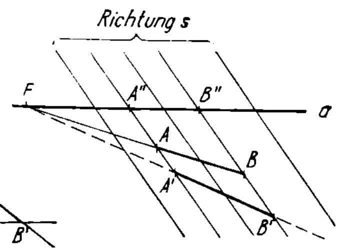



Abb. 9

$\overline{A'B'}$ gilt nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes (vgl. Abb. 8): $|\overline{A'B'}| : |\overline{AB}| = |\overline{A'M}| : |\overline{AM}| = m$. Dabei ist $m$ für jede beliebige Strecke dieselbe Zahl. Es handelt sich also wirklich um eine maßstabgerechte Vergrößerung. Diese geometrische Abbildung, bei der eine Streckung von einem festen Zentrum aus vorgenommen wurde, ist eine *Ähnlichkeitsabbildung*; bei ihr geht nämlich jede Figur in eine ähnliche, vergrößerte Figur über. Wir fassen zusammen: Bei einer zentrischen Streckung entspricht jedem

[2] Aus dem Lateinischen, von fixus = fest.

[3] Die durch die Punkte $A$ und $B$ bestimmte Gerade wird als $AB$ geschrieben, die durch $A$ und $B$ begrenzte Strecke als $\overline{AB}$, ihre Länge als $|\overline{AB}|$.

[4] Aus dem Lateinischen von linea = Gerade.

Punkt genau ein Bildpunkt. Es gibt einen einzigen Fixpunkt, das Streckungszentrum $M$. Die Abbildung ist kollinear. Die Richtung einer Geraden wird bei der Streckung nicht verändert. Jede Strecke wird um denselben Faktor gedehnt, die Größe von Winkeln bleibt erhalten, jede Figur geht in eine ähnliche über.
Wir vergleichen jetzt Abb. 6 mit Abb. 1. In der durch Abb. 1 dargestellten Ebene denken wir uns eine Gerade $a$ etwas oberhalb des Gesichts festgehalten und nach beiden Seiten von $a$ aus in Richtung $s$ der schrägen Parallelen eine Streckung vorgenommen. So können wir die in Abb. 6 dargestellte Verzerrung unter Ausschaltung von Abb. 4 direkt aus Abb. 1 erzeugen. Jeder Punkt von $a$ bleibt bei der Dehnung an seinem Platz. Wir haben also diesmal eine ganze Gerade voller Fixpunkte. Jeder andere Punkt $A$ hat sein Bild $A'$ auf der durch $A$ gehenden Schrägen (Geraden) der Richtung $s$. (Abb. 9) Nennen wir $A''$ den Schnittpunkt dieser Geraden mit $a$, so gilt: $|\overline{A'A''}| : |\overline{AA''}| = k$, wobei der Dehnungsfaktor $k$ eine feste Zahl ist. Wir prüfen, ob diese Schrägdehnung auch kollinear ist. Jede Strecke, deren einer Endpunkt auf der Achse $a$ liegt und die in die Richtung von $s$ fällt, wird von $a$ aus auf das $k$fache gedehnt. Daß das Gleiche mit jeder auf einer Schrägen der Richtung $s$ liegenden Strecke geschieht, könnt ihr leicht einsehen, indem ihr die Abstände der Endpunkte von der Achse $a$ untersucht. Sei nun $\overline{AB}$ eine beliebige, etwa die in Abb. 9 gezeichnete Strecke, $F$ der Schnittpunkt der Geraden $AB$ mit $a$; der Schnittpunkt des Strahls $FA'$ mit der durch $B$ gehenden Geraden der Richtung $s$ sei $B'$. Wenn wir nachweisen können, daß $|\overline{B'B''}| : |\overline{BB''}| = k$ ist, dann ist $B'$ das Bild von $B$ bei der Schrägstreckung. Nun gilt nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes:

$$\begin{aligned} |\overline{B'B''}| : |\overline{A'A''}| &= |\overline{FB''}| : |\overline{FA''}| \\ &= |\overline{BB''}| : |\overline{AA''}|, \text{ also auch} \\ |\overline{B'B''}| : |\overline{BB''}| &= |\overline{A'A''}| : |\overline{AA''}| = k. \end{aligned}$$

Mithin ist unsere Behauptung richtig. Sie bleibt es auch, wenn $A$ und $B$ auf verschiedenen Seiten von $a$ liegen. Auf alle Fälle bewegt sich, wenn Punkt $B$ auf der Geraden $FA$ wandert, sein Bild $B'$ auf der Geraden $FA'$. Die Schrägstreckung ist also auch kollinear. Allerdings bleibt jetzt nur bei gewissen Geraden (bei welchen?) die Richtung erhalten. Damit verändert sich natürlich auch im allgemeinen die Größe eines Winkels bei dieser Streckung, und das Bild einer Figur ist dieser keineswegs ähnlich.
Die in Abb. 4 und 5 dargestellten senkrechten axialen Streckungen sind Spezialfälle der soeben behandelten Streckung. Auch bei ihnen gibt es eine Gerade voller Fixpunkte, auch sie sind kollinear.

**L. Görke**

**Aufgaben**

● Führe mit Abb. 1 nacheinander die senkrechten axialen Streckungen der Abbildungen 4 und 5 aus! Was ergibt sich, wenn beide Male um denselben Faktor $m$ gedehnt wird?

● Übertrage die zentrische Streckung sinngemäß von der Ebene auf den Raum! Zeige, daß das Bild einer beliebig gelegenen Kugel wieder eine Kugel ist!

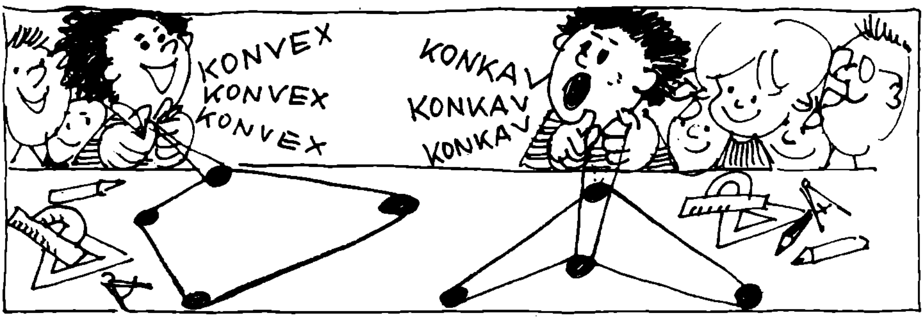
## Eine Aufgabe von

# Prof. Dr. habil. Lilly Görke

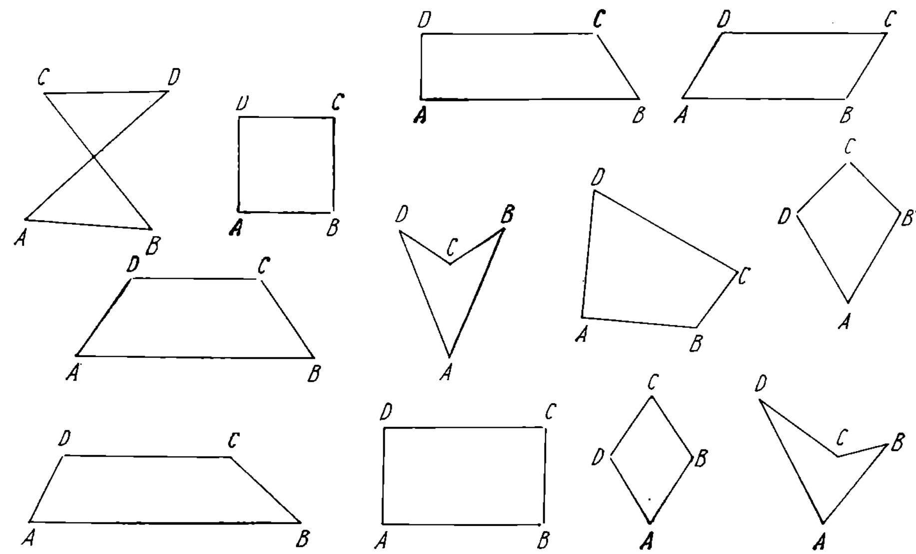
*Pädagogische Fakultät*
*der Humboldt-Universität zu Berlin*

**105** Gegeben ist ein ebenes konvexes Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Gibt es ein ebenes Viereck, das die Eckpunkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ zu Seitenmitten hat? Wenn ja, wieviele gibt es? Konstruiere ein solches Viereck!

(Nimm an, du hättest ein Viereck $ABCD$ gefunden, das $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ als Seitenmitten hat. Stelle eine Probefigur her, indem du von einem beliebigen Viereck $ABCD$ ausgehst und die Seitenmitten $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ verbindest! Welche notwendige Bedingung muß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ erfüllen, damit die Aufgabe lösbar ist?)

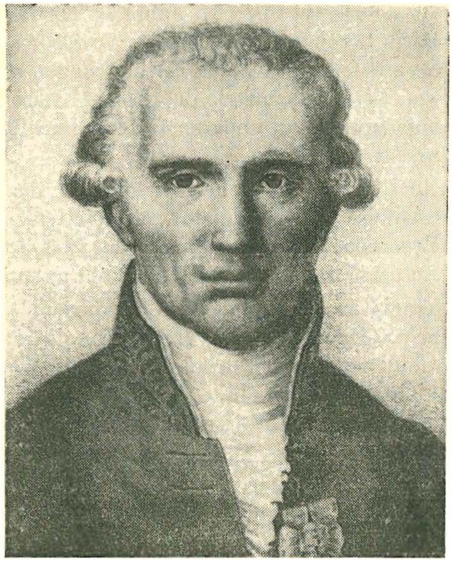



**Arten von Vierecken**



# Gaspard Monge

## 1746 bis 1818



Zu den ältesten Wissenschaften, die der Mensch betreibt, gehört die Geometrie. In der Antike strebte bereits Euklid (um 300 v. u. Z.) in seinen berühmten „Elementen" eine exakte Grundlegung dieses Wissenszweiges an. Ein Teilgebiet der Geometrie hingegen, nämlich die *darstellende Geometrie*, erfuhr erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts durch den Franzosen Gaspard Monge eine wissenschaftliche Fundierung und Durchbildung. Deshalb soll auch an den Anfang eines kurzen Lehrganges der *darstellenden Geometrie* ein historischer Rückblick auf das Leben dieses genialen französischen Mathematikers gestellt werden. Da Monge in einer politisch bewegten Zeit in Frankreich hohe öffentliche Ämter bekleidete und viel zum Fortschritt seines Landes in Wissenschaft, Technik und Militärwesen beitrug, ist sein Lebenslauf auch von allgemeinem Interesse.

Gaspard Monge wurde am 9. 5. 1746 in Beaune (Côte d'Or) in Frankreich als Sohn eines kleinen Handelsmannes und Scherenschleifers geboren. Bereits als Vierzehnjähriger erregte er mit einem von ihm gezeichneten Stadtplan seiner Vaterstadt die Bewunderung der Durchreisenden. Ein höherer Ingenieur-Offizier, dem man den von Gaspard gezeichneten Stadtplan vorgelegt hatte, machte Vater Monge den Vorschlag, seinen Sohn die Militärschule zu Mézières besuchen zu lassen. An dieser Schule wurden Ingenieur-Offiziere für die französische Armee ausgebildet. Trotz seiner überragenden Begabung kam der junge Monge nur an die der Schule angegliederte Hilfsanstalt, an der gute Praktiker vor allem zu untergeordneten Bauaufsehern für das Befestigungswesen herangebildet wurden. Die höhere Abteilung der Militärschule von Mézières blieb allein den Zöglingen von adliger Herkunft vorbehalten. Mit der genialen Behandlung einer Aufgabe aus der Befestigungskunst erregte Monge jedoch die Aufmerksamkeit des Kommandanten der Schule. Er wurde nun als Hilfslehrkraft an die höhere Abteilung der Schule berufen, wo er die angehenden Ingenieur-Offiziere mit zu unterrichten hatte. Diese Lehrtätigkeit regte ihn dazu an, die Grundlagen jenes Wissenszweiges exakt zu formulieren, der heute bei uns als *darstellende Geometrie* bezeichnet und gepflegt wird.

Monge löste das Problem der zeichnerischen Darstellung räumlicher Gebilde durch eine geschickte und übersichtliche Verknüpfung von zwei Bildern (Normalrissen) des darzustellenden Objektes. Diese beiden Bilder (Grund- und Aufriß) stehen in einer einfachen Lagebeziehung zueinander und ermöglichen die konstruktive Lösung vieler Problemstellungen aus der Praxis in einer Zeichenebene, was bis dahin vorwiegend mit rechnerischen und analytischen Methoden behandelt worden war.

Das von Monge eingeführte Verfahren der zugeordneten Normalrisse (Grund- und Aufrißverfahren) setzte sich im Militär- und Befestigungswesen schnell durch. Um vor Nachahmungen des Auslandes sicher zu sein, wurde es Monge von den vorgesetzten Militärstellen verboten, sein Verfahren zu veröffentlichen.

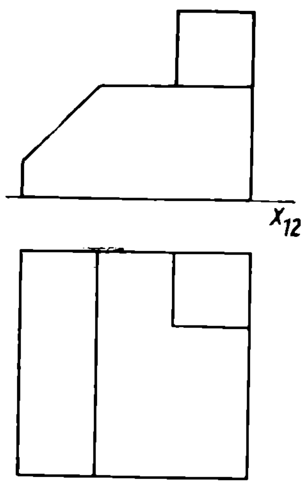
Dieser Befehl blieb 15 Jahre in Kraft. Erst 1794 durfte Monge — inzwischen nach Paris berufen — öffentliche Vorlesungen über die von ihm begründete *darstellende Geometrie* halten. Seine Entdeckungen und Begriffsbildungen faßte er in dem berühmten Werk „Géométrie descriptive“ zusammen. Bis zur Aufhebung des Verbotes hatte Monge auch auf anderen Gebieten der Mathematik bahnbrechende Entdeckungen gemacht.

Nach der französischen Revolution übernahm Monge hohe öffentliche Ämter. Er war zeitweise Marineminister, organisierte die Landesverteidigung und mobilisierte alle Reserven, um Frankreich in der Zeit der militärischen Bedrohung von ausländischen Industrien (z. B. Kanonenherstellung) und Rohstoffen (z. B. Salpetergewinnung) unabhängig zu machen. Große Verdienste erwarb er sich um die 1794 gegründete *École polytechnique*, die zum Vorbild für alle in der Folgezeit begründeten Technischen Hochschulen der Welt wurde. Der *darstellenden Geometrie* räumte er im Lehrprogramm einen wichtigen Platz ein.

Nach Napoleons Aufstieg wurde Monge dessen wissenschaftlicher Berater. In dieser Stellung scheute sich Monge jedoch nicht, dem Imperator wegen der Annahme des Kaisertitels und anderer mit seiner republikanischen Gesinnung unvereinbarer Maßnahmen die eigene Meinung schonungslos zu sagen. Schützend stellte sich Monge vor republikanisch gesinnte und gegen Napoleon rebellierende Studenten. So zahlte er auch für ärmere Studenten das wieder eingeführte Schulgeld von seinem Professorengehalt. Im Jahre 1809 zog sich Monge von seinem Lehramt zurück. Auf die Nachricht von Napoleons Niederlage in Rußland erlitt er einen Schlaganfall. Während der hunderttägigen Wiederherrschaft Napoleons erscheint Monge erneut als sein engster Mitarbeiter und Vertrauter. Der endgültige Sturz Napoleons bricht auch seine Lebenskraft. 1816 wird Monge aller seiner Ämter enthoben und politisch gemaßregelt. Darauf verfiel er in geistige Umnachtung und starb am 18. 7. 1818 in Paris.

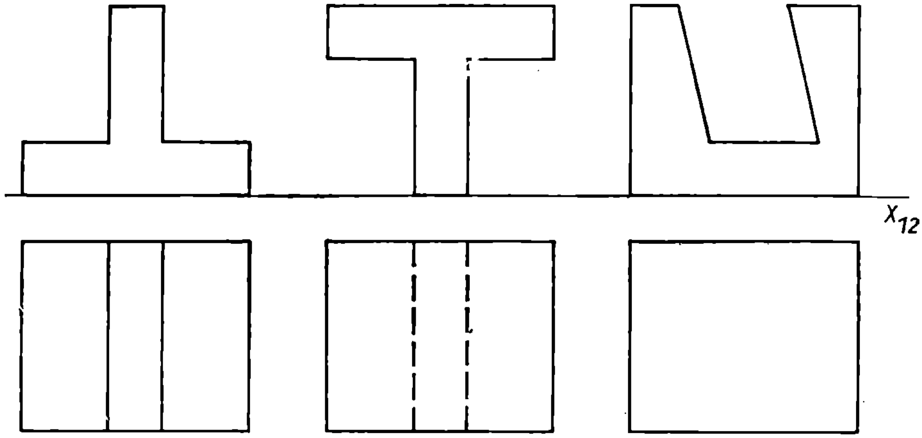
Die wissenschaftlichen Leistungen Monges, sein Wirken für den technischen Fortschritt und sein selbstloses Eintreten für Studenten gegen die Willkür des Imperators rechtfertigen, daß man dieses Mannes nach 150 Jahren noch in Achtung gedenkt. Wir wollen uns im folgenden an einfachen Beispielen mit dem Verfahren der zugeordneten Normalrisse (Grund- und Aufriß) vertraut machen.

* Das im Grund- und Aufriß dargestellte Werkstück (siehe Abb.) wird von ebenen Flächen begrenzt, die senkrecht oder parallel zur Aufrißebene liegen. Fertige ein maßgerechtes Modell dieses Werkstückes aus Holz oder Knetmasse nach der vorliegenden Darstellung an!

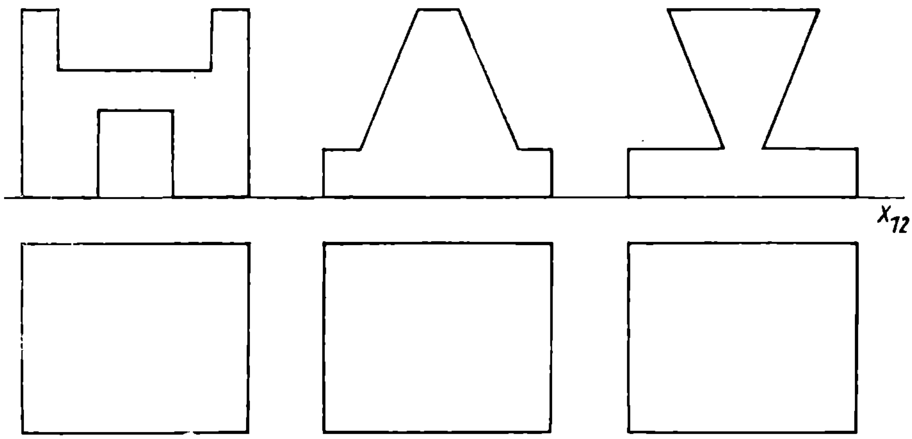



* Ergänze! Bei den Darstellungen auf Seite 109 handelt es sich um die Grund- und Aufrisse von neun ebenflächig begrenzten Werkstücken (Profilen). Oberhalb der Rißachse, die mit „$x_{12}$“ bezeichnet ist, liegen die Aufrisse der Profilstücke. Jedem dieser Aufrisse ist ein (noch unvollständiger) Grundriß des Werkstückes zugeordnet. In den ersten zwei Normalrissen handelt es sich um ein Stück eines T-Trägers. Beachte, daß alle im Grundriß sichtbaren Kanten durch ausgezogene und verdeckte Kanten durch gestrichelte Linien dargestellt sind! Vervollständige im Sinne der beiden ersten Beispiele für die restlichen sieben Werkstücke den Grundriß!

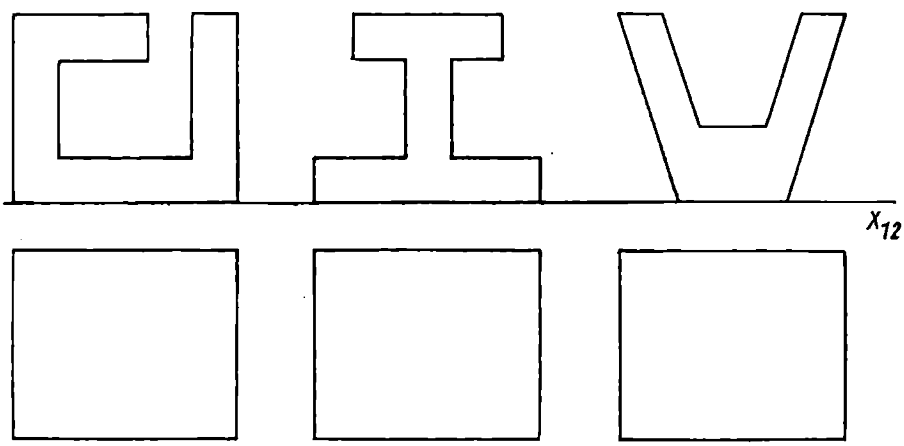
E. Schröder



$X_{12}$

$X_{12}$

$X_{12}$

# Wer löst mit?
# alpha-Wettbewerb

*letzter Einsendetermin 10. 10. 1967*

**W(5)106** Die Jungen Pioniere der Klassen 4, 5 und 6 einer Oberschule wetteifern miteinander um das höchste Sammelergebnis an gebrauchten Flaschen. Die Pioniere dieser drei Klassen haben insgesamt 1680 Flaschen gesammelt. Die Pioniere der Klasse 4 sammelten davon den vierten Teil. Die Pioniere der Klasse 5 dagegen sammelten 185 Flaschen weniger als das Doppelte der Anzahl Flaschen, die von den Pionieren der Klasse 4 zusammengetragen wurde. Die restlichen Flaschen wurden von den Pionieren der Klasse 6 gesammelt. Wieviel Flaschen sammelten die Jungen Pioniere jeder dieser drei Klassen? 5

**W(6)107** Eine Turmuhr schlägt um 5 Uhr fünfmal und braucht zu diesen Schlägen 5 Sekunden Zeit. Wieviel Zeit braucht diese Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr? 6

**W(7)108** Das Lehrbuch für Mathematik der Klasse 7 einer Oberschule unserer Republik umfaßt 196 Seiten. Die Zahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt. Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet? Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt? 7

**W(8)109** In der alten persischen Erzählung „Die Geschichte Moradbaks", die in der Sammlung „Tausendundein Tag" enthalten ist, stellt ein Weiser einem jungen Mädchen die folgende Aufgabe und erwähnt dabei, daß solche Aufgaben von den indischen Philosophen gestellt werden: „Eine Frau geht in einen Garten, um Äpfel zu ernten. Der Garten hat vier Tore; jedes wird von einem Manne bewacht. Die Frau gibt dem Hüter des ersten Tores die Hälfte der gepflückten Äpfel; als sie beim zweiten anlangt, gibt sie dem zweiten Wächter die Hälfte der übriggebliebenen Äpfel; ebenso verfährt sie beim dritten; endlich teilt sie noch mit dem vierten, so daß ihr schließlich nur zehn Äpfel bleiben. Nun fragt man, wieviel Äpfel sie geerntet hat." 8

**W(9)110** Bei den Schwimm-Europameisterschaften in Utrecht im August 1966 erhielten die folgenden sechs Länder insgesamt 23 Goldmedaillen: UdSSR, DDR, Niederlande, Frankreich, Großbritanien, Italien. Die beiden zuletzt genannten Länder erhielten die gleiche Anzahl von Goldmedaillen; von den übrigen vier Ländern erhielt jedes Land mehr Goldmedaillen als das in der Aufzählung folgende Land. Die UdSSR erhielt mehr Goldmedaillen als die übrigen fünf Länder zusammen. Wieviel Goldmedaillen erhielt jedes der sechs Länder? 9

**W(10)111** Das Luxusfahrgastschiff „Ernst Thälmann" der Weißen Flotte Dresden legt die 8,6 km lange Strecke von Dresden-Pillnitz bis Pirna flußaufwärts in 55 min und flußabwärts in 30 min zurück. Es legt unterwegs nicht an. Wie groß ist die Schiffsgeschwindigkeit (in km/h) flußaufwärts bzw. flußabwärts? Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit der Elbe? Wie groß wäre die Geschwindigkeit des Schiffes in ruhendem Gewässer? 10

**alpha-Wettbewerb [W(5) bis W(10)]**

Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist aus dem Beitrag: Aufgaben der Mathematikolympiade Sofia, Schulstufe 1967 zu entnehmen: W(5)112, W(6)113, W(7)114, W(8)115, W(9)116, W(10)117. Dieses Schuljahr endet am 31. August. Jeder Teilnehmer löst erst ab Heft 5 die Aufgaben der Klassenstufe, die er ab September besucht. Die Redaktion wünscht allen Lesern ein erfolgreiches Schuljahr 1967/68.

# Auf den Spuren Roald Amundsens

Mit halber Kraft tastet sich das Vermessungsschiff *MS Meteor* durch lautlos treibendes Eis. Plötzlich steigen spitze, steile Berge über den Eisfeldern empor. Zwischen den Berggruppen fließt das Eis des Inlandes bis zum Meere. Der Anblick dieser gebirgigen Küste regte die Holländer Barents und van Rijp im Jahre 1596 an, dieses Land Spitzbergen zu nennen. Es war aber schon den Wikingern als „Land der kalten Küste“ (d. h. Svalbard; heutiger norwegischer Name) bekannt.

Es ist Frühling in der Arktis. Das warme Golfstromwasser umspült die Küste und verdrängt das Meereis. Am Rande der Gletscher, zwischen Schutt und Geröll, wachsen Gräser und Flechten, blüht der wetterharte arktische Mohn. Möwen, Schwalben, Enten und Gänse bevölkern die Fjorde.

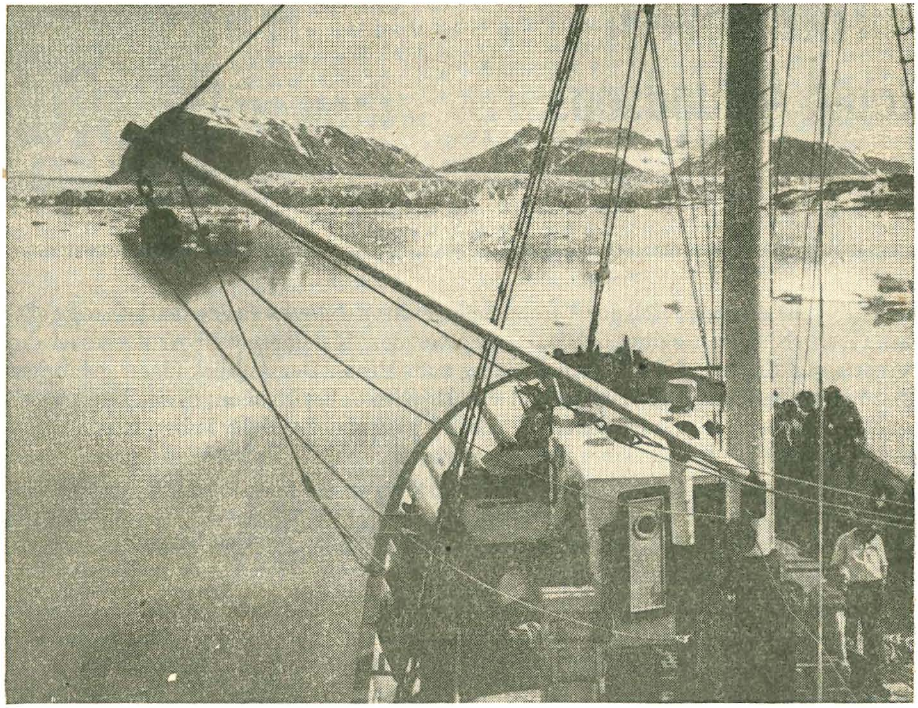
Im Königsfjord an Land gegangen, entdecken wir als erstes einen Erinnerungsstein an den norwegischen Polarforscher Roald Amundsen. Im Jahre 1926 überflog Amundsen von Spitzbergen aus im Luftschiff das Nordpolarbecken und erforschte den kürzesten Luftweg von Nord-Europa nach Alaska. Heute führen zwei Flugrouten über den Nordpol.

Die Zeit der geographischen Entdeckungen ist jedoch zu Ende. Selbst die unzugänglichsten Teile der Polargebiete sind aus Flugzeugen und neuerdings aus Wettersatelliten erkundet. Unbekannt aber ist ihre physikalische Natur: das Wetter, das Klima, die Strahlenbrechung und Wellenausbreitung in den Atmosphärenschichten, die Vorstöße der Gletscher, das Abschmelzen der Inland- und Meereise, die Drift des Packeises, die Entstehung der Böden und vieles andere mehr.

Die Vermessungsfachleute haben dabei wichtige Aufgaben: sie vermessen das Gelände und zeichnen Karten. In die Karten tragen die Forscher ihre Beobachtungen ein. Sie messen auch den Stand der Gletscher und die Schnelligkeit ihrer Bewegung.

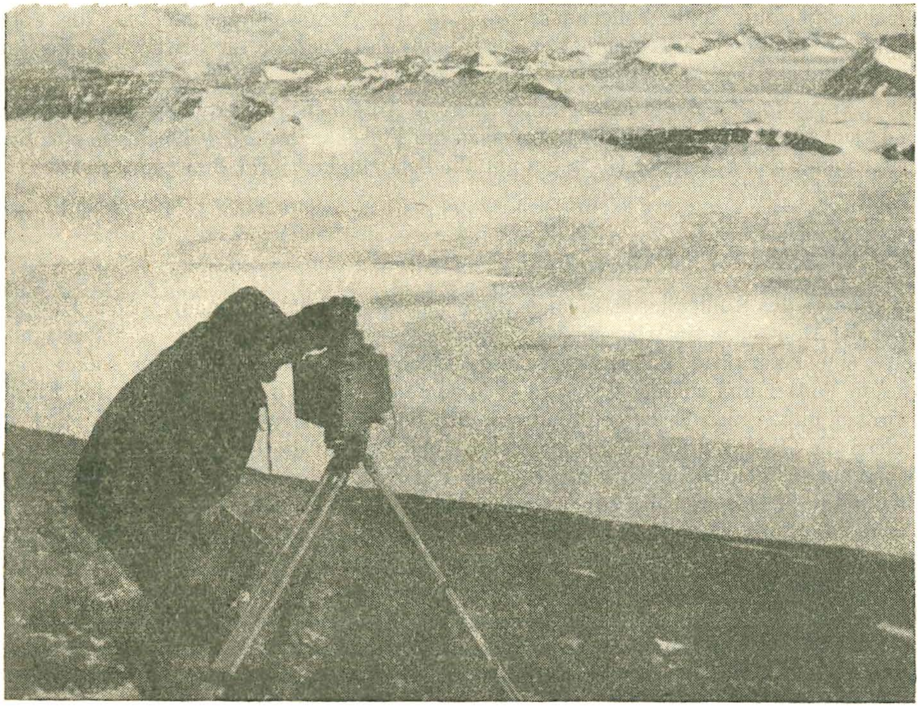
### Ein Arbeitstag im Sommer

Im Inneren des Königsfjords, in einer wind- und eisgeschützten Bucht, ist das Hauptlager der Deutschen Spitzbergen-Expedition 1964/65 errichtet: Wohn- und Proviantzelte, eine Polarhütte, Kistenstapel; das seetüchtige Motorboot liegt vor Anker. Bei klarem Wetter und ruhiger See wird es losgemacht, und wir tuckern über den Fjord zwischen glitzernden Eisbergen hindurch. Mit den Meßinstrumenten auf dem Rücken steigen die Geodäten über Schotter, Schnee und Eis auf die Berge hinauf. Hier oben bauen sie aus den herumliegenden Steinen 1 m bis 2 m hohe Pyramiden, sogenannte Steinmänner. Das sind die trigonometrischen Punkte. Je drei von ihnen bilden ein Dreieck und alle zusammen ein Netz von Dreiecken, welches das Expeditionsgebiet überspannt. In diesen Dreiecken messen wir Winkel und Strecken und berechnen die Koordinaten der Netzpunkte und ihre Höhe über dem Meere in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem (Sinussatz, Kosinussatz). Von diesen festen Punkten aus wird das Gelände fotografiert. Zu Hause werden aus den Fotoplatten die Berge und Gletscher, die Küstenlinien und die Inseln ausgemessen und daraus die Karte gezeich-



Vermessungsschiff *MS Meteor* vor der Westküste Spitzbergens

Geländeaufnahme mit Hilfe fotografischer Platten



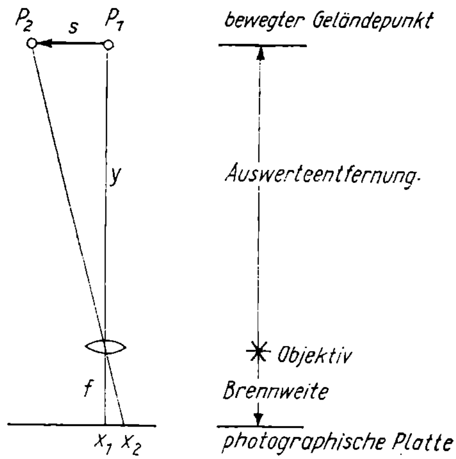
net. Um die Netzpunkte auf der Erdkugel nach geographischer Länge und Breite festzulegen, müssen wir noch astronomische Beobachtungen anstellen. Dazu brauchen wir Formeln aus der Geometrie gekrümmter Flächen.
Im Sommer ist es nördlich des Polarkreises Tag und Nacht hell, und bei gutem Wetter arbeiten wir 20 bis 30 Stunden hintereinander. Dann halten uns wieder Nebel und Stürme tagelang im Zelt gefangen.

**Ein Arbeitstag im Winter**

Ein Arbeitstag im Winter beginnt mit dem Wachsen der Skier, denn die Fjorde und Meerengen sind zugefroren und mit Schnee bedeckt. Leicht gleitet es sich über den ebenen Fjord, aber mühsam ist das Steigen an den tiefverschneiten Berghängen.
Von einem Sattel aus 300 m Höhe ist der Königsgletscher, ein Eisstrom von 5 km Breite, 20 km Länge und 100 m Dicke, gut zu übersehen. Zwei Meter am Tage bewegt er seine Eismassen der Küste zu. Diese Bewegung messen wir, indem wir den Gletscher mehrmals mit Hilfe einer Kamera mit Meßeinrichtung, einem sogenannten Phototheodoliten, fotografieren.
Ein beliebiger Geländepunkt $P$ (z. B. die Spitze eines Eisturmes) erscheint zur Zeit $t_1$ auf der fotografischen Platte an der Stelle $x_1$, zur Zeit $t_2$ an der Stelle $x_2$. In der Zeit $t_2 - t_1 = \Delta t$ hat sich der Punkt $P$ von $P_1$ nach $P_2$ um den Betrag $s$ verschoben. Nach dem Strahlensatz ist

$$s = \frac{y \cdot \Delta x}{f},$$

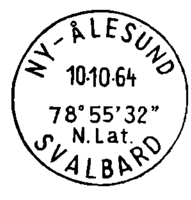
und wir können $s$ berechnen, indem wir für den Zähler die Entfernung $y$ aus der Karte, den Koordinatenunterschied $\Delta x$ aus den Platten abgreifen und im Nenner die Brennweite des Objektivs $f$ einsetzen. Noch vor 30 Jahren mußte jeder Meßwert bei großer Kälte und Sturm auf Papier oder Plasttäfelchen geschrieben werden. Heute speichert man die geographischen, geodätischen und geophysikalischen Informationen auf Fotoplatten, Filmen und Magnetbändern, die, in die Heimat zurückgekehrt, sofort in optische Auswerte- und elektronische Rechengeräte eingegeben werden können. Im Polarwinter ist es drei Monate lang Tag und Nacht dunkel, und nur im Mondschein und bei flackerndem Nordlicht können wir den Gletscher beobachten. Mit dem ersten Licht nach Sonnenaufgang kehren die Vögel zurück. Robben sonnen sich vor ihren Wasserlöchern; die Eisbären gehen auf Wanderschaft.



Prinzip der Geschwindigkeitsmessung an Gletschern

S. Meier





# Mathematikolympiaden in Bulgarien

Seit 16 Jahren werden in der Volksrepublik Bulgarien Mathematikolympiaden durchgeführt. Bis 1963 nahmen die Schüler der 9. bis 11. Klassenstufe teil, seit 1964 die Schüler der Klassenstufen 5 bis 11. Der Wettbewerb umfaßt drei Etappen, die jeweils am 10. 1. bzw. am 20. 4. und am 20. 5. jeden Jahres abgeschlossen werden. An der ersten und zweiten Stufe (Schul- und Kreisolympiade) nehmen Schüler der 5. bis 11. Klassenstufe teil, an der dritten Stufe (Landesolympiade) nur die Schüler der 8. und 11. Klassenstufe. Die Aufgaben für die erste und zweite Stufe werden von den Sektionen der Mathematischen Gesellschaften der Kreise ausgearbeitet. Bis zur Auswahlprüfung für die IMO hatten sich 1964 auf Grund guten Abschneidens in den vorangegangenen Etappen 2 Schüler aus der Klassenstufe 9, 14 aus der Klassenstufe 10 und 34 aus der Klassenstufe 11 durchgekämpft. 18 von ihnen erhielten mehr als 50% der Punkte. Sie wurden in einem 12tägigen Kursus von Dozenten und Assistenten der Universität Sofia auf die Internationale Mathematikolympiade vorbereitet und die acht Besten nach harten Klausuren delegiert.
Jedes Jahr überreicht eine zentrale Kommission zur Vorbereitung der Olympiaden den Schulen Aufgaben bulgarischer und ausländischer Herkunft. Zu Ehren der VIII. IMO im Jahre 1966 in Sofia wurde allen Teilnehmern ein Vorausexemplar einer Aufgabensammlung als Geschenk überreicht. Die darin enthaltenen 1339 Olympiadeaufgaben können für die individuelle Arbeit sowie für das Training im Kollektiv der Schule oder in den Arbeitsgemeinschaften gut genutzt werden.
Abschließend sei eine Tabelle wiedergegeben, die zeigt, wie groß die Beteiligung an den Olympiaden in unserem Lande ist.

*Übersicht über die Beteiligung an der 14. Olympiade der Volksrepublik Bulgarien (1964/65)*

| | Klassenstufen | Anzahl der teiln. Schüler | Anzahl der Schüler, die auf Grund guter Leistungen in eine höhere Stufe kamen |
|---|---|---|---|
| 1. Stufe<br>beendet bis 30. 1. 65<br>(Schulstufe) | 5 bis 11 | 673646<br>d. s. etwa 90% aller Schüler der Kl. 5 bis 11 | 243141 |
| 2. Stufe<br>beendet bis 20.4. 65<br>(Kreisstufe) | 5 bis 11 | 219245 | 48025 |
| 3. Stufe<br>beendet bis 20. 5. 65<br>(Landesolympiade) | 8 und 11 | 14165 | 2052 |

Zur Auswahlprüfung für die IMO wurden 93 Schüler delegiert. Die acht Besten nahmen an der VII. IMO in Berlin teil.

S. Bodurow

# Aufgaben der Mathematikolympiade Schulstufe, Sofia 1967

Mit der Veröffentlichung der Aufgaben wollen wir unseren Lesern zeigen, welche Anforderungen die Wissenschaftler und Mathematiklehrer Sofias an ihre Schüler stellen, die Aussicht haben werden, am Stadtausscheid teilnehmen zu können. Wir danken unseren Auslandskorrespondenten Assja Peinerdjiewa und Kostantin Petrov von der Universität Sofia für die Bereitstellung des Materials. Da unsere Leser auf Grund der verschiedenen Lehrplananforderungen beider Länder einen Teil der Aufgaben noch nicht lösen können, haben wir aus jedem Schuljahr *eine* Aufgabe für unseren Wettbewerb ausgewählt. (Die andere Wettbewerbsaufgabe findet ihr, liebe Leser, auf Seite 110.) Wir wollen damit einen konkreten Beitrag zur Vorbereitung auf die im September beginnende VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR — Schulstufe — geben und wünschen allen Teilnehmern dazu viel Erfolg und Freude, auch bei der Arbeit mit den nun folgenden bulgarischen Aufgaben:

**Klassenstufe 5**

1. Es ist zu berechnen:

$$\{1446984 : 231 - [942690 : 201 + (13104 : 234) \cdot 112 - 335 \cdot 16]\} \cdot (10201 : 101) - 16862.$$

Danach ist der Quotient aus dem Ergebnis und der kleinsten dreistelligen natürlichen Zahl, die größer als 100 und Vielfaches von 25 ist, zu ermitteln.

**W(5)112** Alle Schüler einer 5. Klasse einer Schule in Sofia machten mit ihrem Klassenlehrer einen Ausflug. Auf dem Hinweg zum Ausflugsziel marschierten sie in Reihen mit je sechs, auf dem Rückweg dagegen in Reihen mit je vier Schülern. Hätte ein Schüler das Marschkommando übernommen, so wären die übrigen in Reihen mit je fünf Schülern marschiert. Wieviel Schüler gehören dieser Schulklasse an? Wir wissen, daß es weniger als 50 Schüler sind.

3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck $ABC$ mit der Basis $\overline{AB}$. Die Strecke, die einen Endpunkt der Basis mit der Mitte des Schenkels, der diesem Endpunkt gegenüberliegt, verbindet, teilt den Umfang des Dreiecks so in zwei Streckenzüge, daß der Streckenzug, der die Basis enthält, 11 cm und der andere Streckenzug 15 cm lang ist. Wie lang ist jeder Schenkel, wie lang ist die Basis dieses Dreiecks?

**Klassenstufe 6**

1. Es ist zu berechnen:

$$3{,}7 + 1\frac{1}{2}\left(0{,}2652 : 0{,}13 - 1\frac{17}{30} + 0{,}06\right) \cdot \left[19{,}21 - \left(4{,}26 - \frac{5}{24} : \frac{25}{42}\right)\right].$$

Danach sind $\frac{15}{100}$ dieses Ergebnisses zu ermitteln.

**W(6)113** Zur Herstellung von 1 kg Rosenöl benötigt man 0,5 t Rosenblüten; zur Herstellung von 1 l Parfüm braucht man zwei Tropfen Rosenöl. 25 Tropfen Rosenöl wiegen genau 0,001 kg. Wieviel Liter Parfüm lassen sich aus 0,8 t Rosenblüten herstellen?

3. In einer Werkstatt wurden aus einer rechteckigen Zinkblechplatte, die 240 mm lang und 150 mm breit war, an den vier Ecken je ein Quadrat von 40 mm Seitenlänge herausgeschnitten. Die verbliebenen Ränder wurden umgebogen und ohne Überlappung zusammengelötet, so daß ein oben offener quaderförmiger Kasten entstand. Wieviel Quadratzentimeter Zinkblech wurden nach Wegfall der herausgeschnittenen quadratischen Blechstücke zur Herstellung des Kastens benötigt? Wieviel Liter Flüssigkeit faßt dieser Behälter?

**Klassenstufe 7**

1. Der Ausdruck

$$z = 0{,}3a - \frac{1}{3} - b - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3} - b\right) - \left\{4\frac{3}{5}c^2 - (201{,}75a^3 - 7) - \left[7 + \frac{a^3}{4} - (8{,}5c^2 + d)\right]\right\}$$

ist zunächst zu vereinfachen. Danach ist der Wert dieses Ausdrucks für $a = -0{,}1$, $c = 3\frac{1}{3}$ und $d = -1\frac{1}{9}$ zu berechnen.

2. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck $ABC$! Konstruiere danach die beiden Winkelhalbierenden der Außenwinkel dieses Dreiecks, deren Scheitelpunkte in $A$ und $B$ liegen! Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden sei $D$. Durch den Punkt $D$ ist eine Parallele zu $\overline{AB}$ zu zeichnen; sie schneidet die verlängerten Dreieckseiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ in den Punkten $M$ und $N$. Beweise, daß $\overline{MN} = \overline{AM} + \overline{BN}$ ist!

**W(7)114** Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck $ABC$ mit dem stumpfen Winkel $\alpha$ und den spitzen Winkeln $\beta$ und $\gamma$! Konstruiere die Dreieckshöhen! Der Schnittpunkt der verlängerten Höhen sei $D$. Vergleiche die von den verlängerten Höhen gebildeten Winkel, deren Scheitelpunkt in $D$ liegt, mit den Innenwinkeln des stumpfwinkligen Dreiecks $ABC$! Was stellst du fest? Versuche, deine Aussage zu beweisen.

**Klassenstufe 8**

**W(8)115** In Sofia startete um 11 Uhr ein Passagierflugzeug zum Flug nach Varna. Eine halbe Stunde später startete vom gleichen Flughafen ein Militärflugzeug, das in Varna 5 Minuten früher als das Passagierflugzeug landete. Um wieviel Uhr landeten beide Flugzeuge jeweils in Varna, und wie groß waren ihre mittleren Geschwindigkeiten, wenn die Geschwindigkeit des Militärflugzeuges $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie die des Passagierflugzeuges war? Die Entfernung von Sofia bis Varna beträgt 400 km Luftlinie. (Die Berechnung ist mit einer Genauigkeit von $\pm \frac{1}{10}$ Minute auszuführen.)

2. Der folgende Bruch ist so weit wie möglich zu kürzen:

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}{x^4 - 3x^2 + 2x}.$$

Der gekürzte Bruch ist gleich Null zu setzen, und die so entstandene Gleichung ist zu lösen.

3. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Die Mitte $M$ von $\overline{AB}$ ist mit $D$, die Mitte $P$ von $\overline{CD}$ mit $B$ zu verbinden. Es ist zu beweisen, daß diese Verbindungsstrecken die Diagonale $\overline{AC}$ in drei gleiche Teilstrecken zerlegen.

## Klassenstufe 9

1. Der Ausdruck

$$z=\left(\frac{2a\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}+\frac{a\sqrt{a}-x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\sqrt{a\,x}\right):\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)$$

ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Danach ist $a=\sqrt{0{,}25}$ und $x=1+\sqrt{3}$ zu setzen und $z$ mit einer Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma zu berechnen.

2. Es ist die Gleichung

$$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+2}{x-2}+\frac{3-x}{x+3}+\frac{x+4}{4-x}=0$$

mit anschließender Probe zu lösen.

**W(9)116** Es ist zu beweisen, daß das Produkt aus den Maßzahlen zweier Dreiecksseiten gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der zur dritten Seite gehörigen Höhe und des Durchmessers des Umkreises ist. Ferner ist die Konstruktion eines Dreiecks auszuführen und zu beschreiben, wenn zwei Seiten und der Durchmesser des Umkreises gegeben sind.

## Klassenstufe 10

1. Es ist die folgende Identität nachzuweisen:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{a\,b}}{a+b}.$$

Dabei sind $a$ und $b$ positive reelle Zahlen.

2. Es ist die folgende Summe zu berechnen:

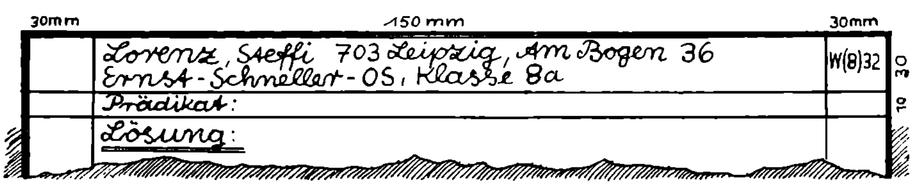
$$S_n=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}.$$

Dabei stellen die $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ eine arithmetische Folge dar.

**W(10)117** Es seien zwei Geraden $g$ und $h$ im Raume gegeben. Auf der Geraden $g$ seien ferner zwei verschiedene Punkte $A$ und $B$ festgelegt. Die Punkte $H$ und $K$ seien die Projektionen der Punkte $A$ und $B$ auf die Gerade $h$.

a) Unter welchen Bedingungen fallen die Punkte $H$ und $K$ zusammen?
b) Unter welchen Bedingungen sind die Geraden $AH$ und $BK$ einander parallel?
c) Unter welchen Bedingungen fallen die Geraden $AH$ und $BK$ zusammen?
d) Wie ist die Lage des Punktes $A$ auf der Geraden $g$ zu wählen, damit $AH$ im Punkt $A$ auf $g$ und im Punkt $H$ auf $h$ senkrecht steht, wenn die Fälle a), b) und c) nicht zutreffen!
e) Es sind die Längen der Strecken $\overline{BH}$, $\overline{AK}$ und $\overline{AB}$ zu berechnen, wenn $\overline{HK}=m$, $\overline{AH}=n$ und $\overline{BK}=p$ gilt und die Bedingung d) erfüllt ist.

So muß der Kopf der Lösung einer Wettbewerbsaufgabe aussehen!



# VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

## Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade (Dezember 1966)

**Klassenstufe 5**

1.* Insgesamt waren genau 500 Äpfel vorhanden.

2. Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muß größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll. Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, daß die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen. Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingungen der Aufgabe.

3. *$10804 + 21608 + 8816 + 26448 + 8816 + 20744 = 97236$

4.* Hans legt die Übungsstrecke mit genau 176 Schritten zurück.

**Klassenstufe 6**

1.* Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind $2\frac{2}{9}$ m, $4\frac{4}{9}$ m und $13\frac{1}{3}$ m.

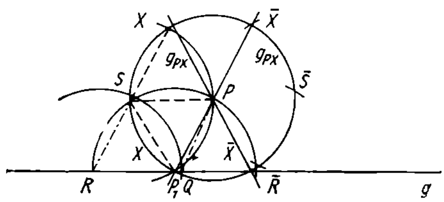
2. Wegen (2) ist $a$ durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, $b$ ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muß $b$ der Bedingung $1 < b < 21$ genügen. Wegen (3) kann $b$ nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein. Also kommen für den Faktor $b$ nur noch die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage. Es sind daher die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen. Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4). 420; 780; und 1020 sind die gesuchten Zahlen, und es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

3. Der geforderte Winkel läßt sich aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren. Der rechte Winkel wird nach Grundkonstruktion 2 (Lehrbuch Klasse 6) konstruiert. Dann halbiert man nach Grundkonstruktion 3 den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel $\left(\text{Gradmaß } \frac{\alpha}{2} = 18°\right)$ noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$. Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

4.* Die Breite der Terrasse beträgt 9,6 m.

**Klassenstufe 7**

1. Man wählt auf $g$ einen beliebigen Punkt $Q$ und schlägt um ihn mit $\overline{PQ}$ den Kreis $k_1$. Dieser schneidet $g$ in zwei Punkten: $R$ und $\bar{R}$. Nun schlägt man um $\bar{R}$ und um $P$ mit $\overline{PQ}$ die Kreise $k_2$ und $k_3$. Diese schneiden einander in $Q$ und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in $Q$ berühren, also lägen $R$, $P$ und $Q$ auf derselben Geraden, d. h. $P$ läge auf $g$, im Widerspruch zur Voraussetzung). Schlägt man nun mit $\overline{PQ}$ um $S$ den Kreis $k_4$, so schneidet dieser $k_3$ in zwei Punkten: $X$ und $X'$, $X \neq X'$. Die Geraden $g_{PX}$ und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt $R'$ von $k_1$ und $g$ führt zwar zu anderen Punkten $X$ und $X'$, aber zu denselben Geraden).




*Beweis*: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\Delta\, SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$, weil $RQPS$ ein Rhombus ist. Die Gerade $g_{PX}$ schneide $g$ im Punkte $P_1$. Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) $\sphericalangle\, SPP_1 \cong \sphericalangle\, PP_1\bar{R}$ d. h. $\sphericalangle\, PP_1\bar{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$. Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin $g$ ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch $P$ gibt, die mit $g$ einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

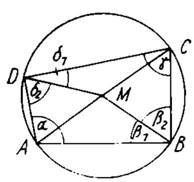
2. Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße $\alpha$ und $\gamma$ und ihre Scheitelpunkte mit $A$ und $C$, so daß also $\alpha$ und $\gamma$ die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle BCD$ sind. Ferner seien $\beta_1$, $\beta_2$, $\delta_1$ bzw. $\delta_2$ die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle MBC$, $\sphericalangle CDM$ und $\sphericalangle MDA$.

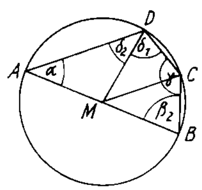
*Behauptung*: $\alpha + \beta = 180°$

*Beweis*: Wir unterscheiden 3 Fälle.

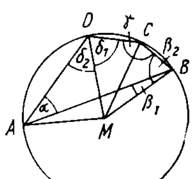
*Fall 1* (Der Punkt $M$ liegt im Innern des Sehnenvierecks):
In den Dreiecken $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$ und $\triangle DAM$ sind die von $M$ ausgehenden Seiten Radien des Kreises $k$. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze $M$.
Daraus folgt: (1) $\beta_1 + \delta_2 = \alpha$ und
(2) $\beta_2 + \delta_1 = \gamma$.
Weiterhin gilt: (3) $\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$. (Die Winkelsumme im Viereck $ABCD$ beträgt 360°). Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$$
$$\alpha + \gamma = 180° \text{ w. z. b. w.}$$




*Fall 2* (Der Punkt $M$ liegt auf dem Sehnenviereck): In diesem Fall ist entweder $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$. Der Beweis verläuft analog.




*Fall 3* (Der Punkt $M$ liegt außerhalb des Sehnenvierecks): In diesem Falle ist entweder $\beta_1$ durch $-\beta_1$ oder $\beta_2$ durch $-\beta_2$ oder $\delta_1$ durch $-\delta_1$ oder $\delta_2$ durch $-\delta_2$ zu ersetzen. Der Beweis verläuft analog Fall 1.

3.* Die Ziffer 9 wird insgesamt 1605 mal aufgeschrieben.

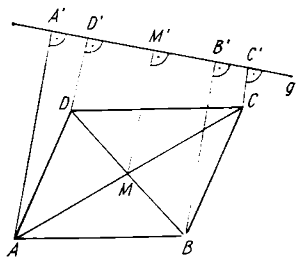
4.* Das Volumen des Gefäßes beträgt $\frac{20}{7} \cdot 2\frac{1}{2}$ Liter $= \frac{50}{7}$ Liter.

**Klassenstufe 8**

1.* Die Gesamtheit aller möglichen Verteilungen ist in dem folgenden Schema dargestellt (Dabei bedeuten: $r$ — rote Kugel, $s$ — schwarze Kugel, $w$ — weiße Kugel):

| | A | B |
|---|---|---|
| 1. | r r r | r s w w |
| 2. | r r s | r r w w |
| 3. | r r w | r r s w |
| 4. | r s w | r r r w |
| 5. | r w w | r r r s |
| 6. | s w w | r r r r |

2. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie $MM'$ gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie $MM'$ ist nach einem bekannten Satz




(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken $AA'$ und $CC'$ und nach dem gleichen Satz
(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken $BB'$ und $DD'$. Daraus folgt die Behauptung.

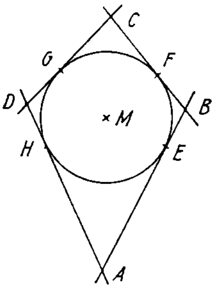
3. Ist $x$ die erste Zahl und $y$ die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung:

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100}$$

also $6x = 5y$. Daraus gewinnt man die Proportion $x:y = 5:6$.
Durch Rückschluß erkennt man, daß unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt wird.

4. *Behauptung*: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
*Beweis*: Die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis seien $E$, $F$, $G$ und $H$. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den

Kreis gleichlang sind, gilt: $\overline{AE} = \overline{AH}$, $\overline{BE} = \overline{BF}$, $\overline{CG} = \overline{CF}$, $\overline{DG} = \overline{DH}$.



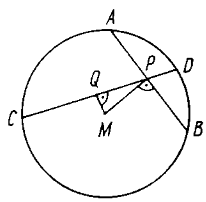

Daraus folgt: $\overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} = \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}$ das heißt: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$.

**Klassenstufe 9**

1.* Aus $105 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $(a > b > 0; a, b$ ganzzahlig) folgt, daß die Zahlenpaare $\{53;\ 52\}$, $\{19;\ 16\}$, $\{13;\ 8\}$, $\{11; 4\}$ und nur diese Lösungen der Aufgabe sind.

2. *Konstruktion*: Man verbindet $P$ mit dem Mittelpunkt $M$ des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu $MP$ in $P$. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten $A$ und $B$. $AB$ ist die gesuchte Sehne.

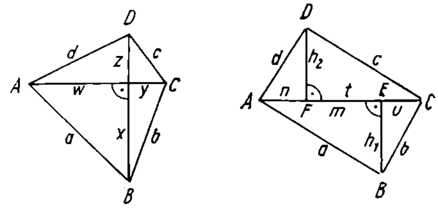
*Beweis*: Zum Nachweis, daß $AB$ die kürzeste durch $P$ verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch $P$. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten $C$ und $D$. Dann ist der Abstand der Sehne $CD$ von $M$ kleiner als $\overline{MP}$.




*Beweis*: Enthält $CD$ den Punkt $M$, dann ist der Abstand der Strecke $CD$ von $M$ gleich Null. Enthält aber $CD$ den Punkt $M$ nicht, dann fällen wir das Lot von $M$ auf $CD$ und nennen seinen Fußpunkt $Q$. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MQP$ ist $MP$ die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$. Nach dem Satz, daß von zwei Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen vom Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$. Da $CD$ (durch $P$) beliebig angenommen wurde, muß $AB$ die kürzeste durch $P$ verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch $M$ und $P$ und zu ihr genau eine Senkrechte durch $P$ gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig.

3. Es ist zu beweisen, daß die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müßte gelten:

(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras: $a^2 = x^2 + w^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = z^2 + y^2$, $d^2 = w^2 + z^2$,




wobei $x$, $w$, $z$ und $y$ die Längen der Diagonalenabschnitte sind.

Daraus folgt:

$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$

Also gilt (1). Ferner müßte gelten:

(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$. Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale $AC$ eingezeichnet ist. Von den Punkten $B$ und $D$ werden die Lote auf $AC$ gefällt; ihre Fußpunkte seien $E$ und $F$. Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur). Dann gilt: (3) $m + u = n + t$. Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras: $a^2 = m^2 + h^2_1$, $c^2 = t^2 + h^2_2$, $b^2 = u^2 + h^2_1$, $d^2 = n^2 + h^2_2$,

also nach Voraussetzung $a^2 + c^2 = h^2_1 + h^2_2 + m^2 + t^2 = h^2_1 + h^2_2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$.

Daraus folgt: (4) $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$ bzw. $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$, oder $(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$. Wegen (3) folgt (5) $m - u = n - t$.

Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte $E$ und $F$ sind identisch, $D$, $E$ $(= F)$ und $B$ liegen auf derselben Geraden $DB$, die senkrecht zu $AC$ verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig.

4.* Es gibt genau zwei Möglichkeiten, und zwar die folgenden: (1) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

(2) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

**Klassenstufe 10**

1. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien $w$ und $w^2$. Dann gilt nach den Vietaschen Wurzelsätzen:

(1) $w^2 + w = \frac{15}{4}$ und (2) $w^2 \cdot w = a$.

Aus (1) folgt

$w_1 = \frac{3}{2}$ und $w_2 = -\frac{5}{2}$.

Wegen (2) ist

$a_1 = w_1{}^3 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = w_2{}^3 = -\frac{125}{8}$.

Durch Einsetzen findet man, daß die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ u. $x_2 = \frac{3}{2}$, $x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$.

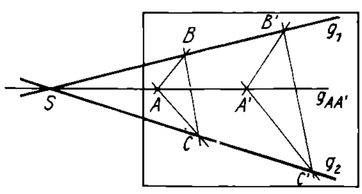
Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

2. *Beweis*: (indirekt)

Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch $c$ kürzbar ($c$ ganz, $c \neq 0, \pm 1$), dann müßte gelten $q - p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und $q = c \cdot n$ ($n$ ganzzahlig).

Daraus würde folgen $q = c\,(n - m)$. Dann wären $q$ und $p$ durch $c$ teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

3. *Analyse*: Angenommen, ein Punkt $A'(\neq A)$ des Zeichenblattes liege auf $AS$. Man wähle $B$ auf $g_1$, $C$ auf $g_2$ so, daß $A, B, C$ nicht auf derselben Geraden liegen. Die Parallelen durch $A'$ zu $AB$ bzw. $AC$ schneiden $g_1$ bzw. $g_2$ in $B'$ bzw. $C'$.




Folglich gilt nach dem Strahlensatz $\overline{SB}:\overline{SB'} = \overline{SA}:\overline{SA'} = \overline{SC}:\overline{SC'}$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgende *Konstruktion* ergibt: Man wähle $B$ auf $g_1$, $C$ auf $g_2$ so, daß $A$, $B$, $C$ nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige (von $BC$ verschiedene) Parallele zu $BC$. Sie schneide $g_1$ in $B'$, $g_2$ in $C'$. Die Parallelen durch $B'$ bzw. $C'$ zu $BA$ bzw. $CA$ schneiden sich dann in einem Punkt $A'$, und $g_{AA'}$, ist die gesuchte Gerade.

*Beweis*: Nach Konstruktion ist

$\overline{SC}:\overline{SC'} = \overline{BC}:\overline{B'C'}$ (Strahlensatz)
$= \overline{AC}:\overline{A'C'}$ (da $\triangle ABC \sim A'B'C'$),

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch $S$. *Diskussion*: Da $BC$ nicht zu $g_2$ oder $g_1$ parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind $B'$, $C'$ eindeutig bestimmt. Da $BA$, $CA$ nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch $B'$ bzw. $C'$, also ist auch $A'$ eindeutig bestimmt. (Genauer: $A'$, $B'$, $C'$ ergeben sich eindeutig aus dem jeweils vorangegangenen Teil der Konstruktion, der allerdings die Willkür der Wahlen von $B$, $C$, $B'$, $C'$ enthielt). Da schließlich die Parallele zu $BC$ von $BC$ verschieden gezeichnet war, ist $B' \neq B$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar. (Die willkürliche Wahl von $B$, $C$ kann im Endergebnis keinen Einfluß auf die Lage der Geraden $g_{AA'}$ haben; denn nach dem Beweis ist diese mit der Geraden $g_{AS}$ identisch, also schon durch $A$, $g_1$, $g_2$ eindeutig bestimmt.) — Endlich kann durch geeignete Wahl von $B$, $C$ und der Parallelen zu $BC$ stets erreicht werden, daß $B$, $C$, $B'$, $C'$, $A'$ auf dem Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, mit Hilfe der Voraussetzung, daß $A$, $B$, $C$ innere Punkte des konvexen Zeichenblattes sind, muß hier verzichtet werden.

4.* Es gelten folgende Beziehungen:

a) $V_w : V_0 = 6:1$ b) $V_0 : V_w = 9:2$

c) $O_w : O_0 = 2\sqrt{3}:1$ d) $O_0 : O_w = 3\sqrt{3}:2$.

Hinweis: Bei den mit Sternchen versehenen Aufgaben wird nur das Ergebnis genannt. Die Aufgaben und ein Teil der Lösungen der Klassenstufe 11/12 veröffentlicht „Wissenschaft und Fortschritt". Dies geschieht in enger Zusammenarbeit und in Abgrenzung der Aufgaben beider Zeitschriften. In *alpha*, Heft 5/67, werden die Lösungen der Bezirks- und in *alpha, Heft* 6/67, die der DDR-Olympiade veröffentlicht.

# Lösungen

(*Einige Lösungen werden erst in den folgenden Heften veröffentlicht*).

**48** Aus $48 < 8 \cdot a$ folgt $a > 6$, denn $48 = 6 \cdot 8$; aus $8 \cdot a < 80$ folgt $a < 10$, denn $8 \cdot 10 = 80$.
Da die beiden Bedingungen $a > 6$ und $a < 10$ zugleich erfüllt sein müssen, kann $a$ nur mit den Zahlen 7, 8 oder 9 belegt werden.

**49** Der Lösungsweg wird aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich; es sei $a$ die Ziffer der Zehnerstelle und $b$ die Ziffer der Einerstelle.

| $a$ | $b$ | $10a + b$ | $10b + a$ | $3 \cdot (10b + a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 51 | 15 | 45 |
| 6 | 2 | 62 | 26 | 78 |
| 7 | 3 | 73 | 37 | 111 |
| 8 | 4 | 84 | 48 | 144 |
| 9 | 5 | 95 | 59 | 177 |

Nur die Zahl 51 erfüllt die gestellten Bedingungen; es gilt $45 < 51$.

**52** Es gilt der Satz: „In jedem unregelmäßigen Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets der größere Winkel gegenüber".
Aus $a > c$ und $\alpha = 58°$ folgt $\gamma < 58°$.
Aus $\beta + \gamma = 122°$ und $\gamma < 58°$ folgt $\beta > 64°$.
Aus $\gamma < \alpha < \beta$ folgt $c < a < b$.

**53** Die Aussage a) ist wahr. Wegen $18 = 2 \cdot 9$ gilt für alle natürlichen Zahlen $n$: wenn $18 | n$, so $9 | n$ und $2 | n$. Die Aussage $b$) ist falsch. Zum Beispiel ist $9 | 27$, aber nicht $2 | 27$.
Die Aussage $c$) ist falsch. Wegen $12 = 2 \cdot 6$ gilt: wenn $12 | n$, so stets auch $6 | n$. Die Aussage $d$) ist falsch. Wegen $24 = 3 \cdot 8$ gilt: wenn $24 | n$, so $8 | n$ und $3 | n$.

**56** Wir bezeichnen den ersten Faktor mit $10a + b$ und den zweiten Faktor mit $90 + c$; dabei sind $a$, $b$, $c$ natürliche Zahlen mit

$$0 < a \leqq 9, \quad 0 \leqq b \leqq 9, \quad 0 \leqq c \leqq 9.$$

Da das Produkt eine dreistellige Zahl ist, gilt

$$100 \leqq (10a + b)(90 + c) \leqq 999,$$
$$100 \leqq 900a + 90b + 10ac + bc \leqq 999.$$

Daher ist $a \leqq 1$, und wegen $a > 0$ muß $a = 1$ sein.
Also gilt $90b + 10c + bc \leqq 99$.
Hieraus folgt entweder $b = 0$ oder $b = 1$.
Aus $b = 0$ folgt $10c \leqq 99$, also

$$c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \text{ oder } 9.$$

Aus $b = 1$ folgt $90 + 10c + c \leqq 99$,
$11c \leqq 9$, also $c = 0$
Wir erhalten also die Lösungen
$10 \cdot 90 = 900$, $10 \cdot 91 = 910$, $10 \cdot 92 = 920$, ..., $10 \cdot 99 = 990$, $11 \cdot 90 = 990$,
insgesamt also 11 Möglichkeiten.

**57** Bezeichnet man die Länge der Basis des gleichschenkligen Dreiecks $ABC$ mit $c$ und die Länge eines jeden Schenkels mit $a$, so kann nur $a = 3c$ sein. Wäre nämlich $c = 3a$, so wäre $a + a < c$, was in diesem Dreieck nicht möglich ist. Man erhält die Gleichung

$$3c + 3c + c = 14 \text{ cm}, 7c = 14 \text{cm},$$
$$c = 2 \text{ cm und } a = 6 \text{ cm}.$$

Die Aufgabe hat also genau eine Lösung; die Seiten des Dreiecks sind 6 cm, 6 cm und 2 cm lang.

**59** Die Maßzahl des Durchmessers (in km) der kreisförmig angenommenen Bahn beträgt

$$d = 3476 + 985 + 379 = 4840;$$

die Maßzahl der Bahnlänge ist dann

$$u = 4840\,\pi \approx 15200.$$

Da die Umlaufzeit 2 h 58 min 3 s, das sind 10683 s, betrug, erhält man für die Maßzahl der Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$v = \frac{15200}{10683} \approx 1{,}42.$$

Die Geschwindigkeit des Satelliten betrug also
$1{,}42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, d. s. rd. $5100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

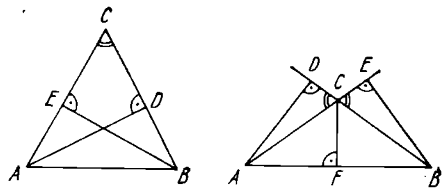
**60** Jeder Punkt $P_{ik}$ ($i = 1,2,3,\ldots, m$ und $k = 1,2,3,\ldots,n$) legt mit den übrigen Punkten genau $mn - 1$ Strecken fest. Wir erhalten demnach $mn\,(mn - 1)$ Strecken. Dabei wurden alle Strecken doppelt gezählt. Durch die gegebenen Punkte sind also
$\frac{1}{2}\, mn\, (mn - 1)$ Strecken bestimmt.

**62** Ist die erste Zahl gleich $x$, so ist die zweite gleich $2x$ und die dritte gleich $4x$. Daher gilt

$$x^2 + (2x)^2 + (4x)^2 = 189,$$
$$x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 189,$$
$$21x^2 = 189, \qquad x^2 = 9.$$

Diese Gleichung hat aber zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.
Daher hat auch die Aufgabe genau zwei Lösungen; die Zahlentripel
(3, 6, 12) und (— 3, — 6, — 12)
erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

**63** 1. Es sei $ABC$ ein *spitzwinkliges* Dreieck, und es seien die (im Innern des Dreiecks liegenden) Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ einander gleichlang.




Dann gilt wegen $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CEB = 90°$ und
$\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCE$
$\Delta ADC \cong \Delta CEB.$

Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h. das Dreieck $ABC$ ist gleichschenklig.

2. Es sei $ABC$ ein *stumpfwinkliges* Dreieck. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der Winkel $BCA$ stumpf ist. Dann liegen die Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ außerhalb des Dreiecks und die Höhe $\overline{CF}$ innerhalb des Dreiecks.

2.1. Es sei nun $\overline{AD} = \overline{BE}$. Dann gilt wie oben wegen $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BEC = 90°$ und $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECB$ (Scheitelwinkel)
$\Delta ACD \cong \Delta CBE.$
Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h. das Dreieck $ABC$ ist gleichschenklig.

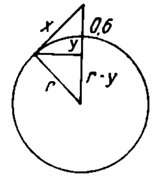
2.2. Es sei $\overline{AD} = \overline{CF}$. Dann wäre wegen $\sphericalangle CDA = \sphericalangle AFC = 90°$ und $\overline{AC} = \overline{AC}$
$\Delta ACD \cong \Delta AFC$;
daraus folgt $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAF$,
also $CD \parallel AF$.
Das widerspricht aber der Voraussetzung, wonach $ABC$ ein Dreieck ist und die Geraden $BC$ und $AB$ einander nicht parallel sein können. Aus demselben Grund kann auch der Fall $\overline{BE} = \overline{CF}$ nicht eintreten.

3. Es sei $ABC$ ein *rechtwinkliges* Dreieck mit dem rechten Winkel $BCA$. Dann fallen die Punkte $C$, $D$, $E$ zusammen. Im Falle $\overline{AD} = \overline{BE}$ erhält man wieder ein gleichschenkliges Dreieck. Ferner können die Fälle $\overline{AD} = \overline{CF}$ und $\overline{BE} = \overline{CF}$ nicht eintreten, was sich leicht wie unter 2.2 nachweisen läßt.

**65** Setzt man $\log_{16} x = z$, so ist $16^z = x$,
also $4^{2z} = x$, d. h. $\log_4 x = 2z$.
ferner ist $2^{4z} = x$, d. h. $\log_2 x = 4z$.

Aus der Gleichung der Aufgabe folgt dann
$$z + 2z + 4z = 7, \quad 7z = 7,$$
$$z = 1, \text{ also } x = 16.$$
Setzt man $x = 16$ in die obige Gleichung ein, so erhält man $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x$
$= \log_{16} 16 + \log_4 16 + \log_2 16$
$= 1 + 2 + 4 = 7.$

**66** Man erhält (siehe Abb.):
a) $x^2 = (r + 0{,}6)^2 - r^2 = 1{,}2r + 0{,}36$
$= 1{,}2 \cdot 1738000 + 0{,}36 \approx 2086000,$
$x \approx 1440.$




Die Sichtweite betrug rd. 1,4 km.
b) $(r - y)(r + 0{,}6) = r^2$,
$$y = r - \frac{r^2}{r + 0{,}6} = \frac{0{,}6r}{r + 0{,}6} \approx 0{,}6,$$
$$K = 2\pi ry \approx 2\pi \cdot 1738000 \cdot 0{,}6$$
$$\approx 6552000.$$
Die zu überblickende Fläche betrug rd. 6,6 km².

**W(5)50** Günter habe zum Tauschen $p$ polnische, $s$ sowjetische und $b$ bulgarische Briefmarken mitgebracht; wir stellen alle Möglichkeiten in einer Tabelle zusammen:

| $s$ | $4s$ | $5s$ | $4s < b < 5s$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | nicht möglich | nicht möglich |
| 2 | 8 | 10 | 9 | 19 |
| 3 | 12 | 15 | 13 oder 14 | 14 oder 13 |
| 4 | 16 | 20 | 17 oder 18 oder 19 | 9 oder 8 oder 7 |
| 5 | 20 | 25 | 21 oder 22 oder 23 oder 24 | 4 oder 3 oder 2 oder 1 |

Nur für $s = 5$ wird die Ungleichung $p < s$ erfüllt. Günter hat genau 5 sowjetische Briefmarken zum Tauschen mitgebracht. Für die übrigen Briefmarken gibt es vier Möglichkeiten: 21 bulgarische und 4 polnische oder 22 bulgarische und 3 polnische oder 23 bulgarische und 2 polnische oder 24 bulgarische und 1 polnische.

**W(5)51** Die Anzahl der Schüler, die keine Brötchen bestellen, sei $x$, wobei $x > 3$ gilt. Weitere $x$ Schüler bestellen je 4 Brötchen; $2 \cdot x$ Schüler bestellen je 3 und nochmals $2 \cdot x$ Schüler bestellen je 1 Brötchen. Es sei $y$ die Anzahl der verbleibenden restlichen Schüler. Dann gilt $6 \cdot x + y = 30$. Für $x = 4$ erhalten wir $y = 6$. Für $x = 5$ erhalten wir $y = 0$; das steht im Widerspruch zur Aufgabe.
Es wurde folgende Bestellung aufgegeben:
4 Schüler bestellten keine Brötchen, 4 Schüler bestellten je 4, also zusammen 16 Bröt-

chen, 8 Schüler bestellten je 3, also zusammen 24 Brötchen, 8 Schüler bestellten je 1, also zusammen 8 Brötchen, 6 Schüler bestellten je 2, also zusammen 12 Brötchen, der Klassenlehrer bestellt 3 Brötchen. Es mußten insgesamt 63 frische Brötchen eingekauft werden.

**W(6)54** Aus *b*) folgt $180 \mid a$, denn $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$. Also $0 < 180x < 4000$ für $x = 1,2,3,\dots$
Aus *d*) folgt
$11 \mid 180x - 8$; $\quad 11 \mid 4 \cdot 45x - 8$;
$11 \mid 4(45x - 2)$.
Damit das Produkt $4(45x - 2)$ durch 11 teilbar ist, muß der zweite Faktor $45x - 2$ durch 11 teilbar sein.
$11 \mid 45x - 2$; $\quad 11 \mid 44x + (x - 2)$.
Damit die Summe $44x + (x - 2)$ durch 11 teilbar ist, muß der zweite Summand $x - 2$ durch 11 teilbar sein. Aus $11 \mid x - 2$ folgt $x = 13, 24, 35, 46, \dots$ Nur $x = 13$ erfüllt die Ungleichung $0 < 180x < 4000$. Weil $13 \cdot 180 = 2340$ und $2340 - 8 = 2332$, ist $a = 2332$. Nur die Zahl 2332 erfüllt die gestellten Bedingungen.

**W(6)55** Wir nehmen an, von der Klasse 6*b* haben *a* Schüler die Note ‚Eins', *b* Schüler die Note ‚Zwei', *c* Schüler die Note ‚Drei', *d* Schüler die Note ‚Vier' und *e* Schüler die Note ‚Fünf' erhalten. Die Aussagen von Klaus lassen sich dann durch die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen ausdrücken:

a) $a + b + c + d + e = 36$; b) $c > 18$;
c) $a < d < b$; $\quad$ d) $a + e = 4$;
e) $2e < a < 4e$; $\quad$ f) $2a = d$.

Aus d) und e) folgt $a = 4$ und $e = 1$, und damit ist wegen f) $d = 6$. Die Gleichung a) und die Ungleichung b) und c) lassen sich dann vereinfachen; wir erhalten

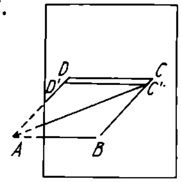
a) $b + c = 26$; b) $c > 18$; c) $6 < b$

Aus a) und b) folgt $b < 8$. Aus $b > 6$ und $b < 8$ folgt $b = 7$. Da 36 Schüler anwesend waren, muß $c = 19$ sein.
3 Schüler erhielten die Note ‚Eins', 7 die Note ‚Zwei', 19 die Note ‚Drei', 6 die Note ‚Vier' und 1 Schüler die Note ‚Fünf'. Der Klassendurchschnitt errechnet sich wie folgt:

$3 \cdot 1 = 3$, $\quad 19 \cdot 3 = 57$, $1 \cdot 5 = 5$.
$7 \cdot 2 = 14$, $\quad 6 \cdot 4 = 24$,

$3 + 14 + 57 + 24 + 5 = 103$;
$103 : 36 = 2{,}86\dots$ Da 2,86 größer als 2,6 ist, hatte Gerd richtig gerechnet.

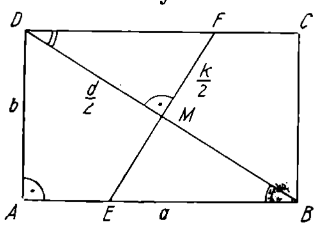
**W(7)58** *B*, *C* und *D* seien die gegebenen inneren Punkte der rechteckigen Zeichenfläche. Wir verbinden *C* mit *B* und *D*. Wir wollen annehmen, daß $\overline{CD} < \overline{BC}$ sei. Wir tragen $\overline{CD}$ auf $\overline{BC}$ von *B* bis *C'* ab und ziehen durch *C'* eine Parallele zu $\overline{CD}$. Wir zeichnen dann durch *D* eine Parallele zu $\overline{BC}$. Der Schnittpunkt der gezeichneten Parallelen sei *D'*.



Nach Voraussetzung ist das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm. Aus $\overline{D'C'} \parallel \overline{DC}$ und $\overline{BC'} = \overline{DC} = \overline{D'C'}$ folgt, daß das Viereck *ABC'D'* ein Rhombus ist. Im Rhombus halbiert eine Diagonale zwei Rhombuswinkel. Da *AC'* Diagonale des Rhombus *ABC'D'* ist, halbiert sie die Winkel *D'AB* und *BC'D'*. Wir konstruieren die Winkelhalbierende des Winkels *BC'D'*; sie ist auch Winkelhalbierende des Winkels *BAD*.

**W(8)61** Es sei $100a + 10b + c$ die gedachte Zahl mit $a - c \geqq 2$ und $c > 0$.
Subtrahiert man hiervon die Zahl
$100c + 10b + a$, so erhält man
$100(a - c) + (c - a)$
$= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$.
Dabei gilt $0 < a - c - 1 < 8$ und $0 < 10 + c - a < 9$. Addiert man hierzu die Zahl $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, so erhält man die Summe
$100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089$.

**W(9)64** Es sei *M* der Schnittpunkt der Geraden *BD* und *EF*. Die Punkte *B* und *D* liegen symmetrisch zur Symmetrieachse *EF*.



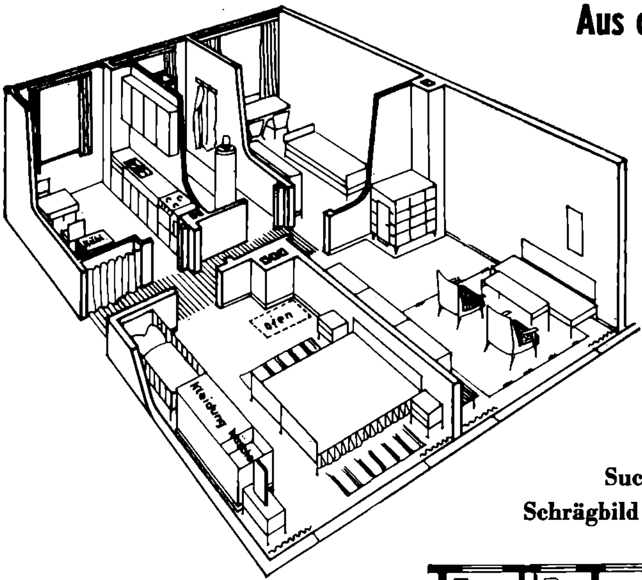
Daraus folgt $DB \perp EF$ und
$\overline{DM} = \overline{BM} = \frac{d}{2}$. Ferner gilt
$\overline{FM} : \overline{ME} = \overline{DM} : \overline{MB} = 1:1$, also
$\overline{FM} = \overline{ME} = \frac{k}{2}$.
Nun ist $\triangle FDM \sim \triangle DAB$; daher gilt
$\frac{k}{2} : \frac{d}{2} = b : a$, d. h., $k : d = b : a$
und $k = \frac{b}{a} d = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$.

**alpha-Wettbewerb [W(10)98] -Berichtigung-**
Beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen *n* und für alle positiven reellen Zahlen *a* und *x* mit $a \neq 1$ gilt:

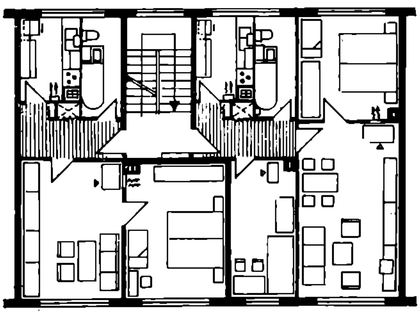
$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = \log_a x \;!$$

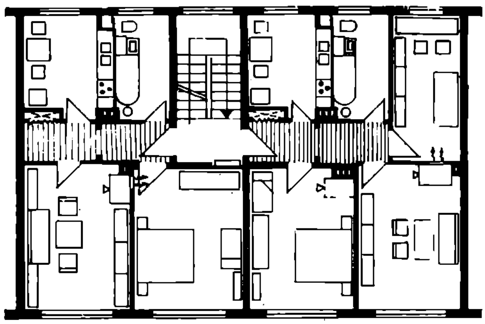
(letzter Einsendetermin: 10. 10. 1967)

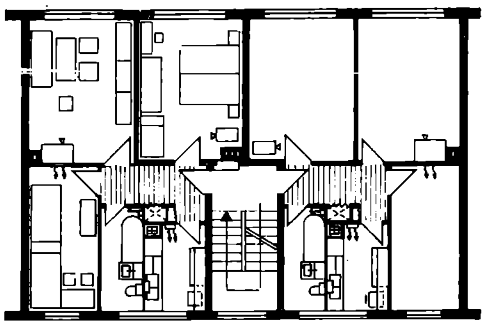
# Aus der Vogelperspektive betrachtet




**Suche zu dem vorgegebenen Schrägbild den richtigen Grundriß!**



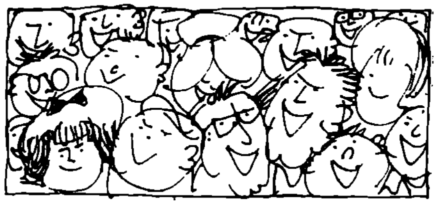




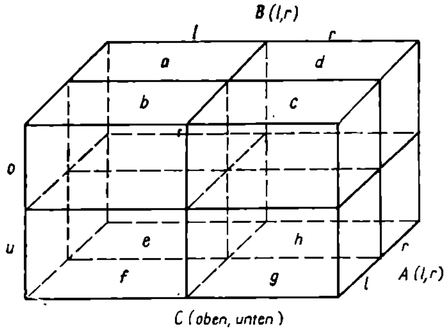

Durch die Vereinheitlichung des gesamten Bestell- und Abrechnungsverfahrens im Postzeitungsvertrieb wird die Deutsche Post ab 1. Juli 1967 das Bezugsgeld für diese Zeitschrift nicht mehr halbjährlich, sondern jeden 2. Monat kassieren.

Wir hoffen, daß unsere Leser dieser, von der Deutschen Post eingeleiteten Maßnahme Verständnis entgegenbringen.

# In freien Stunden alpha heiter



**„Kleine Fische !“**




Die Arbeitsgemeinschaft „Aquarien“ hat eine Zuchtanlage von acht Becken, die in der aus der Abbildung ersichtlichen Anordnung zusammengestellt ist. Alfred ($A$), Bertold ($B$) und Christian ($C$) betrachten zur gleichen Zeit die Anlage.

Alfred: „Ich sehe links ($b+c+f+g$) 13 Fische, rechts ($a+d+e+h$) 18 Fische!“

Bertold: „Ich sehe links ($a+b+e+f$) 17 und rechts ($c+g+d+h$) 14 Fische!“

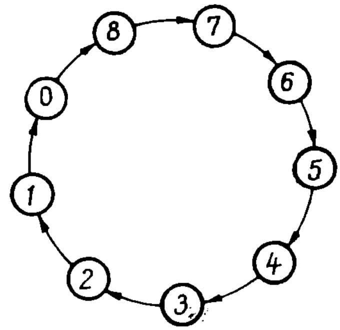
Christian: „Ich sehe oben ($a+b+c+d$) 16 Fische, unten ($e+f+g+h$) 15 Fische!“

Wieviel Fische befinden sich in jedem der Aquarien $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$? (Alfred und Christian betrachten die Anlage von verschiedenen Seiten, Bertold von oben!) Beachte, daß durch je zwei Becken hindurch gesehen wird!

**Beantworte in drei Sekunden!**

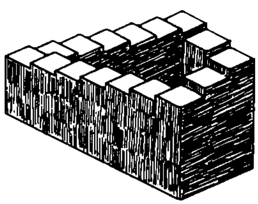
„Wieviel Finger hast du an einer Hand, an zwei Händen, an zehn Händen?“

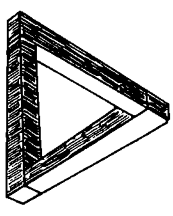
**Dein Geburtstag — ein Geheimnis?**




Schreibt euren Geburtstag auf und betrachtet ihn als Zahl (Bsp.: 12. 7. 1953 ergibt: 1271953)! Dann vertauscht ihr die Ziffern dieser Zahl beliebig. Nun subtrahiert ihr die kleinere Zahl von der größeren Zahl und vom Ergebnis bildet ihr die Quersumme. Jetzt denkt ihr euch eine Zahl von 0 bis 8 und subtrahiert die gedachte Zahl von eurer Quersumme. Ihr erhaltet eine Schlüsselzahl $a$. Jetzt zählt in Pfeilrichtung, bei Feld 8 beginnend (Feld 8 mitzählen!), soviel Felder, wie die Schlüsselzahl angibt! Ihr endet stets bei einem Feld, das die gedachte Zahl enthält!

Beispiel: Aus 12. 7. 1953 wird 1271953. Ziffern beliebig vertauschen: 2171395! Bilden der Differenz: 899442! Quersumme bilden: 36! Zahl zwischen 0 und 8 denken: 5 und von 36 subtrahieren: 31 (Schlüsselzahl)! Bei Feld 8 beginnend 31 Felder in Pfeilrichtung gezählt, endet ihr bei Feld 5, der gedachten Zahl! Wer kommt hinter das „Geheimnis“?





Man kann Objekte zeichnen, die es gar nicht gibt! Aus „Readers Digest“ 10/66, USA


„WAS ERHALTEN WIR, WENN WIR DIESES STÜCK FLEISCH IN 32 GLEICHE TEILE TEILEN?"
„GEHACKTES....!"
„GUTEN MORGEN - EIN BLICK AUF DIE UHR, ES IST GENAU 6.30 UHR - VERZEIHUNG 5.30 UHR - HALB FÜNF!"
„NOCH 10 km LUFTLINIE BIS ZUM ZIEL!"
„GIBT'S NICHT EINEN KÜRZEREN FELD-WEG?"
AUFTRÄGE: alpha Abonnenten
„BITTE HALTE MAL EINEN MOMENT DIE KURVE, ICH HOLE EINE NEUE TAFEL!"
„...UND HIER HAST DU DIE PALME, AUF DIE DU KLETTERN WILLST, WENN MEINE AUFGABEN FALSCH SIND!"

# Das Letzte

## aus der Fachzeitschrift Rechentechnik


● Nicht schlecht staunten die städtischen Arbeiter der englischen Stadt Browley, als sie Mitte dieses Monats in ihre Lohntüten blickten: Ihre Entlohnung war über Nacht um ein Vielfaches erhöht worden. Ihre verständliche Freude war jedoch von kurzer Dauer. Eine geringfügige technische Panne, angeblich eine Schwankung der Stromstärke, hatte die mathematischen Fähigkeiten des Elektronenrechners, der die Lohnstreifen ausschreibt, stark eingeschränkt. Allerdings mußten die Arbeiter das Geld schweren Herzens zurückzahlen.

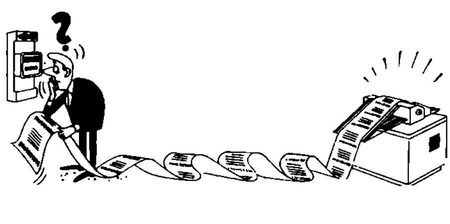
● Eine „elektronische Nase", die Brandgase riecht und jeden Brand schon in seinen Anfängen meldet, ist in der Schweiz entwickelt und als Alarmanlage eingesetzt worden. Sogenannte Melder sind mit dem „Gehirn", der Signalzentrale verbunden. Spricht ein Melder an, so wird das elektrische Signal unverzüglich in eine optische und eine akustische Alarmmeldung umgewandelt.

● Eine Aufforderung zum Schulbesuch erhielt dieser Tage Frau Sofie Madsen aus Lynge, die mit 104 Jahren die älteste Einwohnerin Dänemarks ist. Der Amtsschimmel hatte in ihrem Heimatort in einer Hollerith-Maschine gewiehert, die mit den Lochkarten der Einwohner gefüttert worden war und die schulpflichtigen Kinder „aussortieren" sollte. Weil die Maschine in der Alterssparte nur bis 99 „zählen" konnte, stufte sie die 104 Jahre alte Frau als Fünfjährige ein.

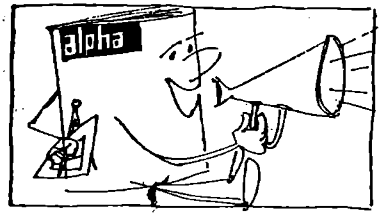
● Durchschnittlich 220000 bis 250000 Münzen — vom Pfennig bis zum Zweimarkstück — wandern täglich von den Verkehrsbetrieben der Stadt Dresden zum Münzzentrum der Deutschen Notenbank Dresden. Das Kleingeld aus den Zahlboxen der Straßenbahnen und Omnibusse der Elbestadt wird von den Verkehrsbetrieben ungezählt übergehen. Im Münzzentrum wird das Geld durch Saugvorrichtungen von alten Fahrscheinen gesäubert, sortiert, gezählt und nach der Gutschrift auf das Konto der Verkehrsbetriebe binnen wenigen Stunden wieder in Umlauf gebracht.

● Nachdem in einem amerikanischen Unternehmen die neueste elektronische Rechenmaschine aufgestellt worden war, befestigte man an der Wand in unmittelbarer Nähe einen Glaskasten. Darin befindet sich eine Handrechenmaschine, die viele Jahre hindurch ihren Dienst zuverlässig getan hatte. Und am Glaskasten liest man die Aufschrift: „Im Notfall Scheibe eindrücken."

● Ein Elektronenrechner, der in einem englischen Elektrizitätswerk die Abrechnungen ausführte, schickte an einen Stromabnehmer eine Rechnung über null Pfund Sterling. Der Kunde kümmerte sich nicht darum, warum auch. Daraufhin erhielt er vom Elektronenrechner die zweite und alsbald die dritte Mahnung mit der Forderung, den genannten Betrag einzuzahlen; andernfalls müßte der Strom gesperrt werden. Der Mann schickte nun einen Scheck über null Pfund Sterling und — erhielt vom Elektronenrechner die Quittung mit dem Vermerk „Besten Dank für Ihre Überweisung".



● Der Elektronenrechner IBM 7044 ist imstande, eine äußerst komplizierte Gleichung, für die ein Mensch 150 Jahre benötigen würde, in neun Sekunden zu lösen.




# An unsere neuen Leser!

Seit Ende 1966 wurden in Kinder-, Jugend- und Fachzeitschriften sowie zahlreichen Tageszeitungen unsere Zeitschrift begrüßt und Einzelheiten unserer Arbeit dargelegt. Über 60000 Schüler, Arbeitsgemeinschaftsleiter und Lehrer haben bereits zugegriffen. Die Redaktion hat keine Mühe gescheut, neue Leser direkt über die Klassenleiter der Schulen zu gewinnen. Diese Werbung werden wir systematisch fortsetzen. Es ist dafür gesorgt, daß sich auch unsere neu hinzugekommenen Leser an dem *alpha*-Wettbewerb, der sich unerwarteten Zuspruchs erfreut, beteiligen können. Jeder, der mit löst, ist Mitarbeiter von *alpha*; und davon können wir nicht genug haben. Aus technischen Gründen sind wir leider nicht mehr in der Lage, die ersten Hefte nachzuliefern. Vielleicht werden Euch, liebe neue Leser, Eure Mitschüler ihre bereits erworbenen Exemplare zur Information zur Verfügung stellen? Allen sei zugerufen: Viel Freude bei der Arbeit mit *alpha* für Euch, für uns aber vor allem konkrete Vorschläge, ein Stoß Material und erforderlichenfalls auch Kritik zur weiteren Verbesserung unserer jungen Zeitschrift.

Chefredakteur

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

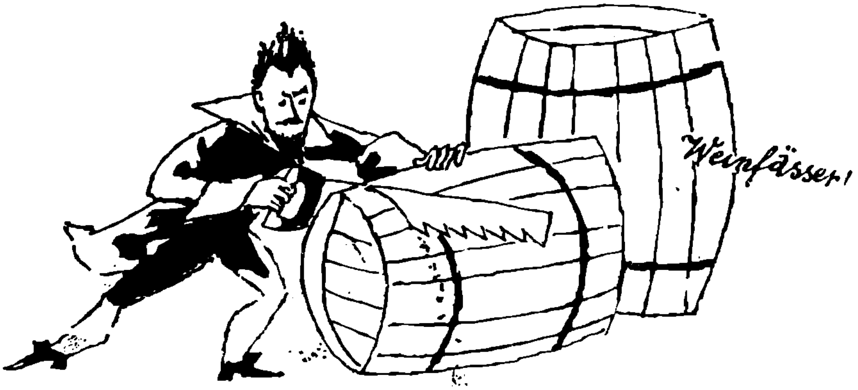
1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 10. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha* 7027 Leipzig Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein *W* (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer in Klammern, z. B. (7) vorgesetzt (d. h. für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung.
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf Seite 117 angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 298 mm) denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst“ oder „gut gelöst“. Wer keine Nachricht erhält, hat die Aufgabe unvollständig, teilweise, nicht gelöst oder die vorgegebene Form nicht beachtet.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Zwischen dem 15. und 31. Januar 1968 sind alle im Jahre 1967 erworbenen Antwortkarten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury, deren Mitglieder wir im Heft 6/67 vorstellen werden, wertet diese Antwortkarten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
9. Aussicht auf Preise und namentliche Veröffentlichung haben Teilnehmer, die im Laufe des Jahres 1967 Antwortkarten mit einem der beiden Prädikate erhalten haben. Anerkennung wird also der Teilnehmer finden, der regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitarbeitet.

# Streifzüge durch die Mathematik

**BAND 2**

*1. Auflage, 232 Seiten, 210 zweifarbige Zeichnungen, 16,7 cm × 24 cm, Leinen 12,— MDN*

Aufgenommen in die „Mathematische Schülerbücherei“




Im November 1613 feierte der kaiserliche Mathematiker und Astronom am österreichischen Hof, Johannes Kepler (1571—1630), Hochzeit, zu der er einige Fässer Wein besorgte. Bei dem Kauf war Kepler sehr erstaunt, daß der Weinhändler den Rauminhalt der verschieden geformten Fässer auf ein und dieselbe Art bestimmte, und zwar maß er den Abstand des Spundlochs von der am weitesten entfernten Stelle des Faßbodens. Bei dieser Art der Messung wurde aber die Form des Fasses völlig unberücksichtigt gelassen! Kepler erkannte sofort, daß da ein interessantes mathematisches Problem vorlag. Er dachte darüber nach und fand Formeln nicht nur für das Volumen der verschiedenartigsten Körper, z. B. einer Zitrone, eines Apfels, einer Quitte und sogar eines türkischen Turbans. Für jeden dieser Körper ersann Kepler neue, zum Teil sehr scharfsinnige Methoden.

Wer die „Streifzüge“ liest, wird feststellen, mit welchen, im Grund genommen einfachen Methoden Kepler zum Ziele kam. Und das ist ja der Vorteil dieses Buches, daß es auch für Oberschüler ohne weiteres verständlich ist. Es hilft, den Schulstoff zu vertiefen. Durch die Beispiele aus der modernen Technik (Fallschirmsprung, Aufstieg von Raketen, automatische Regelung des Zugverkehrs) lernen sie dabei Begriffe kennen, die ihnen wahrscheinlich noch nicht so geläufig sind. Die lustigen, bunten Zeichnungen helfen mit, den Schein der „Unnahbarkeit“ von der Mathematik zu lösen.