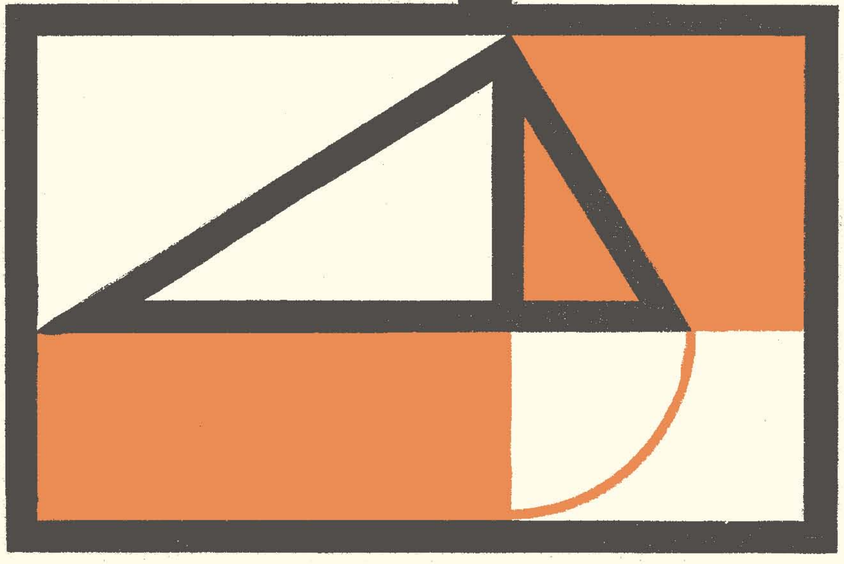
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin

2. Jahrgang 1968
Preis 0,50
Index 31059

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

2. Jahrgang 1968
Heft 4

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20 05 41
Postscheckkonto: Berlin 132 626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 M
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Archiv Sudhoff-Institut Leipzig (S. 97); Wust, Dresden (S. 101); Archiv: Prof. Dr. Krbek (S. 102); Zentralbild: 1. Mai 1967, Berlin, Kampfdemonstration der Werktätigen der Hauptstadt; Streichholzetiketten: Archiv König, Schalkau/Thür. (S. 115); Vignetten: H.-J. Jordan, Leipzig

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß 27. 5. 1968

Inhalt

97 August Ferdinand Möbius (7)
Dozent Dr. rer. nat. habil. H. Wußing
Karl-Sudhoff-Institut
Karl-Marx-Universität Leipzig

100 Berufsbild: Mathematisch-technischer Assistent (8)
G. Paulin,
Rechenzentrum der Humboldt-Universität zu Berlin

102 Formen und Formeln — eine Buchbesprechung (8)
W. Arnold, Lektor
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig

104 Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert (9)
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt

105 Elementare Zahlenfolgen 2. Teil (6)
Oberlehrer H. Lohse, Institut für Psychologie
Karl-Marx-Universität Leipzig

108 Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur (7)
Dr. E. Schröder, Institut für Geometrie
Technische Universität Dresden

112 Eine Knobelgeschichte 2. Teil (5)
W. Träger
Schloßberg-Oberschule, Döbeln

114 In freien Stunden: *alpha* heiter (5)
Oberlehrer H. Pätzold
OS Waren/Müritz

116 Wer löst mit (5)
alpha-Wettbewerb
Autorenkollektiv

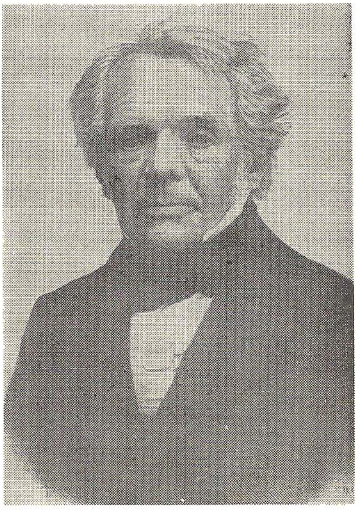
119 VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (5)
Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade (Dez. 1967)
Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker

123 Lösungen (5)

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

August Ferdinand Möbius

1790 bis 1868



Mehr als ein halbes Jahrhundert hat *August Ferdinand Möbius* an der Leipziger Universität gewirkt, von seinem Amtsantritt am 1. Mai 1816 — zunächst als außerordentlicher Professor der Astronomie und Observator an der Leipziger Sternwarte und seit 1844 als ordentlicher Professor der Astronomie und der höheren Mechanik — bis zu seinem Tode am 26. September 1868. Aus Anhänglichkeit an seine engere Heimat Sachsen und wohl auch aus einer gewissen Scheu vor tiefgreifendem Milieuwechsel hat er ehrenvolle Berufungen nach Greifswald, Dorpat und Jena abgelehnt.

Zu Anfang des 19. Jahrhunderts war das Niveau mathematischer Forschung und Lehre in Deutschland — wenn man von Göttingen absieht, wo der überragende *C. F. Gauß* (1777—1855) wirkte—gegenüber Frankreich und England vergleichsweise noch niedrig. Fast nur Astronomen benötigten um diese Zeit in Deutschland höhere mathematische Kenntnisse und hielten auf diese Weise die höhere Mathematik am Leben. Dieser Umstand änderte sich erst mit dem Übergreifen der industriellen Revolution während der 20er und 30er Jahre nach Deutschland, in deren Gefolge das Interesse an Naturwissenschaften und Mathematik rasch zunahm. *Möbius* gehört mit *C. G. J. Jacobi* (1804—1851), *H. Graßmann* (1809—1877) und *J. Plücker* (1801—1868) zu jener ersten Generation deutscher Mathematiker des 19. Jahrhunderts, die die Entwicklung der Mathematik wesentlich mitbestimmt haben. Der Name von *Möbius* ist fest verknüpft mit der im Bereich der Zahlentheorie verwendeten sog. *Möbiusschen Funktion.* In der Geometrie spricht man vom *Möbiusschen Band,* dem historisch ersten Fall einer nur einseitigen Fläche, deren Entdeckung *Möbius* im Jahre 1858 gelungen war.

Das Leben von *Möbius* ist ohne äußere Dramatik verlaufen. Am 17. Nov. 1790 in Schulpforta geboren, hatte er seinen Vater, der Tanzlehrer an der dortigen altberühmten sog. Fürstenschule war, schon 1793 verloren. Die inzwischen nach Naumburg verzogene Mutter hat dem Sohn nur mit Mühe von 1803 bis 1808 den Schulbesuch in Schulpforta und das anschließende Universitätsstudium in Leipzig ermöglichen können. Ursprünglich hatte sich *Möbius* für Jura immatrikulieren lassen, war aber bereits im zweiten Semester auf Grund seiner Neigungen zum Studium der mathematischen Wissenschaften übergewechselt. Er studierte insbesondere bei dem Physiker *L. W. Gilbert* (1769—1824) und dem Mathematiker und Astronomen *K. B. Mollweide* (1774—1825), mit dem er einen engeren wissenschaftlichen Kontakt auf dem Gebiete der rechnenden Astronomie herstellen konnte. Mit Hilfe eines finanziellen Zuschusses aus den Mitteln einer Stiftung konnte *Möbius* vom Frühjahr 1813 bis Ende 1814 wissenschaftliche Studienreisen unternehmen, die ihn zu *C. F. Gauß* nach Göttingen und zu *J. Fr. Pfaff* (1765—1825) nach Halle führten; der Hauptgewinn bestand neben der Vervollkommnung seiner theoretisch-astronomischen Kenntnisse vor allem in dem bleibenden engen wissenschaftlichen Kontakt zu *Gauß,* dessen Empfehlung er auch zusammen mit einigen kleineren Arbeiten mathematisch-astronomischen Inhaltes nach vollzogener Habilitation seinen Ruf nach Leipzig an die Sternwarte verdankte. Die Berufung war an die Bedingung gebunden, vor Übernahme seiner Dienstgeschäfte eine Studienreise zur Vervollkommnung seiner praktischen astronomischen Erfahrungen zu unternehmen, eine Verpflichtung, der sich *Möbius* mit Freude unterzog und die ihm von Mai bis Herbst 1816 u. a. an die Sternwarten von Gotha, Tübingen, München und Wien führte und weitere wissenschaftliche Kontakte einbrachte. Nach der Rückkehr bezog *Möbius* seine Dienstwohnung in der Pleißenburg, einem Teil des heutigen Neuen Rathauses, in deren Räumen damals neben chemischen Laboratorien auch die Sternwarte uud ein Hörsaal für die Studenten der Astronomie untergebracht waren. Hier befaßte er sich in Beiträgen zur Astronomie mit Polhöhenbestimmungen, Sternbedeckungen, Kometenbestimmung und deren rechnerischer Auswertung, und schließlich intensiv mit den von *A. v. Humboldt* (1769—1859) und *Gauß* angeregten systematischen Untersuchungen des Magnetfeldes der Erde. Mit großem Erfolg hielt *Möbius* öffentliche Vorlesungen über naturwissenschaftlich-astronomische Themen, ein sicheres Zeichen für das um die Mitte des Jahrhunderts auch in Deutschland erwachte breite Interesse an den Naturwissenschaften.

Während seiner ersten Amtsjahre hielt *Möbius* hauptsächlich astronomische Vorlesungen, z. B. über sphärische Astronomie, Einrichtung und Gebrauch astronomischer Instrumente, Theorie der Finsternisse und Sternbedeckungen, Berechnungen der Kometenbahnen, Störungstheorie u. a. m. Später erweiterte *Möbius* seine Vorlesungstätigkeit auf dem Gebiete der Mathematik beträchtlich; er las über Stereometrie, Kegelschnitte, analytische Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, über Elemente der Zahlentheorie und der Differential- und Integralrechnung. Die Zahl seiner Hörer war anfangs gering, oft waren es nur 4 bis 8, entsprechend der vergleichsweise geringen Anzahl von Studierenden der Naturwissenschaft und Mathematik während der ersten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts. Erst in den 50er und 60er Jahren vergrößerte sich mit der allgemeinen Verstärkung der naturwissenschaftlichen Ausbildung an den europäischen Hochschulen, einer Folge der industriellen Revolution, auch die Zahl der Hörer von *Möbius*. Die Gymnasiallehrer der Mathematik im damaligen Königreich Sachsen haben während der Zeit von *Möbius'* Tätigkeit fast alle bei ihm studiert. Unter seinen Schülern, die für die Entwicklung der Mathematik selbst eine hervorragende Rolle gespielt haben, befanden sich der leider früh verstorbene bedeutende Mathematiker *H. Hankel* (1839 bis 1873) sowie *J. A. Hülsse* (1812—1876), der Direktor der polytechnischen Schule in Dresden, aus der die heutige Technische Universität hervorgegangen ist.

Obwohl *Möbius* im Laufe seiner jahrzehntelangen Tätigkeit zum Mitglied vieler gelehrter Gesellschaften berufen worden ist, darunter der Berliner Akademie und der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, ist seine wirkliche Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik erst nach seinem Tode erkannt worden. Die Gründe hat man wohl auch darin zu suchen, daß unter der anspruchslosen Form seiner Veröffentlichungen und wegen des damals in Leipzig nur beschränkt möglichen Studiums der einschlägigen Literatur zu seinen Lebzeiten das durchgreifend Neue seiner Gedankenführung verdeckt blieb — hauptsächlich aber deshalb, weil seine vornehmlich der Geometrie gewidmeten Untersuchungen in eine Richtung zielten, deren Bedeutung erst erkennbar wurde, als in den 70er Jahren von anderer Seite, durch *F. Klein* (1849—1925) und *S. Lie* (1842—1899), das *Möbius* vorschwebende Ziel einer Klassifizierung der Geometrie mit Erfolg bewältigt worden war.

Es war nämlich zu Anfang des 19. Jahrhunderts auf dem Gebiete der Geometrie eine völlig neue Lage entstanden. Wenn auch der Methode nach mit der Erfindung der analytischen Geometrie durch *P. Fermat* (1601—1665) und *R. Descartes* (1596—1650) schon im 17. Jahrhundert ein Bruch mit der antiken Geometrie vollzogen worden war, so hatte die Geometrie doch erst seit dem Ende des 18. Jahrhunderts prinzipielle Schritte nach vorn in Richtung auf die Ablösung der antiken Auffassung vom Wesen der Geometrie tun können, während Algebra und Analysis schon Jahrhunderte vorher den antiken Standpunkt überwunden hatten. Der außerordentliche Aufschwung der Geometrie ergab sich als Gesamterscheinung direkt aus dem im Gefolge der industriellen Revolution sprunghaft wachsenden Bedarf an mathematisch ausgebildeten Ingenieuren, wobei nach Lage der Dinge die Darstellende Geometrie zum Kernstück einer auf rasch erfüllbare Ingenieurbedürfnisse zugeschnittenen Ausbildung werden mußte. Diese „Sprache des Ingenieurs“, wie sich *G. Monge* (1746—1818), der Begründer einer wissenschaftlich durchgebildeten Darstellenden Geometrie ausdrückte, eroberte sich an den nach dem Vorbild der Pariser *École Polytechnique* während des 19. Jahrhunderts in ganz Europa gegründeten polytechnischen Schulen, aus denen später die Technischen Hochschulen hervorgegangen sind, eine zentrale Stellung und wirkte in starkem Maße zurück auf die Richtung der mathematischen Ausbildung an Gymnasien und Universitäten. In diesem Sinne gab der hohe gesellschaftliche Gebrauchswert der Geometrie, wie er sich insbesondere in der Darstellenden Geometrie offenbarte, für die Entfaltung der Geometrie während des 19. Jahrhundert den Nährboden ab, wobei allerdings die ehemals vorhandene innere Geschlossenheit der Geometrie mehr und mehr zerfiel. Um die Mitte des Jahrhunderts herrschte unter den Mathematikern eine gewisse Ratlosigkeit über den inneren Zusammenhang der einzelnen „Geometrien" und geometrischen Methoden. Es kam darauf an, die Fülle der Ergebnisse in neuer Sicht neu einzuordnen und jeder Geometrie einen logisch bestimmbaren Platz im Gesamtgefüge geometrischer Methoden zuzuweisen. Diese Klassifizierung der „Geometrien" gelang schließlich zu Anfang der 70er Jahre mit Hilfe gruppentheoretischer Methoden; dies bildet den wesentlichen Inhalt des sog. *Erlanger Programms* von *Felix Klein* (1849—1925) aus dem Jahre 1872.

In diesem geistigen Spannungsfeld bewegte sich die geometrische Forschungsarbeit von *Möbius*. Als *Möbius* in den 20er Jahren seine Publikationstätigkeit aufnahm, hatte sich das Interesse der Geometer, insbesondere innerhalb der französischen Schule um *L. Carnot* (1753—1823) und *J. V. Poncelet* (1788—1867), auf die Untersuchung der Transformationen gerichtet, welche den Übergang von einer geometrischen Figur zur anderen vermittelten. Solche „Verwandtschaften" durch Transformationen — z. B. die durch Projektion entstehende Verwandtschaft zwischen Quadrat und Rhombus — waren vielfältig studiert worden; man lernte u. a. Kreis- und Kugelverwandtschaften, affine Verwandtschaften, usw. kennen. Nach und nach trat die Untersuchung der logischen Beziehungen zwischen den Transformationen in den Vordergrund, woraus sich die Klassifizierung der Transformationen als Aufgabe ergab. Das geometrische Lebenswerk von *Möbius* hat man als den Höhepunkt dieser Zielstellung anzusehen, welche, wie die nach *Möbius* sich vollziehende Entwicklung lehren sollte, gleichzeitig wesentliche Elemente der kommenden — gruppentheoretischen — Klassifizierung der Geometrie vorwegnahm: Die Klassifizierung der geometrischen Transformationen war ein entscheidendes Durchgangsstadium auf dem Weg zur Klassifizierung der Geometrie, durch welche schließlich die logische Einheit und Geschlossenheit der Geometrie wieder hergestellt werden konnte.

Die nächste Schaffensperiode von *Möbius* war vorzugsweise der angewandten Mathematik gewidmet. Er behandelte Probleme der Linsensysteme, der Mechanik, der Himmelsmechanik und der Kristallsysteme. Aus seinen Untersuchungen über das Gleichgewicht von Kräften ist das „Lehrbuch der Statik" von 1837 hervorgegangen. Alle diese praktischen Fragestellungen haben *Möbius* insofern zur Fortsetzung seiner Studien über geometrische Verwandtschaften gedrängt, als durch spezifische Fragestellungen die Zusammensetzung oder Hintereinanderausführung geometrisch-physikalischer Transformationen erforderlich wurde.

Mit dem Jahre 1853 begann eine dritte Schaffensperiode, in der die durch Transformationen vermittelten geometrischen Verwandtschaften analytisch untersucht wurden.

Schon in hohem Alter stehend, ging *Möbius* im Jahre 1858 sogar noch zur Betrachtung sog. *Elementarverwandtschaften* über, die noch allgemeiner als Kollineationen sind und die wir heute zum Gegenstandsbereich der Topologie rechnen.

Bescheiden im persönlichen Auftreten und im Stile seiner Publikationen, mit den bedeutendsten Zentren mathematischer Forschung seiner Zeit nur in indirektem Kontakt stehend, hat *August Ferdinand Möbius* zu seinen Lebzeiten nicht jene Anerkennung erfahren können, die seiner Bedeutung angemessen gewesen wäre. Sein Streben nach Klassifikation der Geometrie durch das Studium geometrischer Verwandtschaften verband ihn wohl mit der Hauptentwicklungsrichtung der Geometrie auf das allerengste, dennoch war die Reaktion auf seine wissenschaftlichen Publikationen nur schwach. Erst rückblikkend ist die Bedeutung von *Möbius* erkannt worden. Nur vier Jahre nach *Möbius'* Tod gab *F. Klein* in Zusammenarbeit mit *S. Lie* mit dem sog. *Erlanger Programm* die von *Möbius* vergeblich angestrebte Klassifizierung der Geometrie. Bei der Herausgabe der *Gesammelten Werke von Möbius* in den Jahren 1885—1887 nun erfaßte *Klein*, wie er sich ausdrückte, „den inneren Zusammenhang" des Lebenswerkes von *Möbius* und fand dort der Gedankenführung nach sein eigenes Erlanger Programm vorgezeichnet. Seitdem wird *August Ferdinand* Möbius mit Recht als einer der wegweisenden Geometer des 19. Jahrhunderts gewürdigt, dessen Wirken die Entwicklung der Mathematik des 19. Jahrhunderts wesentlich bestimmt hat.

H. Wußing

Gekürzter Nachdruck: H. Wußing, August Ferdinand Möbius (1790—1868) in Band: Bedeutende Gelehrte in Leipzig, Band 2, herausgegeben von Gerhard Harig, Karl-Marx-Universität Leipzig 1966, S. 1—12.

Berufsbild

Mathematisch-technischer Assistent

Welche Möglichkeiten gibt es für einen jungen Menschen mit abgeschlossener Berufsausbildung, sich auf dem Gebiet Rechentechnik und Datenverarbeitung zu qualifizieren? Auch wenn der Leser im Augenblick noch Schüler ist, wird ihn interessieren, welche Entwicklungsmöglichkeiten er nach erfolgreicher Beendigung der 10. oder 12. Klasse hat. Wir setzen neben dem Abschlußzeugnis der Schule im folgenden voraus, daß der Bewerber eine Facharbeiterausbildung, nach Möglichkeit die Ausbildung des *Facharbeiters für Datenverarbeitung* (siehe Heft 3/68) abgeschlossen und Freude an der Beschäftigung mit mathematischem Stoff hat.
Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so kann er sich um die Zulassung zu einem Sonderstudium bemühen, in dem *Technische Assistenten* auf dem Gebiet der Mathematik ausgebildet werden. Dieses Studium ist 1963 eingerichtet worden* und wird seitdem an verschiedenen Hochschulen durchgeführt. Ziel des Studiums ist es, Mitarbeiter für die Tätigkeit in Rechenzentren, Datenverarbeitungszentren und mathematischen Abteilungen der Industrie und der Wirtschaft auszubilden. Der mathematisch-technische Assistent soll nach abgeschlossener Ausbildung mit typischen Verfahren der praktischen Mathematik arbeiten können, er soll in der Lage sein, elektronische Rechenanlagen zu bedienen und zu programmieren. Was dann in der täglichen Arbeit von dem *mathematisch-technischen Assistenten* verlangt wird, hängt wesentlich von der Struktur des Betriebes ab, in dem er tätig ist, oder von den speziellen Aufgaben des Rechen- oder des Datenverarbeitungszentrums.
Aus der Vielfalt von Einsatzmöglichkeiten sollen einige genannt werden:

- ☐ Mathematische Auswertung von statistischem Material und statistische Urteilsfindung. Das statistische Material kann dabei aus den unterschiedlichsten Gebieten der Wirtschaft oder der Forschung kommen (Auswertung von Versuchsreihen aus der Landwirtschaft, der Medizin, der Technik, dem Handel, der Pädagogik, der Kriminalistik).
- ☐ Herstellung von Programmen für spezielle Typen von Rechenautomaten auf Grund gegebener Formeln.
- ☐ Organisation der Lohnbuchhaltung und Materialbuchhaltung eines Betriebes oder Warenhauses.
- ☐ Grafische Auswertung von Meßergebnissen.
- ☐ Bedienung von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen, Erproben von Programmen.

Wie ist nun zur Zeit die Ausbildung von mathematisch-technischen Assistenten organisiert?
Wer diesen Beruf wählt, sollte sich in einem Rechenzentrum oder der Abteilung eines Betriebes, die mit der Bearbeitung mathematischer Aufgaben betreut ist, anstellen lassen. Mit Zustimmung dieses Betriebes kann er sich um Zulassung zum Studium bewerben. Das Studium dauert zwei Jahre. In dieser Zeit ist der Student neben seinen acht bis zehn Unterrichtsstunden pro Woche weiterhin in dem Betrieb,

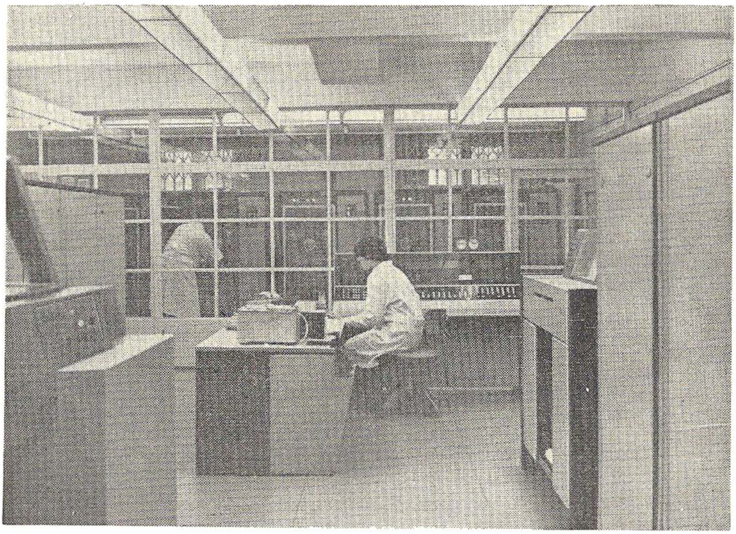
* Gesetzblatt Teil II, Nr. 6 vom 23. 1. 64, Anordnung Nr. 2 vom Dezember 1963.

der ihn einstellte, tätig. Er muß Übungsaufgaben lösen — natürlich auch Klausuren schreiben — und an elektronischen Rechenanlagen praktisch arbeiten. Durch Zwischenprüfungen werden Endnoten in den einzelnen Ausbildungsfächern festgelegt. Am Schluß der Ausbildung ist eine Hausarbeit anzufertigen, deren Thema entweder von der ausbildenden Stelle festgelegt wird oder nach Absprache mit der ausbildenden Stelle von dem Betrieb, in dem der Student arbeitet.

Im mathematischen Teil der Ausbildung wird der Student systematisch in die höhere Mathematik eingeführt — lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Nomographie, mathematische Statistik, Optimierung — und lernt darüber hinaus wichtige Verfahren der praktischen Mathematik kennen. Neben diesem Teil der Ausbildung wird der Student mit der Bedienung und Programmierung von elektronischen Rechenanlagen vertraut gemacht. Hierbei liegt das Schwergewicht auf dem Erlernen sogenannter Programmierungssprachen. Programmierungssprachen sind künstliche Sprachen, die gar nicht gesprochen, sondern nur geschrieben werden, die jedoch ein Automat „versteht".

Zur Ausbildung von mathematisch-technischen Assistenten gehört keine Sprachausbildung. Es ist jedoch jedem Interessierten zu empfehlen, sich mit der englischen oder russischen Sprache intensiv zu beschäftigen, weil die Literatur über neue Entwicklungen auf diesem Gebiet oftmals nur in diesen Sprachen vorliegt.

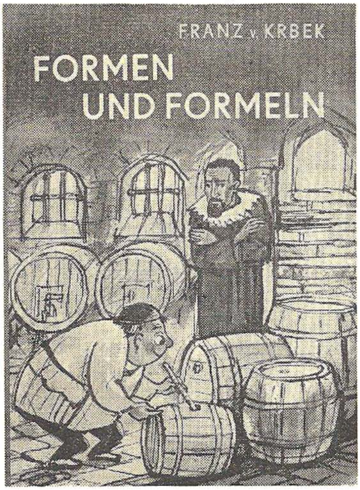
G. Paulin



Am 9. 2. 1968 wurde im Rechenzentrum des Instituts für Datenverarbeitung (idv-Dresden) die elektronische Datenverarbeitungsanlage *Robotron* 300 zur Arbeitsaufnahme übergeben. Im Rahmen der planmäßigen Einsatzvorbereitung für diese Anlage in unserer Volkswirtschaft und zur Schaffung des notwendigen wissenschaftlichen Vorlaufs wurden vom idv — als Zentrum der Anwendungstechnik — wichtige Zuarbeiten geleistet. Eine ihrer Hauptaufgaben besteht in der Schaffung umfassender organisatorischer und programmtechnischer Unterlagen für *Robotron* 300. Unser Bild zeigt einen Blick in das Rechenzentrum. Es ist als Titelfoto der Zeitschrift „Rechentechnik-Datenverarbeitung" 3/68 zu sehen. Wir empfehlen unseren Lesern, welche sich intensiv mit der elektronischen Datenverarbeitung beschäftigen wollen, diese Zeitschrift zum Studium (unter Anleitung Erwachsener).

Formen und Formeln

Eine Buchbesprechung



Bestimmt wißt ihr, liebe junge Freunde der Mathematik, daß wir *Johannes Kepler* eine Reihe fundamentaler Ergebnisse auf dem Gebiet der Mathematik und der Astronomie verdanken. Deshalb ist es nicht verwunderlich, daß das hier zu besprechende Buch mit einer Plauderei über diesen großen Naturwissenschaftler des Mittelalters beginnt. Das nebenstehende Bild zeigt ihn gerade beim Weinkauf für eine Familienfestlichkeit, bei dem er durch das eigenartige Meßverfahren des Küfers dazu angeregt wurde, ein Näherungsverfahren zur Inhaltsberechnung von Fässern zu entwickeln. Diese Formeln befinden sich noch heute in jeder einschlägigen Formelsammlung. Übrigens befindet sich diese Abbildung gleichzeitig auf dem Schutzumschlag eines neuen (3.) Buches von *Franz v. Krbek* mit dem Titel *Formen und Formeln,* das im Frühjahr 1968 bei der B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft in Leipzig, erschienen ist (Preis 8.50 M).

Wer den Autor so gut kennt wie ich, der weiß, welche liebenswert-bescheidene, geistvoll-witzige, aber ebenso scharfsinnig-kritische Mathematikerpersönlichkeit unserer Republik am 12. März 1968 in Greifswald seinen 70. Geburtstag feierte. Bereits bevor der populärwissenschaftlichen Verbreitung mathematischer Kenntnisse die ihr zukommende Bedeutung beigemessen wurde, erschienen von Prof. Dr. *v. Krbek* die beiden Titel *Geometrische Plaudereien* und *Über Zahlen und Überzahlen,* denen nun die *Formen und Formeln* folgten.

Wie es dem Autor dabei erneut gelingt, auch kompliziertere Gedankengänge und Beweisführungen zu vereinfachen, ohne die mathematische Exaktheit zu beeinträchtigen, ist an sich schon lesenswert, ganz zu schweigen von der eigentlichen mathematischen

← Übergabe des Geheimberichtes über den „präsidentenfeindlichen" Fermat an den Diener des Ministers Colbert

→ Durch die vierte Dimension könnte man Geld aus dem verschlossenem Tresor holen.

Substanz der 19 Plaudereien und den historischen Einflechtungen, die zum wirklichen „Begreifen" des Wesens der Mathematik als Triebkraft zur Veränderung von Natur und Gesellschaft beitragen. Für euch nicht weniger interessant ist vielleicht zu erfahren, daß es uns im Kollektiv (Autor, Lektor, Typograph, Hersteller, Illustrator) gelungen ist, die meist recht lustigen, immer mit einem gewissen „Pfiff" gezeichneten 150 Illustrationen teilweise direkt in den laufenden Text mit einzubauen. Dadurch werdet ihr die behandelten Probleme sicherlich leichter verstehen.
Das Inhaltsverzeichnis lautet:
Keplers Hobby; Verfeindete Brüder; Lob der Trägheit; Geisterreich; Naiv oder nicht naiv?; Linie als Regenschirm; Das Gegenteil ist auch richtig; Größe eines Königs; Streckenrechnung; Ein erfinderischer General; Möbius überführt; Halbkreise als Geraden; Makellos; Aussichtsloses Zerlegen; Polygon als Grenze; Netze; Tip für Treffer; Keiner kam hinter seine Schliche; Universallänge; Nachwort; Die Axiome.
Auf 150 Seiten erfahren wir Wissenswertes über die Schweizer Mathematikerfamilie *Bernoulli*, über *Jordan*, *Banach*, *Klein*, *Hilbert*, *Waring*, *Fermat*, *Lebesgue* und viele andere berühmte Mathematiker. Wir erhalten einen „Einblick" in die 4. Dimension, in die Relativitätstheorie, die Mengenlehre und in die nichteuklidischen Geometrien, um nur einige Gebiete zu nennen, aus denen Probleme behandelt werden.

Prof. Franz v. Krbek

Während verschiedene Plaudereien bereits von denjenigen von euch, die erst die 8. Klasse besuchen, ohne Schwierigkeiten verstanden werden können, sprechen andere vor allem die Schüler der 10. und 11. Klassen an. So bietet das Buch (wie auch die beiden anderen des gleichen Autors) im wahrsten Sinne des Wortes für jeden etwas; denn auch Erwachsene werden in ihm sicherlich manches entdecken, was ihnen bislang noch unbekannt war. Deshalb darf ich mich vorbehaltlos der Meinung Prof. *v. Krbeks* anschließen, die er im Nachwort der *Formen und Formeln* darlegt:
Wer die drei Bände — den vorliegenden, die „Geometrischen Plaudereien" und den Band „Über Zahlen und Überzahlen" — verarbeitet hat, der weiß, was die Mathematik soll und kann. Mehr darf er davon nicht erwarten. Möchte er noch mehr wissen, dann hat er sich bereits für die Mathematik entschieden, und es heißt für ihn, systematisch zu studieren. Dazu wünsche ich ihm guten Erfolg!

W. Arnold

Wir gratulieren

Herrn Dr. rer. nat.
Reinhard Hofmann
Karl-Marx-Universität Leipzig
Gutachter von *alpha*
zur Promotion

Herrn Oberlehrer
Klaus Krüger
BBS Forst Bad Doberan
Redaktionsmitglied v. *alpha*
zum Titel
Verdienter Lehrer d. Volkes

Herrn Prof. Dr. paed.
Wolfgang Lange
Institutsdirektor an der TU Dresden
Förderer der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik
zum Titel
Verdienter Lehrer d. Volkes

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Frieder Kuhnert

Direktor des Instituts für Mathematik
Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt

Populärwissenschaftliche Definition des Begriffs „Optimierungsprobleme“

Die Optimierungsprobleme sind ein sehr junger Zweig der Mathematik, denn als eigentliches Geburtsjahr kann man das Jahr 1939 annehmen, in welchem eine Arbeit des sowjetischen Akademiemitgliedes *L. W. Kantorowitsch* veröffentlicht wurde, in der erstmalig eine Optimierungsaufgabe mathematisch exakt formuliert und für sie ein Lösungsverfahren entwickelt wurde. Optimierungsprobleme entstehen vorrangig im Bereich der Ökonomie und lassen sich wie folgt formulieren: Zur Erreichung eines Zieles sind gewöhnlich in Abhängigkeit von gewissen Größen, die zur Erreichung des Zieles beitragen bzw. notwendig sind, verschiedene Wege und Möglichkeiten vorhanden (sehr oft sind es unendlich viele derartiger Möglichkeiten). In vielen Fällen besitzen die einzelnen Möglichkeiten einen unterschiedlichen Wert oder Nutzen für uns, die wir das gesteckte Ziel erreichen wollen. Wir werden dann immer versuchen, den Weg zu gehen bzw. die Möglichkeit auszunutzen, die uns den größtmöglichen Nutzen bringt. Diese Aufgabe ist sicherlich noch einfach, wenn nur zwei oder drei Wege vorhanden sind, doch meist sind es eben unendlich viele. Offensichtlich besteht doch die Aufgabe darin, die zur Erreichung des Zieles notwendigen Größen so zu bestimmen, daß eine Funktion, die den Nutzen zum Ausdruck bringt, ein Maximum annimmt. Folglich sind die Optimierungsprobleme spezielle Extremwertaufgaben, für deren Lösung besondere Verfahren entwickelt wurden.

288 a Vom Ort A zum Ort B sollen 10000 kg einer wichtigen Last mit Flugzeugen des Typs F und H transportiert werden. Ein Flugzeug vom Typ F kann 1000 kg der Last tragen und benötigt für einen Flug von A nach B 3 Mann Bedienungspersonal und 100 Liter Treibstoff, während ein Flugzeug vom Typ H 500 kg der Last tragen kann und 2 Mann Bedienungspersonal und 30 Liter Benzin für eine Reise benötigt.
Im Ort A stehen zum Auftanken nicht mehr als 900 Liter Treibstoff und 35 Mann Bedienungspersonal zur Verfügung (der Treibstoff kann für beide Typen verwendet werden, das Personal ebenfalls).
Die Ausgaben für einen Flug des Flugzeugs vom Typ F betragen 800,— Mark, für den Typ H aber 500,— Mark. Welche Anzahl von Flugzeugen F und H müssen eingesetzt werden, damit minimale Gesamtausgaben entstehen?

288 b Die Mitglieder einer LPG stellen folgende Überlegung an: Wir haben 5 ha Frühkartoffeln bestellt, die im Laufe des Monats August abgeerntet werden müssen. Wenn wir die Kartoffeln in der ersten Dekade des August ernten, so können wir 130 dt/ha ernten und bekommen pro Dezitonne 40,— M. Warten wir allerdings bis zum Ende der zweiten Dekade, so erhöht sich der Ertrag pro Hektar um 25 dt, die Einnahmen pro Dezitonne fallen allerdings um 8,— M. Schließlich steigt der Ertrag in der dritten Dekade um weitere 25 dt pro Hektar, während die Einnahmen gegenüber der zweiten Dekade für eine Dezitonne um 6,— M fallen.
Welche Mengen muß die LPG pro Dekade abernten, damit die Gesamteinnahmen aus den 5 ha maximal werden? Dabei ist zu berücksichtigen, daß auf Grund der Arbeitskräftesituation in jeder Dekade nicht mehr als 500 dt abgeerntet werden können.

288 c Gesucht sind n nichtnegative Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_n$, so daß gilt $x_1 \geqq 1$, $x_1 + x_2 \geqq 2$, $x_1 + x_2 + x_3 \geqq 3, \ldots$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geqq n$$

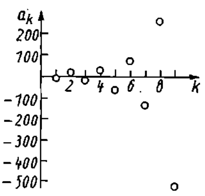
und daß $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + n\,x_n$ minimal wird.

Einige Fakten zur Entwicklung der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

1953 wurde die Hochschule für Maschinenbau in Karl-Marx-Stadt gegründet. Anläßlich ihres zehnjährigen Bestehens erhielt sie den Namen „Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt“. Das Institut für Mathematik begann im Februar 1954 seine Tätigkeit. Am Institut für Mathematik werden Diplom-Mathematiker und Lehrer für Mathematik ausgebildet. Für Diplomanden gibt es zwei Möglichkeiten für das Fachstudium: Mathematische Methoden in der Ökonomie und Numerische Mathematik/Rechentechnik. Die Lehrerstudenten werden auch im Fach Physik ausgebildet. Außerdem wird am Institut für Mathematik die gesamte mathematische Grund- und Spezialausbildung für alle anderen Fachrichtungen der TH durchgeführt. Zur Zeit studieren 164 Studenten mit dem Ziel Diplom-Mathematiker, 180 mit dem Ziel Fachlehrer für Mathematik/Physik und 220 Lehrer-Fernstudenten. 3 Professoren, 3 Dozenten, 15 Assistenten, 27 wissenschaftliche Mitarbeiter, 4 mathematisch-technische Assistenten und 2 Mechaniker sind am Institut für Mathematik tätig. Seit 1962 besteht am Institut ein Rechenzentrum, in dem folgende Automaten vorhanden sind: ZRA 1, Endim 2000 und ODRA 1013. Alle Studenten führen ein Praktikum in diesem Rechenzentrum durch.

Elementare Zahlenfolgen

2. Teil



Ihr habt im vorigen Heft erfahren, was Zahlenfolgen sind, und lerntet einige Beispiele und Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennen. Am Schluß fandet ihr einige Aufgaben. Hier sind die Lösungen. Vergleicht mit euren Ergebnissen!

223 *Die Aussage d) ist falsch,* denn nicht jede Funktion ist eine Folge. Nur Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$ oder $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ natürlicher Zahlen ist, sind Folgen.

224 $f_6 = \{[1; -2]; [2; +4]; [3; -8]; [4; +16]; [5; -32]; [6; +64]; [7; -128]; [8; +256]; [9; -512]\}$.
Die Darstellung der geordneten Paare ist auch in einer Wertetabelle möglich.

225 Durch Formveränderung einiger Glieder entsteht

$$\frac{9}{5}; \frac{4}{3}; \frac{1}{1}; \frac{0}{-1}; \frac{1}{-3}; \frac{4}{-5}; \ldots$$

$$\frac{3^2}{-2\cdot 1+7}; \frac{2^2}{-2\cdot 2+7}; \frac{1^2}{-2\cdot 3+7};$$

$$\frac{0^2}{-2\cdot 4+7}; \frac{1^2}{-2\cdot 5+7}; \frac{2^2}{-2\cdot 6+7}; \ldots$$

$$\frac{(1-4)^2}{-2\cdot \mathbf{1}+7}; \frac{(2-4)^2}{-2\cdot \mathbf{2}+7}; \frac{(3-4)^2}{-2\cdot \mathbf{3}+7};$$

$$\frac{(4-4)^2}{-2\cdot \mathbf{4}+7}; \frac{(5-4)^2}{-2\cdot \mathbf{5}+7}; \frac{(6-4)^2}{-2\cdot \mathbf{6}+7}; \ldots$$

damit $a_k = \dfrac{(k-4)^2}{-2k+7}$ oder

$$a_k = \frac{k^2-8k+16}{-2k+7}.$$

226 Independente (oder analytische) Darstellung $a_k = (-2)^k$ mit $\in \{k\ 1; 2; \ldots; 9\}$
Tabellarische Darstellung:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_k	-2	$+4$	-8	$+16$	-32	$+64$	-128	$+256$	-512

Graphische Darstellung (siehe Abbildung oben: Maßstabveränderung auf der a_k-Achse)
Verbale Darstellung: Endliche Folge der Potenzen zur Basis (-2) mit positivem ganzen Exponenten, aus neun Gliedern bestehend.

227 Die zweite graphische Darstellung kann nicht Darstellung einer Folge sein, weil es nach unserer Definition ein (-1)-tes und ein 0-tes (nulltes) Glied einer Folge nicht gibt. Die Gliednummer k entstammt stets der Menge $\{1; 2; 3; \ldots\}$. Graphische Darstellungen von Folgen verlaufen infolgedessen nur im I. oder (und) IV. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems.

Soweit die Lösungen zu den fünf Aufgaben aus dem vorigen Heft.

Viele Folgen lassen über die bisher genannten Darstellungsarten hinaus eine weitere zu, die sich oft als recht nützlich erweist. Wir meinen die *rekursive* Darstellung (rekursiv, lat. rückbezogen). Bei der rekursiven Darstellung wird das k-te Glied der Zahlenfolge mit Hilfe eines oder mehrerer seiner Vorgänger (vorangehenden Glieder) ausgedrückt.
Beispiel: Die oben in den Lösungen zu den Aufgaben 224 und 226 besprochene Folge f_6 hat die rekursive Darstellung

$$a_k = (-2)\cdot a_{k-1} \text{ für } k > 1 \text{ mit}$$
$$a_1 = -2 \text{ (Anfangsbedingung).}$$

Das heißt: Das Anfangsglied a_1 ist gegeben. Man gewinnt jedes k-te Glied ($k > 1$), indem man das unmittelbar vorangehende mit (-2) multipliziert.
Eine rekursive Darstellung ist nur dann vollständig, wenn die sogenannten Anfangsbedingungen mit angegeben werden. Jede vollständige rekursive Darstellung ist eindeutig.
Manche Folgen, für die eine independente Darstellung kompliziert und schwer angebbar ist, lassen sich relativ leicht in rekursiver Darstellung beschreiben. Das trifft zum Beispiel auf die Folge

$$0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13, \ldots (f_8),$$

die Folge der FIBONACCIschen Zahlen, zu.
Versucht, einen Zusammenhang zwischen den Gliedern dieser Folge zu erfassen, indem ihr irgend drei benachbarte Glieder aufmerksam betrachtet! Vergleicht das dritte Glied jeder Dreiergruppe mit den beiden ersten!

Jetzt habt ihr gefunden, daß sich jeweils das dritte Glied als Summe der beiden voranstehenden Glieder ergibt. Allgemein erhält man das k-te Glied der Folge ($k > 2$), indem man die beiden unmittelbar vorangegangenen Glieder addiert. Die rekursive Darstellung der Folge f_8 lautet also

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \text{ für } k > 2$$

mit den Anfangsbedingungen

$$a_1 = 0 \text{ und } a_2 = 1.$$

Wir haben jetzt alle wesentlichen Darstellungsarten von Zahlenfolgen kennengelernt.

Wenn ihr schon öfters in mathematischen Büchern geblättert oder studiert habt, so wird euch vielleicht aufgefallen sein, an wie vielen Stellen man Zahlenfolgen begegnet. Zahlenfolgen spielen jedoch nicht nur in vielen Bereichen der mathematischen Wissenschaft eine bedeutende Rolle, sondern auch in den Naturwissenschaften und in der Technik. Wir wollen uns jetzt zwei Typen von Zahlenfolgen zuwenden, die bei praktischen Anwendungen besonders häufig auftreten.
Es sind dies die arithmetischen und geometrischen Zahlenfolgen.
Von den bisher verwendeten acht Beispielfolgen sind

$$\begin{aligned} f_1 &= 2; 4; 6; 8; 10; \ldots \\ f_4 &= 1; 4; 9; 16; 25; \ldots \\ f_5 &= 7; 4; 1; -2; -5; -8 \\ \text{und } f_7 &= 2; 4; 6; \ldots; 20 \end{aligned}$$

arithmetische Folgen, dagegen

$$f_2 = 2; 2{,}8; 4; 5{,}6; 8; 11; 16; 22$$

(Folge der Blendenzahlen)

$$\text{und } f_6 = -2; +4; -8; +16; -32; \ldots; -512$$

geometrische Folgen.

Die Folgen f_3 und f_8 sind weder arithmetische noch geometrische Folgen.
Woran erkennen wir arithmetische und geometrische Folgen? Wie unterscheiden sie sich?
Schaut euch f_1 und f_5 einmal genauer an!
Ihr werdet schnell erkennen, daß diese Folgen von Glied zu Glied um den gleichen Wert zu- oder abnehmen. Bei diesen Folgen ist also die Differenz zweier benachbarter Glieder immer gleich, konstant, wie der Mathematiker sagt. Man kann es exakter formulieren: Bedeutet a_k das k-te Glied der Aussagenfolge, so ist die Folge der Differenzen $d_k = a_{k+1} - a_k$ konstant.
Bei der Folge f_1 lautet die Differenzenfolge 2; 2; 2; …, bei f_5 heißt sie −3; −3; −3; … .
Wenn das der Fall ist, wenn also die Differenzenfolge, die 1. Differenzenfolge, konstant ist, dann liegt eine *arithmetische Folge* 1. *Ordnung* vor.
Was sind nun aber arithmetische Folgen 2. und höherer Ordnung? Betrachten wir die Folge $f_4 = 1; 4; 9; 16; 25; \ldots$, bilden die 1. Differenzenfolge 3; 5; 7; 9; … und davon wieder die Differenzenfolge 2; 2; 2; …, so stellen wir fest, daß hier die 2. Differenzenfolge konstant ist. Die Folge der Quadrate der natürlichen Zahlen wird infolgedessen als eine arithmetische Folge 2. Ordnung bezeichnet.
Wir definieren allgemein:

Unter einer *arithmetischen Folge m-ter Ordnung* ($m \geqq 1$, ganz) versteht man eine Folge, deren m-te Differenzenfolge aus lauter gleichen (von Null verschiedenen) Gliedern besteht. Prüft nach, daß die Folge mit dem Bildungsgesetz $a_k = k^3 - 2k + 5$ eine arithmetische Folge 3. Ordnung ist:

Ausgangsfolge:	4; 9; 26; 61; 120; 209; …
1. Differenzenfolge:	5; 17; 35; 59; 89; …
2. Differenzenfolge:	12; 18; 24; 30; …
3. Differenzenfolge:	6; 6; 6; …

Ein solcher Nachweis ist natürlich nicht hinreichend. Es könnte ja sein, daß nur die ersten drei Glieder der 3. Differenzenfolge konstant sind, die weiteren aber nicht. Man kann jedoch an der independenten Darstellung $a_k = k^3 - 2k + 5$ eindeutig erkennen, daß hier tatsächlich eine arithmetische Folge 3. Ordnung vorliegt. Allgemein läßt sich nämlich beweisen, daß jede ganzrationale Funktion m-ten Grades

$$\begin{aligned} a_k = b_m k^m + b_{m-1} k^{m-1} + \\ + b_{m-2} k^{m-2} + \cdots + b_2 k^2 + \\ + b_1 k + b_0 \end{aligned}$$

mit $b_m \neq 0$, alle $b_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ reell und $k \in \{1; 2; \ldots\}$

eine unendliche arithm. Folge m-ter Ordnung ist. Daraus folgt ohne weiteres, daß jede lineare Funktion $a_k = dk + b$ mit $d \neq 0$ und $k \in \{1; 2; \ldots\}$ eine unendliche arithmetische Folge 1. Ordnung darstellt. Dabei ist d die Differenz der Folge.
Wir haben so mit $a_k = dk + b$ $(d \neq 0)$ eine independente Darstellung der arithmetischen Folge 1. Ordnung gefunden. Für Anwendungen in der Praxis ist es oft vorteilhaft, das Anfangsglied a_1 in eine solche allgemein independente Darstellung mit eingehen zu lassen. Dann erhält man die wichtige Beziehung

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d \quad (d \neq 0),$$

die ihr aus der vorangehenden Gleichung selbst herleiten könnt. Macht euch den Sinn dieser Formel auch dadurch klar, daß ihr für k die Werte 1; 2; 3; 4 einsetzt!

Die rekursive Darstellung für arithmetische Folgen 1. Ordnung lautet einfach

$a_k = a_{k-1} + d$ $(d \neq 0)$, denn man gelangt zum k-ten Glied, indem man zum unmittelbaren Vorgänger die Differenz d addiert.

Die Bezeichnung „arithmetische Folge“ rührt übrigens daher, daß man jedes Glied a_k $(k > 1)$ einer unendlichen arithmetischen Folge 1. Ordnung als „arithmetisches Mittel“ der beiden Nachbarglieder erhält.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Prüft diesen Sachverhalt an einigen Gliedern der Folgen f_1 und f_5 nach!

Soweit für heute! Im nächsten Heft werdet Ihr Näheres über geometrische Folgen und deren Anwendung lesen.

Aufgaben

289 a) Wie lautet die rekursive Darstellung der Folge

$f_5 = 7; 4; 1; -2; -5; -8.$

b) Eine Folge sei gegeben durch ihre rekursive Darstellung

$a_k = \frac{2}{3} a_{k-1}^2 \cdot a_{k-2}$ für $k > 2$ mit

$a_1 = +2$ und $a_2 = -\frac{3}{2}$.

Ermittle die Glieder a_3, a_4 und a_5 dieser Folge.

290 Ein einfaches Bildungsgesetz für die Folge

$8; 4; 2; 2; 1; 2; \frac{1}{2}; 4; \frac{1}{8}; 32; \ldots$ (f_9)

ist gesucht.

291 a) Von einer arithmetischen Folge 1. Ordnung sind zwei Glieder gegeben: $a_{23} = 0$ und $a_{89} = 15$.

Bestimme das 100. Glied und das Anfangsglied dieser Folge! b) Sind von den vier Variablen a_1, d, k, a_k stets jeweils drei uneingeschränkt wählbar, so daß mittels $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$ die vierte berechnet werden kann?

292 Von einer arithmetischen Folge 3. Ordnung sind gegeben:

$a_1 = -60$; $a_2 = -25$;

$d^{(3)} = 5$ (konstante Differenz der dritten Differenzenfolge)

$d_1^{(2)} = 7$ (1. Glied der zweiten Differenzenfolge).

Wie heißen die Glieder a_3, a_4 und a_5 der Ausgangsfolge?

293 Messungen in der Erdkruste ergaben, daß die Temperatur zum Erdinnern hin je 100 m Tiefe um etwa 3 °C zunimmt, wobei in unseren Breiten eine Temperatur von 10 °C in 25 m Tiefe zugrunde zu legen ist.

Welche Temperatur herrscht in 2325 m Tiefe? In welcher Tiefe werden 100 °C erreicht?

H. Lohse

Unsere Verpflichtung zu Ehren des 19. Jahrestages der Gründung der DDR: Mit hohen mathematischen Leistungen stärken wir unsere sozialistische Republik.

Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur

Im Filmtheater sind Randplätze und Plätze der vordersten Reihe beim Zuschauer unbeliebt, weil man von diesen Stellen aus das auf der Leinwand erscheinende Bild verzerrt und deshalb wenig wirklichkeitsgetreu sieht. Begehrter sind hingegen Mittelplätze, da man von dort aus fast senkrecht auf die Bildwand schaut und so einen weniger entstellten Eindruck von den dargestellten Objekten und der Handlung gewinnt. Die Netzhaut des Auges und die Filmwand liegen in diesem Fall annähernd parallel, so daß der Abbildungsvorgang in einer ähnlichen Verkleinerung besteht.

Projiziert man nun ein ebenes Gebilde durch Parallelprojektion normal (senkrecht) auf eine Bildebene, dann wird es im allgemeinen nicht in seiner wahren Gestalt abgebildet. Wir wollen beispielsweise an einem Dreieck untersuchen, unter welchen Voraussetzungen es sich bei *Normalprojektion* auf eine Bildebene in wahrer Gestalt, d. h. unter Wahrung der Größen sämtlicher Winkel und Strecken abbildet. In Heft 6/1967 hatten wir festgehalten, daß sich eine Strecke $\overline{AB}$ genau dann bei Normalprojektion auf eine Bildebene in wahrer Größe abbildet, wenn die Strecke $\overline{AB}$ parallel zu dieser Ebene liegt. Diese Forderung müßte nun an alle drei Dreieckseiten gestellt werden. Bilden sich alle drei Seiten in wahrer Größe ab, so gilt dies nach dem ersten Kongruenzsatz auch für die drei Winkel des Dreiecks. Da ein Dreieck bei nicht ausgearteter Lage seiner Eckpunkte stets eine Ebene festlegt, können wir zusammenfassend festhalten: Eine ebene Figur bildet sich bei Normalprojektion auf eine Bildebene genau dann in wahrer Gestalt (längen- und winkeltreu) ab, wenn die von dieser Figur bestimmte Ebene parallel zur Bildebene liegt.

Frage: Behält der hier ausgesprochene Satz seine volle Gültigkeit, wenn darin das Wort Normalprojektion durch Parallelprojektion ersetzt wird?

Nach diesen Vorbetrachtungen wollen wir uns die Aufgabe stellen, die wahre Gestalt eines Dreiecks ABC zu bestimmen, das uns durch Grund- und Aufriß vorgegeben ist.

Die zugeordneten Normalrisse des Dreiecks ABC stellen Normalprojektionen eines ebenen geometrischen Gebildes dar (Bild 1).

Gewiß erscheint das hier vorgegebene Dreieck in keinem der beiden Risse in seiner wahren Gestalt. Sollte das Dreieck z. B. im Grundriß originalgetreu erscheinen, dann müßten die Aufrisse der Punkte A, B und C auf einer Parallelen zur Rißachse liegen. Entsprechendes gilt für den Aufriß. Gelingt es uns aber, das Dreieck ABC durch Drehung in ein Dreieck $A_0B_0C_0$ derart überzuführen, daß die Ebene des gedrehten Dreiecks parallel zu einer der Bildebenen liegt, dann wird das Dreieck ABC in der betreffenden Bildebene in seiner wahren Gestalt erscheinen. Es erhebt sich nur die Frage, wie die Drehachse zu legen und um welchen Winkel zu drehen ist, um den gewünschten Effekt zu erzielen.

Soll das Dreieck ABC etwa parallel zur Bildebene π_1 gedreht werden, dann ist eine (zweckmäßig in $\varepsilon = (ABC)$ liegende) Gerade als Drehachse zu verwenden, die parallel zu π_1 liegt. Man muß also das Dreieck um eine *erste Hauptlinie* drehen. Der Drehwinkel ist dabei so zu wählen, daß die Aufrisse der drei Eckpunkte des gedrehten Dreiecks auf einer Parallelen zur Rißachse, nämlich dem Aufriß der Drehachse, liegen. Natürlich kann man das Dreieck ABC auch in eine der Bildebenen selbst hineindrehen. Dann ist eine der beiden Spuren von $\varepsilon = (ABC)$ als Drehachse zu nehmen. Soll z. B. das

Dreieck ABC in die Bildebene π_1 gedreht werden, wird man die erste Spur e_1 als Drehachse verwenden.

Wir wollen uns nun an Beispielen mit der konstruktiven Durchführung vertraut machen. In Bild 2 ist die vom Dreieck ABC aufgespannte Ebene erst- und zweitprojizierend. Die wahre Gestalt des Dreiecks ABC soll durch Drehung der Ebene $\varepsilon = (ABC)$ in die Bildebene π_1 gewonnen werden. Hierfür ist die Spurgerade e_1 als Drehachse zu wählen. Nun ist zu beachten, daß die Drehbewegung durch zwei Bilder beschrieben wird. Im Grundriß erscheinen die von den Punkten A, B, C durchlaufenen Kreisbahnen als Geraden, die parallel zur Rißachse liegen. Der Aufriß von e_1 stellt einen Punkt dar. Da wir beim Aufriß in Richtung der Drehachse schauen, bilden sich die von den Punkten A, B, C beschriebenen Viertelkreise hier in ihrer wahren Gestalt ab. Wir bezeichnen die Eckpunkte des in dieser Weise umgelegten Dreiecks mit A_{01}, B_{01}, C_{01}. Die Aufrisse dieser Punkte liegen offenbar in den Schnittpunkten der betreffenden Kreisbögen mit der Rißachse. Ihre Grundrisse findet man, indem man die Ordnungslinien durch A''_{01}, B''_{01}, C''_{01} mit den entsprechenden Parallelen zur Rißachse durch A', B', C' zum Schnitt bringt. Das Dreieck $A_{01}B_{01}C_{01}$ liegt in π_1 und liefert uns die wahre Gestalt des Dreiecks ABC.

In völlig analoger Weise hätte man auch die wahre Gestalt des Dreiecks ABC durch Umlegung um die zweite Spur nach π_2 bestimmen können.

In Bild 3 liegt das Dreieck ABC in einer erstprojizierenden Ebene. Das Umlegen der Ebene ε um e_2 nach π_2 ist jetzt vergleichbar mit dem Schließen einer weit geöffneten Tür, wobei der Türrahmen in der Bildebene π_2 liegt. Bei diesem Vorgang bilden sich die Bahnen der Punkte A, B, C im Aufriß als Parallelen zur Rißachse und im Grundriß als Kreisbögen ab, deren gemeinsamer Mittelpunkt in e'_2 liegt. In Fortführung des anschaulichen Vergleiches sei daran erinnert, daß manche Türen auf dem Fußboden kreisförmige Schleifspuren hinterlassen, deren Mittelpunkte auf der Drehachse der Tür liegen.

Die Schnittpunkte der Kreisbögen mit der Rißachse ergeben den Grundriß der Eckpunkte des umgelegten Dreiecks $A_{02}B_{02}C_{02}$. Den Aufriß dieses Dreiecks erhält man, indem die Ordnungslinien durch $A'_{02}B'_{02}C'_{02}$ mit den entsprechenden Parallelen zur Rißachse durch A'', B'' und C'' zum Schnitt gebracht werden. Das in π_2 liegende Dreieck $A_{02}B_{02}C_{02}$ zeigt die wahre Gestalt des Dreiecks ABC. Nach Durchführung der Konstruktion in der oben beschriebenen Weise lassen sich noch Zeichenkontrollen einfügen. Bringt man die Dreieckseiten $A''B''$ und $A_{02}B_{02}$ durch Verlängern miteinander zum Schnitt, so muß bei genauer Konstruktion dieser Schnittpunkt auf der zweiten Spur e_2 von ε liegen. Dieser Schnittpunkt ist ja ein Punkt der Drehachse, der bei der Bewegung festbleibt. Entsprechendes gilt für die beiden anderen Dreieckseiten und ihre Umlegungen. Frage: Wie hätte man B_{02} und C_{02} ohne Zuhilfenahme des Grundrisses konstruieren können, wenn außer A'', B'' und C'' noch A_{02} gegeben wäre?

Eine zweite Möglichkeit, die wahre Gestalt des Dreiecks ABC zu bestimmen, besteht darin, die Ebene $\varepsilon = (ABC)$ um e_1 in die erste Bildebene umzulegen. Dies geschieht, indem man auf e_1 in A', B' und C' Senkrechte errichtet. Trägt man auf diesen Senkrechten die ersten Tafelabstände der Punkte A, B, C in der richtigen Zuordnung ab, erhält man das gesuchte Bild des Dreiecks ABC.

Abschließend soll noch ein Fall betrachtet werden, wo die Ebene $\varepsilon = (ABC)$ weder erst- noch zweitprojizierend ist. Wir nehmen die Ebene als gleichwendig an und drehen sie um eine erste Hauptlinie parallel zu π_1. Ferner sind wir bestrebt, mit möglichst wenig Hilfslinien auszukommen. Dazu legen wir die Drehachse durch jenen Eckpunkt des Dreiecks, der weder höchster noch tiefster Punkt des Dreiecks ist, also durch A. (Bild 4)

Bei Drehung von ε um h_1 als Drehachse beschreiben die Punkte B und C Kreisbahnen mit M_B bzw. M_C als Mittelpunkt. Die Ebenen dieser Kreisbahnen stehen senkrecht auf π_1; d. h. die Grundrisse von B und C verschieben sich auf Senkrechten zu h'_1 durch M'_B und M'_C. Um B_{01} und C_{01} zu bestimmen, sind nun noch die Radien r_B und r_C der Drehkreise von B bzw. C zu ermitteln.

Zur Bestimmung von r_B betrachten wir das Dreieck BQM_B. Dieses Dreieck hat einen rechten Winkel bei Q. Die Hypotenuse $\overline{BM_B}$ des Dreiecks ist offenbar gleich r_B. Es kommt also nur darauf an, die wahre Länge von r_B zu bestimmen und diese von M_B' aus auf der Senkrechten zu h_1' abzutragen. Die wahren Längen der Katheten $\overline{BQ}$ und $\overline{QM_B}$ lassen sich dem Auf- bzw. Grundriß unmittelbar entnehmen. In einer Nebenkonstruktion könnte man mit den Stücken $\overline{BQ}$ und $\overline{QM_B}$ als Katheten ein rechtwinkeliges Dreieck zeichnen, dessen Hypotenuse dann der Länge des gesuchten Drehradius r_B entspricht. Diese Nebenkonstruktion läßt sich jedoch einsparen, indem man die Strecke $\overline{BQ} = h_B$ mit dem Zirkel dem Aufriß entnimmt und von M_B' auf h_1' abträgt. Dies liefert den Punkt R'. Nach obigen Erläuterungen gilt $\overline{Q'R'} = \overline{B'R'} = r_B$. Trägt man also diese Strecke von M_B' aus auf der Senkrechten zu h_1' ab, erhält man B_{01}'. Der wesentliche Inhalt der Konstruktion besteht in der Übertragung zweier Strecken, nämlich der Strecken $\overline{Q''B''} = h_B$ und $\overline{B'R'}$, mit Hilfe eines Zirkels. Deshalb spricht man hierbei auch von dem „*Verfahren des doppelten Zirkelschlages*".

Um abschließend noch C_{01}' zu finden, soll jetzt mit minimalem Konstruktionsaufwand gearbeitet werden. Wir entnehmen die Strecke h_c dem Aufriß und tragen diese von M_c' aus auf h_1' ab. Dies liefert den Punkt S'. Nun nehmen wir die Strecke $\overline{S'C'}$ in den Zirkel und tragen diese von M_c' aus entsprechend dem gewählten Drehsinn auf der Senkrechten zu h_1' durch M_c' ab. Der Endpunkt ist die gesuchte Umlegung C_{01}' von C bezüglich h_1. A bleibt bei dieser Drehung fest, d. h. es gilt $A' = A_{01}'$.

Mit $A_{01}' B_{01}' C_{01}'$ ist die wahre Gestalt des Dreiecks ABC gefunden. Der hier dargelegten Aufgabenstellung kommt eine hohe praktische, aber auch grundlegende theoretische Bedeutung zu.

Im Werkzeug- und Maschinenbau ist oftmals der Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden aus einer in Grund- und Aufriß vorliegenden Werkstattzeichnung zu bestimmen. Zeichnerisch läßt sich diese Aufgabe mit den vorgeführten Mitteln lösen. In der Technik sind vielfach ebenflächig begrenzte Körper mit Metallbeschlägen zu versehen. Um rationell arbeiten zu können, muß vorher die wahre Gestalt der Beschläge konstruktiv ermittelt werden. In der Landesvermessung bildet zur kartographischen Erfassung eines Geländes ein Netz von Dreiecken den ersten Rahmen für die Aufstellung einer Karte. Da die Eckpunkte der Dreiecke (Trigonometrische Punkte) nicht alle in gleicher Höhe über dem Meeresspiegel liegen, kann man niemals sämtliche Dreiecke eines Netzes in einer Zeichenebene ähnlich verkleinert abbilden. Auch hier ist beim Übergang von den vermessenen Dreiecken zur Darstellung auf einem ebenen Zeichenblatt eine Unterscheidung der wahren Gestalt des Dreiecks von seiner Projektion in eine Bildebene notwendig.

Für theoretische Untersuchungen geben diese Betrachtungen einen wichtigen Ausgangspunkt. Zwischen der Normalprojektion einer ebenen Figur und ihrer Umlegung in die betreffende Bildebene besteht eine geometrische Verwandtschaft, die man als „*Perspektive Affinität*" bezeichnet. Die Spur der Ebene in der Bildebene bezeichnet man als *Affinitätsachse*. Alle Punkte dieser Geraden gehen bei der Abbildung in sich selbst über. Es sind die sogenannten *Fixpunkte* der Abbildung. Zwei Punkte, die durch die Abbildung einander zugeordnet sind, legen die *Affinitätsrichtung fest.* Beschränken wir uns auf die Betrachtung von Normalprojektion und Umlegung einer ebenen Figur, so liegt die Affinitätsrichtung senkrecht zur Affinitätsachse.

Beweise die folgenden Eigenschaften der hier vorliegenden affinen Abbildung durch anschauliche räumliche Überlegungen:

1. Eine affine Abbildung ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der Affinitätsachse und eines Paares einander zugeordneter Punkte.
2. Auf einer Geraden allgemeiner Lage bleiben bei der Abbildung die Streckenverhältnisse erhalten.
3. Parallele Geraden gehen bei der Abbildung in parallele Geraden über.

Aufgaben

□Man bestimme von folgender in Grund- und Aufriß vorgegebenen ebenen Figur die wahre Gestalt durch geeignete Wahl einer Drehachse und wiederholte Anwendung des doppelten Zirkelschlages. (Ebene ist wechselwendig) (Bild 5)

□Von einer ebenen Figur ist der Normalriß vollständig und die Umlegung in die zugehörige Bildebene durch einen Punkt E_{01} vorgegeben. Man vervollständige die Umlegung der ebenen Figur durch Anwendung von allgemeinen Eigenschaften der hier vorliegenden Abbildung. (Bild 6)

□Man zeichne Grund- und Aufriß eines Dreiecks ABC etwa nach der Art von Bild 1. Von diesem Dreieck bestimme man den Mittelpunkt I des Inkreises (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) und den Mittelpunkt U des Umkreises (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten).

Bemerkung: Da bei Normalprojektion zweier sich im Raum schneidender Geraden eine Winkelhalbierende i. a. nicht wieder in eine Winkelhalbierende übergeht, ist die Bestimmung von I nur durch Bestimmung der wahren Gestalt des Dreiecks ABC möglich. Entsprechend ist auch U nur durch Zurückgehen auf die wahre Dreiecksgestalt bestimmbar, da ein rechter Winkel bei Normalprojektion i. a. nicht wieder in einen solchen übergeht. Was läßt sich über die Schwerpunktsbestimmung an einem Dreieck sagen, das in zugeordneten Normalrissen vorgegeben ist?

E. Schröder

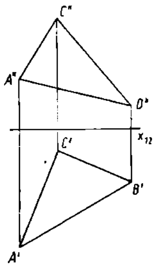


Bild 1

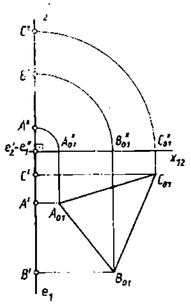


Bild 2

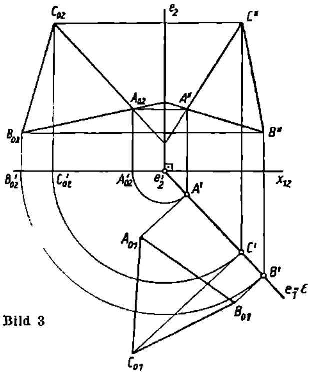


Bild 3

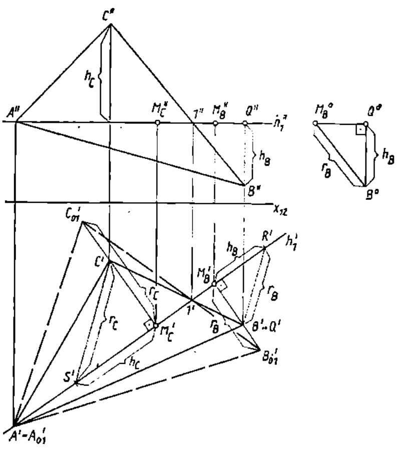


Bild 4

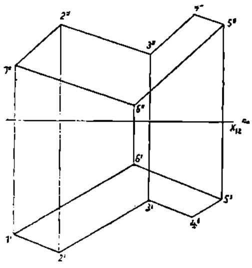


Bild 5

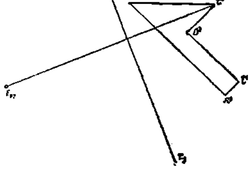


Bild 6

Eine Knobelgeschichte

2. Teil

Vier Zirkelteilnehmer treffen sich. Um die gestellte Aufgabe leichter lösen zu können, übernehmen drei von ihnen die Namen und Rollen von *Schwarz, Unsinn* und *Weiß*. Der vierte, den wir Franz nennen wollen, spielt den Fragenden.

Die erste treffende Feststellung macht nach geraumer Zeit *Weiß*: „Wenn ich nach meinem oder euren Zunamen gefragt werde, so muß ich verabredungsgemäß die Wahrheit sagen."

Als nächster bemerkt scharfsinnig *Unsinn*: „Ein Fragender, der unsere Zunamen fixieren will, soll aus meinen Antworten nicht schließen können, daß ich nicht *Weiß* heiße. *Deshalb werde ich wie Weiß von sich von mir behaupten, ich würde Weiß heißen und meine beiden Mitspieler nenne ich in meinen Antworten Schwarz und Unsinn.*" Nach einer kurzen Pause ergänzt er: „Diese *Forderung* ist zwar nicht notwendig. Aber vielleicht gelingt es, unter Einhaltung dieser scharfen Forderung brauchbare Antworten zu finden." Alsbald erhebt *Schwarz* die gleiche Forderung für seine Antworten wie *Unsinn*. Um das bereits Erkannte besser überblicken zu können, stellen sie zunächst eine Tabelle auf, in die sie vorerst die Antworten von Weiß eintragen.

Antwort von	Schwarz	über Unsinn	Weiß
Schwarz			
Unsinn			
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Sie wissen noch, daß gemäß der von *Unsinn* und *Schwarz* erhobenen Forderung die beiden Felder, die noch unbeschriftet auf der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonale des Antwortschemas liegen, mit „Weiß" zu beschriften sind.

Durch Betrachten der entsprechend ergänzten Tabelle erkennt jetzt *Schwarz* weiter: „Gemäß der gestellten Forderung darf ich von *Unsinn* nur behaupten, er heiße *Unsinn* oder *Schwarz*. Da ich jedoch andererseits zum Lügen verpflichtet bin, darf ich *Unsinn* in meinen Antworten nicht seinen wirklichen Namen geben. Also muß ich von *Unsinn* behaupten, er heiße *Schwarz*". Wieder wird ein Antwortfeld der Tabelle ausgefüllt. *Schwarz* argumentiert weiter: „Von *Weiß* muß ich nunmehr gemäß gestellter Forderung behaupten, er habe den von mir noch nicht in Antworten genannten Namen *Unsinn*". Nur noch zwei Felder sind nunmehr in der Tabelle leer:

Antwort von	Schwarz	über Unsinn	Weiß
Schwarz	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Unsinn		„Weiß"	
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Nach längerem Nachdenken kommt *Unsinn* zu folgendem Ergebnis: „Gemäß der auch von mir erhobenen Forderung muß ich von *Schwarz* behaupten, daß er *Schwarz* oder *Unsinn* heißt. Nenne ich jedoch *Schwarz Schwarz* so muß ich *Weiß Unsinn* nennen. Bei der zweiten Antwortmöglichkeit nenne ich *Schwarz Unsinn* und *Weiß Schwarz*." Da zunächst keine beider Antwortmöglichkeiten auszuschließen ist, werden sie beide in die Tabellen eingetragen:

Antwort von	Schwarz	über Unsinn	Weiß
Schwarz	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Unsinn	1. „Schwarz" 2. „Unsinn"	„Weiß"	1. „Unsinn" 2. „Schwarz"
Weiß	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Alle betrachten die Tabelle und prüfen, ob beide Antwortmöglichkeiten von Unsinn möglich sind oder nicht.

Franz, der die Rolle des Fragenden spielt, schlägt vor, vorübergehend am Tabelleneingang die Namen *Schwarz, Unsinn* und *Weiß* durch Symbole P, Q und R zu ersetzen, denn ein Fragender kennt ja die Zunamen der drei nicht:

Antwort von	P	über Q	R
P	„Weiß"	„Schwarz"	„Unsinn"
Q	1. „Schwarz" 2. „Unsinn"	„Weiß"	1. „Unsinn" 2. „Schwarz"
R	„Schwarz"	„Unsinn"	„Weiß"

Franz erkennt nunmehr, daß die erste Antwortmöglichkeit von Q ausscheidet: „Bei der ersten Antwortmöglichkeit von Q erhalte ich von zwei Befragten, nämlich von P und Q, die gleiche Auskunft „Unsinn“ über R. Hieraus schließe ich, daß P oder Q den Namen *Unsinn* trägt.“ — „Ebenso erhalte ich bei dieser Antwortmöglichkeit von Q und R über P die gleiche Auskunft „Schwarz“. Demnach muß Q oder R den Namen *Unsinn* tragen.“ — „Aus beiden Feststellungen folgt weiterhin, daß Q den Namen *Unsinn* trägt. Da ein solcher Schluß aus den gegebenen Antworten nicht gezogen werden darf, scheidet die erste Antwortmöglichkeit von Q alias *Unsinn* aus.“

An dem verbliebenen Antwortschema können die Freunde keine Unzulänglichkeit mehr erkennen. Sie glauben deshalb, eine Lösung gefunden zu haben und gehen so vorbereitet zum nächsten Zirkel.

Im nächsten Zirkel dürfen unsere vier Knobelfreunde ihre Tabelle mit Antwortschema an die Tafel schreiben und begründen. Der Zirkelleiter stellt fest: Es muß noch der Nachweis geführt werden, daß das von unseren vier Mathematikfreunden gefundene Antwortschema tatsächlich Lösung ist. Zu diesem Zweck bittet er neun Zirkelmitglieder, sich in drei Dreiergruppen für die anderen sichtbar aufzustellen. Diesen neun Schülern hängt er vorbereitete Schilder um, die die Anfangsbuchstaben der Vor- und Zunamen unserer Knobelaufgabe tragen.

Diese neun Schüler erhalten den Auftrag, gemäß dem in der Tabelle stehenden Antwortschema und gemäß der ihnen umgehängten Schilder auf die gestellten Fragen zu antworten.

Die erste Frage des Zirkelleiters lautet: „Annette, welchen Zunamen trägt Beate?“ Nacheinander antworten die drei Annettes der drei Dreiergruppen mit der gleichen Antwort „Schwarz“. Auch auf die Frage „Christa, welches ist dein Nachname?“ und alle anderen zulässigen Fragen erhält der Zirkelleiter von den Befragten jeweils die gleichen Antworten. (Der Leser stelle eine Tabelle auf, in die er neben den Fragen die Antworten der drei Dreiergruppen aufnimmt.)

Hieraus ziehen die Zirkelteilnehmer den Schluß, daß ein Fragender die drei Dreiergruppen durch die erhaltenen Antworten nicht voneinander unterscheiden kann. Da insgesamt bei den betrachteten Dreiergruppen zu jedem zulässigen Vornamen jeder zulässige Nachname gehören kann, kann ein Fragender bei diesem Antwortschema die Zuordnung keines einzigen Nachnamens vornehmen.

Durch die folgenden Hinweise regt der Zirkelleiter zur weiteren Beschäftigung mit dieser Knobelaufgabe an: „Neben den drei von uns betrachteten Zuordnungen der Vor- und Zunamen gibt es noch drei weitere. Kann ein Fragender diese drei weiteren Zuordnungen voneinander unterscheiden? Kann er diese drei neuen Zuordnungen von den von uns betrachteten unterscheiden?“ — „Die von uns betrachtete Knobelaufgabe besitzt mehrere Lösungen. Wer findet ein weiteres zulässiges Antwortschema?“

Der Zirkelleiter spricht weiter: „Bei unserem Frage- und Antwortspiel können die Zunamen der drei Mädchen sofort festgelegt werden, falls andere Fragen zugelassen sind. Löst bis zum nächsten Male die folgende Knobelaufgabe!“

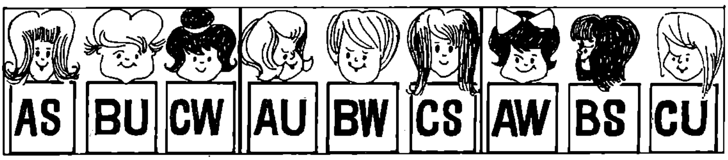
3. a″) wie a

b″) wie b

c″) Mit welchen Fragen und den erhaltenen Antworten kann ein Fragender die Zuordnung von Vor- und Zunamen der drei Mädchen festlegen?

W. Träger

1. Dreiergruppe 2. Dreiergruppe 3. Dreiergruppe



VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade (6./7. 12. 1967)

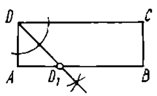
5 1. Berechnung der Menge des reinen weißen Papiers: Wegen $336 \cdot 700 = 235200$ und 235200 g $= 235{,}2$ kg können aus 336 kg Altpapier höchstens 235,2 kg weißes Papier hergestellt werden. Berechnung der Menge von Schreibheften: Wegen
$235200 : 30 = 7840$ können aus 336 kg Altpapier höchstens 7840 Schreibhefte hergestellt werden.

2. Es gibt genau drei zweistellige Zahlen, bei denen die Anzahl der Einer dreimal so groß ist wie die der Zehner, nämlich 13, 26, 39. Von ihnen erfüllt nur 26 die Bedingungen der Aufgabe; denn

$$31 - 13 = 18; \quad 62 - 26 = 36;$$
$$93 - 39 = 54.$$

daher ist $z = 26$.

3. Da der Winkel $\sphericalangle\, CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle\, D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels. Man halbiert daher den Winkel $\sphericalangle\, CDA$. Die Winkelhalbierende schneidet wegen $\overline{AD_1} = \overline{AD} < \overline{AB}$ die Seite AB im Punkt D_1. Das Dreieck $\triangle\, DAD_1$ ist das gesuchte.

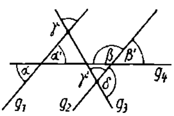


Zweiter Lösungsweg: Da der Winkel $\sphericalangle\, CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\sphericalangle\, D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels. Jede Diagonale eines Quadrats halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Man konstruiert nun das Quadrat DAD_1D_2, indem man von A auf AB die Strecke AD_1 mit $\overline{AD} = \overline{AD_1}$ und von D auf DC die Strecke DD_2 mit $\overline{AD} = \overline{DD_2}$ abträgt, und verbindet D mit D_1. Dann ist DD_1 Diagonale des Quadrats DAD_1D_2 und der $\sphericalangle\, D_1DA$ ist 45° groß. Das Dreieck $\triangle\, DAD_1$ ist daher das gesuchte.

4. Da die Anzahl aller Teilnehmer 36 ist, ist die Anzahl der richtigen Lösungen insgesamt laut Aufgabe 72 und die Anzahl der Schüler mit genau 2 richtigen Lösungen $72 : 3 = 24$. Da die Anzahl der Schüler in Zeile a) gleich der in Zeile e) und gleich der Hälfte der Anzahlen in Zeile b) bzw. in d) sein soll, sind die restlichen 12 Schüler wie folgt zu verteilen, und die Tabelle kann danach vervollständigt werden:

	I Anzahl der richtigen Lös. pro Schüler	II Anzahl der Schüler	III Anzahl der richtigen Lös. insgesamt
a)	0	2	0
b)	1	4	4
c)	2	24	48
d)	3	4	12
e)	4	2	8
f)			
Gesamtzahlen		36	72

1. Es gilt mit den in der Abb. gewählten Bezeichnungen $\alpha = \alpha'$ (als Scheitelwinkelpaar) 6
$\beta + \beta' = 180°$ (als Nebenwinkelpaar),
mithin $\beta' = 180° - \beta$; $\quad \beta' = 180° - 130°$;
$\beta' = 50°$;
also $\beta' = \alpha$.



Daraus folgt: $g_1 \parallel g_2$. Nun ist ferner:
$\gamma = \gamma'$ (als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen) und $\gamma' + \delta = 180°$ (als Nebenwinkelpaar),
also $\delta = 180° - \gamma'$, $\quad \delta = 180° - 70°$,
$\underline{\underline{\delta = 110°}}$.

2. Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muß der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das k. g. V. von 210 und 330:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$
$$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$
$$\text{k. g. V.:} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$$

Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muß, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher 2310 cm = 23,10 m lang.

Probe: $2310:210 = 11$; $2310:330 = 7$

Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

3. Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe,

(1) $J > G$ (2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$.

Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition

$2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$.

Hieraus und aus (2) folgt $R - J = G - E > 0$ also $J < R$. Daher gilt $R > J > G > E$.
Die gesuchte Reihenfolge ist: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

4. Schüler mit Preisen oder Anerkennungsschreiben:

8 Sch. $\triangleq \frac{2}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe.

Daraus folgt:

4 Sch. $\triangleq \frac{1}{9}$ der Teilnehmer an der 2. Stufe

und

36 Sch. $\triangleq \frac{9}{9}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 2. Stufe).

Laut Aufgabe gilt weiterhin:

36 Sch. $\triangleq \frac{3}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe,

also

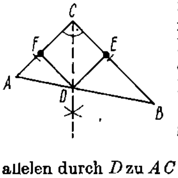
12 Sch. $\triangleq \frac{1}{40}$ der Teilnehmer an der 1. Stufe

und

480 Sch. $\triangleq \frac{40}{40}$ (das sind alle Teilnehmer dieser Schule an der 1. Stufe).

Genau 480 Schüler dieser Schule beteiligten sich an der 1. Stufe der Mathematikolympiade.

7 1. Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats.



Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

2. a, b, c seien natürliche Zahlen, die alle größer Null und kleiner oder gleich 9 sind. Dann heißen die dreistellige Zahl und die sich durch Umstellung ihrer Ziffern ergebenden Zahlen: $100a + 10b + c$ $\quad 100a + 10c + b$
$100b + 10a + c$ $\quad 100b + 10c + a$
$100c + 10a + b$ $\quad 100c + 10b + a$.

Die Summe s ist dann:

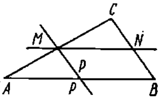
$$s = 100\,(2a + 2b + 2c) + 10\,(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c).$$

Da $2a + 2b + 2c = 2Q$ ist, erhält man
$s = 100 \cdot 2Q + 10 \cdot 2Q + 1 \cdot 2Q$
$s = 2Q\,(100 + 10 + 1)$
$s = 2Q \cdot 111$.

Beispiel:

534	$2Q = 24$
543	$24 \cdot 111 = 2664$
354	
345	
453	
435	
2664	

3. Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Daß diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so:



Durch p wird die Ebene, in der $\triangle ABC$ liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB. Dann gilt:

(1) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle MNC \cong \sphericalangle APM$
$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle CMN$
(als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)

(2) $\triangle APM \cong \triangle MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww).
Daraus folgt: $\overline{MP} = \overline{CN}$.

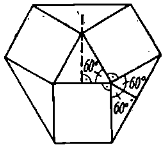
(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion).

Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

4. Die Anzahl der Schüler pro Autobus muß ein gemeinsamer Teiler > 1 von 319 und 232 sein.
Wegen $319 = 11 \cdot 29$ und $232 = 8 \cdot 29$ ist die Primzahl 29 der einzige gemeinsame Teiler > 1 von 319 und 232; denn 11 und 8 sind teilerfremd. Daher fuhren in jedem Bus genau 29 Schüler.

1. Das Sechseck setzt sich zusammen aus: einem gleichseitigen Dreieck (Flächeninhalt A_3), 3 Quadraten (Flächeninhaltssumme $3A_4$ und 3 stumpfwinkligen Dreiecken, deren 8

Flächeninhaltssumme sich folgendermaßen berechnen läßt: Fällt man in diesen Dreiecken die Lote (Höhen) auf die Sechseckseite, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, und



diese sind kongruent zu denjenigen Dreiecken, die durch Konstruktion einer Höhe des gleichseitigen Dreiecks entstehen (*sww*; der rechte Winkel liegt der größten Seite gegenüber). Die Flächeninhaltssumme der 3 stumpfwinkligen Dreiecke beträgt daher $3A_3$. Folglich ist $A_6 = 4A_3 + 3A_4$.
Damit sind ganze Zahlen $n = 4$ und $m = 3$ so, wie in der Aufgabe gefordert war, angegeben.

2. (I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1′) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r_1 + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.*
(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1′) und (2). Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. (Der Beweis folgt aus (I).)

3. Die Augenzahl $3n + 4$ muß durch n teilbar sein.
$\frac{3n+4}{n} = 3 + \frac{4}{n}$ liefert nur für n als Teiler von 4, also nur für $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$ ganzzahlige Ergebnisse. $n = 1$ scheidet aus, da keine 7 gewürfelt werden kann. Für $n = 2$ erhält man 10 Augen, d. h., es wurde zweimal eine 5 gewürfelt. Für $n = 4$ ergeben sich 16 Augen, d. h., es wurde viermal eine 4 gewürfelt. Es wurde also entweder mit 2 oder mit 4 Würfeln gewürfelt.

* Anmerkung: Falls ein Schüler auch zwei zusammenfallende Kreise als einander berührend bezeichnet und hierdurch zu dem Ergebnis kommt, auch k_1 als vierte Lösung anzugeben, so kann eine solche Angabe (bei sonst richtiger Formulierung) als richtig anerkannt werden, da die Aufgabenstellung diese Deutung nicht ausdrücklich ausschließt.

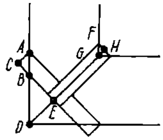
4. Wir bezeichnen die größte der n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit g. Sie lasse bei der Division durch n den Rest r mit $0 \leqq r \leqq n - 1$, es gelte also $g = q \cdot n + r$ (q ganzzahlig). Daher gehört die durch n teilbare Zahl $g - r$ zu den n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen.

1. Die gesuchten Paare lassen sich in 2 Grup- **9**
pen aufteilen:
1. *Gruppe:* Die Summe der Einer der beiden zweistelligen Zahlen beträgt 1, die Summe ihrer Zehner beträgt 11. Bezeichnet man die Ziffern der Zahlen eines Paares, das dieser Bedingung entspricht, der Reihe nach mit $(a;\ b)$, $(c;\ d)$, dann erfüllen auch die Paare $(a;\ d)$, $(c;\ b)$, $(c;\ b)$, $(a;\ d)$ und $(c;\ d)$, $(a;\ b)$ die gleiche Bedingung. Wegen $0 + 1 = 1$ und $9 + 2 = 11$; $8 + 3 = 11$; $7 + 4 = 11$; $6 + 5 = 11$ gibt es genau 16 derartige Paare.
2. *Gruppe:* Die Summe der Einer beträgt 11, die der Zehner 10. Das ergibt wegen $9 + 1 = 10$; $8 + 2 = 10$; $7 + 3 = 10$; $6 + 4 = 10$ und $5 + 5 = 10$ aus dem oben genannten Grunde genau 72 derartige Paare.
Insgesamt erhält man mithin genau 88 Zahlenpaare, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

2. Wegen $(a \cdot b) \cdot (a:b) = a^2$ muß das Produkt zweier der Zahlen 3; 10; 5; 18; 75 das Quadrat einer rationalen Zahl sein. Aus $18{,}75 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2}$ folgt, daß unter den gegebenen Zahlen $3 \cdot 18{,}75$ diese Bedingung erfüllt. Alle anderen Produkte ergeben keine Quadrate rationaler Zahlen. Daher gibt es höchstens die folgenden Möglichkeiten:
(I) $ab = 18{,}75$; $\quad a:b = 3$.
Hieraus folgt $a^2 = (ab) \cdot (a:b) = 56{,}25$, also entweder ($A$) $a = 7{,}5$; $b = \frac{18{,}75}{a} = 2{,}5$, und alle Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt, oder
(B) $a = -7{,}5$; $b = -2{,}5$. Dieser Fall scheidet aus, da z. B. $a + b = -10$ mit keiner der Zahlen 3; 10; 5; 18,75 übereinstimmt.
(II) $ab = 3$; $a:b = 18{,}75$.
Hieraus folgt $a^2 = 56{,}25$, also entweder
(A) $a = 7{,}5$; $b = \frac{3}{a} = 0{,}4$ (Wegen $a + b = 7{,}9$ scheidet dieser Fall aus.) oder
(B) $a = -7{,}5$; $b = -0{,}4$ (Wegen $a + b = -7{,}9$ scheidet dieser Fall aus.). Also genügen $a = 7{,}5$ und $b = 2{,}5$ und nur diese den angegebenen Bedingungen.

3. Zu a) Die Entfernung $\overline{DG} = d$ der beiden Grabenecken beträgt als Diagonale in einem Quadrat, dessen Seitenlänge a ist, $d = a\sqrt{2}$. Die maximal durch die beiden Bretter über-

brückbare Strecke in Richtung der Diagonalen hat die Länge $\frac{a}{2}+a$. Wegen $\frac{3}{2}a>\sqrt{2a}$ $(1{,}5a>1{,}415a)$ ist die Lösung richtig.



Zu b) Aus den gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ABC$, $\triangle BDE$ und $\triangle FGH$ erhält man

$$\overline{CA}=\overline{CB}=b,\quad \overline{DE}=\overline{BE}=\frac{a}{2}-b,$$
$$\overline{GH}=\overline{FH}=\frac{b}{2},\text{ also } \overline{EG}=a-\frac{b}{2},$$
$$a\sqrt{2}=\overline{DG}=\frac{a}{2}-b+a-\frac{b}{2},$$
$$\frac{3}{2}b=a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\text{ somit}$$
$$b:a=1-\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

4. Es seien 0_0 und 0_K die Oberflächeninhalte des Oktaeders bzw. der Kugel, a die Kantenlänge des Oktaeders und r die Länge des Radius der Kugel. Dann gilt

$r=\frac{a}{2}\sqrt{2}$ (als halbe Diagonale des Quadrates $ABCD$)

$$0_K=4\pi r^2=4\pi\frac{a^2}{2}=2\pi a^2$$

$0_0=8\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=2a^2\sqrt{3}$. Also gilt:

$$0_K:0_0=2\pi a^2:2a^2\sqrt{3}=\pi:\sqrt{3}$$

10 1. Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllbar, dann sind $F, U, E, N, Z, W, I, S, B$ sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

(1) $S\neq 0$ und $S=1$, da $U+Z<20$ ist und $F+1\leq 10$ sein muß.

(2) $F=9$, da $F+1\geqq 10$ sein muß. Daraus folgt

(3) $F+1=10$ und daraus wiederum

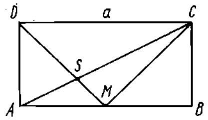
(4) $I=0$.

Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt, daß

$F+I=N$, also wegen (4)
$F=N$ ist.

Da nach Voraussetzung $F\neq N$ sein muß, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d. h., die Aufgabe hat keine Lösung.

2. Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks $ABCD$ mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks I $(ABCD)=a\cdot b$. Ferner gilt $\triangle ASM\sim\triangle DSC$, da $\sphericalangle ASM\cong\sphericalangle DSC$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle SAM\cong\sphericalangle DCS$ (Wechselwinkel) sind.



Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt $\overline{AM}:\overline{CD}=1:2$.

Ferner ist $I(\triangle AMC)=\frac{1}{4}a\cdot b$, und wegen $\overline{SM}:\overline{SD}=1:2$ (Strahlensatz) gilt

$I(\triangle AMS)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{3}=\frac{1}{12}a\cdot b.$

Somit erhält man $I(\triangle SMC)=I(\triangle AMC)-I(\triangle AMS)$

$=\frac{1}{4}a\cdot b-\frac{1}{12}a\cdot b=\frac{1}{6}a\cdot b.$

Mithin gilt $I(ABCD):I(\triangle SMC)=6:1$.

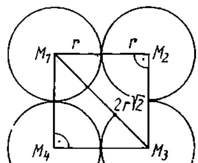
3. Für $n\geqq 2$ gilt: $2^{2^n}=2^{4\cdot 2^{n-2}}=16^{2^{n-2}}$

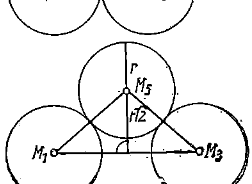
Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Falle $n\geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n}+1$ demzufolge die 7.

4. Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat (siehe Abb.) hat die Seitenlänge $2r$ und die Diagonalenlänge $2r\sqrt{2}$. Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale M_1M_3 enthaltender Schnitt ergibt folgendes Bild (siehe Abb.):

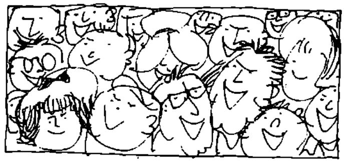
Da das Dreieck $\triangle M_1M_3M_5$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen $\overline{M_1M_3}=2r\sqrt{2}$, $\overline{M_1M_5}=\overline{M_3M_5}=2r$ hat, ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von MS auf M_1M_3 hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$. Der gesuchte Abstand d beträgt daher

$d=r+r\sqrt{2}+r=r(2+\sqrt{2})$.





In freien Stunden
alpha heiter



Stilblüten (Bezirksolympiade 1968)

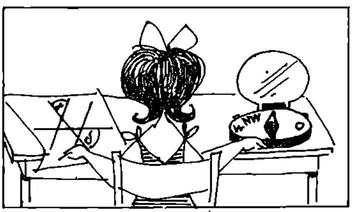
- ... *aus diesem Grunde kann x nur ein knappes Viertel von sich selber sein.*
- ... *a kann höchsten so groß bzw. so klein wie b sein.*
- ... *Wir betrachten ein Dreieck, das einen Innenwinkel enthält.*
- ... *Wir betrachten nun die eingeknickten Punkte* ... (Aufg. 4, Klasse 12).
- ... Bemerkung eines Teilnehmers der Klasse 10 zu Aufgabe 3, die er nicht lösen konnte: *Monika war eben schlauer als ich.*
- Nach einer Umformung schreibt eine Schülerin:

  ... *die 3,5 sind die* $\frac{6}{4}$ *a von oben rechts.*
- Eine Schülerin stellt fest, daß die Aufgabe nicht lösbar ist und schreibt dazu folgendes: *Nach langem und mühevollem Probieren habe ich festgestellt, daß es keine Lösung gibt.**

  * *Bemerkung: Ich habe beim Nachrechnen einen Fehler bemerkt und widerrufe hiermit obige Aussage!*
- Bei der Kreisolympiade in Klasse 6, Aufgabe 1:

  ... *der Winkel nordwestlich davon.*

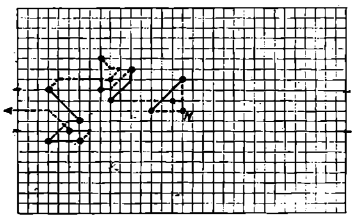
G. Kleinfeld, Leipzig



Football (siehe Heft 5/67)

Unser Leser Ing. M. Rickenstorf, Erfurt, hat beim Spiel *Football* (Heft 5/1967) eine „Lücke“ in der Spielregel festgestellt. Sein 13jähriger Sohn hat ihm dabei geholfen.
Herr R. stellt richtig fest, daß der Spieler, der zuerst zu einem „6er“-Zug kommt, bei richtiger Fortsetzung gewinnen muß. Um das Spiel interessanter zu gestalten, schlägt Herr R. vor, folgenden Zusatz aufzunehmen: „Kann der Gegner nach diesen 6 Zügen wieder nicht weiterspielen, so darf der am Zug befindliche Spieler weitere 6 Züge machen, dann ist aber der Gegner auf jeden Fall wieder am Zuge, selbst wenn er die oben genannten Einschränkungen verletzen muß.“
Wir danken Herrn R. für seinen Hinweis und wünschen weiterhin viel Spaß bei *alpha*-heiter.

Da das Spiel überall großen Anklang fand, geben wir nochmals Text und Beispielskizze wieder:

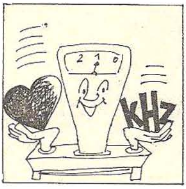


Günstige Spielfeldgröße: 32 Kästchen lang, 20 Kästchen breit. Jeder Spieler muß 3 Züge machen (ein Zug ist entweder eine Seitenlänge eines Kästchens oder eine Kästchendiagonale). Begonnen wird in der Mitte des Spielfeldes (M). Die Feldbegrenzung darf nicht berührt werden. Bereits gezogene Linien dürfen im Normalfall weder berührt noch gekreuzt werden. Gelingt es einem Spieler, an einem Gitterpunkt zu enden, von dem aus der Gegner, ohne die Regel zu verletzen, nicht weiterspielen kann, darf er 6 Züge machen. Hierbei dürfen schon vorhandene Linien berührt oder gekreuzt werden. Sieger ist, wer die Torlinie seines Gegners überschreitet. (Berühren zählt nicht als Tor). Verwendet verschiedene Farben! Die Abbildung zeigt einen Sieg des Spielers, der mit gestrichelter Linie spielte.

Drei Schüler unterhalten sich:

A: Wieviel Hertz sind 1 Kilohertz?
B: 1 Kilohertz sind 1000 Hertz.
C: 1 Kilo Herz sind 2 Pfund Fleisch.

K. Maske, Berlin

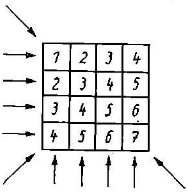


Magisches Quadrat

Aufgabe: In den 11 Pfeilrichtungen sind die jeweiligen vier Zahlen in der gegebenen Reihenfolge so durch mathematische Zeichen zu verbinden, daß jede Reihe, Spalte und Diagonale denselben Wert A ergibt. Versuche es für:

$$A = \{21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 32, 36\}.$$

Ing. H. Decker, Köln



Buntes Kleid für jede Schachtel!

Eine weitverbreitete Freizeitbeschäftigung ist das Briefmarkensammeln. Es wird mit viel Eifer, Ausdauer und Sachkenntnis in aller Welt von jung und alt betrieben und setzte bald darauf ein, als vor 125 Jahren die britische Postverwaltung die erste Briefmarke der Welt herausgegeben hatte. Der Wunsch, bestimmte Erzeugnisse zu sammeln, bezieht sich auch auf die Etiketten von Zündholzschachteln. Diejenigen, die damit einen Teil ihrer Freizeit gestalten, nennen sich Phillumenisten. Der Ausdruck ist aus dem Griechischen und Lateinischen abgeleitet: „philos“ heißt zu deutsch „Freund“ und „lumen“ bedeutet „Licht“. Die Phillumenie ist seltener als die Philatelie, sie wird aber in der Welt von einigen Millionen Sammeleifrigen betrieben. Ihr Sammelobjekt kann für sich in Anspruch nehmen, älter zu sein als die erste Briefmarke. Bunte Zündholzschachteletiketten — 17 cm² große Aufkleber — gab es schon fast zehn Jahre vor der Herausgabe der ersten Briefmarke.

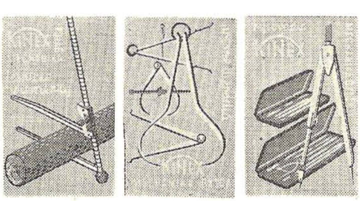
Auch dieses Steckenpferd, Etiketten der Zündholzschachteln zu sammeln, ist in die Literatur eingegangen. Der fortschrittliche französische Schriftsteller *Anatole France* — er erhielt 1921 den Friedens-Nobel-Preis — hat in seinem Roman „Professor Bonnards Schuld“ (1881) den Fürsten Dimitri Trepow beschrieben, der durch die Welt reiste, um Etiketten seltener Herkunft zu erhalten.

Das Kleid der Zündholzschachteln, ihr Etikett, wandelt sich sehr oft. Man schätzt, daß in der Sowjetunion jährlich etwa 2000 Motive verschiedenster Art für Etiketten gestaltet werden. In Frankreich findet man Sprichwörter, Trachten und Landschaften; in den Niederlanden Rätsel; in Schweden Märchen usw. Auch die Motive für Zündholzschachteln aus unserer Produktion sind sehr vielseitig. Sie vermitteln oft in einfacher Form Wissen, machen auf gesellschaftliche Ereignisse aufmerksam, regen zu nutzbringender Tätigkeit an, sollen Unfällen vorbeugen helfen oder dem Brandschutz dienen. Wenn man bedenkt, daß das Konsum-Zündwarenwerk Riesa in 27 Länder aller Erdteile exportiert, kann man sich vorstellen, daß die Phillumenisten ihre Sammlung mit vielen interessanten Exemplaren vervollständigen können.

(aus: Kurt Gaede: Nur ein Zündholz; Volk und Wissen, Volkseigener Verlag Berlin 1965, Nr. 031854 -1, 1,— M, Schüler ab Kl. 5)

Mathematikfachlehrer *Günther König*, Schalkau/Thür., ein eifriger Sammler, sandte uns Etiketten, die aus der CSSR stammen:

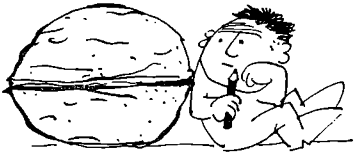
1. u. 2: Zerstört sie nicht! Schützt die geometrischen Meßzeichen! Grundlage für alle Landkarten
3 Bandmaße



4 Meßkluppe 5 Meßgeräte 6 Reißzeuge

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

letzter Einsendetermin 4. November 1968

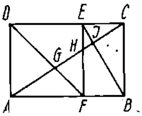


5 **261** Eine Strecke $\overline{AD}$ von 168 m Länge wurde in drei Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ so unterteilt, daß die Strecke $\overline{BC}$ dreimal so lang, die Strecke $\overline{CD}$ dagegen viermal so lang wie die Strecke $\overline{AB}$ ist. Ermittle die Längen der Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$!

Martina Schöpf, Leipzig, 24. Oberschule, Kl. 7

262 Fritz hatte aus der Kinderbücherei ein Buch entliehen. Anfangs las er täglich genau 12 Seiten; nach 8 Tagen hatte er die Hälfte des Buches gelesen. Um die Leihfrist einzuhalten, mußte er vom neunten Tage an täglich vier Seiten des Buches mehr lesen. Für wieviel Tage war das Buch an Fritz ausgeliehen worden?

263 Wir stellen euch eine Aufgabe aus der Mathematik-Olympiade des Jahres 1962 vor:
a) Wieviel Dreiecke sind in dem abgebildeten Rechteck zu finden?
b) Schreibe alle Dreiecke in der folgenden Art auf, z. B. $\triangle ABC, \ldots, \triangle EJC$.



c) Unterstreiche alle Dreiecke, die rechtwinklig sind!
Für die Zeichnung gilt: $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$.

W(5)264 Frau Lehmann wird von einer Bekannten nach dem Lebensalter ihrer drei Kinder gefragt. Hierauf antwortet sie scherzhaft: „Wenn man die Zahlen, die das Lebensalter meiner Kinder in vollen Zahlen angeben, addiert, so erhält man als Summe meine Hausnummer. Wenn man hingegen diese Zahlen miteinander multipliziert, so erhält man als Produkt 24.“ Die Bekannte, die selbstverständlich die Hausnummer, die eine Primzahl ist, kennt, nennt nach kurzem Überlegen das richtige Lebensalter jedes Kindes. Wie alt sind die Kinder von Frau Lehmann?

Erwin Hellmuth, Magdeburg, Clara-Zetkin-Oberschule, Kl. 9M

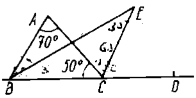
W(5)265 Zwischen den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 sind unter Beachtung dieser angegebenen Reihenfolge in beliebiger Weise Zeichen für die vier Grundrechenoperationen oder auch Klammern so zu setzen, daß man als jeweiliges Ergebnis folgende gegebene Zahlen erhält:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Beispiel für das Ergebnis 0:
$1 + 3 \cdot 5 - (7 + 9) = 0$.

266 Ein Tourist legte am ersten Tag die 6
Hälfte und am zweiten Tag ein Drittel der Länge des geplanten Wanderweges zurück. Am zweiten Tag hatte der Tourist 12 Kilometer weniger zurückgelegt als am ersten. Wieviel Kilometer Wanderweg schaffte der Tourist jeweils am ersten und zweiten Tag? Wieviel Kilometer verbleiben noch für den dritten Wandertag? **Prof. Prinits, Tartu, UdSSR**

267 In der nachstehenden Zeichnung liegen die Punkte B, C und D auf einer Geraden; die Gerade BE halbiert den Winkel ABC, die Gerade CE halbiert den Winkel ACD. Die Größe des Winkels BEC ist in Winkelgraden zu berechnen.



H. Büchel, Mathematiklehrer, Zanzibar

268 Steffen findet in einer Kiste fünf Vorhängeschlösser; die zugehörigen fünf Schlüssel sind durcheinander geraten. Wieviel Schließversuche muß Steffen machen, um in jedem Falle mit Sicherheit für jedes der fünf Schlösser den passenden Schlüssel herauszufinden? Wir wissen, daß sich mit jedem Schlüssel nur eines der Schlösser öffnen läßt.

W(6)269 Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner eines echten Bruches beträgt 7. Vergrößert man den Zähler um 1 und vermindert man gleichzeitig den Nenner um 3, so beträgt der Wert des Bruches 4. Wie heißt dieser Bruch?

W(6)270 Gegeben sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen a, $a + 1$, $a + 2$.
a) Zeige, daß unabhängig von der Belegung der Variablen a niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Welche Primzahlen sind bestimmt Teiler einer dieser drei Zahlen?

7 **271** Am 120 m hohen Staudamm des Wasserkraftwerkes von Krasnojarsk am Jenissei wird ein Stahlbecken auf Rädern gebaut, damit Binnenschiffe bis zu 2000 t Wasserverdrängung den Staudamm überwinden können. Das Stahlbecken hat die Form eines offenen Quaders, die Seiten der Grundfläche sind 110 m und 25 m lang.
a) Wie hoch steht das Wasser im Becken, wenn es mit 3500 t Wasser gefüllt ist?
b) Auf wieviel Meter Höhe steigt das Wasser im Becken, wenn außerdem noch ein Schiff von 2000 t Wasserverdrängung aufgenommen wird? Dr. R. Lüders, Berlin

272 Ein Güterzug legte in acht Stunden eine Fahrstrecke von 243 km zurück. Der Zug fuhr zunächst eine bestimmte Teilstrecke mit der Durchschnittsgeschwindigkeit von $27\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, den Rest der Fahrstrecke dann mit der Durchschnittgeschwindigkeit von $36 \cdot \mathrm{km/h^{-1}}$. Wieviel Stunden Fahrzeit entfallen auf die beiden Teilstrecken?

273 Es sind alle rationalen Zahlen m anzugeben, für die die Gleichung $m(x + 2) + 3m - 7 = 2(x + 3) + m^2 + m - 18$ eine Lösung in x hat.

W(7)274 Das Produkt dreier natürlicher Zahlen beträgt 30, die Summe dieser Zahlen ist durch 4 teilbar. Welches sind diese drei Zahlen?
Zusatz: Wie ändert sich die Lösungsmenge dieser Aufgabe durch die zusätzliche Bedingung, daß die kleinste der drei Zahlen Teiler der beiden anderen ist?

W(7)275 Von einem Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind der Winkel $\alpha = 75°$, der Winkel $\beta = 60°$ und die Abstände $m = 35\,\mathrm{mm}$ und $n = 25\,\mathrm{mm}$ des Schnittpunktes S der Diagonalen von den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Vierecks gegeben. Das Viereck $ABCD$ ist zu konstruieren.

Aufgaben von Dozent L. M. Lopowok

(Leiter des Lehrstuhls für Elementarmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts am Pädagogischen Institut Lugansk, UdSSR).

Wir freuen uns, daß wir in diesem Heft eine Reihe von Aufgaben veröffentlichen können, die uns der durch zahlreiche Publikationen zur Elementarmathematik und Methodik des Mathematikunterrichts bekannte Dozent L. M. Lopowok zugesandt hat. Es handelt sich vor allem um sogenannte *Kryptogramme*, bei denen die Sternchen bzw. Buchstaben durch Ziffern zu ersetzen sind, so daß richtig gelöste Rechenaufgaben entstehen. Neu ist bei den vorliegenden Aufgaben, daß nicht nur im dekadischen Positionssystem, sondern auch in anderen Positionssystemen gerechnet wird. **8**

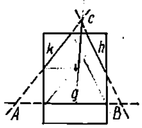
276 In den folgenden Aufgaben ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, zu ersetzen, so daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben (im dekadischen System) entstehen. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen kann.

```
a)  * * * · * 8 *        b)  * * * · * 1 *
    -------------            -------------
          * * * *                  * * 1
          * * *                  * 2 *
      * * * *                * * 0 *
    -------------            -------------
      * * * * * 5            * * * * 5 *
```

Begründe den Lösungsweg! Doz. L. M. Lopowok

W(8)277 Wasja, Kolja, Petja und Stepa, Schüler der 4., 5., 6. und 7. Klasse, gingen Pilze sammeln. Der Schüler der 6. Klasse fand keinen einzigen Steinpilz, aber der Schüler der 4. Klasse und Petja fanden jeder 8 Steinpilze. Wasja und der Schüler der 5. Klasse fanden viele Rotkappen, Kolja leistete ihnen dabei Gesellschaft. Drei Schüler, nämlich der Schüler der 7. Klasse, der Schüler der 6. Klasse und Kolja, lachten über Stepa, der einen Fliegenpilz gesammelt hatte. Wie heißen die Schüler der 4., 5., 6. bzw. 7. Klasse? Doz. L. M. Lopowok

W(8)278 Unsere Figur stellt die Umrisse eines Zeichenblattes dar, in das drei Geraden g, h und k, die paarweise verschiedene Richtung haben, eingezeichnet sind. Die Schnittpunkte A, B und C der Geraden liegen außerhalb des Zeichenblattes. Es ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, deren Endpunkte unzugänglich sind, zu konstruieren; dabei ist die Konstruktion nur auf dem gegebenen Zeichenblatt auszuführen.



Dr. G. Hesse, Radebeul

279 Jemand behauptet, daß die Summe aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Quadrat stets eine gerade Zahl ist. Ist diese Behauptung richtig? Die Antwort ist zu begründen. **9**
StR G. Schulze, Herzberg

W(9)280 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, für die die Ungleichung

$$\frac{2x-3}{3x+7} > 0$$

erfüllt ist.

StR G. Schulze, Herzberg

W(9)281 In den folgenden Aufgaben ist jedes Sternchen durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, so daß richtig gelöste Multiplikationsaufgaben (im dekadischem System) entstehen. Dabei ist zu beachten, daß am Anfang einer Zahl nicht die Ziffer 0 stehen kann. (Von den beiden nun folgenden Aufgaben braucht nur *eine* eingesandt werden, d. Red.)

a)
```
* * * · * * 7
-------------
        * 0 *
    * * * *
    * * 0
-------------
  * * * * * *
```

b)
```
* * * * · * 7 * *
-----------------
          5 * * *
        * 5 * *
    * * * 5 *
    * * * 5
-----------------
    4 * * 2 * * *
```

Begründe den Lösungsweg! Doz. L. W. Lopowok

10 **W(10/12)282** Wladimirow, Koslow, Petrow und Stepanow sind Mitglieder je genau einer der Sportgemeinschaften *Avantgarde*, *Dynamo*, *Lokomotive* und *Spartak*. Jeder von ihnen betreibt aktiv genau eine der folgenden Sportarten: Schach, Schwimmen, Tennis, Fußball. Es ist ferner folgendes bekannt:

a) Das Mitglied von *Spartak* ist Schachmeister, aber Petrow kann nicht Schach spielen.

b) Während das Mitglied von *Dynamo* auch gern segelt, betreiben der Tennisspieler und Wladimirow nicht den Segelsport.

c) Der Fußballspieler und Petrow wohnen in demselben Haus, Koslow aber wohnt in einer anderen Straße.

d) Der Schachspieler und der Tennisspieler sind alte Freunde des Mitglieds von *Avantgarde*.

e) Koslow und das Mitglied von *Dynamo* sind gleichaltrig, sie sind älter als Petrow.

f) Der Fußballspieler ist nicht mit dem Mitglied von *Dynamo* verwandt.

Welcher Sportgemeinschaft gehört jeder der vier Sportler an, und welchen Sport betreibt er aktiv?

Unter der Darstellung einer Zahl z im *dekadischen* Positionssystem verstehen wir die uns gewohnte Darstellung
$z = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$, wo die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 9$ sind; z. B. $z = 10^4 \cdot 7 + 10^3 \cdot 2 + 10^2 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 6 = (72516)_{10}$; meistens läßt man die Klammern und den Index 10 weg und schreibt $z = 72516$.

Unter der Darstellung einer Zahl z im *6-adischen* Positionssystem verstehen wir die Darstellung
$z = 6^n a_n + 6^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 6^2 a_2 + 6a_1 + a_0 = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_6$, wo die a_i natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 5$ sind; z. B. $z = 6^3 \cdot 4 + 6^2 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 1 = (4251)_6$; wegen $z = 216 \cdot 4 + 36 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 1 = 967$ lautet die Darstellung dieser Zahl z im dekadischen Positionssystem $(967)_{10}$ oder kurz 967.

Bei der *Addition* im 6-adischen Positionssystem rechnen wir wie folgt und lassen dabei die Klammern mit dem Index 6 wieder weg:

```
  4251
+ 1043
------
  5334
```

denn im 6-adischen Positionssystem ist $1 + 3 = 4$, $5 + 4 = 13$, $2 + 1 = 3$, $4 + 1 = 5$.

Zum Abschluß noch ein Beispiel aus dem *8-adischen* Positionssystem:
$z = 8^3 \cdot 2 + 8^2 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 5 = (2315)_8$;

```
  2315
+ 2315
------
  4632
```

Nun wünschen wir euch viel Erfolg bei der Lösung der Aufgaben.

W(10/12)283 In den folgenden Aufgaben soll jeder Buchstabe durch eine Grundziffer ersetzt werden, so daß in dem jeweiligen Positionssystem richtig gelöste Additionsaufgaben entstehen. Dabei ist die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern eineindeutig, d. h., gleiche Buchstaben in der jeweiligen Aufgabe entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern. Die Ziffer 0 darf nicht am Anfang einer Zahl stehen. (Es braucht von den nun folgenden vier W-Aufgaben nur *eine* eingesandt zu werden, d. Red.)

a) Im *dekadischen* Positionssystem sei
```
  W O C H E
+ W O C H E
+ W O C H E
+ W O C H E
-----------
  M O N A T
```

b) Im *6-adischen* Positionssystem sei
```
  Z W E I
+ Z W E I
---------
  V I E R
```

c) Im *7-adischen* Positionssystem sei
```
  F Ü N F
+ F Ü N F
---------
  Z E H N
```

d) Im *8-adischen* Positionssystem sei
```
  D R E I
+ D R E I
+ D R E I
---------
  N E U N
```

Begründe den Lösungsweg!

Doz. L. M. Lopowok

284 Für die folgenden Personen sollen verschlüsselte Visitenkarten geschrieben werden, so daß in dem jeweiligen Positionssystem die Summe der Vornamen den Nachnamen ergibt. Dabei ist die Zuordnung zwischen den Buchstaben und Ziffern wieder eineindeutig d. h., gleichen Buchstaben in der jeweiligen Aufgabe entsprechen gleichen Ziffern, verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

a) Im dekadischen Positionssystem
```
    A N N A
  L U I S A
-----------
N E I R U T
```

b) Im 7-adischen Positionssystem
```
  K U R T
  K A R L
---------
T R A N K
```

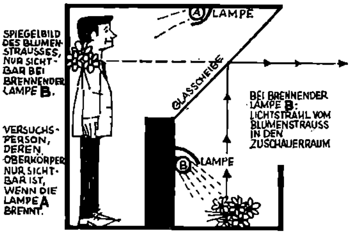
c) Im 8-adischen Positionssystem
```
    K A R L
  G E O R G
-----------
  L O K E R
```

Doz. L. W. Lopowok

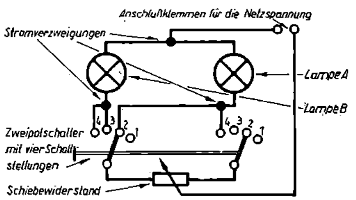
Lösungen

Hinter die Kulissen geschaut ...

Das unter dieser Überschrift in alpha 1/68 beschriebene Verwandlungskunststück beruht auf dem Reflexionsgesetz an einer ebenen spiegelnden Fläche, also an einem ebenen Spiegel, einer ruhenden Wasseroberfläche, einer Glasplatte u. s. f.: Die Verbindungsstrecke eines punktförmigen Gegenstandes und seines scheinbaren Bildes steht auf der reflektierenden Fläche senkrecht und wird von dieser halbiert.
Jörg fertigte sich von dem Kasten folgende Zeichnung an, die durch einige erläuternde Bemerkungen ergänzt worden ist: Jörg zeichnet die Phase der Rückverwandlung, in der die Versuchsperson und der Blumenstrauß



ineinander verschwommen sichtbar sind. Zu dieser Zeit brennen, wie die folgende Betrachtung zeigt, beide Lampen A und B gleichzeitig, jedoch nicht mit voller Lichtstärke.
Auch ein den Erfordernissen genügendes Schaltschema der elektrischen Anlage des Zauberkastens sei mit entsprechenden Hinweisen angegeben:



Bei der Schalterstellung 1 ist die Anlage abgeschaltet. Bei der Schalterstellung 2 brennt, sofern sich der Abgriff des Schiebewiderstandes laut Zeichnung ganz links befindet, die Glühlampe A. Bei Schalterstellung 3 brennt, sofern der Abgriff des Schiebewiderstandes sich wiederum in dieser Stellung befindet, die Glühlampe B. Bei der Schalterstellung 4 schließlich fließt Strom durch beide Glühlampen. Befindet sich bei dieser Schalterstellung der Abgriff des Schiebewiderstandes immer noch in der betrachteten Stellung, so brennt nur die Glühlampe B, weil an ihr die volle Netzspannung 220 Volt liegt, mit voller Lichtstärke. Hingegen teilen sich die Glühlampe A und der jetzt mit ihr in Reihe geschaltete Schiebewiderstand entsprechend ihren Widerständen in die Netzspannung. Die Größe des Schiebewiderstandes ist so gewählt, daß bei der jetzigen Schaltstellung die Glühlampe A überhaupt nicht brennt, weil an ihr ein zu kleiner Teil der Netzspannung liegt, um sie zum Aufleuchten zu bringen. Schiebt man den Abgriff des Schiebewiderstandes nach rechts, so verringert sich die Spannung, die an der Glühlampe B liegt und es wächst die Spannung, die an der Glühlampe A liegt. Die Glühlampe B brennt schwächer und die Glühlampe A flammt auf. Je weiter man den Abgriff nach rechts schiebt, um so schwächer brennt die Glühlampe B und um so heller die Glühlampe A. Befindet sich schließlich der Abgriff in der rechten Endstellung, so ist die Glühlampe B erloschen und die Glühlampe A brennt mit voller Lichtstärke.

195 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Asser

a) Zur Berechnung von $\alpha(4,3)$ und $\beta(4,3)$ ermitteln wir zunächst $\alpha(7,0)$. Wenn es 7 Gewinner eines 1. Platzes und 0 Gewinner eines 2. Platzes gibt, erhält jeder Gewinner eines 1. Platzes ein Siebentel des Gesamtbetrages M, d. h.

$$\alpha(7,0) = \frac{M}{7} = 32{,}40. \qquad (1)$$

Haben wir nun 6 Gewinner eines 1. Platzes und 1 Gewinner eines 2. Platzes, so erhält letzterer ein Drittel dessen, was er erhalten hätte, wenn er einen 1. Platz erreicht hätte. Wäre dieses der Fall gewesen, so hätte es 7 Gewinner eines 1. Platzes gegeben, von denen nach (1) jeder 32,40 Mark erhalten hätte. Im betrachteten Fall erhält also der Gewinner des 2. Platzes den Betrag

$$\beta(6,1) = \frac{1}{3}\alpha(7,0) = 10{,}80. \qquad (2)$$

Mittels (2) können wir nun $\alpha(6,1)$ berechnen:

$$\alpha(6,1) = \frac{1}{6}(M - \beta(6,1)) = 36{,}00; \qquad (3)$$

denn jeder der 6 Gewinner eines 1. Platzes erhält ein Sechstel des Betrages, der vom Gesamtbetrag M nach Subtraktion der Auszahlung $\beta(6,1)$ an den Gewinner des 2. Platzes verbleibt. Analog wie (2) erhält man:

$$\beta(5,2) = \frac{1}{3}\alpha(6,1) = 12{,}00 \qquad (4)$$

und hiernach wird

$$\alpha(5,2) = \frac{1}{5}(M - 2\beta(5,2)) = 40{,}56 \qquad (5)$$

(jeder der 5 Gewinner eines 1. Platzes erhält ein Fünftel des Betrages, der vom Gesamtbetrag M nach Subtraktion der Auszahlung $2\beta(5,2)$ an die beiden Gewinner des 2. Platzes verbleibt). Nach demselben Verfahren erhält man schließlich:

$$\beta(4,3) = \frac{1}{3}\alpha(5,2) = 13{,}52\ (= \beta(a,b)) \qquad (6)$$

$$\alpha(4,3) = \frac{1}{4}(M - 3\beta(4,3)) = 46{,}56 \quad (= \alpha(a,b)). \qquad (7)$$

b) Zur Aufstellung einer allgemeinen Formel für $\alpha(a,b)$ und $\beta(a,b)$ gehen wir analog wie im Fall a) vor. Wir beginnen mit

$$\alpha(a+b,0) = \frac{M}{a+b}. \qquad (1)$$

Hieraus folgt:

$$\beta(a+b-1{,}1)=\frac{1}{3}\,\alpha(a+b,0)=\frac{M}{3(a+b)} \qquad (2)$$

und

$$\alpha(a+b-1{,}1)=\frac{1}{a+b-1}\,(M-1\cdot\beta\,(a+b-1{,}1))$$

$$=\left[\frac{1}{a+b-1}-\frac{1}{3(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \qquad (3)$$

und weiter

$$\beta(a+b-2{,}2)=\frac{1}{3}\,\alpha(a+b-1{,}1)$$

$$=\left[\frac{1}{3(a+b-1)}-\frac{1}{3^2(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \qquad (4)$$

sowie

$$\alpha(a+b-2{,}2)=\frac{1}{a+b-2}\,(M-2\cdot\beta\,(a+b-2{,}2))$$

$$=\left[\frac{1}{a+b-2}-\frac{2}{3(a+b-2)(a+b-1)}+\frac{2\cdot 1}{3^2(a+b-2)(a+b-1)(a+b)}\right]\cdot M \qquad (5)$$

usw. Setzt man dieses Verfahren hinreichend lange fort (bis nämlich im ersten Argument $a+b-b$ und im zweiten Argument b steht), so erhält man:

$$\beta(a,b)=\left[\frac{1}{3(a+1)}-\frac{b-1}{3^2(a+1)(a+2)}+\frac{(b-1)(b-2)}{3^3(a+1)(a+2)(a+3)}\mp\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{b-1}\frac{(b-1)(b-2)\cdots 1}{3^b(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\right]\cdot M \qquad (B)$$

und

$$\alpha(a,b)=\frac{1}{a}\,(M-b\cdot\beta(a,b))$$

$$=\left[\frac{1}{a}-\frac{b}{3a(a+1)}+\frac{b(b+1)}{3^2a(a+1)(a+2)}\mp\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^b\,\frac{b(b-1)\cdots 1}{3^b a(a+1)\cdots(a+b)}\right]\cdot M. \qquad (A)$$

Unter Verwendung des Summenzeichens und der Funktion $n!$ (gelesen: n Fakultät), die definiert ist durch: $0!=1$ und $n!=1\cdot 2\ldots n$ für $n>0$, kann man die Formeln (A) und (B) in „geschlossener Form" schreiben als:

$$\alpha(a,b)=\left[(a-1)!\,b!\sum_{i=0}^{b}\frac{(-1)^i}{3^i(a+i)!\,(b-i)!}\right]\cdot M \qquad (A)$$

$$\beta(a,b)=\left[a!\,(b-1)!\sum_{i=1}^{b}\frac{(-1)^{i-1}}{3^i(a+i)!\,(b-i)!}\right]\cdot M. \qquad (B)$$

Einen exakten Beweis hierfür erhält man durch vollständige Induktion über b. Man zeigt also

1. (A) gilt für $b=0$ bei beliebigem $a\geqq 1$ und (B) gilt bei $b=1$ bei beliebigem $a\geqq 1$ (Anfangsschritt).
2. Gelten (A) und (B) für $b=k$ bei beliebigem $a\geqq 1$ (Induktionsvoraussetzung), so gelten (A) und (B) auch für $b=k+1$ bei beliebigem $a\geqq 1$.

Wir empfehlen, die Formeln (A) und (B) einmal auf das unter a) berechnete Beispiel anzuwenden.

196 Es gibt 9 von Null verschiedene einstellige, 90 zweistellige, 900 dreistellige natürliche Zahlen. Die erste Ziffernfolge hat folglich $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4=2893$ Ziffern. Wir betrachten nun die Zahlen von 1 bis 10000. Es gibt dabei genau 1000 Zahlen, deren letzte Ziffer Null ist (10, 20, 30, ..., 10000). Indem wir bei allen Zahlen von 10 bis 1000 zwischen die letzte und die vorletzte Ziffer eine Null setzen, erhalten wir alle Zahlen, deren vorletzte Stelle Null ist, das heißt 991. Analog gibt es 901 Zahlen, deren drittletzte Ziffer Null ist und eine Zahl, deren viertletzte Ziffer Null ist. Insgesamt mußte er also $1000+991+901+1=2893$, das heißt genausoviel Nullen schreiben wie in der ersten Folge Ziffern.

W(5)197 Jede Prämienstufe war mindestens einmal vertreten, das heißt, es gibt einen Arbeiter, der 200 M erhielt, einen, der 300 M erhielt usw., also vier Arbeiter, die zusammen 1400 M erhielten. Für die anderen elf Beschäftigten bleiben 1100 M, das heißt, keiner von ihnen bekam mehr als 100 M. Folglich erhielten elf Beschäftigte je 100 M.

198 Die beiden gleichen Winkel seien α, der dritte sei γ. Aus $2\alpha+\gamma=180°$ und $\gamma=4\cdot(2\alpha)$ folgt $\alpha=18°$ und $\gamma=144°$. Das Dreieck hat zwei Winkel von je 18° und einen von 144°.

W(6)199 Es waren x Personen anwesend, davon

$\frac{1}{2}x+1$ Kinder, $\frac{1}{4}x+2$ Frauen und

$\frac{1}{6}x+3$ Männer.

$\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{4}x+2+\frac{1}{6}x+3=x$, also

$x=72$.

Es waren 37 Kinder, 20 Frauen und 15 Männer zur Uraufführung des Puppenspiels gekommen.

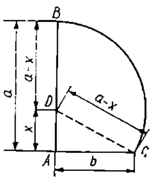
200 Bei einer Umdrehung der Tretkurbel legt der Radfahrer den Weg $s=\frac{46}{16}\cdot\pi\cdot 0{,}70\text{ m}\approx 6{,}325\text{ m}$ zurück: $120000:6{,}32\approx 19000$.

Auf einer Strecke von 120 km müssen die Pedalen rund 19000mal durchgetreten werden.

W(7)201 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien a, $a + 1$, $a + 2$; dann gilt:
$a(a + 1)(a + 2) = 21\,[a + (a + 1)$
$+ (a + 2)] = 21(3a + 3)$;
$a(a + 1)(a + 2) = 63(a + 1)$.
Da $a + 1 \neq 0$ ist, erhalten wir $a(a + 2) = 63$. Da a und $a + 2$ natürliche Zahlen sind, müssen $a = 7$ und $a + 2 = 9$ sein. Die gesuchten Zahlen lauten 7, 8 und 9.
$7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$;
$21(7 + 8 + 9) = 21 \cdot 24 = 504$.

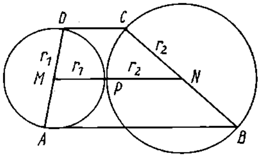
202 D ist der Mittelpunkt für einen Kreis mit dem Radius $\overline{BD} = \overline{CD} = a - x$.

$$(a - x)^2 = x^2 + b^2,$$
$$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + b^2,$$
$$a^2 - 2ax = b^2,$$
$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$



Für die gegebenen Zahlenwerte gilt:
$$x = \frac{3100^2 - 2700^2}{2 \cdot 3100}\,\text{mm} = \frac{23200}{62}\,\text{mm},$$
d. h., $\overline{AD} = x \approx 374$ mm.

W(8)203 Aus der Figur entnehmen wir folgendes:
Die Strecke $\overline{MN}$ ist Mittellinie des Trapezes, also gilt $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$; ferner gilt $\overline{MN} = r_1 + r_2 = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.
Daraus folgt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.



204 Wir nehmen an, Fritz habe x Zehn-, y Fünf- und z Einpfennigstücke in seiner Geldbörse; es ergeben sich die beiden Gleichungen $10x + 5y + z = 112$ und $x + y + z = 40$.
Nach Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir $9x + 4y = 72$ oder umgeformt $9x = 4(18 - y)$.
Da die linke Seite der Gleichung durch 9 teilbar ist, muß es auch die rechte sein (da nur ganzzahlige Lösungen in Frage kommen). Da y nicht gleich Null sein soll, muß es 9 sein. Demnach ist $x = 4$ und $z = 27$. Fritz hat also 4 Zehnpfennigstücke, 9 Fünfpfennig- und 27 Einpfennigstücke.

W(9)205 Aus Satz 6 und Satz 4 folgt: Herr Altmann unterrichtet Biologie. Aus Satz 3 und Satz 7 und Satz 6 folgt: Herr Brendel unterrichtet nicht die Fächer Mathematik, Chemie, Biologie und Physik; also unterrichtet er die Fächer Deutsch und Geschichte. Somit muß der Physiklehrer Herr Clausner sein. Aus Satz 5 folgt, daß Herr Clausner nicht Mathematik unterrichtet, also verbleibt für ihn nur das Fach Chemie. Herr Altmann unterrichtet also noch im Fach Mathematik.

206 Wir nehmen an, es seien zunächst x Stühle aufgestellt worden, es seien ferner k Kongreßteilnehmer erschienen.
Aus $k = 2x - \dfrac{2x}{12} = \dfrac{11x}{6}$ und der Einschränkung, daß $90 < x < 100$ gilt und k eine natürliche Zahl sein muß, folgt $x = 96$ und $k = 176$. Es hatten sich 176 Mitglieder zum Jahreskongreß eingefunden.

W(10/12)207 Die Quersumme der Zahl A übertrifft nicht $1966 \cdot 9 = 17694$, das heißt, die Zahl B ist nicht mehr als fünfstellig. C ist die Quersumme der Zahl B und übertrifft nicht $5 \cdot 9 = 45$. Weil die Zahl A durch 9 teilbar ist, ist nach den Teilbarkeitsregeln sowohl die Zahl B als auch die Zahl C durch 9 teilbar. Ferner sind die Zahlen B und C von Null verschieden, weil A als 1966-stellige Zahl von Null verschieden ist. Doch eine von Null verschiedene natürliche Zahl, die nicht 45 übertrifft und durch 9 teilbar ist, kann nur eine von den Zahlen 45, 36, 27, 18 und 9 sein. In jedem Falle ist die Quersumme der Zahl C gleich 9.

215 Aus $200:6 = 33\frac{1}{3}$ folgt, daß zur Herstellung eines Stutzens eine Blechplatte von 100 cm Länge und $33\frac{1}{3}$ cm Breite zur Verfügung steht. Es gibt nun zwei Möglichkeiten für die Herstellung eines Stutzens:
a) $100 - 1{,}5 = 98{,}5$ d. h., der Umfang des Rohres beträgt 98,5 cm; dann beträgt der Durchmesser $d = 98{,}5 : \pi \approx 31{,}36$ cm.
b) $33\frac{1}{3} - 1{,}5 = 31\frac{5}{6}$, d. h., der Umfang des Rohres beträgt $31\frac{5}{6}$ cm; dann beträgt der Durchmesser $d = 31\frac{5}{6} : \pi \approx 10{,}13$ cm.

W(7)216 $A:B = 2:6$, $B:C = 6:4$, $C:D = 4:13$; $A:B:C:D = 2:6:4:13$;
$2 + 6 + 4 + 13 = 25$; $10000:25 = 400$.
Der Behälter A hat einen Rauminhalt von 800 Litern, der Behälter B hat einen Rauminhalt von 2400 Litern, der Behälter C hat einen Rauminhalt von 1600 Litern, der Behälter D hat einen Rauminhalt von 5200 Litern.

217 Ist x die Maßzahl des Durchmessers (in cm) des Meßzylinders, so ist $2x$ die Maßzahl seiner Höhe. Man erhält für die Maßzahl des Volumens (in cm³):
$$V = \frac{\pi}{4} x^2 \cdot 2x = 5000. \text{ Daraus folgt}$$
$$x^3 = \frac{10000}{\pi} \approx 3183, \qquad x \approx 14{,}7,$$
$$2x \approx 29{,}4.$$
Der Eichstrich muß daher in einer Höhe von 29,4 cm, d. s. rund 30 cm, über dem Boden angebracht werden.

W(8)218 Die Masse der Legierung beträgt $M = 57{,}5\,\mathrm{g} + 114{,}0\,\mathrm{g} = 171{,}5\,\mathrm{g}$. Das Volumen der Legierung beträgt

$$V = \frac{57{,}5}{11{,}34}\,\mathrm{cm}^3 + \frac{114{,}0}{7{,}28}\,\mathrm{cm}^3$$

$\approx 5{,}07\,\mathrm{cm}^3 + 15{,}66\,\mathrm{cm}^3 = 20{,}73\,\mathrm{cm}^3$.
Daher beträgt die Dichte der Legierung

$$\varrho = \frac{M}{V} \approx \frac{171{,}5}{20{,}73}\,\mathrm{g/cm}^3 \approx 8{,}27\,\mathrm{g/cm}^3$$
$$\approx 8{,}27\,\mathrm{kg/dm}^3.$$

219 Die Maßzahl der Grundfläche (in cm^2) des Prismas beträgt

$$G = 12 \cdot 7 - \frac{10 \cdot 4{,}5}{2} = 84 - 22{,}5 = 61{,}5.$$

Da die Maßzahl der Höhe (in cm) des Prismas $h = 25$ beträgt, ist die Maßzahl seines Volumens

$$V = G \cdot h = 61{,}5 \cdot 25 = 1537{,}5.$$

Daher ist die Masse des prismatischen Werkstückes

$$1537{,}5 \cdot 7{,}3\,\mathrm{g} \approx 11\,200\,\mathrm{g} = 11{,}2\,\mathrm{kg}.$$

W(9)220 Die Maßzahl des Volumens (in mm^3) des ursprünglichen Zylinders beträgt

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 80^2 \cdot 650. \qquad (1)$$

Die Maßzahl des Volumens des neuen Zylinders beträgt

$$V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot 75^2 \cdot 650. \qquad (2)$$

Man erhält

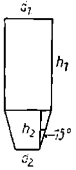
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{75^2}{80^2} = \frac{5625}{6400} \approx \frac{87{,}89}{100}. \qquad (3)$$

Zur weiteren Berechnung wird nun die Angabe der Dichte des Stahls nicht benötigt, da bei gleicher Dichte zweier Körper sich ihre Massen wie ihre Volumina verhalten. Die Masse des neuen Zylinders beträgt nur 87,89% der Masse des ursprünglichen Zylinders; die Materialeinsparung beträgt daher 12,11%, d. s. rund 12%.
Da beide Wellen die gleiche Länge (650 mm) haben, ist auch die Angabe der Länge überflüssig; denn der Quotient $\frac{V_2}{V_1}$ (vgl. Gleichung (3)) hängt nicht von dieser Länge ab.

221 Es seien jeweils die Maßzahlen (in cm) $d_1 = 25$ für den Durchmesser des zylindrischen Teils, $h_1 = 50$ für die Höhe des zylindrischen Teils, d_2 für den Durchmesser der unteren Grundfläche des kegelstumpfförmigen Teils, $h_2 = 25$ für die Höhe des kegelstumpfförmigen Teils. Dann gilt

$$\tan 15° = \frac{\frac{d_1 - d_2}{2}}{h_2}, \text{ also } d_1 - d_2 = 2h_2 \tan 15°$$

$\approx 50 \cdot 0{,}2679 \approx 13{,}40$, d. h.,
$d_2 \approx d_1 - 13{,}40 \approx 11{,}60$.



Daher gilt für die Maßzahl des Volumens (in cm^3) des Behälters:

$$V = \frac{\pi}{4} d_1^2 h_1 + \frac{\pi}{12} h_2 (d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$
$$\approx \frac{\pi}{4} \cdot 25^2 \cdot 50 + \frac{\pi}{12} \cdot 25\,(25^2 + 25 \cdot 11{,}6$$
$$+ 11{,}6^2)$$
$$\approx \frac{\pi}{4}\left(31\,250 + \frac{25 \cdot 1050}{3}\right) \approx \frac{\pi}{4} \cdot 40\,000$$
$$\approx 10\,000\,\pi \approx 31\,400.$$

Das Volumen des Behälters beträgt daher $31\,400\,\mathrm{cm}^3$, d. s. 31,4 l.

W(10/12)222 a) Die Maßzahl des Volumens (in m^3) des Behälters ist

$$V = \pi \cdot 0{,}8^2 \cdot 2{,}7 + 2 \cdot \frac{2}{3}\,\pi \cdot 0{,}8^3$$
$$= \pi\left(1{,}728 + \frac{4}{3} \cdot 0{,}512\right) \approx 2{,}411\,\pi \approx 7{,}57.$$

Das Volumen beträgt daher rund $7{,}57\,\mathrm{m}^3$.

b) Die Maßzahl der Oberfläche (in m^2) ist

$O = \pi \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}7 + 2 \cdot 2\pi \cdot 0{,}8^2$
$= \pi(4{,}32 + 2{,}56) = 6{,}88\,\pi \approx 21{,}61$.

Die Oberfläche beträgt daher rund $21{,}61\,\mathrm{m}^2$.

c) Ist x die Maßzahl des Radius (in m) eines kugelförmigen Behälters von dem gleichen Volumen wie unter a), so gilt

$$\frac{4}{3}\pi x^3 \approx 7{,}57, \qquad x^3 \approx \frac{7{,}57}{4{,}189} \approx 1{,}807,$$
$$x \approx 1{,}22.$$

Der Durchmesser des kugelförmigen Behälters beträgt daher rund 2,44 m. Ferner beträgt die Oberfläche

$$O' \approx 4\pi \cdot 1{,}22^2\,\mathrm{m}^2 \approx 18{,}70\,\mathrm{m}^2.$$

d) Die Oberfläche ist im Falle c) kleiner als im Fall b), weil unter allen geometrischen Körpern von gleichem Volumen die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Aus diesem Grund stellt man in der Industrie bei stationären Anlagen häufig kugelförmige Behälter her, weil dann die Oberfläche und damit der Materialverbrauch am geringsten ist.

Lösungen zu: Zahlenrätsel von Th. Scholl:

228 Aus I folgt $d = 0$; aus C folgt $e = 1$; aus I folgt $a = 2$; aus A folgt $b = 5$; aus C folgt $h = 9$; aus III folgt $c = 7$; aus I folgt $f = 8$; aus II folgt $g = 4$.

$$\begin{array}{rcrcr} 252 & - & 70 & = & 182 \\ : & & + & & - \\ 12 & \cdot & 7 & = & 84 \\ \hline 21 & + & 77 & = & 98 \end{array}$$

229 Aus II folgt $c = 1$; aus C folgt $e = 3$ (denn $e \neq 2$, da $d \neq 1$); aus C folgt $d = 2$; aus A folgt $b = 5$ und $a = 4$; aus II folgt $f = 8$; aus C folgt $g = 6$.

$$\begin{array}{rcrcr} 455 & - & 112 & = & 343 \\ : & & + & & - \\ 13 & \cdot & 14 & = & 182 \\ \hline 35 & + & 126 & = & 161 \end{array}$$

Vignette: $1368:24 = 57$; $168 + 39 = 207$; $1200 - 936 = 264$.

230 Nach b), a) und d) ist Herr Hahn weder Elektriker noch Ingenieur; also ist er Monteur.
Aus a) folgt, daß der Ingenieur nicht Baumann heißt. Demnach muß er Eichler und der Elektriker Baumann heißen.

231 a) 364 Stück. Denn es werden täglich 14 Stück hergestellt. Bei 26 Arbeitstagen ergibt das wegen $26 \cdot 14 = 364$ monatlich 364 Stück.
b) In den bis zum Jahresende verbleibenden 6 Monaten werden täglich 2 Stück mehr hergestellt. Bei 26 Arbeitstagen pro Monat ergibt das 312 Stück, die bis Jahresende über den Plan hinaus produziert werden; denn es ist $26 \cdot 6 \cdot 2 = 312$.

232 a) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 36 Flächeneinheiten, wenn man den Inhalt eines Quadrates als Einheit nimmt. Die Länge jeder Rechteckseite muß infolge der Konstruktion ein ganzzahliges Vielfaches der Länge einer Quadratseite sein. Daher gibt es die folgenden fünf Möglichkeiten:

1. Rechteck: Länge 1, Breite 36, Umfang 74 Einheiten;
2. Rechteck: Länge 2, Breite 18, Umfang 40 Einheiten;
3. Rechteck: Länge 3, Breite 12, Umfang 30 Einheiten;
4. Rechteck: Länge 4, Breite 9, Umfang 26 Einheiten;
5. Rechteck: Länge 6, Breite 6, Umfang 24 Einheiten der Länge.

b) Unter diesen Rechtecken hat das 5. Rechteck (Quadrat) den kleinsten Umfang.

235 Man zieht durch den Scheitelpunkt des Winkels die Parallele zu g. Es gilt dann $\gamma = \alpha + \beta$ (Wechselwinkel an Parallelen).

236 Bezeichnet man die Schülerzahl mit s, so gilt auf Grund der ersten Bedingung:

$$26 \leqq s < 38\,.$$

Da die mit 5 multiplizierte Schülerzahl durch 6 teilbar ist, muß die Schülerzahl selbst durch 6 teilbar sein. Es können daher nur 30 oder 36 Schüler sein. Von diesen beiden Zahlen erfüllt die 30 und nur die 30 sämtliche Bedingungen.
Die Klasse besteht demnach aus 30 Schülern.
Die Quersumme von 30 beträgt 3, die von $30 \cdot 5$ beträgt 6.

237 Bezeichnet man die Anzahl der im Januar produzierten Tische mit x, so kann man folgende Aufstellung anfertigen:

Monat	Anzahl d. prod. Tische
Januar	x
Februar	$x + 10$
März	$x + 20$
April	$x + 30$
.	.
.	.
.	.
Dezember	$x + 110$
	$12x + 660$

Wäre die Produktion nicht gesteigert worden, d. h., wäre in jedem Monat die gleiche Anzahl wie im Januar produziert worden, so hätte die Anzahl der im ganzen Jahre produzierten Tische $1920 - 660 = 1260$ betragen. Die Anzahl der im Januar angefertigten Tische beträgt also $1260:12 = 105$ und daher die der im Juni hergestellten Tische $105 + 50 = 155$ und die der im Dezember fabrizierten Tische $105 + 110 = 215$.

240 Für R und N kommt nur 0 und 9 oder umgekehrt 9 und 0 in Frage. Wenn N gleich 0 wäre, entstünde kein Übertrag, so daß R auch 0 sein müßte, was der Voraussetzung, daß verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bezeichnen sollen, widerspricht. Wenn N gleich 9 wäre, entstünde ein Übertrag von 1 und R müßte ebenfalls 9 sein, was der Voraussetzung, daß verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bezeichnen sollen, widerspricht. Es kann also keine Lösung im Sinne der Aufgabenstellung geben.

241 Die Anzahl n muß ein Vielfaches von 9, von 6 und von 3, d. h., ein Vielfaches von 18 sein.
Wegen $20 < n < 40$ kommt nur 36 in Frage.

Zensur	1	2	3	4	5
Schüler	4	12	14	6	—

242 a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck so auf, daß zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert. An der gewünschten Stelle läßt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.
b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle. Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der geometrischen Konstruktion ebenfalls an die gewünschte Stelle.

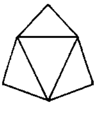
245 Wenn eine Zahl durch 72 teilbar sein soll, so muß sie wegen $8 \cdot 9 = 72$ auch durch 8 und 9 teilbar sein. Um die fehlenden Ziffern zu ersetzen, wendet man die Teilbarkeitsregeln der 8 und der 9 an. Man beginnt mit der Teilbarkeitsregel der 8, dadurch bekommt man die letzte Ziffer der Zahl. 78* muß also durch 8 teilbar sein. Es ist $720:8 = 90$. Die Zahl 64 ist die einzige zwischen 60 und 70, die durch 8 teilbar ist. Folglich muß die letzte Ziffer 4 sein.
Um die erste Ziffer zu erhalten, wende man die Teilbarkeitsregel der 9 an. Die Quersumme der bekannten Ziffern ist $3 + 7 + 8 + 4 = 22$. Die Differenz bis 27, die folgende durch 9 teilbare Zahl, beträgt 5. Daher kann nur die Zahl 53784 den Bedingungen der Aufgabe genügen. Da sie tatsächlich durch 72 teilbar ist, erhält man so die Lösung.

246 Peter muß den Inhalt der gekauften Flaschen vom Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Fl. bezahlen. Wegen $180:21 = 8\,\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Fl. gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.
2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück. Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n - 5)$ statt nur $(n - 6)$, was der Aufgabe widerspricht.

247 a) Ein von einem Tetraeder begrenzter Körper, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt bei geeigneter Lage zu den Projektionsebenen einen derartigen Grund-, Auf-, und Kreuzriß.

b) Körpernetz

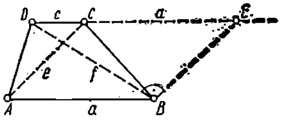


250 1. Voraussetzung: Führt man Bezeichnungen und Variable für die Längen ein, wie in der nebenstehenden Figur angegeben, so gilt:

(1) $AB \parallel DC$, (2) $AC \perp DB$,

(3) $BE \parallel AC$.

2. Behauptung: $e^2 + f^2 = (a + c)^2$
3. Beweis: Wegen (2) und (3) ist
$\sphericalangle \overline{DBE} = 90°$.



Weiter ist wegen (1) und (3) $\overline{CE} = \overline{AB} = a$. Im rechtwinkligen Dreieck DBE gilt dann wegen des Satzes des Pythagoras, weil wegen (1) und (3) $\overline{AC} \triangleq \overline{BE} = e$ ist, die Behauptung, w. z. b. w.

251 *1. Fall* Angenommen, die Aussage 1 sei wahr. Dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber in Widerspruch zu der Aussage 1, da nicht zwei Schülerinnen den Ball haben können.

2. Fall Angenommen, die Aussage 2 sei wahr, d. h., Brigitte hat den Ball nicht. Dann sind die Aussagen 1 und 3 falsch. Also hat Claudia die Schere, Anna den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.

3. Fall Angenommen, die Aussage 3 sei wahr. Dann sind die Aussagen 1 und 2 falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

252 a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,2 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p.
Daraus folgen: 60% $\triangleq$ 30 Arbeiter
100% $\triangleq$ 50 Arbeiter.
In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.

b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, läßt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern!

255 Bezeichnet man die Abschnitte der einen Diagonale mit a und b, die der anderen mit c und d und den Winkel zwischen a und c mit β, so erhält man für die Flächen der vier Dreiecke:

$$F_1 = 0{,}5\, ac \cdot \sin \beta,$$
$$F_2 = 0{,}5\, ad \cdot \sin (180 - \beta),$$
$$F_3 = 0{,}5\, bd \cdot \sin \beta,$$
$$F_4 = 0{,}5\, bc \cdot \sin (180 - \beta).$$

Aus $F_1 = F_2$ folgt $c = d$, und aus $F_1 = F_3$ folgt $a = b$. Das heißt, die Diagonalen halbieren einander, es liegt ein Parallelogramm vor. Umgekehrt folgt, daß die Flächen der vier Dreiecke gleich sind, wenn die Diagonalen einander halbieren.

256 Angenommen, es gibt eine solche Zahl, so daß für

$a, b \in N$
$a, b < 10$
$a \neq 0$ die Gleichung
$10a + b = a + b^2$ gilt, dann muß
$9a = b(b - 1)$
$a = \dfrac{b(b-1)}{9}$ sein.

Wegen $a \in N$ und weil b und $(b - 1)$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muß entweder b oder $(b - 1)$ durch 9 teilbar sein. Wegen $b < 10$ und $a \neq 0$ kann $(b - 1)$ nicht durch 9 teilbar sein. Also muß b durch 9 teilbar sein, und wegen $a \neq 0$ und $b < 10$ folgt, daß $b = 9$ und $a = 8$ sein müssen. Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen.

257 Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunahmen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt. Dann ergibt sich wegen c) folgender Sachverhalt: BX, XY, YD. Wäre $X = D$, so müßte auch $Y = D$ sein. Dann bliebe für die beiden anderen Personen nur die Kombination AC, CA übrig, was wegen b) ausgeschlossen ist. Daher ist $X \neq D$ und wegen a) gilt $X \neq B$, $Y \neq D$. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin $Y \neq B$ gilt, ist wegen b) nur $X = A$, $Y = C$, $Z = B$ möglich. Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

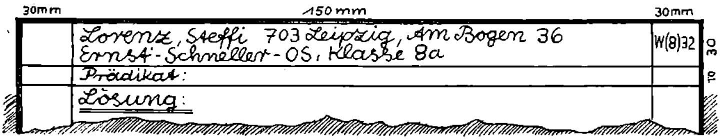
Lösungen zu alpha + mathe = heiter (3/68)

Mehrere Lösungen, z. B.

$$\begin{array}{r} 58015 \\ +\ 65412 \\ \hline 123427 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 67016 \\ +\ 56412 \\ \hline 123428 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43014 \\ +\ 84512 \\ \hline 127526 \end{array}$$

1. $\sqrt{50625} = 225$
2. $222 \cdot 222 = 49284$
3. $43^3 = 79507$; $4 + 3 = 7$
4. $28^3 = 21952$
5. $139 \cdot 139 = 19321$

Beachte! So muß der Kopf zu jeder eingesandten W-Lösung aussehen (Format A4)! Postleitzahl nicht vergessen! Von 3200 Lösungen Heft (2/68) wurden 80 zurückgewiesen, da sie nicht den Wettbewerbsbedingungen (siehe Heft 1/68) entsprachen, d. Red..



SCHÜLER SPORT

Lauf

Sprung

Wurf

Achtung

Diesen Brief dürfen wir lesen

Liebe Margit,

ich muß Dir eine große Neuigkeit mitteilen. Vor kurzem machte ich mit meinen Eltern einen Einkaufsbummel. Wir waren auch in einer Buchhandlung. Da habe ich etwas Großartiges entdeckt, ein Buch, das im Sportverlag erschienen ist, aber nicht wie bisher nur für Erwachsene geschrieben, sondern direkt für uns.

„Schülersport — Lauf, Sprung, Wurf" steht darauf. Ich finde es ganz fabelhaft. Es sind sehr viele Abbildungen darin, die zeigen, wie man richtig laufen, starten, springen und werfen muß. Auf anderen Abbildungen ist zu sehen, welche Fehler am häufigsten gemacht werden. Es werden aber auch viele Übungen dazu genannt, um diese Fehler zu beseitigen. Auf den letzten Seiten des Buches sind viele kleine Figuren abgebildet, die man ausschneiden, übereinanderlegen und somit ein „Blätterbuch" basteln kann. Blättert man dieses Büchlein hintereinander durch, dann ist es, als ob sich die Figur bewegt, sie läuft. So gut wie diese Figuren laufen und springen, müssen wir es auch. Vati hat mir dieses Buch sofort gekauft.

Mit einigen Schülern aus meiner Klasse nehme ich an der Spartakiade, am leichtathletischen Mehrkampf teil. Wir treffen uns fast jeden Tag und üben gemeinsam nach diesem Buch, auch wenn unser Sportlehrer oder Übungsleiter nicht dabei ist.

Viele Grüße Deine

Sabine

So läuft Otto!

Wie eine Rakete

SPORTVERLAG

108 Berlin

Neustädtische Kirchstraße 15