3D-Transformationen

Allgemeine Transformationsmatrix

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ k & l & m & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verschiebung um Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Skalierung mit den Faktoren s_x, s_y, s_z und Zentrum (0,0,0)

Matrix $\begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Skalierung an Zentrum (a,b,c)

1. Verschiebung um (-a,-b,-c)
2. Skalierung an (0,0,0)
3. Verschiebung um (a,b,c)

Rotation um die z-Achse mit Winkel α Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um die x-Achse mit Winkel β Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um die y-Achse mit Winkel γ Matrix $\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotation um eine beliebige Achse mit Winkel σ

... wird beschrieben durch Gerade der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$

Algorithmus:

1. Verschiebung aller Punkte, so dass Rotationsachse durch Ursprung verläuft

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -R_x \\ 0 & 1 & 0 & -R_y \\ 0 & 0 & 1 & -R_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Rotation um x-Achse, so dass Drehachse in xz-Ebene liegt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & -\frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Rotation um y-Achse, so dass Drehachse mit z-Achse übereinstimmt

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 & -\frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Rotation des Objektes um die z-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma & 0 & 0 \\ \sin\sigma & \cos\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rücktransformationen

... bei den Drehungen 2 und 3 sind die Cosinus-Terme unverändert, da $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$, die Sinus-Terme, da $\sin(\alpha)=-\sin(-\alpha)$, durch die negativen zu ersetzen