Autorenkollektiv

Mathematische Logik Mengenlehre Zahlenbereiche

Autoren-
kollektiv

Einführung in die mathematische Logik – Einführung in die Mengenlehre – Aufbau der Zahlenbereiche

3. Auflage

Volk und Wissen
Volkseigener
Verlag Berlin
1977

Autoren:

Teil A

1. und 2. — Dr. Günther List
3. und 4. — Dipl.-Ing. Oberlehrer Martin Walter
5. — Manfred Baginski

Teil B

6. bis 8. — Dr. Georg Löschau
9. und 10.7. — Aldo Mertens
10. (außer 10.7.) — Gerhard Schwanitz

Teil C

11. und 14. — Oberlehrer Willi Glaewe
12. und 13. — Oberlehrer Peter Goll

3. Auflage
Ausgabe 1972
Lizenz Nr. 203 · 1000/76 (DN 002507-3)
LSV 1003
Redaktion: Heinz Junge
Zeichnungen: Heinz Grothmann
Einband und Typographie: Atelier vwv, Gerhard Neitzke
Printed in the German Democratic Republic
Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“,
582 Bad Langensalza
Schrift: Modern Extended Antiqua 9/10 Monotype
Redaktionsschluß: 4. November 1976
Bestell-Nr. 706 213 7
DDR 7,50 M

Vorwort

Dieses Buch ist für Studenten an Instituten für Lehrerbildung der Deutschen Demokratischen Republik geschrieben. Es wendet sich auch an Lehrer der unteren Klassen der allgemeinbildenden polytecnnischen Oberschule der DDR und möchte von allen, die sich über einige Grundlagen der Mathematik informieren oder vorhandene Kenntnisse auffrischen wollen — Schüler der oberen Klassen, die sich besonders für Mathematik interessieren, nicht ausgeschlossen —, gelesen werden.
Dieses Buch verfolgt das Ziel, die mathematische Bildung der Lehrer in den unteren Klassen vor allem in Hinsicht auf die Grundlagen der Mathematik zu festigen und zu vertiefen. Es trägt dazu bei — so hoffen die Verfasser —, das Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem zu realisieren und die Kenntnisse und Fähigkeiten unserer Schüler zu erhöhen.
Das Buch gliedert sich in die folgenden drei Teile:
A Einführung in die mathematische Logik
B Einführung in die Mengenlehre
C Aufbau der Zahlenbereiche
Im Teil A beschränken wir uns auf die (zweiwertige) Aussagenlogik und sagen einiges über Quantifizierung. Am Schluß dieses Teiles wird das logische Schließen behandelt, soweit es für den Lehrer notwendig erscheint.
Wir sind davon überzeugt, daß nach dem Durcharbeiten dieses Teiles die bei manchem noch vorhandene Scheu vor der Beschäftigung mit Fragen der mathematischen Logik genommen ist, daß sich der Leser vielmehr von der Notwendigkeit überzeugt hat, sich in derartige Probleme hineinzudenken und daß er einen Einblick in einige Anwendungsmöglichkeiten gewonnen hat.
Im Teil B begegnen wir mit der Einführung in die Mengenlehre einem Fundament der Mathematik. Hier, wie auch in den beiden anderen Teilen, werden wir immer wieder an die Kenntnisse der Studenten aus dem Unterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule anknüpfen und sie einbeziehen. In den verschiedenen Arten der Beziehungen in Mengen und zwischen Mengen wird die Durchdringung von Mengenlehre und mathematischer Logik besonders deutlich.
Im Teil C werden die verschiedenen Zahlenbereiche mit ihren Gesetzen und Beziehungen behandelt. Nach dem mengentheoretischen (genetischen) und axioma-

tischen Aufbau des Bereiches der natürlichen Zahlen (N) kommen wir über die Menge der gebrochenen Zahlen (R^*) zur Menge der rationalen Zahlen (R) und schließlich zum Bereich der reellen Zahlen (P).
Die Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen zum Bereich der ganzen Zahlen werden wir nicht behandeln; wir schließen uns damit dem Vorgehen in der Schule an.
Dem Zweck des Buches angemessen ist der Bereich der natürlichen Zahlen sehr ausführlich dargestellt, die weiteren Bereiche sind dann anschaulicher behandelt und die entsprechenden Gesetzmäßigkeiten teilweise weniger streng begründet. Diese Teile tragen stärker informatorischen Charakter.
Verfaßt wurde das Buch auf Anregung des Ministeriums für Volksbildung mit Unterstützung des Mitarbeiters der Hauptabteilung Lehrerbildung im Ministerium für Volksbildung, Studienrat SCHOLL, von Mitgliedern der Zentralen Fachkommission Mathematik für Institute für Lehrerbildung und von Lehrern aus Instituten für Lehrerbildung. Wir danken allen, die uns bei der Entstehung und bei der Korrektur geholfen haben, besonders Herrn Prof. Dr. WALSCH (Martin-Luther-Universität Halle) und Frau Dr. DÜRR (Humboldt-Universität Berlin), und sind dankbar für jeden Hinweis, der zu einer Verbesserung dieses Buches führen kann.

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 3

Teil A: Einführung in die mathematische Logik

1. *Gegenstand, Anwendung und Bedeutung der mathematischen Logik* 10

1.1. Gegenstand der mathematischen Logik 10
1.2. Anwendung und Bedeutung der mathematischen Logik 13
1.3. Arten der Begriffsbestimmung 14
1.4. Kontrollfragen 21

2. *Einige Begriffe der mathematischen Logik* 22

2.1. Terme, Variable, Konstanten 22
2.2. Aussagen 25
2.3. Aussageformen 26
2.4. Umformen von Termen und Aussageformen 30
2.5. Kontrollfragen 33

3. *Logische Operationen* 34

3.1. Begriffserklärungen 34
3.2. Negation 40
3.3. Konjunktion 42
3.4. Alternative und Disjunktion 43
3.5. Implikation 46
3.6. Äquivalenz 49
3.7. Zusammenfassung 50
3.8. Kontrollfragen 51

4.	*Operationen mit logischen Ausdrücken*	52
4.1.	Aussagenlogischer Ausdruck	52
4.2.	Wertverlaufsgleichheit aussagenlogischer Ausdrücke	56
4.3.	Einige aussagenlogische Gesetze	57
4.4.	Umformen aussagenlogischer Ausdrücke	59
4.5.	Anwendungen	61
4.6.	Prädikatenlogische Ausdrücke	64
4.7.	Kontrollfragen	70
5.	*Logisches Schließen*	71
5.1.	Folgerungsbegriff	71
5.2.	Aussagenlogisches Schließen	75
5.3.	Spezielle Schlußregeln	84
5.4.	Prädikatenlogisches Schließen	87
5.5.	Beweisverfahren	89
5.6.	Kontrollfragen	99

Teil B: Einführung in die Mengenlehre

6.	*Mengenbildung*	102
6.1.	Mengenbildung und Elementbeziehung	103
6.2.	Mengenbildung und Begriffsgewinnung	110
6.3.	Darstellung von Mengen	112
6.4.	Kontrollfragen	113
7.	*Beziehungen zwischen Mengen*	114
7.1.	Gleichheit von Mengen	114
7.2.	Gleichheit von Mengen und Identität von Begriffen	119
7.3.	Gleichmächtigkeit von (endlichen) Mengen	120
7.4.	Inklusion von Mengen	121
7.5.	Inklusion von Mengen und mathematische Bedingungen	126
7.6.	Inklusion von Mengen und Subordination von Begriffen	127
7.7.	Potenzmengen, Mengen höherer Stufen	128
7.8.	Über Antinomien und deren Vermeidung	129
7.9.	Kontrollfragen	130
8.	*Operationen mit Mengen*	131
8.1.	Komplement einer Menge	131
8.2.	Durchschnitt von Mengen	134
8.3.	Durchschnitt von Mengen — Verschiebung von Begriffen	137
8.4.	Vereinigung von Mengen	138
8.5.	Vereinigung von Mengen und Koordinierung von Begriffen	141
8.6.	Differenz von Mengen	142
8.7.	Differenz, Vereinigung und Durchschnitt komplementärer Mengen	145

8.8. Merkmale der Mengenoperationen 147
8.9. Kontrollfragen 150

9. *Abbildungen* 151

9.1. Das Kreuzprodukt 151
9.2. Der Abbildungsbegriff 156
9.3. Spezielle Abbildungen 158
9.4. Funktionen 162
9.5. Die graphische Darstellung von Funktionen 167
9.6. Operationen mit Funktionen 170
9.7 Die Mächtigkeit von Mengen; endliche und unendliche Mengen 176
9.8. Abzählbare und überabzählbare Mengen 180
9.9. Kontrollfragen 181

10. *Relationen* 182

10.1. Der Relationsbegriff 182
10.2. Eigenschaften von zweistelligen Relationen 187
10.3. Ordnungsrelationen 189
10.4. Äquivalenzrelationen 195
10.5. Der Isomorphiebegriff 200
10.6. Geordnete Mengen; ähnliche Mengen 202
10.7. Operationen und ihre Merkmale 205
10.8. Kontrollfragen 212

Teil C: Aufbau der Zahlenbereiche

11. *Die natürlichen Zahlen* 214

11.1. Die endlichen Kardinalzahlen 214
11.2. Definition der Menge der natürlichen Zahlen nach PEANO 223
11.3. Algebraische Operationen in N 224
11.4. Die Darstellung natürlicher Zahlen im m-adischen Positionssystem 244
11.5. Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl 247
11.6. Kontrollfragen 248

12. *Die gebrochenen Zahlen* 249

12.1. Aufbau der Menge der gebrochenen Zahlen (R^*) 250
12.2. Ordnung in R^* 254
12.3. Operationen in R^* 260
12.4. Gebrochene Zahlen und Zahlenstrahl 271
12.5. Darstellung gebrochener Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem 272
12.6. Kontrollfragen 277

13. *Die rationalen Zahlen* 278

13.1. Aufbau der Menge der rationalen Zahlen (R) 278
13.2. Ordnung in R 281

13.3. Operationen in R 285
13.4. Rationale Zahlen und Zahlengerade 296
13.5. Darstellung rationaler Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem 297
13.6. Kontrollfragen 298

14. *Die reellen Zahlen* 299

14.1. Zahlenfolgen 299
14.2. Aufbau der Menge der reellen Zahlen (P) 306
14.3. Algebraische Strukturen 311

Literaturverzeichnis 316

Sachverzeichnis 318

Teil A

Einführung in die mathematische Logik

1. Gegenstand, Anwendung und Bedeutung der mathematischen Logik

Im Teil A 1. wird der *Gegenstand* der mathematischen Logik umrissen, und ihre *Stellung im System der Wissenschaften* wird charakterisiert. Ausführungen über die Anwendung der mathematischen Logik in den technischen Wissenschaften sowie über die Bedeutung des Studiums der Logik für den Lehrer ergänzen diese Darstellungen. Weiterhin werden einige Verfahren der Begriffsbestimmung, die im Mathematikunterricht häufig Anwendung finden, erläutert.

1.1. Gegenstand der mathematischen Logik

Im allgemeinen Sprachgebrauch begegnen wir oft der Feststellung: „Das ist doch logisch!" Damit soll zum Ausdruck gebracht werden, daß z. B. eine Behauptung klar und folgerichtig ist und als vernünftig angesehen wird. Wenn uns ein Gedankengang unsinnig, d. h. nicht folgerichtig erscheint, bezeichnen wir ihn als unlogisch, also nicht der Logik entsprechend. Selbstverständlich genügt eine solche aus der Erfahrung hergeleitete und oft auch gefühlsmäßig bestimmte Erklärung des Begriffes Logik nicht den Anforderungen einer wissenschaftlichen Betrachtung. Wir erkennen jedoch durch den Bezug zum täglichen Leben die Bedeutung, die dieser Disziplin zukommt, und den Gegenstand, mit dem sich die Logik befaßt. *Sie beschäftigt sich mit dem Denken*, der höchsten Form der psychischen Tätigkeit des Menschen.
Das Wort „Logik" stammt aus dem Griechischen, und dort bedeutet „logos" u. a. soviel wie „Gedanke", „Wort", „Vernunft", „Denklehre". Wir haben es also hier mit Problemen zu tun, die schon seit vielen Jahrhunderten Untersuchungsgegenstand der Wissenschaftler sind.
Nun beschäftigen sich natürlich auch andere Wissenschaften mit dem Denken. Durch die fortschreitende Entwicklung und Vervollkommnung der menschlichen Gesellschaft und durch die damit verbundene quantitative und qualitative Erweiterung des Wissens traten und treten immer neue Gebiete hinzu, die mit Denkprozessen im Zusammenhang stehen.

Vom Ursprung her ist die **Logik** mit der **Philosophie** verbunden, denn der dialektische und historische Materialismus als philosophischer Bestandteil der marxistisch-leninistischen Weltanschauung ist „die Wissenschaft von den allgemeinen Bewegungsgesetzen der Natur, der Gesellschaft und des Denkens (Erkennens) sowie der Stellung des Menschen in der Welt" (↗ [12], S. 418). Die mathematische Logik ist ein Beispiel dafür — in der gegenwärtigen Entwicklungsetappe können viele solcher Beispiele genannt werden —, daß unter Einbeziehung der Mathematik bedeutende Fortschritte erzielt werden können.
Als Bindeglied zwischen der Philosophie und der Logik ist die **Erkenntnistheorie** anzusehen. Sie untersucht, *welches Denken richtig ist* und *wann Denken richtig ist.*
Auch die **Psychologie** untersucht neben anderen psychischen Prozessen und den psychischen Eigenschaften der Persönlichkeit das Denken. Allerdings geht es dieser Wissenschaft darum zu ergründen, *wie das Denken verläuft* und welche Rolle entsprechende Bedingungen dabei spielen.
Logisches Denken gibt es bereits so lange, wie die Menschheit existiert. Die Logik als Wissenschaft ist aber auch schon über zweitausend Jahre alt. Es sind Nachweise vorhanden, daß sich bereits im 5. Jahrhundert v. u. Z. Inder, Chinesen und Juden mit der Logik beschäftigten. Im antiken Griechenland haben sich besonders XENON, SOKRATES und PLATON um sie verdient gemacht. Als eigentlicher Schöpfer der **formalen Logik** gilt der griechische Philosoph ARISTOTELES (384 bis 322 v. u. Z.). Er stellte Begriffe, ihre gegenseitigen Beziehungen, daraus ableitbare Urteile und Schlüsse systematisch zusammen und schuf mit den **Syllogismen** einen klaren formalen Aufbau. Der Satz „*Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch einander gleich*", der bereits in jener Zeit ausgesprochen wurde, findet auch heute noch in dieser Formulierung Anwendung.
Im Zusammenhang mit Grundlagenuntersuchungen in der Mathematik und in anderen Wissenschaften erfolgte die Weiterentwicklung zur **mathematischen Logik.** Diese neue Disziplin ist eine qualitativ höhere Stufe der formalen Logik und durch einen höheren Abstraktionsgrad sowie durch neue Erkenntnisse gekennzeichnet. Die Einwirkung der Mathematik auf die Logik besteht darin, daß man von der Logik eine Theorie des mathematischen Folgerungsbegriffes und die möglichst genaue und vollständige Erfassung der Schlußweisen der klassischen Mathematik fordert.
Die Mathematisierung der Logik besteht vor allem in der Anwendung mathematischer Methoden und in einer stärkeren Formalisierung.
Aus der Philosophie heraus entstanden und nach wie vor mit ihr eng verknüpft, hat sich die *mathematische Logik* zu einer *Teildisziplin der Mathematik* entwickelt, die für die anderen mathematischen Disziplinen *Grundlagencharakter* besitzt. Sie durchdringt alle mathematischen Gebiete und jedes menschliche Denken und gewinnt deshalb ständig an Bedeutung, zumal ihre Entwicklung noch nicht abgeschlossen ist.
Wir werden in unserem Lehrbuch nur die **Grundlagen der klassischen zweiwertigen Logik** betrachten. Dabei handelt es sich um die ersten Schritte in das umfangreiche Gebiet der mathematischen Logik, die neben der zweiwertigen Logik noch andere Logiken umfaßt.
Die mathematische Logik stellt ferner Grundlagenuntersuchungen an, bei denen formalisierte Theorien untersucht werden, und zwar besonders hinsichtlich ihrer *Axiomatisierbarkeit*, *Definierbarkeit*, *Entscheidbarkeit*, *Unabhängigkeit*, *Vollständigkeit* und *Widerspruchsfreiheit*. Man spricht dabei von **metamathematischen** Untersuchungen. Im Rahmen dieses Lehrbuches ist es allerdings nicht möglich und beabsichtigt, näher darauf einzugehen. Wir verweisen deshalb auf „Fachtheore-

tische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung" von Dipl.-Päd. HORST STARKE und Dr. WOLFRAM TÜRKE (↗ [21]). Dort wird die Frage des Aufbaus einer Theorie angeschnitten. Auf ein Problem soll aber in diesem Zusammenhang eingegangen werden, nämlich auf die Unterscheidung zwischen einer **natürlichen Sprache** und einer **Wissenschaftssprache**.
Als *natürliche Sprache* bezeichnen wir die Sprache des täglichen Gebrauchs. Bei der Verwendung für wissenschaftliche Darstellungen treten bisweilen Mängel der Sprache in Erscheinung, die sich dadurch bemerkbar machen, daß exakte Formulierungen nicht möglich sind. Die Wörter erfahren nach und nach einen Bedeutungswandel, durch verschiedene Wörter wird der gleiche Sachverhalt ausgedrückt (z. B. „Pferd", „Roß"), die Begriffe sind nicht immer fest umrissen (z. B. „kalt", „warm"), auch sind die grammatischen Regeln nicht immer eindeutig.
Deshalb entwickeln die einzelnen Wissenschaften durch Festlegungen einen bestimmten eindeutigen Fachwortschatz (*Terminologie* des Faches). Natürliche Sprache und Terminologie der Wissenschaft zusammen ergeben dann die *Wissenschaftssprache* dieser Disziplin. Dabei werden ständig Wörter aus der natürlichen Sprache in den Fachwortschatz und umgekehrt übernommen. Z. B. hat die Mathematik das Wort „Menge" von der natürlichen Sprache übernommen und ihm eine bestimmte Bedeutung zugemessen. „Plus" und „minus" gingen in die natürliche Sprache über. Das reicht aber nicht aus, um alle oben umrissenen Mängel der natürlichen Sprache zu beseitigen. Klarheit und zugleich eine gewisse Vereinfachung in der Darstellung wird in verschiedenen Wissenschaften (z. B. Chemie, Mathematik) erst dadurch erreicht, daß die Sprache **symbolisiert** bzw. **formalisiert** wird.
Im wissenschaftlichen Sprachgebrauch ist es besonders wichtig, eine klare Unterscheidung zwischen einem **Objekt** (einem Element der Realität), seinem gedanklichen **Abbild** (das nur im menschlichen Bewußtsein existiert) und einem sprachlichen **Zeichen** (das man zum Beispiel durch Hören oder Sehen wahrnehmen kann) vorzunehmen. Zwischen ihnen bestehen folgende Beziehungen.

Ein *Zeichen* ist eine Existenzform eines Abbildes.
Ein *Abbild* ist eine Bedeutung eines Zeichens.
Ein *Zeichen* ist ein Name, eine Bezeichnung für ein Objekt.
Ein *Objekt* wird durch ein Zeichen bezeichnet.

Weiterhin sind die verschiedenen *Sprachstufen* zu beachten. Eine **Theorie** bezieht sich auf bestimmte Objekte (das können z. B. auch mathematische Objekte sein, die selbst bestimmte Abstraktionsprodukte sind), bedient sich also der **Objektsprache**. Wird dagegen eine Theorie untersucht, so nennt man diese Theorie zweiter Stufe **Metatheorie**. Diese bedient sich dann einer **Metasprache**.

BEISPIEL 1 (1.2.):
a) „$2 + 2 = 4$" Diese Aussage der Mathematik (übrigens symbolisiert und formalisiert) ist ein Ausdruck in der *Objektsprache*.
b) „‚$2 + 2 = 4$' ist eine Gleichung."
Diese Aussage der Mathematik sagt etwas über die unter a) angeführte Aussage aus. Es handelt sich also hierbei um eine *metasprachliche* Formulierung.

Ein Lehrer, besonders aber, wenn er Mathematikunterricht erteilt, muß diese Zusammenhänge kennen, damit die Schüler von Klasse 1 an mit der richtigen Terminologie vertraut werden und sie auch selber benutzen lernen. Beispielsweise sind die Unterschiede zwischen „Zahl" und „Ziffer" eindeutig zu klären. Aber auch die Grenzen einer solchen Unterscheidung müssen dem Lehrer voll bewußt sein (etwa das Problem, daß man an die Tafel keine „Zahl“ schreiben kann, sondern nur das Zeichen für diese Zahl, aus Grundziffern z. B. in dezimaler Schreibweise bestehend).

1.2. Anwendung und Bedeutung der mathematischen Logik

Die Logik befaßt sich mit der Analyse von Aussagen und Beweisen, sie vermittelt klare und prägnante Vorstellungen über das Wesen des deduktiven Schließens, entwickelt das funktionale Denken und leistet einen wesentlichen Beitrag zur Herausbildung eines wissenschaftlichen und schöpferischen Denkverhaltens. Das besteht zum Beispiel im richtigen Erfassen formaler Strukturen von Aufgaben, dem Erkennen von Gemeinsamkeiten verschiedener Erscheinungen, in der Anwendung logischer Gesetze und Regeln, im Streben nach Klarheit, Einfachheit und Sparsamkeit im sprachlichen Ausdruck.
Praktische Anwendung findet die mathematische Logik auch in den technischen Wissenschaften. Über die Schaltalgebra fand sie Eingang in die Kybernetik und besonders in die Betriebsmeß-, Steuerungs- und Regelungstechnik, die für die Automatisierung unserer Industrie und Wirtschaft von grundlegender Bedeutung sind. Auch in der Elektronischen Datenverarbeitung und der Informationswissenschaft (hier gibt es bereits eine mathematische Informationstheorie) findet die mathematische Logik Anwendung. Mit Hilfe von Schaltelementen, die nach elektromechanischem, elektronischem oder pneumatischem Prinzip arbeiten, werden die Prozesse gesteuert. Aufgabe der Schaltalgebra ist es, die Analyse und Synthese solcher Schaltungen mit Mitteln der Aussagenlogik vorzunehmen. Jeder Schaltung kann man nämlich umkehrbar eindeutig einen aussagenlogischen Ausdruck zuordnen (↗ 61 ff.).
Es ist bereits heute abzusehen, daß die mathematische Logik zu einem Grundlagenfach der Technik wird.
Aus dem bisher Dargestellten ist ersichtlich, daß die Logik einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung der Menschheit hat. Das gilt sowohl in **phylogenetischer** (gesamtgesellschaftlicher) als auch in **ontogenetischer** (individueller) Hinsicht. Gesellschaft und Einzelpersönlichkeit sind darauf angewiesen, logisch zu denken, sonst wären sie nicht in der Lage, die Welt zu erkennen. Anderenfalls würde es den Menschen wie den Tieren ergehen, die im begrenzten Rahmen ihrer Instinkthandlungen oft dem eigenen Untergang entgegengehen. Der Einwand, auch ohne Studium der Logik sei man bisher im Leben gut vorangekommen, ist nur bis zu einem gewissen Grade berechtigt. Zwar gibt es Denkweisen, die sich bei der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft als zweckmäßig erwiesen haben oder im Verlaufe der Persönlichkeitsentwicklung anerzogen wurden und ein zielstrebiges Reagieren ermöglichen. Doch genügt es heute nicht mehr, auf dieser Stufe zu verbleiben.
Um erfolgreich zu sein, neue Erkenntnisse zu gewinnen, allgemein gesagt, der absoluten Wahrheit ständig näherzukommen, bedarf es der gründlichen Kenntnis der Gesetzmäßigkeiten des richtigen Denkens. Erst dann, wenn es gelingt, diese Gesetze bewußt anzuwenden, können optimale Ergebnisse erzielt werden.
Die Beherrschung mathematischer Termini, die exakte Formulierung der Sachverhalte, eine klare Beweisführung u. a. werden in allen mathematischen Disziplinen verlangt. Die Analyse eines Satzes der Geometrie erfordert ebenso wie die

Formulierung eines Gesetzes Klarheit und Präzision des Ausdrucks. Diesem Ziel dient die „Einführung in die mathematische Logik" im Teil A dieses Buches. Allerdings sollte man dabei nicht immer nur an Mathematik denken. Auch in anderen Ausbildungsfächern wird logisches Denken benötigt, um erfolgreich zu sein.
Hierin liegt auch die Bedeutung des Studiums der Logik für den Lehrer. Er muß diese Gesetzmäßigkeiten beherrschen und bewußt anwenden können. Im Unterricht kommt es darauf an, die Schüler ebenfalls zur bewußten Anwendung zu führen.
Die Mathematik hat keine eigene Logik, wenn auch von einer „mathematischen Logik" die Rede ist. Sie hat aber einen eigenen Denkstil. Für diesen Denkstil sind „treffende Kürze im Ausdruck, exakt gegliederter Überlegungsvorgang, das Fehlen logischer Sprünge und Genauigkeit in der Symbolik" charakteristisch. (↗ [4], S. 101) In der Mathematik ist die optimale Übereinstimmung mit einem formal-logischen Schema anzustreben. Der mathematische Denkstil ermöglicht im höchsten Grade — wegen dieser Übereinstimmung —, die Richtigkeit des Gedankenablaufs zu kontrollieren. Dadurch können Fehler vermieden werden.
Der mathematische Denkstil ist eine rationalisierte Form des Denkens, und somit ist die Erziehung zu einem derartigen Denken auch für alle Bereiche der Wissenschaften und für das tägliche Leben von außerordentlicher Wichtigkeit. Dieser Tatsache wird in zahlreichen staatlichen Dokumenten Rechnung getragen. Im „Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem", in dem die Aufgaben aller Bildungsstätten beim Aufbau der entwickelten sozialistischen Gesellschaft in unserer Republik festgelegt sind, heißt es im § 15 u. a.:

„... *Im Mathematikunterricht treten die sichere Beherrschung grundlegender mathematischer Lösungswege, das Arbeiten mit Rechenregeln, das logische Schließen und die Einführung in einige spezielle mathematische Arbeitsmethoden in den Vordergrund* ..."

Mit anderen Worten: Die Schüler sollen folgerichtig arbeiten und denken lernen. Dazu ist es unerläßlich, daß sie in klaren Begriffen denken und sich in einer sprachlich eindeutigen Form ausdrücken lernen. Sie können es aber nur von einem Lehrer erlernen, der selbst diese Fähigkeiten besitzt. Der Lehrer muß also stets Vorbild für seine Schüler sein. Das gilt natürlich für alle Unterrichtsfächer und für alle Bereiche des Lebens.

1.3. Arten der Begriffsbestimmung

Es kommt uns in diesem Abschnitt darauf an, Verfahren kennenzulernen, um Neues zu erklären. Weil es sich dabei um **Einteilungen** oder **Klassifizierungen** handelt, müssen wir zuerst einmal festlegen, was unter dem Begriff „Klasse" zu verstehen ist.

DEFINITION 1 (1.3.) — **Klasse von Individuen**
Eine Gesamtheit von Individuen mit (mindestens) einem gemeinsamen Merkmal nennt man **Klasse von Individuen**.
(↗ [20], S. 100)

Unter Zugrundelegung eines oder mehrerer Merkmale wird also in einer vorgegebenen Individuenmenge eine Einteilung vorgenommen. Da auch Klassen wieder gemeinsame Merkmale besitzen können, gibt es auch **Klassen von Klassen** oder **Klassen höherer Stufe**.

BEISPIEL 1 (1.3.):
Eine Grundorganisation der FDJ umfaßt z. B. alle FDJ-Gruppen eines Institutes. Diese sind aber jeweils wieder Klassen von FDJlern.

Bei Vorgabe eines anderen Merkmales kann ein Individuum natürlich wieder mit anderen Elementen in eine andere Klasse gelangen.

Wir wollen das verdeutlichen.

BEISPIEL 2 (1.3.):
Wenn als Merkmal der Klassifizierung die Mitgliedschaft in der FDJ vorgegeben ist, so wird dadurch die Bevölkerung unserer Republik (hier als Grundbereich angenommen) in zwei Klassen geteilt, nämlich in FDJ-Mitglieder und Nicht-FDJ-Mitglieder. Legt man dagegen die Tatsache, Reservist der NVA zu sein, zugrunde, ergibt sich eine andere Einteilung. Es gibt nun Bürger, die sowohl FDJler als auch Reservisten sind, aber auch solche, die nur eines von beiden sind, und schließlich diejenigen, die weder FDJler noch Reservisten sind.

Wie wir am Beispiel 2 (1.3.) gesehen haben, wird der vorgegebene Grundbereich durch die Klasseneinteilung in Teilmengen zerlegt. Dabei erfassen die Teilmengen alle Elemente des Grundbereiches, und jedes Element gehört genau einer Teilmenge an (↗ Begriffe „vollständig“ und „disjunkt“ im Teil B).

Die Verständigung mit anderen Menschen erfolgt entweder durch das geschriebene oder am unmittelbarsten durch das gesprochene Wort. Im allgemeinen sind die Wörter mit einer bestimmten Klasse von Individuen oder Klassen von Klassen verknüpft und rufen beim Menschen eine gedankliche Widerspiegelung eines Teils der objektiven Realität hervor. Diesen Vorgang werten wir als Erkenntnisprozeß, ein dialektischer Prozeß, den LENIN (↗ [14], S. 89) folgendermaßen charakterisierte:

> „*Vom lebendigen Anschauen zum abstrakten Denken und von diesem zur Praxis — das ist der dialektische Weg der Erkenntnis der Wahrheit, der Erkenntnis der objektiven Realität.*“

Das Ergebnis dieses Prozesses führt zu **Begriffen**. Begriffe stehen mit den eben definierten Klassen in untrennbarer Verbindung. Man kann wie folgt definieren (↗ [20], S. 101).

DEFINITION 2 (1.3.) — **Begriff**
Die gedankliche Widerspiegelung einer Klasse von Individuen oder einer Klasse von Klassen auf der Grundlage ihrer unveränderlichen Merkmale nennt man **Begriff**.

BEISPIEL 3 (1.3.):
Durch den Begriff „Lehrer“ wird eine Klasse von Menschen gekennzeichnet, die andere Menschen bildet und erzieht.

Von einer **impliziten Definition** spricht man, wenn das Definiendum den zu definierenden Begriff zusammen mit anderen bereits definierten Begriffen enthält.

BEISPIEL 10 (1.3.):
Eine natürliche Zahl nennt man *ungerade*, wenn sie bei Division durch 2 den Rest 1 läßt.

Im Mathematikunterricht der Unterstufe findet oft die **genetische Definition** Anwendung. Es handelt sich hier um eine Definition, die einen zu bestimmenden Gegenstand stets von seiner Entstehung, seinem Ursprung her beschreibt. Sie wird besonders dann angewandt, wenn man zeigen will, wie etwas entstanden ist.

BEISPIEL 11 (1.3.):
Wenn man in einer Ebene eine Strecke um einen Vollwinkel dreht und dabei einen Endpunkt der Strecke festhält, so beschreibt der andere Endpunkt einen *Kreis*.

Eine weitere Art der Definition findet häufig in der Mathematik Anwendung. Wir benutzen sie besonders im Teil C dieses Buches.
Es ist die **induktive Definition** oder **rekursive Definition**, ein Spezialfall der **Definition durch Axiome**. Bei dieser Art wird die Klasse des Definiendums durch eine Gesamtheit von Sätzen festgelegt, von denen jeder den Begriff nur teilweise bestimmt. Die Klasse wird systematisch auf gewissen Anfangselementen aufgebaut (↗ [20], S. 192 f.).
Als Beispiel sei auf die Definition 1 (4.1.) (logischer Ausdruck) verwiesen.
Weitere Beispiele für die Definition durch Axiome bringt der Teil C, z. B. mit dem PEANOschen Axiomensystem.

Zusammenfassend kann man nun den Begriff **Definition** folgendermaßen definieren (↗ [20], S. 200).

DEFINITION 3 (1.3.) — **Definition**
Eine **Definition** ist
a) eine Aussage, die feststellt, was ein Objekt ist, wie es entsteht oder wie man es erkennt, oder
b) eine Regel, die festsetzt, wie ein sprachliches Zeichen gebraucht werden soll, oder
c) eine Aussage bzw. eine Regel, die feststellt bzw. festsetzt, was ein sprachliches Zeichen bedeutet bzw. bedeuten soll.

Bei der Begriffsbestimmung können leicht Fehler auftreten. Wir wollen hier auf einige häufig auftretende Fehler hinweisen. Die Feststellung der Fehler setzt selbstverständlich die Kenntnis der richtigen Definition voraus.

1. Eine Definition ist *zu weit* (Begriffs*unter*bestimmung), wenn der Umfang des Definiens größer als der Umfang des Definiendums ist. Es fehlen also noch wesentliche Merkmale.

BEISPIEL 12 (1.3.):
a) *Quadrate* nennt man die rechtwinkligen Parallelogramme.
   (Es fehlt hier das wesentliche Merkmal, daß die Seiten kongruent sind.)

b) *Kommunisten* nennt man die Kämpfer für den Frieden und für die humanistischen Ideale der Menschheit.
(Hier fehlen noch wesentliche Merkmale, die zum Ausdruck bringen, daß Kommunisten aktive Vertreter des Marxismus-Leninismus sind.)

2. Eine Definition ist *zu eng* (Begriffs*über*bestimmung), wenn der Umfang des Definiens kleiner als der Umfang des Definiendums ist. Es sind also wesentliche Merkmale hinzugekommen, die für das Definiendum nicht zutreffen.

BEISPIEL 13 (1.3.):
a) *Trapez* nennt man ein konvexes Viereck mit einem Paar paralleler Seiten, bei dem an den parallelen Seiten je zwei kongruente Innenwinkel liegen.
(Damit wurde ein *gleichschenkliges* Trapez und kein beliebiges Trapez definiert. Durch Hinzufügen des wesentlichen Merkmals „kongruente Innenwinkel" hat man den zu definierenden Begriff eingeengt.)
b) *GST* heißt die Massenorganisation, deren Mitglieder sich aus Segelfliegern, Fallschirmspringern und FDJlern zusammensetzen.
(Das Gesagte bezieht sich hier offensichtlich nur auf einen Teil der GST-Mitglieder.)

Diese Fehler kann man leicht entdecken. Die Umkehrung des Satzes und das Vorsetzen von „alle" oder „jeder" bzw. das Einfügen von „nur" sind Möglichkeiten.

BEISPIEL 14 (1.3.):
a) Alle rechtwinkligen Parallelogramme sind *Quadrate*. (Das stimmt offenbar nicht.)
b) *GST* heißt die Massenorganisation, deren Mitglieder sich *nur* aus Segelfliegern, Fallschirmspringern und FDJlern zusammensetzen.
(Auch hier tritt der Fehler klar hervor.)

3. Die Definitionen dürfen *keine Zirkel* enthalten, d. h., der definierende Begriff darf den zu definierenden weder unmittelbar noch mittelbar enthalten.

BEISPIEL 15 (1.3.):
Psychologie nennt man die Wissenschaft, die sich mit der Lehre von der Psyche beschäftigt.
(Hier wurde der Begriff „Psychologie" durch sich selbst erklärt.)

4. Die Definition soll möglichst *nicht negativ* sein, weil der Begriffsumfang dann meist sehr unbestimmt ist.

In einigen Fällen ist allerdings eine negative Definition, d. h. eine Begriffsbestimmung durch Angabe von Eigenschaften, die der zu definierende Begriff nicht hat, unvermeidlich.
Ein typisches Beispiel dafür ist die Definition irrationaler Zahlen.

BEISPIEL 16 (1.3.):
Irrationale Zahlen nennt man alle reellen Zahlen, die nicht rational sind.

5. Eine Definition darf nicht mit der Aufzählung der Arten des Begriffes verwechselt werden.

BEISPIEL 17 (1.3.):
Vierecke sind Quadrat, Rechteck, Rhombus, Trapez usw.

Für eine exakte Definition sind noch mehr Gesichtspunkte zu berücksichtigen. Es dürfen u. a. keine Nebensächlichkeiten und überflüssigen Merkmale eingestreut oder zweideutige und bildhafte Ausdrücke verwendet werden. Diese Gesichtspunkte sind jedoch von untergeordneter Bedeutung.

Nicht immer sind exakte Definitionen möglich bzw. notwendig (z. B. fehlende fachliche Voraussetzungen oder zu großer Aufwand).
Oft genügt es aber, mit Hilfe eines „definitionsähnlichen Verfahrens" das zum Ausdruck zu bringen, was wesentlich ist. Zu diesen Verfahren, die man als Vorstufen bzw. als Ersatzverfahren für eine Definition ansehen kann, gehören u. a.:

1. Hinweis
Hierbei handelt es sich um das einfachste Verfahren, bei sinnlich wahrnehmbaren Objekten bestimmte Merkmale zu betonen (z. B. Farbe, Form).

BEISPIEL 18 (1.3.):
Bernsteine sehen gelb aus.

2. Beschreibung bzw. Charakteristik
Bei der Beschreibung werden eine Reihe von Merkmalen aufgezählt (möglichst genau und vollständig). Die Aufzählung kann z. B. einen zeitlichen Ablauf oder auch eine räumliche Anordnung beinhalten.

BEISPIEL 19 (1.3.):
Ein *Rechenstab* besteht aus Stabkörper, Zunge und Läufer. Dabei sind Zunge und Läufer am Stabkörper beweglich angebracht.

Die Charakteristik hebt besonders kennzeichnende Merkmale hervor.

BEISPIEL 20 (1.3.):
Es ist eine Eigenart der *Addition* von Zahlen, daß für sie in allen Zahlenbereichen das Kommutativgesetz gilt.

3. Vergleich bzw. Differenzierung
Im Gegensatz zur eigentlichen Begriffsbestimmung setzen Vergleich und Differenzierung das Vorhandensein zweier Begriffe voraus. Ähnlichkeiten bzw. Unterschiede werden festgestellt. Vergleich und Differenzierung haben oft eine ähnliche Form wie die Sachdefinition.

BEISPIEL 21 (1.3.):
a) Die *Kommunisten* bilden die Vorhut der Arbeiterklasse.
b) Der *Wasserstoff* unterscheidet sich vom Sauerstoff dadurch, daß er selbst brennt, aber die Verbrennung nicht unterhält.

1.4. **Kontrollfragen** (sollen auch durch Beispiele belegt werden)

1. Womit beschäftigt sich die Logik?
2. Welche Beziehungen bestehen zwischen Logik und Philosophie bzw. Psychologie?
3. Warum ist die Logik eng mit der Erkenntnistheorie verknüpft?
4. Weshalb sprechen wir von einer „mathematischen Logik"?
5. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Begriffen „Objekt", „Abbild" und „Zeichen"?
6. Was wissen Sie über die Anwendung der Logik im täglichen Leben und wo findet die Logik noch Anwendung?
7. Welche Stellung nimmt die mathematische Logik innerhalb der Mathematik ein?
8. Welche Bedeutung hat die Logik für den Mathematikunterricht in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen und speziell für den Unterricht in den unteren Klassen?
9. Was verstehen wir unter „Klasse", „Begriff" und „Definition"?
10. Welcher Zusammenhang besteht zwischen „Begriffsinhalt" und „Begriffsumfang"?
11. Erläutern Sie einige wesentliche Definitionsarten!
12. Wie entstehen Fehler beim Definieren?
13. Erläutern Sie Verfahren, die als Vorstufe für eine exakte Definition dienen können!

2. Einige Begriffe der mathematischen Logik

Mit Hilfe der im Teil A 1. erarbeiteten grundlegenden Einsichten werden wir jetzt das Gebiet der mathematischen Logik soweit aufbauen, wie es für unsere Belange notwendig ist. Im Teil A 2. wollen wir die aus dem Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule bereits bekannten Begriffe **Term**, **Variable** und **Konstante** näher betrachten, um mit ihrer Hilfe die wichtigen Begriffe **Aussage** und **Aussageform** zu entwickeln.

2.1. Terme, Variable, Konstanten

Eine der Eigenarten der mathematischen Ausdrucksweise ist es, Objekte, gedankliche Gebilde, Verknüpfungen und Beziehungen durch Symbole (Zeichen) darzustellen sowie diese miteinander zu verknüpfen. Die Zusammenhänge zwischen den Begriffen „Objekt“, „Abbild“ und „Zeichen“ wurden bereits angegeben (↗ 12).

An Hand eines *Beispieles* wollen wir uns die neuen Begriffe erarbeiten.

Aus einem der Hefte „Mathematische Übungen“ für Klasse 1 wurde folgender mathematischer Ausdruck entnommen.

$$8 + x < 12$$

Diese Zeichenreihe enthält verschiedenartige Zeichen.
Wir untersuchen diese Zeichen einzeln.

a) „8“ und „12“ sind Zeichen für die Zahlen Acht bzw. Zwölf. Man nennt sie **Ziffern**. Sie werden im Dezimalsystem *stets* als „Acht“ bzw. „Zwölf“ interpretiert (gedeutet). Solche Symbole heißen **Konstanten**.
b) Das Zeichen „x“ hat eine besondere Eigenschaft. Es kann aus dem Zeichenvorrat für Zahlen — in diesem Falle aus dem eines Schülers der 1. Klasse — durch eine beliebige Ziffer ersetzt werden. Mit anderen Worten: Die Schüler können an Stelle von „x“ die Ziffer für eine beliebige Zahl aus der Menge der natürlichen Zahlen von Null bis Hundert schreiben. Das Zeichen „x“ ist hier

eine **Variable**. Sie kann mit beliebigen Elementen aus dem vorgegebenen Grundbereich der Variablen belegt werden. Dabei verstehen wir unter **Grundbereich** oder **Grundmenge** (in Zeichen: G) diejenige Objektmenge, aus der die Elemente genommen werden, deren Bezeichnungen an Stelle der Variablen eingesetzt werden. In unserem konkreten Fall ist es der Bereich der natürlichen Zahlen. Der vorliegende Ausdruck „$8 + x < 12$" läßt nur die Belegungen „0", „1", „2" oder „3" zu, wenn dieser in eine wahre Aussage übergehen soll.

c) Das Zeichen „$+$" (Symbol für Addition) gehört zu den **Operationszeichen** und besitzt eine feste Bedeutung. Es bezeichnet die Verknüpfung der Konstanten „8" mit der Variablen „x".

d) Das Zeichen „$<$" bringt eine Beziehung zwischen „$8 + x$" und „12" zum Ausdruck. Es symbolisiert in der Mathematik die Kleiner-Beziehung und gehört wie auch das Gleichheitszeichen zu den **Relationszeichen**. Diese Zeichen besitzen ebenfalls eine feste Bedeutung.

e) Außerdem werden in der mathematischen Formelsprache noch gewisse **technische Zeichen** — z. B. Klammer, Komma, Semikolon — verwendet.

Nachdem wir an diesem Beispiel erkannt haben, daß uns die genannten Begriffe bereits durch den Unterricht der Schule geläufig sind, wollen wir durch Definitionen klare Abgrenzungen vornehmen.

DEFINITION 1 (2.1.) — **Konstante**
Eine **Konstante** ist ein Zeichen, das eine bestimmte feste Bedeutung besitzt.

Eine Konstante hat also im Gesamtverlauf einer Untersuchung oder beim Lösen einer Aufgabe stets ein und dieselbe Bedeutung.

BEISPIEL 1 (2.1.):
Zu den Konstanten gehören u. a. die Zeichen
„π", „e", „0", „1", „$\frac{2}{3}$", „2" (reelle Zahlen);
„λ", „c", „k" (physikalische Konstanten);
„$=$", „$<$", „$\perp$" (Relationskonstanten).

DEFINITION 2 (2.1.) — **Variable**
Eine **Variable** ist ein Zeichen für beliebige Elemente aus einem fest vorgegebenen Grundbereich.

Das heißt, eine Variable kann durch ein Zeichen für ein beliebiges Element aus der Grundmenge ersetzt werden. Man spricht dann von **Variableneinsetzung** oder **Variablenbelegung** oder **Variableninterpretation**.

BEISPIEL 2 (2.1.):
In der Mathematik werden im allgemeinen Buchstaben zur Kennzeichnung der Variablen verwendet.
So bedeuten in der Funktionsgleichung $y = 3x$ die Buchstaben „x" und „y" Variable, für die z. B. Zahlzeichen reeller Zahlen eingesetzt werden können.
In der Gleichung $a + b = b + a$ sind „a" und „b" Variable, die durch jedes Element eines beliebigen Zahlenbereiches belegt werden können, „$+$" ist wie vorher

das Zeichen für die Addition. Bei jeder beliebigen Variableninterpretation von „a“ und „b“ ergibt sich aus dieser Zeichenreihe eine wahre Aussage, sie dient zur Angabe der Kommutativität der Addition in jedem Zahlenbereich.

Die den Operations- und Relationszeichen entsprechenden Operationen und Relationen werden ausführlich im Rahmen des Teiles B „Einführung in die Mengenlehre“ behandelt. Diese Zeichen und die technischen Zeichen werden so verwendet, wie wir es aus dem Unterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule kennen.
Ein weiterer wichtiger Begriff ist der uns ebenfalls bereits bekannte Begriff **Term**. Wir verstehen darunter Konstanten, Variable und deren Zusammensetzungen mit Hilfe von Operationszeichen und technischen Zeichen. In Termen kommen keine Relationszeichen vor.
Terme sind also Bezeichnungen mathematischer Objekte oder Zeichenverknüpfungen, in denen Variable, Konstanten und Operationszeichen vorkommen und die durch Interpretation der Variablen in Bezeichnungen mathematischer Objekte übergehen. Das mathematische Objekt, dessen Bezeichnung ein Term ist bzw. in dessen Bezeichnung der Term nach Interpretation der Variablen übergeht, heißt **Wert des Terms**.
In diesem Buch bezeichnen wir Terme, die keine Variable enthalten, mit großen lateinischen Buchstaben, z. B. mit T, T_0, $T_1, \ldots, S, \ldots, S_n$. Terme, die Variable enthalten, werden wir in unseren Betrachtungen mit großen lateinischen Buchstaben und zusätzlicher Angabe der Variablen bezeichnen, z. B. mit $T(x)$, $T_1(x, y, z), \ldots$

BEISPIEL 3 (2.1.):

$T_0 = 2$; $T_1 = \frac{1}{3}$; $T_2(x) = x + 1$ mit $x \in N$ (gelesen: x ist Element von N);

$T_3(x) = x(x + 4) + 1$ mit $x \in P$ (gelesen: x ist Element von P)

Dabei sollen N bzw. P die Zeichen für die Menge der natürlichen bzw. reellen Zahlen sein.

Die Terme T_0 und T_1 bestehen nur aus Konstanten. Wird im Term $T_2(x)$ die Variable x z. B. durch 4 ersetzt (↗ 23), so erhält man $T_2(4) = 4 + 1$ oder kürzer $T_2(4) = 5$. Durch diese Belegung erhält also $T_2(x)$ den Wert Fünf.
Der Wert von $T_3(x)$ ist beispielsweise bei der Belegung $x = \sqrt{2}$ die reelle Zahl $3 + 4 \cdot \sqrt{2}$.
Bei Termen, die Variable enthalten, muß stets der Bereich angegeben werden, aus dem die Variablen belegt werden dürfen (es sei denn, daß eine generelle Vereinbarung getroffen wird). Im Term $T_2(x) = x + 1$ dürfen beispielsweise auf Grund der Angabe $x \in N$ an Stelle von x nur Zeichen für natürliche Zahlen gesetzt werden. Im Term $T_2(x) = x^2 + 4x + 1$ darf wegen $x \in P$ für die Variable x das Zeichen für eine beliebige reelle Zahl gesetzt werden.
In diesem Zusammenhang sind einige Bemerkungen zu den Begriffen „Grundbereich“ und „Definitionsbereich“ notwendig. **Der Definitionsbereich** (in Zeichen: D) eines Terms ist der *Teilbereich des Grundbereichs*, für den der Wert des Terms wieder ein Objekt des Grundbereichs ist. Es gibt Beispiele sowohl dafür, daß Grundbereich und Definitionsbereich übereinstimmen, als auch dafür, daß der Definitionsbereich nur einen echten Teilbereich des Grundbereiches ausmacht.

BEISPIEL 4 (2.1.):

a) $T(x) = 10 - x$
Grundbereich G sei der Bereich N. Definitionsbereich D ist dann nur die Menge der natürlichen Zahlen von 0 bis 10, denn z. B. $10 - 11$ bezeichnet kein Element aus N.

b) $T(x) = 8 + x$ (↗ 22)
Wenn $G = N$ gewählt wird, so ist auch $D = N$, denn die Addition führt aus N nicht heraus.

Das Ermitteln der Werte von Termen ist bereits Gegenstand des Anfangsunterrichts. Terme wie

$$2 + 1;\ 1 + 4;\ 3 + 2$$

werden schon Schülern der 1. Klasse zur Berechnung vorgelegt. Aber auch Terme, die Variable enthalten, finden wir in der Unterstufe. Solche Aufgaben werden oft in Form von Tabellen gestellt, wobei die Belegungen vorgegeben sind, z. B. in „Mathematische Übungen“ für Klasse 1, Heft 2, Best.-Nr. 00 01 10.

a	$a - 4$
4	0
6	
8	
7	
9	

a	e	$a + e$
4	5	9
5	3	
7	8	
6	4	
11	5	

2.2. Aussagen

Die marxistisch-leninistische Philosophie hat die Wechselwirkung zwischen Mensch und Umwelt als wichtigen Faktor der Entwicklung erkannt. In dieser ständigen Auseinandersetzung mit seiner Umwelt äußert sich der Mensch zu bestimmten Dingen und Erscheinungen. Dabei entstehen neben Fragen, Wünschen, Aufforderungen u. a. auch **Aussagen**. Es sind Aussagen im Sinne der Umgangssprache, denn über einen bestimmten Sachverhalt wird wirklich etwas ausgesagt. In den Aussagen spiegelt sich also die den Menschen umgebende objektive Realität wider. Da Denken und Sprache eine dialektische Einheit bilden, erfolgen diese Äußerungen mit Hilfe sprachlicher Mittel (gesprochen oder geschrieben).

Aussagen sind sinnvolle sprachliche Gebilde, die entweder **wahr** oder **falsch** sind.

Bereits die klassische Logik hat durch Sätze bzw. Prinzipien über den Wahrheitsgehalt einer Aussage Festlegungen getroffen.

Das „**Prinzip der Zweiwertigkeit**“ besagt:

Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Daraus lassen sich zwei Sätze ableiten.

Der „**Satz vom ausgeschlossenen Dritten**“ besagt:

Jede Aussage ist wahr oder falsch.

Der „**Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch**“ besagt:

Keine Aussage ist wahr und falsch zugleich.

Wir werden bei späteren Betrachtungen feststellen, daß die beiden abgeleiteten Sätze zusammen genau dasselbe besagen wie das „Prinzip der Zweiwertigkeit“. Folglich kann man auch umgekehrt herangehen, nämlich vom „Prinzip vom aus-

geschlossenen Dritten“ und vom „Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch“ ausgehend den „Satz von der Zweiwertigkeit“ ableiten.
Jeder Aussage wird somit ein **Wahrheitswert** — entweder „wahr“ (W) oder „falsch“ (F) — zugeordnet. Deshalb spricht man auch von einer **zweiwertigen Logik**.
Folgende Gebilde sind auf Grund der Festlegung Aussagen.

BEISPIEL 1 (2.2.):
a) Beim freien Fall beträgt die Beschleunigung auf unserem Planeten rund 9,81 m/s². (W)
b) Dresden ist die größte Stadt unserer Republik. (F)
c) $7 + 4 = 10$ (F)
d) Für alle reellen Zahlen a und b gilt: $a + b = b + a$. (W)

Wie wir sehen, kann es sich dabei sowohl um umgangssprachlich formulierte als auch um formalisierte Aussagen handeln. Allgemein kann man sich merken:
Eine Zeichenreihe ist dann Existenzform einer Aussage, wenn sich die Aussage auch umgangssprachlich formulieren läßt.
Allerdings stellen nicht alle Sätze der Umgangssprache Aussagen dar (↗ 25).

Man unterscheidet **Einzelaussagen** (↗ Beispiel 1 (2.2.), b) und c)), **Universalaussagen** oder **Allaussagen** (↗ Beispiel 1 (2.2.), a) und d)) und **Existentialaussagen** (z. B.: Es gibt Primzahlen, die kleiner als 100 sind).

Die Zuordnung der Wahrheitswerte (W) oder (F) zu einer Aussage ist im allgemeinen nicht so einfach wie bei den oben angeführten Beispielen. Obwohl im „Prinzip der Zweiwertigkeit“ klar zum Ausdruck kommt, daß eine Aussage entweder wahr oder falsch ist, kann nicht von jeder Aussage sofort entschieden werden, ob sie wahr oder falsch ist. Es gibt in der Mathematik noch Aussagen, die bis heute unbewiesen geblieben sind (Beweis als Wahrheitssicherung aufgefaßt).

BEISPIEL 2 (2.2.):
a) Die Aussage, daß sich jede gerade Zahl, die größer als 4 ist, als Summe zweier Primzahlen (die Zahl 2 ist ausgenommen) darstellen läßt — die sogenannte GOLDBACHsche Vermutung —, besteht seit 1742. Es ist bis heute nicht entschieden, ob sie wahr oder falsch ist.

b) Der sogenannte „Große FERMATsche Satz“, wonach die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \qquad 3^2 + 4^2 = 5^2$$

keine Lösung in von Null verschiedenen ganzen Zahlen x, y, z hat, wenn n größer als 2 ist, konnte allgemein bis heute nicht bewiesen, aber auch nicht widerlegt werden. Für $n = 2$ erhält man pythagoreische Zahlen.

Aussagen können nicht nur nach ihrem Wahrheitswert, sondern auch hinsichtlich ihres Umfanges klassifiziert werden. Darauf kommen wir im Teil A 2.3. zurück.

2.3. Aussageformen

Wir haben bereits die Zeichenreihe

$$8 + x < 12$$

dazu benutzt, einige Begriffe zu klären (↗ 22). Auch jetzt wollen wir an ihr weitere Begriffe erläutern.

„$8 + x < 12$" mit $x \in N$ stellt offensichtlich keine Aussage dar. Diese Zeichenreihe ist weder „wahr" noch „falsch". Durch Belegung der Variablen x können wir allerdings aus ihr sowohl wahre als auch falsche Aussagen bilden. So erhalten wir bei den Belegungen „0", „1", „2" und „3" stets wahre Aussagen. Bei sonstigen Belegungen entstehen stets falsche Aussagen. Wir haben es also in diesem Falle mit einer besonderen sprachlichen Äußerung zu tun, die zwar keine Aussage ist, jedoch durch Belegung der Variablen zu einer Aussage gemacht werden kann. Mathematische Ausdrücke dieser Art bezeichnet man als **Aussageformen**. Die Variable(n) in solchen Ausdrücken nennt man **freie Variable**.

DEFINITION 1 (2.3.) — **Aussageform**
Ein sprachliches Gebilde, das (mindestens eine) freie Variable enthält und zu einer Aussage wird, wenn man alle auftretenden Variablen durch Objektbezeichnungen des Grundbereichs ersetzt, nennt man **Aussageform**.

Aussageformen entstehen, wenn man zwischen Terme, die Variable enthalten, bestimmte Relationszeichen setzt. Wir bezeichnen analog zur Vereinbarung bei Termen (↗ 24) die Aussageformen mit $\mathsf{H}(x_1, \ldots, x_n)$.

Alle Elemente, deren Bezeichnungen eine Aussageform in eine Aussage überführen, bilden die **Erfüllungsgrundmenge** oder **Lösungsgrundmenge** dieser Aussageform. Die **Erfüllungsmenge** oder **Lösungsmenge** umfaßt dabei nur diejenigen Elemente der Lösungsgrundmenge, deren Bezeichnungen eine Aussageform in eine *wahre* Aussage überführen. Dabei ist der Begriff der Menge so zu verwenden, wie er auch im Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule benutzt wird, nämlich als Zusammenfassung von genau unterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit.
Die Lösungsmenge L der Aussageform $8 + x < 12$ mit $x \in N$ ist

$$L = \{0, 1, 2, 3\} .$$

Im Falle $10 - x > 5$ mit $x \in N$ ist

$$L = \{0, 1, 2, 3, 4\} .$$

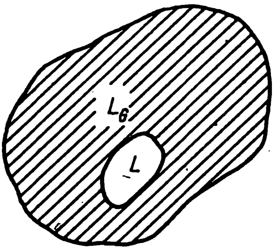
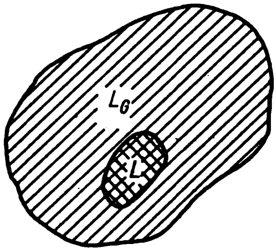
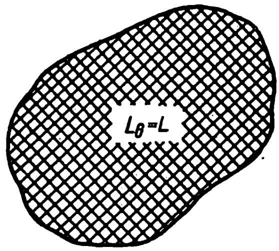
Die Aussageformen lassen sich klassifizieren.
Solche Aussageformen, die durch mindestens eine Belegung in eine wahre Aussage überführt werden können, heißen **erfüllbar**. Alle übrigen werden als **nicht erfüllbar** bezeichnet.
Unter den erfüllbaren zeichnen sich dann die **allgemeingültigen** Aussageformen aus. Das sind diejenigen, die bei allen Belegungen durch Elemente des Grundbereichs in eine wahre Aussage übergehen.

BEISPIEL 1 (2.3.):
a) Unser Beispiel $8 + x < 12$ stellt eine erfüllbare Aussageform dar (Lösungsmenge s. o.).
b) Die Aussageform $x^2 = -1$ ist dagegen im Bereich der reellen Zahlen nicht erfüllbar.
c) Die Aussageform

$$a + b = b + a$$

ist in allen Zahlenbereichen allgemeingültig, denn jede Belegung von a und b mit beliebigen Zahlen eines gewissen Zahlenbereichs führt zu einer wahren Aussage (Kommutativgesetz der Addition).

Die folgende Tabelle verdeutlicht diese Sachverhalte (↗ auch Bild 109/1).

<table>
<tr><th colspan="3">Aussageformen</th></tr>
<tr><th>Nicht erfüllbar</th><th colspan="2">Erfüllbar</th></tr>
<tr><th colspan="2">Nicht allgemeingültig</th><th>Allgemeingültig</th></tr>
<tr><td>Nicht erfüllbar, wenn die Lösungsmenge kein Element enthält
</td><td>Erfüllbar, aber nicht allgemeingültig, wenn die Lösungsmenge eine echte Teilmenge der Lösungsgrundmenge ist
</td><td>Allgemeingültig, wenn jedes Element der Lösungsgrundmenge auch Element der Lösungsmenge ist
</td></tr>
<tr><td>Kontradiktion</td><td>Neutralität</td><td>Identität</td></tr>
</table>

Durch einige Beispiele wollen wir diese *Klassifizierung der Aussageformen* besser verständlich machen.

BEISPIEL 2 (2.3.):

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 \quad \text{mit} \quad a, b \in P$$

Bei *jeder* Belegung von a und b aus dem Grundbereich erhält man eine wahre Aussage. Unser Beispiel ist also eine in der Menge der reellen Zahlen allgemeingültige Aussageform. Die Erfüllungsmenge ist die Menge aller Paare $[a; b]$, wobei a und b Elemente aus dem Grundbereich sind; sie ist in diesem Falle mit der Lösungsgrundmenge identisch. Wir haben es hier mit einer **Identität** zu tun.

BEISPIEL 3 (2.3.):

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{mit} \quad a, b \in P$$

Die folgende Tabelle zeigt, daß aus dieser Aussageform sowohl wahre als auch falsche Aussagen gebildet werden können. Die Erfüllungsmenge ist hier lediglich eine echte Teilmenge der Lösungsgrundmenge. Die Lösungsmenge besteht wie im Beispiel 2 (2.3.) ebenfalls aus geordneten Paaren von Elementen des Grundbereichs. Es handelt sich um eine **Neutralität**.

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$	Wahrheitswert
0	0	0	0	W
0	3	9	9	W
6	0	36	36	W
1	2	9	5	F
12	7	361	193	F

BEISPIEL 4 (2.3.):

$$x^2 - 5x + 10 = 0 \quad \text{mit} \quad x \in P$$

Es gibt kein Element im Grundbereich, das diese Aussageform erfüllt. Jede Belegung führt zu einer falschen Aussage. Wir haben es mit einer **Kontradiktion** zu tun.

Außer der Variablenbelegung gibt es noch eine weitere Methode, Aussageformen in Aussagen überzuführen. Mit Hilfe gewisser Formulierungen lassen sich nämlich **Variable binden**, wodurch aus der betreffenden Aussageform eine Aussage entsteht. Die Variablen werden dann als „gebunden" bezeichnet (im Gegensatz zu freien Variablen; ↗ 27). Man nennt dieses Verfahren **Quantifikation**. Darauf wird aber im Teil A 4.5. näher eingegangen. Hier seien nur die wichtigsten Fälle an Beispielen dargestellt.

BEISPIEL 5 (2.3.):

a) **Es gibt** natürliche Zahlen x, für die gilt: $8 + x < 12$.
b) **Es gibt keine** reelle Zahl x, für die gilt: $x^2 = -1$.
c) **Für alle** reellen Zahlen a und b gilt: $a + b = b + a$.
d) **Nicht für alle** natürlichen Zahlen a gilt: $a \mid 12$ (a ist Teiler von 12).
In allen Fällen handelt es sich um wahre Aussagen.

Wir haben also festgestellt:
Belegt man in einer Aussageform alle auftretenden Variablen mit Elementen aus dem zugehörigen Grundbereich oder bindet man alle auftretenden Variablen, so entstehen Aussagen. Für eine Variable, die mehrfach auftritt, müssen bekanntlich bei ein und derselben Belegung stets dieselben Elemente eingesetzt werden.

Ein Schema soll den Zusammenhang „Term—Aussageform—Aussage" bei einer Variablenbelegung verdeutlichen.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Term}\\ |\\ \text{Relations-}\\ \text{zeichen}\\ |\\ \text{Term}\end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow[\text{aus dem Grundbereich}]{\text{Belegung der Variablen mit Elementen}} \\ \text{Aussageform} \longrightarrow \text{Aussage} \\ \xrightarrow[\text{aus dem Grundbereich}]{\text{Belegung der Variablen mit Elementen}} \end{array} \left\{\begin{array}{c}\text{Wert}\\ |\\ \text{Relation}\\ |\\ \text{Wert}\end{array}\right.$$

Schließlich wollen wir noch einige mathematische Ausdrücke daraufhin betrachten, wie sie sich jetzt unter Verwendung der neuen Terminologie der mathematischen Logik darstellen. Wir wählen dazu nur mathematische Sachverhalte aus, um den Mathematikstoff der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule zu wiederholen und zu vertiefen.
Der Grundbereich für diese Beispiele soll, wenn nicht anders verlangt, die Menge N sein.

BEISPIEL 6 (2.3.):
Analyse mathematischer Ausdrücke

a) $4 \cdot 3 + 5$ b) $3 < x < 7$ c) $a : 3 - 2b$

d) $14 : 6 = 3$ e) $\sqrt{x^2 + y^2} = z$ f) $\sin \frac{\pi}{4} < 1$

g) Für jedes $x \in P$ gibt es genau ein $y \in P$ mit der Eigenschaft: $y = 2x - 1$.
h) 4 ist eine gerade Zahl, und 11 ist eine Primzahl.
i) Wenn a kleiner als b ist, so ist a^2 kleiner als b^2.
k) x ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten. (Der Grundbereich ist in diesem Falle die Menge der Parallelogramme.)

Wir untersuchen jetzt diese Beispiele dahingehend, ob sie Terme, Aussageformen oder Aussagen sind.

Zu a): Ein Term, dessen Wert 17 beträgt
Zu b): Eine **Aussageform**. Die Erfüllungsmenge $L = \{4, 5, 6\}$ ist eine echte Teilmenge der Menge N. Demnach ist diese Aussageform **erfüllbar**.
Zu c): Ein Term $T(a, b)$
Zu d): Eine **falsche Aussage**
Zu e): Eine **Aussageform**: Diese Aussageform ist **erfüllbar**. Die Erfüllungsmenge ist die Menge der „Pythagoreischen Zahlentripel".
Zu f): Eine **wahre Aussage**
Zu g): Eine **wahre Aussage**, die aus der Ausgangsform $y = 2x - 1$ durch **Variablenbindung** beider Variablen („Für jedes x ... gibt es genau ein y ...") gebildet wurde
Zu h): Eine **wahre Aussage**
Zu i): Eine **erfüllbare** und sogar **allgemeingültige Aussageform**, die aus den zwei Aussageformen $a < b$ und $a^2 < b^2$ gebildet wurde. Die Aussageform wird von *allen* geordneten Paaren erfüllt.
Zu k): Eine **erfüllbare Aussageform**. Die Erfüllungsmenge ist eine echte Teilmenge des Grundbereiches.

2.4. Umformen von Termen und Aussageformen

Wir wollen nun an einigen Beispielen zeigen, wie man Terme und Aussageformen umformen kann. Die Verfahren sind bereits aus dem Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule bekannt, so daß sich eine ausführliche Begründung erübrigt.

Das Umformen von Termen gehört zu den grundlegenden Aufgaben des Mathematikunterrichts aller Klassenstufen. Im allgemeinen will man dadurch einfachere, übersichtlichere oder zweckmäßigere Formen gewinnen. Als Ergebnis von Umformungen erhält man neue Zeichenkombinationen, die aber mit dem vorgegebenen Term äquivalent – d. h. gleichwertig – sind. Bereits in der 7. Klasse haben wir gelernt, daß zwei Aussageformen (dort waren es Gleichungen) genau dann äquivalent (gleichwertig) sind, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.
Bei Umformungen von Termen in dazu äquivalente dürfen diese Terme mit den ihnen äquivalenten durch Gleichheitszeichen verbunden werden. Dabei entsteht aus einem gegebenen Term und dem zu ihm durch Umformung äquivalenten Term eine allgemeingültige Aussageform bzw. eine wahre Aussage. Wichtig ist dabei aber die Betrachtung der entsprechenden Grund- und Definitionsbereiche, damit keine Fehler entstehen.

Das Ermitteln der Erfüllungsmenge einer Aussageform ist im allgemeinen nicht unmittelbar möglich. Belegungen aus dem vorgegebenen Grundbereich führen nur selten zum Ziel, weil die Aussageformen oft nicht leicht zu übersehen sind und dadurch viel Zeit mit Probieren vertan wird. Aus diesem Grunde formt man die vorgegebene Aussageform derart um, daß zum Schluß die Erfüllungsmenge sofort erkennbar ist. Es ist allerdings nicht immer möglich, alle Elemente der Erfüllungsmenge aufzuzählen.

An den nun folgenden Beispielen werden wir sehen, daß unsere neuen Begriffe „Term" bzw. „Aussageform" solche Begriffe wie „Bruch", „Polynom" bzw. „Gleichung" oder „Ungleichung" mit einschließen und darum umfassender sind.

BEISPIEL 1 (2.4.):

a) Im Mathematikunterricht der 3. Klasse wird der Wert des Terms

$T = 175 + 96$ ermittelt („die Aufgabe ausgerechnet").

$$\begin{aligned} 175 + 96 &= 175 + (90 + 6) \\ &= (175 + 90) + 6 \\ &= 265 + 6 \\ &= 271 \end{aligned}$$

b) In den oberen Klassenstufen sind häufig Terme umzuformen, die die Form von Brüchen oder Quotienten haben. Dabei werden u. a. solche Umformungen vorgenommen, die wir als *Faktorenzerlegung* bzw. *Erweitern* bezeichnen.

$$T(a, b) = \frac{1}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{1}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{b^2}{a^4 - a^2 b^2}$$

$$\begin{array}{l|l}
\textit{Faktoren-}\\\textit{zerlegung}\left\{\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ a^2 &= a^2 \\ a^4 - a^2 b^2 &= a^2 (a+b)(a-b) \end{aligned}\right. & \left.\begin{aligned} &a^2 (a-b) \\ &a^2 (a+b) \\ &(a+b)^2 (a-b) \\ &(a+b) \end{aligned}\right\} \textit{Erweiterungs-}\\\textit{faktoren}
\end{array}$$

Hauptnenner: $a^2 (a + b)^2 (a - b)$

$$T(a, b) = \frac{a^2 (a-b) + a^2 (a+b) - (a+b)^2 (a-b) - b^2 (a+b)}{a^2 (a+b)^2 (a-b)}$$

$$= \frac{a^2 (a-b)}{a^2 (a+b)^2 (a-b)}$$

$$= \frac{1}{(a+b)^2}$$

Bedingungen: $a \neq \pm b$
$a \neq 0$
$a, b \in P$

DEFINITION 1 (2.4.) — **Gleichung/Ungleichung**

Wird zwischen zwei Terme T_1 und T_2 ein Gleichheitszeichen gesetzt, entsteht eine **Gleichung**. Sie hat die Form

$$T_1 = T_2 .$$

Wird zwischen die Terme T_1 und T_2 das Kleiner-Zeichen gesetzt, entsteht eine **Ungleichung**. Sie hat die Form

$$T_1 < T_2 .$$

Kommen in einer Gleichung oder einer Ungleichung keine Variablen vor, so handelt es sich entweder um eine wahre oder um eine falsche Aussage.
Die Lösungsmenge einer Gleichung bzw. Ungleichung mit Variablen kann man oft ermitteln, indem Umformungen in äquivalente Gleichungen bzw. Ungleichungen mit dem Ziel vorgenommen werden, die einfachste Form der Gleichung zu erhalten. Aus dieser lassen sich dann die Lösungen ablesen.
Beim Umformen sind die folgenden Sätze anzuwenden.

$T_1 = T_2$ ist äquivalent mit $T_1 \pm T = T_2 \pm T$,
äquivalent mit $T_1 \cdot T = T_2 \cdot T$ und $T_1 : T = T_2 : T$,
wenn der Wert von $T \neq 0$.
$T_1 < T_2$ ist äquivalent mit $T_1 \pm T < T_2 \pm T$,
äquivalent mit $T_1 \cdot T < T_2 \cdot T$ bzw. $T_1 : T < T_2 : T$,
wenn der Wert von $T > 0$ und
äquivalent mit $T_1 \cdot T > T_2 \cdot T$ bzw. $T_1 : T > T_2 : T$,
wenn der Wert von $T < 0$.

BEISPIEL 2 (2.4.):
Wir führen jetzt die Umformung einer in Form einer Gleichung gegebenen Aussageform über dem Grundbereich R durch.
Bei den ersten beiden Schritten werden Terme in äquivalente umgeformt. Dann erfolgen Umformungen von Gleichungen in äquivalente entsprechend den angegebenen Sätzen.

$(x - 5)(x - 7) = (x + 4)(x - 9) - 13$	Wir wenden das *Distributivgesetz* an.
$x^2 - 7x - 5x + 35 = x^2 - 9x + 4x - 36 - 13$	Wir *fassen* gleichartige Glieder *zusammen*.
$x^2 - 12x + 35 = x^2 - 5x - 49$	Wir *subtrahieren* x^2 von beiden Termen.
$-12x + 35 = -5x - 49$	Wir *addieren* den Term $+12x + 49$ zu beiden Termen.
$84 = 7x$	Wir *dividieren* beide Terme durch 7.
$12 = x$ oder $L = \{12\}$	

BEISPIEL 3 (2.4.):
Analog wollen wir die Erfüllungsmenge einer Ungleichung ermitteln. Als Grundbereich wird R angenommen.

$-5 < \frac{6 + 3x}{4} - (2x - 6)$	Wir *multiplizieren* auf beiden Seiten mit 4 (↗ Sätze vor Beispiel 2 (2.4.)).
$-20 < 6 + 3x - 4(2x - 6)$	Wir wenden das *Distributivgesetz* an.
$-20 < 6 + 3x - 8x + 24$	Wir *fassen* gleichartige Glieder *zusammen*.
$-20 < 30 - 5x$	Wir *subtrahieren* 30 (↗ Sätze vor Beispiel 2 (2.4.)).
$-50 < -5x$	Wir *dividieren* beide Terme durch den Term (-5) (↗ Sätze vor Beispiel 2 (2.4.)).
$10 > x$	Die Relation kehrt sich um.

Die Probe erübrigt sich, wenn man sicher ist, daß man beim Umformen stets äquivalente Gleichungen bzw. Ungleichungen erhalten hat.

BEISPIEL 4 (2.4.):
Im Mathematikunterricht der Unterstufe der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule werden Ungleichungen nicht durch Umformen in äquivalente Un-

gleichungen gelöst. Die dort gestellten Aufgaben können durch systematische Belegung der Variablen aus dem Grundbereich — d. h. aus der Menge N — gelöst werden. Wir führen eine derartige Lösung an dem uns bereits bekannten Beispiel

$$8 + x < 12$$

durch, wobei der Grundbereich der Variablen x die Menge N sein soll.

x	$8 + x$	Aussagen aus $8 + x < 12$	Wahrheitswert der Aussage
0	8	$8 < 12$	W
1	9	$9 < 12$	W
2	10	$10 < 12$	W
3	11	$11 < 12$	W
4	12	$12 < 12$	F
5	13	$13 < 12$	F

Die Lösungsmenge ist also $L = \{0, 1, 2, 3\}$.
Wir haben in der Tabelle alle möglichen Belegungen im vorgegebenen Grundbereich angegeben, die zu einer wahren Aussage führen, denn der Wert von $8 + x$ wird ständig größer, wenn x durch Zeichen ständig größer werdender Zahlen belegt wird.

In den folgenden Teilen dieses Buches werden wir immer wieder auf die im Teil A 2. behandelten Grundkenntnisse zurückgreifen.

2.5. **Kontrollfragen** (sollen auch durch Beispiele belegt werden)

1. Was verstehen wir unter den Begriffen „Konstante“, „Variable“, „Operationszeichen“ und „Relationszeichen“?
2. Erläutern Sie den Begriff „Term“!
3. Was verstehen wir unter „Aussagen“?
4. Warum spricht man von „zweiwertiger Logik“?
5. Worin besteht das Charakteristikum einer Aussageform?
6. Welche Arten von Aussageformen kennen wir?
7. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen „Term“, „Aussageform“ und „Aussage“?
8. In welcher Beziehung stehen Grundbereich und Definitionsbereich bei Termen zueinander?
9. In welcher Beziehung stehen Grundbereich, Lösungsgrundmenge und Lösungsmenge bei Aussageformen zueinander?
10. Welche Möglichkeiten gibt es, um aus Aussageformen Aussagen zu gewinnen?

3. Logische Operationen

Wir werden uns jetzt ausschließlich mit **Aussagen** und **Aussageformen** befassen. Zunächst führen wir einige „Verknüpfungen" bei Aussagen ein, durch die wiederum Aussagen entstehen. Wir gewinnen dann durch Definitionen **Aussagenfunktionen** und später **Wahrheitsfunktionen**. Auf den Abstraktionsprozeß „Sachverhalte — Aussagen — Wahrheitswerte" weisen wir bei allen Operationen mit Aussagen (Aussageformen) hin. Die Erarbeitung der neuen Begriffe und die Darstellung der Zusammenhänge erfolgt zum größten Teil an Hand von Beispielen aus dem Mathematikunterricht und auch aus anderen Unterrichtsfächern der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule.

3.1. Begriffserklärungen

Wir haben bereits den Begriff „Aussage" durch seine typische Eigenschaft charakterisiert:

Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Alle Aussagen bilden eine **Klasse**, die wiederum in genau zwei **Teilklassen** — in die **Klasse der wahren Aussagen** (W) und in die **Klasse der falschen Aussagen** (F) — zerfällt. Die Wahrheit bzw. Falschheit von Aussagen kann allerdings — wie auf Seite 26 dargelegt wurde — nicht in jedem Fall sofort nachgewiesen werden. Aber auch für solche Aussagen, die weder bestätigt noch widerlegt worden sind, trifft nur eines von beiden — entweder wahr (W) oder falsch (F) — zu.

In vielen Fällen ist es recht einfach festzustellen, ob eine Aussage wahr oder falsch ist; z. B.

A_1: 7 ist ein Teiler von 1001.
A_2: 3 ist ein Teiler von 24.
A_3: 5 ist eine Primzahl.
A_4: 7 ist eine Primzahl.
A_5: 8 ist eine Primzahl.
A_6: $2 \cdot 2 = 5$
A_7: $4 = 5$
A_8: $8 \cdot 3 = 24$

Die in diesen Aussagen auftretenden Begriffe wollen wir dabei so benutzen, wie sie uns aus dem Mathematikunterricht bekannt sind.
Die Aussagen A_1, A_2, A_3, A_4, A_8 sind offensichtlich wahr (W); A_5, A_6, A_7 dagegen falsch (F). Mit anderen Worten: Die Aussagen A_1, A_2, A_3, A_4, A_8 gehören der Klasse (W) und die Aussagen A_5, A_6, A_7 der Klasse (F) an. Die Aussagen $A_1, \ldots, A_8$ sind hier so gewählt, daß sie nicht weiter in einfachere Aussagen zerlegt werden können.
Mit Hilfe dieser Aussagen bilden wir **Aussagenverbindungen** mit „und“, „oder“, „wenn ..., so ...“, usw. (Ein ähnliches Verfahren ist uns aus der Umgangssprache bekannt. Aus einfacheren Sätzen bilden wir dort mit Hilfe von Bindewörtern zusammengesetzte Sätze.) Die Aussagenverbindungen bezeichnen wir der Reihe nach einfach mit $V_1, \ldots, V_6$.

V_1: 7 ist ein Teiler von 1001 **und** 3 ist ein Teiler von 24.
V_2: 7 ist eine Primzahl **oder** 8 ist eine Primzahl.
V_3: **Entweder** 5 ist eine Primzahl **oder** 7 ist eine Primzahl.
V_4: **Weder** 7 ist eine Primzahl **noch** 8 ist eine Primzahl.
V_5: **Wenn** $2 \cdot 2 = 5$, **so** ist $4 = 5$.
V_6: Es ist **nicht** $4 = 5$.

Die Aussagenverbindungen V_1, V_2 und V_5 gehören der Klasse (W) an. Wir sagen auch, daß diese den **Wahrheitswert (W)** haben. Die Aussagenverbindungen V_3 und V_4 haben den **Wahrheitswert (F)**; sie gehören der Klasse (F) an. V_6 ist nicht durch Verknüpfung zweier Aussagen, sondern durch **Verneinung** der Aussage A_7 entstanden. Ihr Wahrheitswert ist (W).
Schon die hier angegebenen Beispiele zeigen, daß durch die Verknüpfung von Aussagen mit Hilfe der Bindewörter „und“, „oder“, ..., „nicht“ in allen Fällen wieder eine Aussage entsteht, deren Wahrheitswert sowohl von der Art der Verknüpfung als auch von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen (bei V_6 vom Wahrheitswert der verneinten Aussage) abhängig ist.
Den Vorgang der Verneinung nennen wir eine **einstellige logische Operation.** Die Verknüpfungen zweier Aussagen zu einer einzigen Aussage sind die Ergebnisse **zweistelliger logischer Operationen.**
V_6 ist das Ergebnis einer einstelligen, $V_1, \ldots, V_5$ sind Ergebnisse zweistelliger logischer Operationen. Es gibt auch dreistellige und mehrstellige logische Operationen.
Wir fassen die gegebenen Aussagen und ihre Verknüpfungen in einer Tabelle zusammen. Wegen der besseren Übersicht sollen dabei die einzelnen Aussagen mit $A_1, A_2, \ldots$ bezeichnet werden.

1. Aussage	2. Aussage	**Verknüpfung durch**	**Aussagenverbindung**	**Wahrheitswert**
A_1	A_2	und	A_1 **und** A_2	W
A_4	A_5	oder	A_4 **oder** A_5	W
A_3	A_4	entweder ... oder	**entweder** A_3 **oder** A_4	F
A_4	A_5	weder ... noch	**weder** A_4 **noch** A_5	F
A_6	A_7	wenn ..., so ...	**wenn** A_6, **so** A_7	W

In der Tabelle ist V_6 nicht aufgeführt, weil diese Aussagenverbindung nicht durch Verknüpfung von Aussagen, sondern durch Verneinung *einer* Aussage entstanden ist. Aus der Aussage A_7 wurde also durch Verneinung die Aussage „nicht A_7“ gebildet.

Wir können allgemein sagen:
Zu jeder Aussage A läßt sich ihre **Verneinung „nicht A"** bilden.
Für Verknüpfungen von Aussagen A, B gilt allgemein:
Aus gegebenen Aussagen A und B lassen sich mit Hilfe gewisser Bindewörter („und", „oder", „wenn . . ., so . . .", „. . . genau dann, wenn . . ." usw.) neue Aussagen (**Aussagenverbindungen**) — z. B. „A und B", „A oder B", „wenn A, so B". „A genau dann, wenn B" — bilden.

In unseren Beispielen haben wir die Reihenfolge der verknüpften Aussagen nicht beachtet, sie ist jedoch für den Wahrheitswert der Aussagenverbindung wesentlich.
Bei vorgeschriebener Reihenfolge der Aussagen und vorgegebener Art der Verknüpfung entsteht genau eine Aussagenverbindung. In der mathematischen Logik nennt man eine solche Verbindung von Aussagen eine **Aussagenfunktion**. Sie ist eine Funktion im mathematischen Sinne. Ihre Argumente sind Aussagen und ihre Funktionswerte ebenfalls Aussagen.

DEFINITION 1 (3.1.) — **Aussagenfunktion**
Genau dann, wenn jedem n-Tupel von Aussagen eindeutig eine Aussage zugeordnet wird, heißt die Zuordnung eine n-stellige **Aussagenfunktion**.

Dabei wollen wir unter n-Tupel eine von der Reihenfolge abhängige Menge von n Elementen (hier Aussagen) verstehen.

Die Zusammenhänge lassen sich durch folgende Darstellung (z. B. mit zwei Aussagen) veranschaulichen.

Bildung zweistelliger Aussagenverbindungen (zweistelliger Operationen)	„A" —— Verknüpfung —— „B" „A" und „B" „A" oder „B" ⋮
Zweistellige Aussagenfunktionen	„A und B" „A oder B" ⋮

Es folgen weitere Beispiele für Aussagenfunktionen.

Einstellige	**Zweistellige**	**Dreistellige**
Aussagenfunktionen		
„nicht A" „A oder A" „A und A"	„A oder B" „wenn A, so B" „A und nicht B"	„A oder B oder C" „A und B und C" „wenn A, so (B und C)"

Belegt man in diesen Aussagenfunktionen A, B, C durch Aussagen oder Aussagenverbindungen, so gelangt man wiederum zu Aussagen (↗ Definition 1 (3.1.)).

Von allen Aussagenfunktionen haben die sogenannten **klassischen Aussagenfunktionen** eine große Bedeutung,

1. weil sich die übrigen Aussagenfunktionen durch diese darstellen lassen und
2. weil man sich in der „traditionellen formalen Logik" besonders mit diesen fünf Funktionen beschäftigt hat.

Nach der Charakteristik der klassischen Aussagenfunktionen wollen wir diese zunächst beschreiben und dann Festlegungen treffen, wann die zugeordnete Aussage wahr bzw. falsch sein soll. Selbstverständlich sind diese Festlegungen aus der Umgangssprache erwachsen.

Die klassischen Aussagenfunktionen			
Name	**Argumente**	**Aussagenfunktion**	**Stellenzahl**
Negation	A	„nicht A"	einstellig
Konjunktion	A, B	„A und B"	zweistellig
Alternative	A, B	„A oder B"	zweistellig
Implikation	A, B	„wenn A, so B"	zweistellig
Äquivalenz	A, B	„A genau dann, wenn B"	zweistellig

Bei diesen Aussagenfunktionen hängt der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage nur von den Wahrheitswerten der zugehörigen Argumente — und *nicht von ihrem Inhalt* (Intension) — ab. Wir nennen sie **extensionale Aussagenfunktionen.** Neben den klassischen Aussagenfunktionen gibt es weitere Aussagenfunktionen, die ebenfalls extensional sind (↗ 42, 45).

BEISPIEL 1 (3.1.):
Eine „nichtklassische" **extensionale Aussagenfunktion** ist: „Weder A noch B".

BEISPIEL 2 (3.1.):
Nichtextensionale Aussagenfunktionen sind:
„A, weil B";
„A, während B".

Die Überprüfung der Wahrheitswerte der Einzelaussagen $A_1, A_2, \ldots, A_8$ sowie der Wahrheitswerte ihrer Verknüpfungen $V_1, V_2, \ldots, V_6$ — die ja ebenfalls Aussagen sind — zeigt uns, daß aus wahren Aussagen auf Grund der betreffenden Verknüpfung auch eine falsche und aus falschen Aussagen auch eine wahre entstehen kann (↗ Tabelle auf Seite 35).

Die Forderung, daß mit A auch „nicht A", mit A, B auch „A und B", „A oder B", „wenn A, so B", „A genau dann, wenn B" ebenfalls Aussagen sein sollen, veranlaßt uns zu gewissen Festsetzungen über ihren Wahrheitswert, da für sie u. a. auch das Prinzip der Zweiwertigkeit gültig sein muß.

Es wird festgesetzt:

(I) „**Nicht A**" ist wahr genau dann, wenn A falsch ist;
also falsch genau dann, wenn A wahr ist.

(II) „**A und B**" ist wahr genau dann, wenn A wahr ist und B wahr ist;
also falsch genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A, B falsch ist.

(III) „*A* **oder** ***B***“ ist wahr genau dann, wenn *A* wahr oder *B* wahr ist; also falsch genau dann, wenn *A* falsch und *B* falsch ist.

(IV) „**Wenn** ***A***, **so** ***B***“ ist wahr genau dann, wenn *A* falsch oder *B* wahr ist; also falsch genau dann, wenn *A* wahr und *B* falsch ist.

(V) „***A*** **genau dann, wenn** ***B***“ ist wahr genau dann, wenn *A* und *B* beide gleichzeitig wahr oder beide gleichzeitig falsch sind; also falsch genau dann, wenn *A* wahr und *B* falsch ist oder umgekehrt.

Aussagenverbindungen, die auf die oben angegebene Weise gebildet worden sind, können auch dann im Sinne der Festlegungen wahr sein, wenn sie in der Umgangssprache unnatürlich erscheinen. Z. B. ist die Aussage „Wenn Dresden an der Elbe liegt, so ist 5 eine ungerade Zahl“ im Sinne der Festlegung (IV) wahr, obwohl sie umgangssprachlich sehr seltsam klingt.
Durch die Festlegungen über den Gebrauch der Wörter „und“, „oder“ usw. treten gewisse Abweichungen vom umgangssprachlichen Gebrauch dieser Wörter auf. Es wird dadurch jedoch eine **Eindeutigkeit** im Gebrauch dieser Wörter in der Sprache der Logik erzielt, die in der Umgangssprache fehlt. Auf diese Weise können Mißverständnisse vermieden werden.

Im Verlaufe unserer Betrachtungen haben wir zunächst vom konkreten Inhalt der Aussagen bzw. Aussagenverbindungen abstrahiert und die Abstraktionsstufe der Aussagenfunktionen erreicht. Wir setzen den Abstraktionsprozeß auf der Grundlage der soeben erfolgten Festsetzungen fort.
Vollziehen wir nämlich auch noch den Übergang von den Aussagen zu den Wahrheitswerten, so erhalten wir die den Aussagenfunktionen entsprechenden **Wahrheitsfunktionen**.

DEFINITION 2 (3.1.) — **Wahrheitsfunktion**
Genau dann, wenn jedem n-Tupel von Wahrheitswerten eindeutig ein Wahrheitswert zugeordnet wird, heißt die Zuordnung eine n-stellige **Wahrheitsfunktion**.

Aussagenfunktionen und Wahrheitsfunktionen gehören verschiedenen Abstraktionsstufen an. Schon aus diesem Grunde ist es angebracht, für die Wahrheitsfunktionen andere Symbole einzuführen. Die klassischen Aussagenfunktionen, die zugehörigen klassischen Wahrheitsfunktionen sowie ihre symbolische Darstellung sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Wir verwenden dabei für einander entsprechende Aussagen- bzw. Wahrheitsfunktionen den gleichen Namen.

	Negation	**Konjunktion**	**Alternative**	**Implikation**	**Äquivalenz**
Aussagenfunktion	„Nicht A“	„A_1 und A_2“	„A_1 oder A_2“	„Wenn A_1, so A_2“	„A_1 genau dann, wenn A_2“
Wahrheitsfunktion	non w	w_1 et w_2	w_1 vel w_2	w_1 seq w_2	w_1 äq w_2
Symbolische Darstellung	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$

A, A_1, A_2 bezeichnen in der Tabelle beliebige Aussagen, w, w_1, w_2 die Wahrheitswerte dieser Aussagen.

Für die Wahrheitsfunktionen schreibt man z. B. an Stelle von „w_1 et w_2" auch „et (w_1, w_2)". Diese Schreibweise werden wir im weiteren Verlauf nicht benutzen, sondern nur die symbolische Darstellung verwenden.
p und q werden hier als Variable für Wahrheitswerte von Aussagen verwendet. Im späteren Verlauf benutzen wir sie auch als Variable für Aussagen. (Wir überspringen dabei eine Abstraktionsstufe).

Zu beachten ist der grundlegende Unterschied zwischen Aussagen- und Wahrheitsfunktionen.
Die **Argumente von Aussagenfunktionen** sind **Aussagen**, d. h., für A, A_1, A_2, ... dürfen nur Aussagen gesetzt werden.
Die **Argumente der Wahrheitsfunktionen** sind **Wahrheitswerte**, d. h., für w, w_1, w_2, ... dürfen nur Wahrheitswerte gesetzt werden.
In der symbolischen Darstellung werden die Zeichen „$\sim$", „$\wedge$", „$\vee$", „$\rightarrow$", „$\leftrightarrow$", die man **Funktoren** nennt, sowohl als Zeichen für Aussagenfunktionen als auch als Zeichen für Wahrheitsfunktionen gedeutet.

Zu jeder extensionalen Aussagenfunktion läßt sich eine entsprechende Wahrheitsfunktion angeben und umgekehrt. Die folgenden Tabellen zeigen die Werte der klassischen Wahrheitsfunktionen (↗ 37 f., (I) bis (V)).

p	$\sim p$
W	F
F	W

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Wenn uns die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen einer Aussagenverbindung bekannt sind, so können wir den Wahrheitswert der Aussagenverbindung mit Hilfe der zugehörigen Wahrheitsfunktion „ausrechnen".

BEISPIEL 3 (3.1.):
Die **Aussage** „7 ist eine Primzahl *oder* 8 ist eine Primzahl" wurde aus den Aussagen A_1: „7 ist eine Primzahl" (W) und
A_2: „8 ist eine Primzahl" (F)
gebildet. Die zugehörige **Aussagenfunktion** ist die **Alternative** „A_1 **oder** A_2". Dieser entspricht die **Wahrheitsfunktion** $p \vee q$. Nach Einsetzen der vorliegenden Wahrheitswerte erhalten wir auf Grund der Festsetzungen von Seite 37 f. den **Wahrheitswert** W. Die Aussage „7 ist eine Primzahl *oder* 8 ist eine Primzahl" hat demnach den Wahrheitswert W.

Die Zusammenhänge zwischen Aussagen- und Wahrheitsfunktionen lassen sich durch folgendes Schema darstellen.

Aussage ———— Verknüpfung mit Hilfe eines aussagenerzeugenden Bindewortes ———— Aussage — Aussagenfunktion

⇅ Aussage ⇅ Wahrheitswert ⇅

Wahrheitswert ———— Verknüpfung mit Hilfe eines Funktors ———— Wahrheitswert — Wahrheitsfunktion

Bei diesem Abstraktionsprozeß geht jede extensionale Aussagenfunktion in die entsprechende Wahrheitsfunktion über und umgekehrt. Die einzelnen Stufen des Abstraktionsprozesses und die Beziehungen dieser Stufen zueinander sind aus der folgenden Darstellung ersichtlich.

Stufe der Wahrheitswerte	Wahrheitswerte	Wahrheitsfunktionen
Stufe der Aussagen	Aussagen, Aussagenverbindungen	Aussagenfunktionen
Stufe der Sachverhalte	Sachverhalte	Beziehungen zwischen Sachverhalten

(Der Pfeil symbolisiert den Ablauf des Abstraktionsprozesses.)

Sprachlich haben wir im allgemeinen viele Möglichkeiten, ein und denselben Sachverhalt auszudrücken.
Die Umgangssprache hat den Vor- bzw. Nachteil, daß wir in ihr etwas durch verschiedene Formulierungen ausdrücken können, die gleichzeitig Wertungen oder auch gefühlsmäßige Einstellungen zu den Sachverhalten beinhalten.
In der Aussagenlogik wird von solchen Wertungen abstrahiert.

Die Ausdrucksweise der Logik ist normiert. Es wird die Bedeutung und der Gebrauch der Wörter „nicht“, „und“, „oder“, „wenn-so“, „genau dann, wenn“ eindeutig festgelegt. Diese Festlegung erfolgt im **Aussagenkalkül**.

Wir werden jetzt die klassischen Aussagenfunktionen und die entsprechenden Wahrheitsfunktionen einzeln betrachten.

3.2. Negation

Wir wollen mit der **Verneinung** einer Aussage den Gedanken ausdrücken, daß der ihr entsprechende Sachverhalt nicht zutrifft. Wenn wir eine Aussage A negieren, so erhalten wir eine andere Aussage „nicht A“ — das **Negat** von A. Durch diese Operation gewinnen wir eine Aussage, deren Wahrheitswert dem Wahrheitswert von A entgegengesetzt ist, wie bereits in der Festsetzung (I) (↗ 37) ausgesprochen wurde.

Den Sachverhalt „Der Student S löst seine Studienaufgaben nicht regelmäßig“ können wir u. a. auch wie folgt formulieren:
a) „Es ist nicht wahr, daß der Student S seine Studienaufgaben regelmäßig löst.“
b) „Der Student S löst seine Studienaufgaben unregelmäßig.“
Diese Formulierungen sind nur sprachliche Varianten ein und desselben Sachverhaltes.
Wenn wir den Satz „Der Student S löst seine Studienaufgaben regelmäßig“ mit „H“ bezeichnen, so wird durch a), b) „nicht H“ ausgedrückt.

Umgangssprachlich ist diese Bezeichnungsweise nicht gebräuchlich, denn niemand würde so sprechen: „Nicht: der Student S löst seine Studienaufgaben regelmäßig."

Das betrachtete Beispiel ist nach Definition 1 (2.3.) auf Seite 27 eine **Aussageform**; sie enthält die **freie Variable** S. Die Aussagenfunktionen haben wir aber nur für Aussagen erklärt. Nach den Ausführungen auf Seite 29 ist es jedoch immer möglich, Aussageformen in Aussagen zu überführen. Deshalb werden wir in den folgenden Teilen dieses Buches neben Aussagen auch Aussageformen in unsere Betrachtungen einbeziehen (↗ 65).

Oft wird eine Negation in der Umgangssprache in Form von verkürzenden Wortbildungen ausgedrückt. Man sagt beispielsweise an Stelle von „nicht regelmäßig" kürzer „unregelmäßig", an Stelle von „nicht ein ..." einfach „kein ..." usw.

Bei der Umformulierung gewisser Verneinungen könnten leicht Mißverständnisse auftreten, wenn man die Verneinung einfach durch Angabe gewisser **Gegensätze (konträr)** ausdrückt. Beispielsweise sind „schwarz" und „weiß", „klein" und „groß", „positiv" und „negativ" im gewissen Sinne Gegensätze, die aber nicht durch Negation ineinander überführt werden können.
Die Negation der (falschen) Aussage „3 ist kleiner als 2" ist z. B. „Es ist nicht wahr, daß 3 kleiner als 2 ist", was gleichbedeutend mit „3 ist größer *oder* gleich 2" ist; „nicht kleiner" bedeutet nämlich „größer *oder* gleich".

Wir werden die Negation hier als **Wahrheitsfunktion** definieren, obwohl der Begriff „Negation" auch für die Aussagenfunktion „nicht A" und für die Operation „Verneinung" verwendet wird.

DEFINITION 1 (3.2.) — **Negation**
Negation nennt man diejenige *einstellige Wahrheitsfunktion*, deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	$\sim p$
W	F
F	W

Die Negation entspricht der einstelligen Aussagenfunktion „nicht A". Nach der Festsetzung (I) (↗ 37) ist „nicht A" genau dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist; also falsch genau dann, wenn A wahr ist.
Durch die Negation einer Aussage A entsteht eine neue Aussage „nicht A", deren Wahrheitswert dem Wahrheitswert von A entgegengesetzt ist.

Die **Negation** als **logische Operation** findet beim sogenannten **indirekten Beweis** (↗ 5.5.2.) Anwendung.

Auf die Gesetzmäßigkeiten **mehrfacher Verneinungen** werden wir im Teil 4.3. zurückkommen.

Wir wollen hier noch auf den grundsätzlichen Unterschied zwischen **logischer Negation** und **dialektischer Negation** hinweisen.
Am klarsten kommt dieser Unterschied bei der **doppelten Verneinung** zum Ausdruck. In der formalen Logik hebt die zweite Verneinung die Wirkung der ersten auf, d. h., eine zweifach verneinte Aussage „nicht (nicht A)" ist äquivalent mit der Aussage „A".
Die dialektische Negation der Negation bedeutet dagegen nicht die Rückkehr zum „alten Zustand", sondern eine Höherentwicklung desselben.

Bei ENGELS (↗ [6], Seite 32) lesen wir zur Charakterisierung der dialektischen Negation: „Negieren in der Dialektik heißt nicht einfach nein sagen, oder ein Ding für nicht bestehend erklären ... Jede Art von Dingen hat also ihre eigentümliche Art, so negiert zu werden, daß eine Entwicklung dabei herauskommt, und ebenso jede Art von Vorstellungen und Begriffen."
Nach LENIN (↗ [14], Seite 150) ist die dialektische Negation „nicht die nackte Verneinung, ... sondern die Verneinung als Moment des Zusammenhanges, als Moment der Entwicklung unter Beibehaltung des Positiven."
In diesem Sinne ist der Aufbau des Sozialismus in der Deutschen Demokratischen Republik nicht nur die bloße Verneinung der früheren gesellschaftlichen Verhältnisse, die auf dem Privateigentum an Produktionsmitteln beruhten, sondern auch das gleichzeitige Aufbewahren aller positiven Errungenschaften — das Entwicklungsniveau der Produktivkräfte, die Erkenntnisse der Wissenschaft, die Schöpfungen der Kunst und Literatur, usw. —, die jetzt in den Dienst des gesellschaftlichen Fortschritts gestellt werden.

3.3. Konjunktion

DEFINITION 1 (3.3.) — **Konjunktion**
Konjunktion nennt man diejenige *zweistellige Wahrheitsfunktion*, deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	q	$p \wedge q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Die Konjunktion entspricht der zweistelligen Aussagenfunktion „A und B".
Nach der Festsetzung (II) (↗ 37) ist eine Aussagenverbindung „A und B" genau dann wahr, wenn beide Aussagen A, B wahr sind.
In den weiteren Ausführungen bezeichnen wir die Verknüpfung mehrerer Aussagen durch **und** bzw. synonyme Wörter ebenfalls als Konjunktion. (↗ Hinweis auf Seite 37). Solche synonymen Ausdrucksweisen sind z. B.: „sowohl A als auch B", „nicht nur A, sondern auch B", „zwar A, aber auch B".

BEISPIEL 1 (3.3.):
Konjunktionen sind:
a) „2 ist ein Teiler von 10, **aber auch** 5 ist ein Teiler von 10";
b) „3 ist eine natürliche Zahl, 4 ist eine natürliche Zahl, **und** 3,5 ist eine natürliche Zahl".

BEISPIEL 2 (3.3.):
Nicht konjunktiv wird „und" gebraucht in:
„Frieden und Sozialismus bedingen einander".

Nach der Definition 1 (3.3.) ist die Konjunktion a) im Beispiel 1 (3.3.) wahr, da beide Teilaussagen wahr sind. Die Konjunktion b) im Beispiel 1 (3.3.) ist dagegen falsch, weil eine ihrer drei Teilaussagen, „3,5 ist eine natürliche Zahl", falsch ist.

Die Beispiele 1 (3.3.) und 2 (3.3.) zeigen außerdem, daß nicht jede Konjunktion mit „und“ formuliert werden muß und nicht jede Formulierung mit „und“ eine Konjunktion ausdrückt.
Eine Konjunktion, deren Wahrheitswert W ist, besagt, daß die *Sachverhalte*, die durch die Teilaussagen widergespiegelt werden, *zusammen bestehen*. Wenn aber eine Konjunktion den Wahrheitswert F hat, so bedeutet das, daß mindestens eine von ihren Teilaussagen einen Sachverhalt nicht richtig widerspiegelt.
Demnach kann die Aussagenfunktion „A und (nicht A)“ bei keiner Belegung von A eine wahre Aussage ergeben, da die von „A“ bzw. „nicht A“ widergespiegelten Sachverhalte nicht zusammen bestehen können (↗ Festsetzung auf Seite 37).
„A und (nicht A)“ muß also bei *jeder* Belegung von A zu einer falschen Aussage führen.
Dagegen muß „nicht (A und (nicht A))“ bei *jeder* Belegung von A zu einer wahren Aussage führen.
Aussagenverbindungen, die unabhängig von der Wahrheit bzw. von der Falschheit der verknüpften Aussagen stets falsch sind, bei denen also die zugehörigen Wahrheitsfunktionen bei jeder Wahl der Argumente nur den Funktionswert F haben, nennen wir **Kontradiktionen (Widerspruch durch Verneinung** — **lat.**) (↗ 28).
Die Aussagenfunktion „A und (nicht A)“ ist eine solche Kontradiktion.
Aussagenverbindungen, die unabhängig von der Wahrheit bzw. der Falschheit der verknüpften Aussagen stets wahr sind, bei denen also die zugehörigen Wahrheitsfunktionen bei *jeder* Wahl der Argumente nur den Funktionswert W haben, nennen wir **Identitäten (übereinstimmend** — lat.) (↗ 28).
Wir betrachten noch einmal die Identität „nicht (A und (nicht A))“. Sie ist die Widerspiegelung des logischen Gesetzes „Es ist nicht wahr, daß eine Aussage A zusammen mit ihrer Verneinung ‚nicht A‘ gilt“, das dem **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch** entspricht, der bereits von ARISTOTELES erkannt und formuliert wurde (↗ 25).
Wir wollen noch auf den grundsätzlichen Unterschied zwischen **logischem Widerspruch** und **dialektischem Widerspruch** hinweisen, da der Terminus „Widerspruch“ in der Dialektik in einem ganz anderen Sinne als in der Logik gebraucht wird.
Unser Denken muß frei von logischen Widersprüchen sein, denn nur dann ist es richtig.
Aussagen sind entweder adäquate Widerspiegelungen der objektiven Realität, oder sie sind es nicht.
Die zweiwertige Logik kennt also nur Wahrheiten und Falschheiten, Zwischenstufen gibt es nicht. Logische Widersprüche sind in der Wirklichkeit nicht vorhanden. Dialektische Widersprüche finden wir überall in der objektiven Realität vor; sie sind den Dingen und Erscheinungen innewohnend (sind inhaltlich bedingt). Dialektische Widersprüche sind Triebkräfte der Entwicklung. Die Lösung dieser Widersprüche erfolgt in einem höheren Bereich. Etwa durch Negation (im dialektischen Sinne) eines bestimmten Sachverhaltes und Übergang zu einer neuen, höheren Qualität, die aber alle progressiven Elemente des Alten enthält (↗ 42).

3.4. Alternative und Disjunktion

Im Mittelpunkt dieses Teiles steht der Gebrauch des Wortes „oder“, das im ausschließenden („entweder ... oder ...“) bzw. nichtausschließenden Sinne gebraucht werden kann. Deshalb gehen wir in zwei Teilschritten (3.4.1. und 3.4.2.) vor.

3.4.1. *Alternative*

DEFINITION 1 (3.4.1.) — **Alternative**
Alternative nennt man diejenige *zweistellige Wahrheitsfunktion*, deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Die Alternative entspricht der zweistelligen Aussagenfunktion „*A* oder *B*". Nach den Festsetzungen (III) (↗ 38) ist „*A* oder *B*" genau dann wahr, wenn mindestens eine der verknüpften Aussagen wahr ist.

In den folgenden Ausführungen bezeichnen wir auch die Verknüpfung mehrerer Aussagen mit „oder" als Alternative.
Eine solche Aussagenverbindung stellt auch dann eine wahre Aussage dar, wenn *alle* verbundenen Aussagen *zusammen* wahr sind.

BEISPIEL 1 (3.4.1.)
a) „$2 \cdot 3 = 6$ oder $3 + 2 = 5$"
b) „Wir erhöhen unsere Studienergebnisse durch intensives Selbststudium oder durch Verbesserung der Studiengruppenarbeit."
c) „75% von 45,00 M sind $\frac{135}{4}$ M, 31,00 M oder 33,75 M."

Das Wort „oder" hat in den vorliegenden Aussagenverbindungen keine ausschließende Bedeutung.
In der Umgangssprache werden Teilaussagen oft zusammengefaßt. Das Wort „oder" ersetzt man dabei zuweilen durch ein Komma (↗ Beispiel 1 (3.4.1. c)).

Wegen der Extensionalität der Aussagenfunktionen ist es gleichgültig, ob die verknüpften Aussagen zueinander inhaltliche Beziehungen haben.

BEISPIEL 2 (3.4.1.):
Die Aussage
„Heute ist der 30. Februar, *oder* Kochsalz ist im destillierten Wasser bei +20 °C löslich"
ist wahr, weil eine Teilaussage dieser Verknüpfung („Kochsalz ist im destillierten Wasser bei +20 °C löslich") wahr ist.

Die von uns vorgenommene Abstraktion von inhaltlichen Beziehungen zwischen den verknüpften Aussagen ist notwendig, um den logischen Zusammenhang ergründen zu können. Durch die Festlegung für die Alternative haben wir den logischen Sinn des Wortes „oder" bestimmt. Für uns sind nur noch die Wahrheitswerte der Teilaussagen von Interesse. Wir werden auch bei anderen Verknüpfungen ähnlich verfahren.

(Über den Gebrauch des Wortes „Alternative" in der Umgangssprache ↗ 3.4.2.).

3.4.2. *Disjunktion*

DEFINITION 1 (3.4.2.) — **Disjunktion**
Disjunktion nennt man diejenige *zweistellige Wahrheitsfunktion,* deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	q	$p >\!\!-\!\!< q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Die Disjunktion entspricht der zweistelligen Aussagenfunktion „entweder A oder B". Die Verknüpfung „entweder A oder B" ist also genau dann wahr, wenn *genau eine von den beiden* Aussagen *wahr* ist. Sie ist falsch genau dann, wenn *beide* Aussagen *wahr* oder *beide falsch* sind. Die Disjunktion ist ebenfalls extensional (↗ 37). In den weiteren Ausführungen bezeichnen wir eine Verknüpfung von mehr als zwei Aussagen mit „entweder-oder" ebenfalls als Disjunktion.

Im täglichen Sprachgebrauch wird oft an Stelle von „entweder-oder" einfach „oder" gesagt, wobei dieses Wort in solchen Fällen *ausschließend* wirken soll. Wenn man in der Umgangssprache von einer Alternative spricht, so ist i. a. die von uns oben definierte Disjunktion gemeint. Diese Tatsachen müssen ständig beachtet werden.

BEISPIEL 1 (3.4.2.)
a) „Die Summe der ersten sieben natürlichen Zahlen ist *entweder* gerade *oder* ungerade."
b) „1969 ist *entweder* eine Primzahl *oder* durch 9 teilbar."

Eine wahre disjunktive Verknüpfung beider Aussagen spiegelt wider, daß von zwei möglichen Sachverhalten genau einer existiert. Um Mißverständnisse zu vermeiden, sollte man in solchen Fällen stets „entweder . . . oder" verwenden.

Das „oder" kann in der Umgangssprache auch noch in einem anderen Sinne gebraucht werden, wenn man sagen will, daß die beiden miteinander verknüpften Sachverhalte nicht zusammen existieren können. Es kann also *höchstens einer* von ihnen zutreffen.

BEISPIEL 2 (3.4.2.):
„Der Student S ist ein Arbeiterkind *oder* Bauernkind." Beides zugleich ist nicht möglich. Man kann aber „Der Student S ist *entweder* ein Arbeiterkind *oder* ein Bauernkind" nicht sagen, da er auch einer anderen Bevölkerungsschicht angehören kann.

Die Kenntnis dieser Mehrdeutigkeit im Gebrauch von „oder" in der Umgangssprache ist sehr wichtig für das logische Schließen. Außerdem veranlaßt sie uns, auf die Exaktheit unserer Formulierungen zu achten.

In Verbindung mit der Alternative wollen wir noch abschließend auf die wichtigen **Sätze der Aussagenlogik** eingehen (↗ 25).

Den **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**
„Jede Aussage ist wahr *oder* falsch"
können wir durch die Aussagenfunktion „A oder (nicht A)" darstellen. Diese Aussagenfunktion ist eine Identität, weil wir bei jeder Wahl des Argumentes A stets eine wahre Aussage erhalten.

Das Prinzip von der Zweiwertigkeit

„Jede Aussage ist *entweder* wahr *oder* falsch"

besagt, daß es zwischen einer Aussage und ihrem Negat keine dritte Möglichkeit gibt und daß eine Aussage nicht zugleich wahr *und* falsch sein kann, wie es im **Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch** unmißverständlich ausgesprochen wird.

Zusammenfassung der Aussagenverbindungen mit „oder"		
Nicht ausschließendes „oder" **Alternative**	Ausschließendes „oder" bzw. „entweder . . . oder" **Disjunktion**	„oder" **Unverträglichkeit**
Die Wahrheit der einen Aussage **schließt** die Wahrheit der anderen **nicht aus.**	Die Wahrheit der einen Aussage **schließt** die Wahrheit der anderen **aus, und** die Falschheit der einen Aussage **schließt** die Falschheit der anderen **aus.**	Die Wahrheit der einen Aussage **schließt** die Wahrheit der anderen **aus.**
Eine solche Aussagenverbindung ist wahr, genau dann, wenn **mindestens eine** der verknüpften Aussagen wahr ist.	Eine solche Aussagenverbindung ist wahr, genau dann, wenn **genau eine** der verknüpften Aussagen wahr ist.	Eine solche Aussagenverbindung ist wahr, genau dann, wenn **höchstens eine** der verknüpften Aussagen wahr ist.
„A oder B"		

Wir wollen auf die in der Tabelle hervorgehobenen Formulierungen eingehen.
Wenn wir die Worte „es existiert *mindestens ein* . . ." benutzen, so wird damit stets das Vorhandensein eines Individuums oder auch mehrerer Individuen ausgedrückt.
„Es existiert *genau ein* . . ." sagt aus, daß nicht mehr und nicht weniger als ein Individuum vorhanden ist.
„Es existiert *höchstens ein* . . ." beinhaltet das Auftreten keines oder eines Individuums.

3.5. Implikation

DEFINITION 1 (3.5.) — **Implikation**
Implikation nennt man diejenige *zweistellige Wahrheitsfunktion*, deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	q	$p \rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Die Implikation entspricht der zweistelligen Aussagenfunktion „wenn A, so B". Nach der Festsetzung (IV) (↗ 38) ist die Verknüpfung „wenn A, so B" genau

dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist, während sie in allen anderen Fällen wahr ist.
In den weiteren Ausführungen bezeichnen wir eine Verknüpfung von mehreren Aussagen mit „wenn-so" ebenfalls als Implikation.
In der Implikation „wenn A, so B" bezeichnet man A als **Vorderglied** und B als **Nachglied** der Implikation.
Diese Art der Implikation, die dem Sprachgebrauch der klassischen Mathematik entspricht, nennt man auch **materiale Implikation**. Wir abstrahieren auch hier von irgendwelchen inhaltlichen Zusammenhängen zwischen den durch die Implikation verknüpften Aussagen und betrachten nur die Wahrheit oder Falschheit dieser Aussagen. Bei materialen Implikationen wird von kausalen, konditionalen und anderen Zusammenhängen abstrahiert. Wie bei allen anderen Wahrheitsfunktionen sind nur die Wahrheitswerte der Teilaussagen von Bedeutung.

BEISPIEL 1 (3.5.):
a) „$5 > 3$, *wenn* $3 + 2 = 5$ ist."
b) „*Wenn* Goethe ‚Die Räuber' geschrieben hat, *dann* heißt er mit Vornamen Friedrich."
c) „*Wenn* es zwischen 13 und 15 Primzahlen gibt, *so* gibt es auch zwischen 5 und 15 Primzahlen."

Alle diese Implikationen haben im Sinne der Definition 1 (3.5.) den Wahrheitswert W.
Die Aussagenverbindung a) im Beispiel 1 (3.5.) ist wahr, weil beide Teilaussagen wahr sind.
Die Aussagenverbindung b) ist wahr, weil beide Teilaussagen den Wahrheitswert F haben.
In der Aussagenverbindung c) ist das Vorderglied falsch, und das Nachglied wahr. Eine solche Implikation ist aber nach der Definition 1 (3.5.) auch wahr.
Wir können im Sinne der Definition 1 (3.5.) *jede beliebige falsche* Aussage als Vorderglied mit einem *wahren* Nachglied zu einer Implikation verknüpfen, dennoch besitzt diese Aussagenverbindung den Wahrheitswert W.

BEISPIEL 2 (3.5.):
Die Aussagenverbindung
„Wenn heute der 30. Februar ist, so gibt es zwischen 5 und 15 Primzahlen"
ist wahr.

Wir können auch sagen, daß jede Implikation, deren Vorderglied falsch ist, den Wahrheitswert W hat, ohne Rücksicht darauf, ob Vorderglied und Nachglied inhaltlich zusammenhängen oder nicht.

BEISPIEL 3 (3.5.):
„Wenn es zwischen 5 und 15 Primzahlen gibt, dann gibt es zwischen 13 und 15 Primzahlen"
ist falsch, da das Vorderglied dieser Implikation wahr und ihr Nachglied falsch ist.

Über die Beispiele 1 (3.5.) bis 3 (3.5.) hinaus verwenden wir die „Wenn-so"-Verbindung z. B. auch dann, wenn die Aussagenverbindung eine Kausalbeziehung widerspiegeln soll. Eine solche ist dadurch gekennzeichnet, daß die Wirkung notwendigerweise aus der Ursache folgen muß und die Ursache der Wirkung zeitlich vorangeht.

BEISPIEL 4 (3.5.):
„Wenn man die Temperatur vom Wasser bei normalem Druck auf 100 °C erhöht, so siedet das Wasser."

Neben den bisher verwendeten Formulierungen für die Implikation werden wir im folgenden noch andere Ausdrucksweisen kennenlernen.

Wir wenden uns jetzt wieder der Implikation „wenn A, so B" zu und vertauschen in ihr die Aussagen A, B miteinander. Wir erhalten **„wenn B, so A"**. Diese so entstandene Implikation nennt man **Konversion** (**Umkehrung** — lat.) der ursprünglichen und umgekehrt. Es erhebt sich die Frage, welchen Wahrheitswert die Konversion „wenn B, so A" besitzt.

Wir vergleichen zu diesem Zwecke die Tabelle der Wahrheitswerte der Implikation „wenn A, so B", die uns nach der Definition 1 (3.5.) bereits bekannt sind, mit der entsprechenden Tabelle der Konversion bei allen möglichen Belegungen der Wahrheitswertvariablen p und q.

Implikation und **Konversion**

p	q	$p \to q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

q	p	$q \to p$
W	W	W
F	W	W
W	F	F
F	F	W

Nicht wertverlaufsgleich

Die Implikation ($p \to q$) und ihre Konversion ($q \to p$) sind **nicht wertverlaufsgleich**. Die Aussagenverbindungen „wenn A, so B" und „wenn B, so A" sind **nicht logisch gleichwertig**.

> Aussagenverbindungen, die aus gleichen Aussagen A, B, C, ... bestehen, heißen **logisch gleichwertig** genau dann, wenn sie bei beliebiger Wahl der Aussagen A, B, C, ... denselben Wahrheitswert besitzen. Wahrheitsfunktionen, die solchen Aussagenverbindungen entsprechen, sind **wertverlaufsgleich**.

Logisch gleichwertig sind z. B. die Aussagenverbindungen, die den Aussagenfunktionen

„wenn A, so B" und **„wenn (nicht B), so (nicht A)"**

entsprechen.

Letztere nennt man **Kontraposition** (**Gegensatz** — lat.) der ersten. Hierauf werden wir im Teil 4.1. (↗ 55) noch eingehen.

Die logische Gleichwertigkeit einer Implikation mit ihrer Kontraposition spielt bei mathematischen Beweisführungen — die wir im Teil A 5. behandeln werden — eine wesentliche Rolle.

BEISPIEL 5 (3.5.):
Implikation: „Wenn 2272 durch 4 teilbar ist, so ist 2272 eine gerade Zahl." (W)
Konversion: „Wenn 2272 eine gerade Zahl ist, so ist 2272 durch 4 teilbar." (W)
Kontraposition: „Wenn 2272 keine gerade Zahl ist, so ist 2272 nicht durch 4 teilbar." (W)

BEISPIEL 6 (3.5.):
Implikation: „Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es gleichschenklig."
Konversion: „Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, so ist es gleichseitig."
Kontraposition: „Wenn ein Dreieck nicht gleichschenklig ist, so ist es auch nicht gleichseitig."

Im Beispiel 6 (3.5.) ist die ursprüngliche Implikation allgemeingültig, ihre Konversion nur erfüllbar, aber nicht allgemeingültig und ihre Kontraposition wieder allgemeingültig. Dabei soll die Menge aller Dreiecke als Grundbereich vorgegeben sein.

Die Implikation, ihre Konversion und ihre Kontraposition sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

	Aussagenfunktion	**Symbolische Darstellung**
Implikation	„Wenn A_1, so A_2"	$p \to q$
Konversion	„Wenn A_2, so A_1"	$q \to p$
Kontraposition	„Wenn (nicht A_2), so (nicht A_1)"	$\sim q \to \sim p$

3.6. Äquivalenz

DEFINITION 1 (3.6.) — **Äquivalenz**
Äquivalenz nennt man diejenige *zweistellige Wahrheitsfunktion*, deren Werte wie folgt festgesetzt sind.

p	q	$p \leftrightarrow p$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Die Äquivalenz entspricht der zweistelligen Aussagenfunktion „A genau dann, wenn B". Nach der Festsetzung (V) (↗ 38) ist die Verknüpfung „A genau dann, wenn B" genau dann wahr, wenn beide Aussagen A und B wahr oder wenn beide falsch sind. In allen anderen Fällen ist die Äquivalenz falsch.

BEISPIEL 1 (3.6.):
a) „Die Zahl 2013 ist durch 3 teilbar *genau dann, wenn* ihre Quersumme durch 3 teilbar ist."
b) „Die Wega ist *genau dann* ein Planet des Sonnensystems, *wenn* $2 \cdot 2 = 5$ ist."
Beide Aussagenverbindungen sind wahr, da ihre Teilaussagen in a) beide wahr und in b) beide falsch sind.

Neben der bereits angeführten Ausdrucksweise für die Äquivalenz benutzt man auch die Formulierung **„A dann und nur dann, wenn B"**.

Die symbolische Darstellung „$p \leftrightarrow q$" läßt die Vermutung aufkommen, daß die Äquivalenz aus $p \rightarrow q$ *und* $p \leftarrow q$ zusammengesetzt ist. Wie auf Seite 56 gezeigt wird, läßt sich eine Äquivalenz wirklich auf eine Konjunktion zurückführen, deren Glieder eine Implikation und ihre Konversion sind.
Äquivalenzen und dazu logisch gleichwertige Ausdrucksweisen sind für das Beweisen von großer Bedeutung (↗ Teil A 5.).

3.7. Zusammenfassung

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir mit Hilfe einiger Wörter wie „und", „oder", usw. aus Aussagen neue Aussagen, sogenannte Aussagenverbindungen gebildet. Ebenso konnten wir aus einer Aussage durch Verneinung eine neue Aussage gewinnen. Es erhebt sich nun die Frage, ob wir mit den definierten Funktionen alle ein- und zweiwertigen logischen Operationen erfaßt haben.
Die Beantwortung dieser Frage ausschließlich vom sprachlichen Standpunkt aus wäre zumindest umständlich und vielleicht nicht lückenlos. Wir versuchen es deshalb mit mathematischen Mitteln. Dazu bildet der Abstraktionsprozeß, der Übergang von der Aussage zu ihrem Wahrheitswert und damit der Übergang von der Aussagenfunktion zur Wahrheitsfunktion, die Grundlage. Wir werden allerdings in entgegengesetzter Richtung, d. h. von der Wahrheitsfunktion zur Aussagenfunktion und vom Wahrheitswert zur Aussage, fortschreiten. So können wir mit Sicherheit für Vollständigkeit garantieren.

Wir befassen uns zunächst mit den **einstelligen Wahrheitsfunktionen.**
Die Negation ist uns bereits bekannt.
Für die Festlegung der Funktionswerte von einstelligen Wahrheitsfunktionen gibt es aber auch noch andere Möglichkeiten. Wegen der besseren Übersicht fassen wir diese Funktionswerte in einer Tabelle zusammen.

Argumente	Funktionswerte			
	(1)	(2)	(3)	(4)
W	W	W	F	F
F	W	F	W	F

Wir erkennen, daß es auf Grund der möglichen Zuordnungen *vier verschiedene* einstellige Wahrheitsfunktionen gibt.
In der Spalte (3) befinden sich die Funktionswerte der **Negation.** Diese entspricht der Aussagenfunktion „nicht A".
Mit den zu den Spalten (1), (2) und (4) gehörenden Wahrheitsfunktionen werden wir uns nicht ausführlich beschäftigen.
Dennoch interessiert uns die Frage: Welche sprachlichen Formulierungen entsprechen diesen Wahrheitsfunktionen?

BEISPIEL 1 (3.7.):

„A oder (nicht A)"	zur Spalte (1)
„A und A"	zur Spalte (2)
„Es ist nicht so, daß A"	zur Spalte (3)
„A und (nicht A)"	zur Spalte (4)

Ohne Begründung sei hier erwähnt, daß es genau 4 einstellige und 16 zweistellige Wahrheitsfunktionen gibt.

Die Funktionswerte zweistelliger Wahrheitsfunktionen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

p	q	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
W	F	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
F	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F

Wir erkennen, daß (2) die **Alternative**, (5) die **Implikation**, (7) die **Äquivalenz**, (8) die **Konjunktion** und (10) die **Disjunktion** ist. Die Funktion (15) entspricht der Aussagenfunktion „weder A_1 noch A_2". Andere, bisher nicht benannte Funktionen lassen sich z. T. umgangssprachlich sehr kompliziert formulieren.
Ferner ist ersichtlich, daß aus den ersten acht Wahrheitsfunktionen durch Negation die übrigen acht gewonnen werden können. Die zweistelligen Wahrheitsfunktionen liegen in gewisser Hinsicht „symmetrisch" zueinander. Die „Symmetrieachse" liegt zwischen den Spalten (8) und (9).
Von den 16 zweistelligen Aussagenfunktionen haben wir nur die vier klassischen und die Disjunktion genauer betrachtet.
Es ist möglich, alle Aussagenfunktionen durch einige — sogar durch eine — darzustellen. Näher können wir darauf im Rahmen unseres Anliegens nicht eingehen.
Einige Beziehungen zwischen den Aussagen- bzw. Wahrheitsfunktionen untersuchen wir in den folgenden Teilen dieses Buches.

3.8. **Kontrollfragen** (sollen auch durch Beispiele belegt werden)

1. Was verstehen Sie unter einer zweistelligen
   a) Aussagenfunktion; b) Wahrheitsfunktion?
2. Welche klassischen Aussagenfunktionen kennen Sie?
3. Worin besteht der Unterschied zwischen logischer Negation und dialektischer Negation?
4. Wird das Wort „und" stets im Sinne der Konjunktion benutzt?
5. Welche Möglichkeiten der Ausdrucksweise für die Konjunktion kennen Sie?
6. Kennzeichnen Sie die drei verschiedenen Arten im Gebrauch des Wortes „oder"!
7. Wodurch unterscheidet sich der Gebrauch des Begriffes „Alternative" in der Logik von dem in der Umgangssprache?
8. Stellen Sie Gemeinsames und Unterschiedliches der Wahrheitswerte bei Konjunktion und Alternative heraus!
9. Was verstehen Sie unter der Konversion und der Kontraposition einer Implikation?
10. Welche Beziehungen stellen Sie bei der Betrachtung von Implikation und Äquivalenz und deren Wahrheitswerttabellen fest?

4. Operationen mit logischen Ausdrücken

Im Teil A 3. sind wir dazu übergegangen, **logische Funktionen** zu erklären. Dabei erfolgte eine ständige Abstraktion von inhaltlichen Beziehungen zwischen den Aussagen. „Um diese Formen und Verhältnisse in ihrer Reinheit untersuchen zu können, muß man sie aber vollständig von ihrem Inhalt trennen, diesen als gleichgültig beiseite setzen . . .“ schrieb schon ENGELS in seinem „Anti-Dühring“ zum Abstraktionsprozeß in der Mathematik.

Im Teil A 4. treiben wir die bei den Wahrheitsfunktionen begonnene Abstraktion und Formalisierung weiter voran, lernen **Ausdrücke** kennen und decken mit dem weiteren Aufbau des **Aussagenkalküls** Gesetze auf. An einen kurzen Ausblick über die Anwendung **aussagenlogischer Beziehungen** schließen sich einige Betrachtungen über **prädikatenlogische Ausdrücke und Gesetze** an, die zusammen mit den aussagenlogischen Ausdrücken und Gesetzen die Grundlage für das im Teil A 5. folgende **logische Schließen** sind.

4.1. Aussagenlogischer Ausdruck

In den Aussagenfunktionen haben wir für **Aussagen** die *Variablen* $A, B, C, \ldots$ verwendet. Diese Variablen dürfen wir mit Elementen eines Grundbereiches — also mit Aussagen — belegen. Die Wörter „und“, „oder“ usw. sind nach ihren Merkmalen *Konstante*, die u. a. zur Kennzeichnung einer **aussagenlogischen Operation** dienen.

In den Wahrheitsfunktionen haben wir die Variablen mit $p, q, \ldots$ bezeichnet. Ihr Grundbereich besteht aus nur zwei Elementen, aus den **Wahrheitswerten W und F**. Konstante sind hier die Funktoren ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$). Durch lineare Verknüpfung von Wahrheitswertvariablen, p, q, . . . , und Funktoren sowie durch Anwendung von technischen Zeichen (Klammern usw.) können wir **Zeichenreihen** bilden.

BEISPIEL 1 (4.1.):

$$Z_1 = (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \qquad Z_2 = ((\sim \vee p_0 p_1 p_2))$$

Unter den Zeichenreihen (im folgenden mit Z, Z_1, Z_2 bezeichnet) sondern wir durch eine *induktive Definition* die **Ausdrücke des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls** aus.

DEFINITION 1 (4.1.) — **Aussagenlogischer Ausdruck**

(1) Die Variablen p_i sind **Ausdrücke**.

(2) a) Wenn Z ein Ausdruck ist, so ist auch $\sim Z$ ein Ausdruck.

b) Mit Z_1 und Z_2 sind auch $(Z_1 \wedge Z_2)$, $(Z_1 \vee Z_2)$, $(Z_1 \rightarrow Z_2)$ und $(Z_1 \leftrightarrow Z_2)$ Ausdrücke.

(3) Eine Zeichenreihe Z ist nur dann Ausdruck, wenn das auf Grund von (1) und (2) der Fall ist.

Die Zeichen $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $(\ldots)$, $p_0, p_1, p_2, \ldots$; $q, \ldots$ nennt man **Grundzeichen**.

BEISPIEL 2 (4.1.):

$$\mathsf{H}_1 = \sim (p \wedge q) \qquad \mathsf{H}_2 = (\sim p \vee \sim q)$$

$$\mathsf{H}_3 = (p \wedge q) \vee (p \vee q) \qquad \mathsf{H}_4 = (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\sim p_1 \vee p_2)$$

Mit H, H_1, $\mathsf{H}_2, \ldots$ wollen wir Ausdrücke bezeichnen.
Auf Grund der Definition 1 (4.1.) kann man überprüfen, ob die Beispiele 2 (4.1.) wirklich Ausdrücke sind.
Wir untersuchen H_1.

1. Die Variablen p und q sind nach der Definition 1 (4.1.) (1) Ausdrücke.
2. Die Zeichenreihe $(p \wedge q)$ ist nach Definition 1 (4.1.) (2b) ebenfalls ein Ausdruck.
3. Die Zeichenreihe $\sim (p \wedge q)$ ist dann nach Definition 1 (4.1.) (2a) gleichfalls ein Ausdruck.

Damit ist gezeigt, daß H_1 in der Tat ein Ausdruck des Aussagenkalküls ist. Die Zeichenreihe Z_2 im Beispiel 1 (4.1.) ist dagegen *kein* Ausdruck, weil ihr Aufbau der Definition aussagenlogischer Ausdrücke widerspricht. Im Sinne dieser Definition dürfen weder die Zeichen $\sim \vee$ noch $p_0 p_1 p_2$ unmittelbar aufeinanderfolgen.

Wir wollen jetzt zwischen den Wahrheitswerten und Wahrheitsfunktionen einerseits und den Ausdrücken andererseits einen Zusammenhang herstellen. Die Variablen $p, q, \ldots$ benutzen wir jetzt als Wahrheitswertvariablen und ebenso die Funktoren $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ als Zeichen für klassische Wahrheitsfunktionen.

Bereits bei der Behandlung der klassischen Wahrheitsfunktionen haben wir entsprechende Ausdrücke eingeführt: Für die **Negation** $\sim p$, für die **Konjunktion** $p \wedge q$, für die **Alternative** $p \vee q$, für die **Implikation** $p \rightarrow q$, für die **Äquivalenz** $p \leftrightarrow q$.
Auf der Grundlage der dort getroffenen Festlegungen (vgl. Wertetabellen der Wahrheitsfunktionen) können wir für diese Ausdrücke bei jeder Belegung der Variablen p und q mit Wahrheitswerten den zugeordneten Wahrheitswert angeben. Auch bei komplizierten aussagenlogischen Ausdrücken ist es möglich, auf dieser Grundlage Wahrheitswerte bei verschiedenen Belegungen der Variablen in endlich

vielen Schritten auszurechnen. Wie eine solche Ausrechnung bei allen möglichen Belegungen der Variablen durchgeführt wird, zeigen wir am Beispiel 3 (4.1.).

BEISPIEL 3 (4.1.):

$$H = (\sim p \vee q) \leftrightarrow (r \to q)$$

Zur Berechnung der Werte von H fertigen wir eine Tabelle an.

p	q	r	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$r \to q$	$(\sim p \vee q) \leftrightarrow (r \to q)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
W	W	W	F	W	W	W
W	W	F	F	W	W	W
W	F	W	F	F	F	W
W	F	F	F	F	W	F
F	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	W	W
F	F	W	W	W	F	F
F	F	F	W	W	W	W

Die Spalten (1), (2) und (3) sind für die Variablen p, q und r bestimmt. Für alle möglichen Belegungen der drei Variablen mit Wahrheitswerten gibt es $2^3 = 8$ verschiedene Zusammenstellungen. Jede Variable wird dabei viermal mit W und viermal mit F belegt. Um alle möglichen Belegungen der Variablen schnell und übersichtlich zu erhalten, empfehlen wir, bei der Belegung der Variablen (in diesem Falle drei Variable: p, q und r) so zu verfahren, wie es aus der Tabelle in den Spalten (1), (2) und (3) ersichtlich ist.
Die Werte in den übrigen Spalten werden aus diesen Eingangswerten auf Grund des für die jeweilige Spalte vorgegebenen Ausdrucks ermittelt.
Wir betrachten z. B. die dritte Zeile der Tabelle: p wurde dort mit W, q mit F und r mit W belegt.
In der Spalte (4) steht die Negation $\sim p$. Ihr Wert ist hier F, weil p in diesem Falle den Wert W besitzt.
Die Alternative $\sim p \vee q$ in der Spalte (5) hat ebenfalls den Wert F, weil sowohl $\sim p$ als auch q den Wert F haben.
Auch die Implikation $r \to q$ in der Spalte (6) hat in diesem Falle den Wert F, weil hier r mit W und q mit F belegt wurde.
Die Äquivalenz in der Spalte (7) hat schließlich den Wert W, da beide Ausdrücke in den Spalten (5) und (6) den Wert F haben. Ähnlich verfahren wir auch in den anderen Zeilen.

Aus dem Wertverlauf in der Spalte (7) können wir entnehmen, daß der vorgegebene Ausdruck H sowohl den Wert W als auch den Wert F annimmt. Wir nennen einen solchen Ausdruck eine **aussagenlogische Neutralität**. Der vorgegebene Ausdruck ist **erfüllbar**, weil er bei mindestens einer Belegung der Variablen den Wert W annimmt (↗ 27 über Aussageformen).
Wir erkennen, daß die Ausdrücke solche Zeichenreihen sind, die in einer formalisierten Sprache den Aussageformen entsprechen. Die Tabelle, die wir zum Ermitteln der Werte von H verwendet haben, ist eine vollständige **Wahrheitswerttabelle**. Sie enthält *alle* Werte von H, die bei *allen möglichen* Belegungen der Variablen mit Wahrheitswerten ermittelt worden sind.

Der Ausdruck $\mathsf{H} = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ nimmt bei *jeder* Belegung der Variablen den Wahrheitswert W an. (Die Aufstellung der vollständigen Wahrheitswerttabelle beweist das.) Der Ausdruck H ist eine **aussagenlogische Identität** (↗ 43). Es ist offensichtlich, daß es sich hier um die Äquivalenz zwischen einer Implikation und ihrer Kontraposition handelt (↗ 48).
Der Ausdruck im Beispiel 3 (4.1.) dagegen ist zwar erfüllbar, doch nicht allgemeingültig. Die Allgemeingültigkeit ist eine besondere Art der Erfüllbarkeit.
Außer den erfüllbaren Ausdrücken gibt es auch **nicht erfüllbare Ausdrücke**. Ein derartiger Ausdruck ist eine **aussagenlogische Kontradiktion** (↗ 43), z. B.:

$$\mathsf{H} = \sim \big((p \vee (p \vee q)) \leftrightarrow (p \vee q)\big).$$

Das kann man leicht durch Aufstellung einer vollständigen Wahrheitswerttabelle feststellen.

Wir haben für die klassischen Wahrheitsfunktionen Ausdrücke eingeführt. Umgekehrt können wir auch *Ausdrücken* wie $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ bei entsprechender Deutung (Interpretation) der Zeichen (Wahrheitswertvariable, Funktor) *Wahrheitsfunktionen zuordnen*. Wir werden demnach den Ausdruck $\sim \mathsf{H}$ als Negation von H, den Ausdruck $\mathsf{H}_1 \wedge \mathsf{H}_2$ als Konjunktion der Ausdrücke H_1 und H_2 usw. bezeichnen.
Wir können aber auch die Interpretation so ansetzen, daß die Variablen direkt als Variablen für Aussagen und die Funktoren als Zeichen für die klassischen Aussagenfunktionen gedeutet werden.
So ist z. B. die Aussage

„Wenn du ankommst und kein Quartier findest, so gehe zum Zimmernachweis am Hauptbahnhof"

durch entsprechende Belegung der Variablen in der Aussagenfunktion

„Wenn (A_1 und nicht A_2), so A_3"

entstanden. Der zugehörige aussagenlogische Ausdruck lautet

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow r\,,$$

wobei die Variablen p, q, r als Variable für A_1, A_2, A_3 und die Funktoren $\rightarrow$ als „wenn so", $\wedge$ als „und" und $\sim$ als „nicht" gedeutet werden.
Die Klarheit und Übersichtlichkeit solcher Ausdrücke erleichtert unsere Betrachtungen vor allem dann, wenn wir uns mit der Aufdeckung von Gesetzmäßigkeiten beschäftigen.
Wir haben außer für die klassischen Wahrheitsfunktionen auch noch für die Disjunktion einen Funktor eingeführt. Auch für die anderen nichtklassischen Wahrheitsfunktionen könnte man Funktoren einführen. Wir kommen aber mit den klassischen Wahrheitsfunktionen aus, weil sich alle anderen auf sie zurückführen lassen. Es wäre auch nicht zweckmäßig, zum Aufbau von Ausdrücken noch mehr Grundzeichen heranzuziehen, was aber durch Einführung weiterer Wahrheitsfunktionen nicht ausbleiben würde. Vielmehr ist eine Verminderung der Anzahl der Grundzeichen erstrebenswert, wenn auch dabei die Ausdrücke länger werden. Die Verhältnisse sind hier etwa mit der Darstellung von Zahlen in verschiedenen Positionssystemen vergleichbar. Im Dualsystem kommen wir mit zwei Grundziffern aus. Im Zehnersystem (Grundzahl 10) benötigen wir dagegen zehn Grundziffern. Dafür fällt die Darstellung vieler Zahlen in diesem Positionssystem wesentlich kürzer aus. Die Zahl 1970 beispielsweise ist im Zehnersystem vierstellig und im Dualsystem (Grundzahl 2) elfstellig darstellbar. Dennoch bevorzugt man in der EDV Zeichenreihen mit weniger Grundzeichen. Diese Probleme sind im Teil C „Aufbau der Zahlenbereiche" ausführlicher dargestellt.

Gegeben seien zwei Ausdrücke

$$\mathsf{H}_1 = p \leftrightarrow q \quad \text{und} \quad \mathsf{H}_2 = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)\,.$$

Wir sollen die zugehörigen vollständigen Wahrheitswerttabellen aufstellen. Da in beiden Ausdrücken die gleichen Variablen vorkommen, können wir ein und dieselbe Tabelle benutzen.

p	q	H_1	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	H_2
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Wertverlaufsgleich

Die beiden Ausdrücke H_1 und H_2 sind wertverlaufsgleich. Die zugehörigen Aussagenverbindungen sind logisch gleichwertig (↗ 48). H_1 und H_2 lassen sich nach der Definition 1 (4.1.) zu einem Ausdruck

$$\mathsf{H}_3 = \mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2$$

verknüpfen. Wir stellen auch zu diesem neuen Ausdruck

$$\mathsf{H}_3 = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

eine vollständige Wahrheitswerttabelle auf.

p	q	H_1	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	H_2	H_3
W	W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W
F	F	W	W	W	W	W

H_3 ist eine **aussagenlogische Identität.**

Die Form $(\mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2)$ von aussagenlogischen Identitäten ist von besonderer Bedeutung. Wenn nämlich $(\mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2)$ eine aussagenlogische Identität ist, so nimmt der Ausdruck H_1 bei jeder Belegung denselben Wert wie der Ausdruck H_2 an. H_1 und H_2 sind also wertverlaufsgleich. Die zu den Ausdrücken H_1 und H_2 gehörenden Aussagenverbindungen sind dann logisch gleichwertig. Umgekehrt sind aber auch die zu logisch gleichwertigen Aussagenverbindungen gehörenden Ausdrücke wertverlaufsgleich (↗ 48).

Man nennt Ausdrücke H_1 und H_2 **semantisch äquivalent** (oder kurz **äquivalent**), wenn die aus diesen gebildete Äquivalenz $\mathsf{H}_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_2$ allgemeingültig ist.

Wir können demnach sagen:

Zwei Ausdrücke H_1 und H_2 sind genau dann semantisch äquivalent, wenn sie wertverlaufsgleich sind.

BEISPIEL 1 (4.2.):

Die beiden Ausdrücke $\mathsf{H}_1 = p \rightarrow q$ und $\mathsf{H}_2 = \sim(p \wedge \sim q)$ sind wertverlaufsgleich.

Die Aussagenverbindungen

A_1: „Wenn die Zahl 1970 durch 10 teilbar ist, so ist sie eine gerade Zahl" und

A_2: „Es ist nicht wahr, daß die Zahl 1970 durch 10 teilbar und zugleich ungerade ist",

die den Ausdrücken H_1 und H_2 entsprechen, sind logisch gleichwertig.

4.3. Einige aussagenlogische Gesetze

Mit Hilfe vollständiger Wahrheitswerttabellen können wir entscheiden, ob zwei Ausdrücke H_1 und H_2 wertverlaufsgleich sind. Damit können wir auch zeigen, ob ein aus H_1 und H_2 gebildeter Ausdruck, z. B. $H_1 \leftrightarrow H_2$, eine aussagenlogische Identität ist. Wertverlaufsgleichheit und aussagenlogische Identität sind jedoch nicht völlig ein und dasselbe. Die Wertverlaufsgleichheit ist eine Beziehung zwischen zwei Ausdrücken, und die Eigenschaft, eine Identität zu sein, ist eine Eigenschaft eines Ausdrucks.

Fragen wir nach der Wertverlaufsgleichheit, so vergleichen wir die Wahrheitswerte *zweier* Ausdrücke bei allen möglichen Belegungen.

Fragen wir nach der Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks, z. B. danach, ob $H_1 \leftrightarrow H_2$ eine aussagenlogische Identität ist, so wollen wir feststellen, ob dieser eine Ausdruck bei jeder Belegung den Wahrheitswert W erhält. In diesem Falle wird also der Wahrheitswert eines aus den Ausdrücken H_1 und H_2 gebildeten neuen Ausdruckes $H_1 \leftrightarrow H_2$ bei allen möglichen Belegungen ermittelt.

Aus wertverlaufsgleichen Ausdrücken H_1 und H_2 lassen sich stets mit dem Funktor „$\leftrightarrow$" aussagenlogische Identitäten, d. h. allgemeingültige Ausdrücke bilden.

Mit Hilfe vollständiger Wahrheitswerttabellen können wir zeigen, daß z. B.

$$p \wedge (q \wedge r) \quad \text{und} \quad (p \wedge q) \wedge r;$$
$$p \vee (q \vee r) \quad \text{und} \quad (p \vee q) \vee r;$$
$$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \quad \text{und} \quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$$

wertverlaufsgleich sind.

Für die Konjunktion, Alternative und Äquivalenz gilt also das **Assoziativgesetz.**

Für die Implikation gilt es nicht, d. h., die beiden Ausdrücke $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ und $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ sind nicht wertverlaufsgleich.

Aus den soeben angegebenen wertverlaufsgleichen Ausdrücken lassen sich also aussagenlogische Identitäten bilden.

Für die Konjunktion, Alternative und Äquivalenz gilt hinsichtlich der Wertverlaufsgleichheit das **Kommutativgesetz.**

Für die Implikation gilt es jedoch nicht, denn der Ausdruck $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ ist *keine* aussagenlogische Identität. Wir können das mit Hilfe einer vollständigen Wahrheitswerttabelle leicht nachprüfen (↗ 48).

> SATZ 1 (4.3.)
> Für die **Konjunktion, Alternative** und **Äquivalenz** gelten hinsichtlich der Wertverlaufsgleichheit das **Assoziativgesetz** und das **Kommutativgesetz.**
> Für die Implikation gilt *weder* das Assoziativgesetz *noch* das Kommutativgesetz.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe vollständiger Wahrheitswerttabellen.

SATZ 2 (4.3.)
Die Konjunktion ist bezüglich der Alternative beiderseits distributiv und umgekehrt, d. h., die folgenden Ausdrücke sind **aussagenlogische Identitäten**.
(1) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(2) $(q \vee r) \wedge p \leftrightarrow (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$
(3) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(4) $(q \wedge r) \vee p \leftrightarrow (q \vee p) \wedge (r \vee p)$

Der Beweis des Satzes 2 (4.3.) erfolgt mit Hilfe vollständiger Wahrheitswerttabellen.

Wir können die linksseitige Distributivität (1) bzw. (3) mit Hilfe des Kommutativgesetzes aus der rechtsseitigen Distributivität (2) bzw. (4) gewinnen. Die Ausdrücke (1), . . . , (4) sind **aussagenlogische Identitäten** (Beweis durch Wahrheitswerttabellen).
Assoziativität, **Kommutativität** und **Distributivität** sind wichtige Eigenschaften zahlreicher Operationen. Sie werden für einige Rechenoperationen bereits im Mathematikunterricht in Klasse 1 behandelt.

Bei der sprachlichen Formulierung von Aussagenverbindungen wird meistens die kürzere Form verwendet, beispielsweise $(q \wedge r) \vee p$ an Stelle von $(q \vee p) \wedge (r \vee p)$.

BEISPIEL 1 (4.3.):
„Der Ausdruck ist kurz und übersichtlich oder er läßt sich leicht umformen"
an Stelle von
„Der Ausdruck ist kurz, oder er läßt sich leicht umformen, und er ist auch übersichtlich, oder er läßt sich leicht umformen"

In Verbindung mit der Distributivität sei noch erwähnt, daß die **Implikation bezüglich der anderen Wahrheitsfunktionen linksseitig distributiv**, jedoch *nicht rechtsseitig distributiv* ist.

Die folgenden Ausdrücke sind allgemeingültig.
(5) $p \rightarrow (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
(6) $p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$
(7) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
(8) $p \rightarrow (q \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

SATZ 3 (4.3.)
Ist die Konklusion (Nachglied) einer Implikation ebenfalls eine Implikation, so lassen sich die beiden Prämissen (Vorderglieder) der Implikationen konjunktiv **zu einer Prämisse verbinden** und umgekehrt.

Satz 3 (4.3.) besagt, daß der folgende Ausdruck eine aussagenlogische Identität ist.
(9) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$
(Satz der Prämissenverbindung)

Satz 3 (4.3.) läßt sich auch auf mehr als zwei Prämissen übertragen.

BEISPIEL 2 (4.3.):
„Wenn die Zahl 780 durch 3 teilbar ist, dann ist sie, wenn sie gerade ist, auch durch 6 teilbar"

ist logisch gleichwertig mit
„Wenn die Zahl 780 durch 3 teilbar und gerade ist, so ist sie auch durch 6 teilbar".

Auch der folgende Ausdruck ist eine aussagenlogische Identität.

$$(10)\quad (p \wedge q) \rightarrow r \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

In Worten ausgedrückt bedeutet das, daß sich eine Konjunktion als Prämisse einer Implikation in mehrere einfache **Prämissen aufspalten** läßt.

SATZ 4 (4.3.)
Ein doppelt verneinter Ausdruck ist wertverlaufsgleich mit dem zugehörigen verneinten Ausdruck, d. h.
(11) $\sim\sim p \leftrightarrow p$
ist eine **aussagenlogische Identität.**

Beweis mit Hilfe einer vollständigen Wahrheitswerttabelle:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$\sim\sim p \leftrightarrow p$
W	F	W	W
F	W	F	W

Wertverlaufsgleich

SATZ 5 (4.3.)
Die **Äquivalenzen**
(12) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
(13) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow p)$
(14) $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim p)$
(15) $(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
sind **aussagenlogische Identitäten.**

Die Aussagen (12) bis (15) bezeichnet man als **Kontrapositionssätze**, da auf den rechten Seiten der Äquivalenzen die Kontrapositionen der linken Seiten stehen und umgekehrt.

4.4. Umformen aussagenlogischer Ausdrücke

Die Wertverlaufsgleichheit zweier Ausdrücke haben wir bisher stets mit Hilfe vollständiger Wahrheitswerttabellen nachgewiesen. Mit ihrer Hilfe konnten wir entscheiden, ob ein vorgegebener Ausdruck eine aussagenlogische Identität ist oder nicht. Auf diesem Wege haben wir zahlreiche wertverlaufsgleiche Ausdrücke kennengelernt.

Weitere Identitäten, d. h. aussagenlogische Gesetze, gewinnen wir aus vorgegebenen Ausdrücken mit Hilfe von **Substitutionen und Umformungen** in **äquivalente Ausdrücke**, ähnlich, wie es aus dem Arithmetikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule bekannt ist.

SATZ 1 (4.4.)
Wenn man in einem allgemeingültigen Ausdruck, d. h. in einer aussagenlogischen Identität, eine Aussagenvariable an allen Stellen, an denen sie in dem betreffenden Ausdruck vorkommt, durch ein und denselben beliebigen Ausdruck ersetzt, so erhält man wieder einen allgemeingültigen Ausdruck.

BEISPIEL 1 (4.4.):
Wir setzen in dem allgemeingültigen Ausdruck

$$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

für die Variable q an allen Stellen den Ausdruck $(r \to s)$ ein und erhalten einen ebenfalls allgemeingültigen Ausdruck.

$$\big(p \to (r \to s)\big) \leftrightarrow \big(\sim p \vee (r \to s)\big)$$

Erwähnenswert für Umformungen semantisch äquivalenter Ausdrücke ist die folgende Regel.

SATZ 2 (4.4.)
Wenn man in einem Ausdruck H_1 einen gewissen Teilausdruck H' durch einen zu H' wertverlaufsgleichen Ausdruck H'' ersetzt, so ist der dabei entstehende Ausdruck H_2 zum Ausdruck H_1 wertverlaufsgleich. Der Ausdruck H_1 geht dabei durch Ersetzung von H' durch H'' in den Ausdruck H_2 über.
Wenn der Teilausdruck H' an mehreren Stellen in H_1 vorhanden ist, so kann H' überall dort, wo dieser vorkommt, durch H'' ersetzt werden.

BEISPIEL 2 (4.4.):
Es sei $\mathsf{H}_1 = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.
Ein Teilausdruck von H_1 ist $\mathsf{H}' = p \to q$.
Es ist ferner $p \to q =_w \sim q \to \sim p$ („$=_w$" bedeutet „wertverlaufsgleich").
Wir ersetzen H' durch

$$\mathsf{H}'' = \sim q \to \sim p$$

und erhalten

$$\mathsf{H}_2 = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p) \wedge (q \to p)\,.$$

H_1 und H_2 sind wertverlaufsgleich.

Die Identitäten

$$(16)\quad \sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$
$$(17)\quad \sim (p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

bezeichnet man häufig als die „**De Morganschen Regeln**". Diese gelten auch für Ausdrücke mit mehr als zwei Variablen.

Im Beispiel 3 (4.4.) wollen wir einige aussagenlogische Gesetze anwenden.

BEISPIEL 3 (4.4.):
Wir untersuchen die folgenden Aussagenverbindungen auf ihre logische Gleichwertigkeit.

a) Wenn wir den Aufbau des Sozialismus vollenden wollen, so müssen wir, wenn wir die ökonomischen Gesetze bewußt anwenden, vorrangig die Arbeitsproduktivität steigern.
b) Wenn wir den Aufbau des Sozialismus vollenden wollen und die ökonomischen Gesetze bewußt anwenden, so müssen wir vorrangig die Arbeitsproduktivität steigern.
c) Wenn wir die ökonomischen Gesetze bewußt anwenden, so müssen wir, wenn wir den Aufbau des Sozialismus vollenden wollen, vorrangig die Arbeitsproduktivität steigern.

Diese Sätze bestehen jeweils aus drei Teilaussagen, die wir wie folgt symbolisieren.
p: Wir wollen den Aufbau des Sozialismus vollenden.
q: Wir wenden die ökonomischen Gesetze bewußt an.
r: Wir müssen die Arbeitsproduktivität vorrangig steigern.

Auf Grund dieser Festlegungen entspricht dem Satz
a) der Ausdruck $H_1 = p \rightarrow (q \rightarrow r)$;
b) der Ausdruck $H_2 = (p \wedge q) \rightarrow r$;
c) der Ausdruck $H_3 = q \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Sind diese drei Ausdrücke wertverlaufsgleich?
Wir versuchen, die auf den vorangegangenen Seiten erarbeiteten Gesetzmäßigkeiten auf die drei Ausdrücke anzuwenden.
Dabei stellen wir fest, daß nach Satz 3 (4.3.) H_1 und H_2 wertverlaufsgleich sind.
Wegen der Kommutativität der Konjunktion gilt

$$(p \wedge q) \rightarrow r =_w (q \wedge p) \rightarrow r .$$

Unter Anwendung von Satz 3 (4.3.) „von rechts nach links" erhalten wir die Wertverlaufsgleichheit zwischen H_2 und H_3.
Unter zweimaliger Anwendung von Satz 3 (4.3.) und der Kommutativität der Konjunktion ist es ebenfalls möglich, nachzuweisen, daß H_1 und H_3 wertverlaufsgleich sind.
Eine vollständige Wahrheitswerttabelle für alle drei Ausdrücke führt zum gleichen Ziel.
Als Ergebnis erhalten wir, daß alle drei Ausdrücke untereinander wertverlaufsgleich und somit die Aussagenverbindungen a), b), c) logisch gleichwertig sind.

4.5. Anwendungen

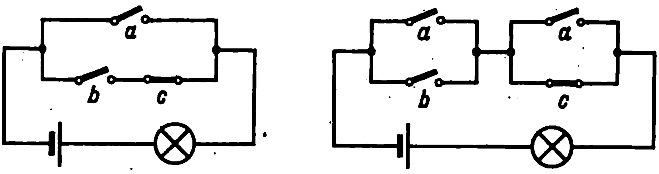
Der im Teil A 4.1. aufgebaute Aussagenkalkül ist nicht nur zur Behandlung logischer Probleme geeignet. Aus der Tatsache, daß jede Aussage bzw. Aussagenverbindung genau einen von zwei möglichen Wahrheitswerten annimmt, ergibt sich die Möglichkeit der Zuordnung zwischen Aussagenverbindungen einerseits und zwei einander ausschließenden „Zuständen" andererseits.
Z. B. ist eine Zuordnung von Aussagenverbindungen zu elektrischen Schaltungen möglich. Man benutzt deshalb bei der Entwicklung oder auch bei der Vereinfachung elektrischer Schaltpläne Mittel und Verfahren der Aussagenlogik. In der EDV hat dieser Umstand zu sehr bedeutenden Ergebnissen geführt. Somit findet die Aussagenlogik bei der wissenschaftlichen Lenkung und Leitung der Produktion unmittelbar Anwendung.
Die grundlegenden Beziehungen können verhältnismäßig einfach dargestellt werden.

Wir betrachten nur Reihen- und Parallelschaltungen mit den Schalterstellungen „ein“ und „aus“.
Wir nehmen folgende Zuordnung vor.
Zwei Schaltungen nennen wir **elektrisch gleichwertig**, wenn sie stets ein und dasselbe Leitungsverhalten zeigen (Stromfluß, Stromunterbrechung). Mit gleichen Symbolen bezeichnete Schalter sollen in beiden Schaltungen zugleich in Arbeitsstellung oder zugleich in Ruhestellung sein (↗ Tabelle 1).

Tabelle 1

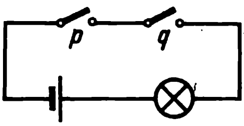
Aussagenvariable	*Schalter*
p	 a *Arbeitskontakt*
$\sim p$	 a *Ruhekontakt*

Die Schaltungen im Bild 62/1 beispielsweise sind elektrisch gleichwertig.



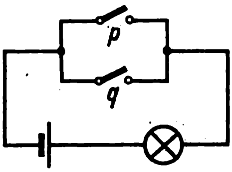
62/1 $a \vee (b \wedge \sim c)$ $(a \vee b) \wedge (a \vee \sim c)$

Wir betrachten nunmehr einige Beispiele einfacher Schaltungen und ihren Zusammenhang mit den klassischen Aussagenverbindungen.
Die Zuordnung von Aussagenvariablen zu Kontakten liefert zu jeder Schaltung einen aussagenlogischen Ausdruck, der dieser Schaltung eineindeutig entspricht.
Die **Reihenschaltung** entspricht einer **Konjunktion** (↗ Bild 62/2).



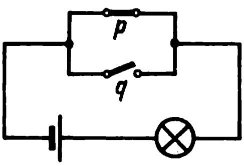
$p \wedge q$

62/2



$p \vee q$

62/3



$p \rightarrow q$
$(\sim p \vee q)$

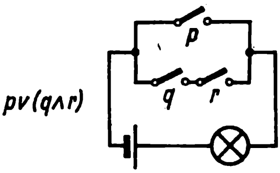
62/4

Die **Parallelschaltung** entspricht einer **Alternative** (↗ Bild 62/3).
Die **Parallelschaltung mit unterschiedlichen Kontaktstellungen** entspricht einer **Implikation** (Bild 62/4).
Eine Schaltung ist genau dann stromdurchlässig, wenn der zugeordnete Ausdruck H den Wahrheitswert W besitzt und umgekehrt (↗ Tabelle 2).

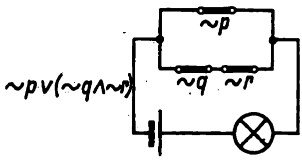
Tabelle 2

Wahrheitswert	*Stromtätigkeit*
W	*Stromfluß* *Schalter wird betätigt*
F	*Stromunterbrechung* *Schalter bleibt unbetätigt*

BEISPIEL 1 (4.5.):
a) Dem Ausdruck $p \vee (q \wedge r)$ entspricht die Schaltung im Bild 63/1.
b) Dem Ausdruck $\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$ entspricht die Schaltung im Bild 63/2.



63/1



63/2

Die Anwendung der Aussagenlogik auf die Analyse und Synthese elektrischer Schaltungen ist für die Technik von großer Bedeutung, da elektrische Schaltungen in der Technik vielfältig verwendbar sind.
Eng damit verbunden ist eine junge Wissenschaft, die **Kybernetik**. Ihre Erkenntnisse helfen uns bei der Meisterung von Problemen, die vor wenigen Jahren als völlig unmöglich erschienen. „Kluge Roboter“ steuern ganze Maschinensysteme nach dem Willen des Menschen. Die sozialen Folgen der Automation werden in den USA und anderen hochentwickelten kapitalistischen Ländern gefürchtet, sogar mitunter verwünscht. Die sozialistische Automatisierung hilft dagegen die Basis für die kommunistische Gesellschaft, für die endgültige Befreiung des Menschen von dem Fluch der klassenbedingten Entfremdung des Produzenten von der schöpferischen Arbeit, schaffen.
Je genauer der Mensch die Gesetze, die in Natur und Gesellschaft herrschen, kennenlernt und nach diesen zu handeln versteht, desto mehr wird er sich dem erstrebenswerten Ziel, der kommunistischen Gesellschaft, nähern. Bei diesem Streben kann ihm die Mathematik stets zuverlässig helfen.

4.6. Prädikatenlogische Ausdrücke

In den vorangegangenen Teilen dieses Buches haben wir die Aussagen stets als einheitliches Ganzes betrachtet und einige Gesetzmäßigkeiten des Aussagenkalküls untersucht. Es gibt aber Probleme, die wir mit Mitteln der Aussagenlogik allein nicht lösen können, und zwar dann, wenn es auch auf die Beziehungen zwischen den Begriffen in den Aussagen ankommt. In der Aussagenlogik haben wir gerade von solchen Zusammenhängen abstrahiert und die Aussagen als Ganzes betrachtet. Uns hat dort nur ihr Wahrheitswert interessiert. Aus den Wahrheitswerten einzelner Aussagen haben wir den Wahrheitswert von Aussagenverbindungen ermittelt und uns mit ihren Strukturen befaßt.

Der Aussagenkalkül reicht für logische Untersuchungen nicht aus. Häufig kommt es bei Sätzen nicht auf Aussagen als einheitliches Ganzes an, sondern auch auf die **innere Struktur von Einzelaussagen.** Diese wird *umgangssprachlich* durch die *Beziehung zwischen Subjekt und Prädikat* wiedergegeben.
Viele Aussagen enthalten Angaben über Eigenschaften irgendwelcher Gegenstände (Individuen) bzw. drücken Beziehungen zwischen mehreren Gegenständen aus. Bei der Untersuchung der inneren logischen Struktur einer Aussage müssen wir also zwischen den Gegenständen, über die etwas ausgesagt wird, und den ihnen zugesprochenen Eigenschaften bzw. den Beziehungen zwischen ihnen unterscheiden.

Die Gegenstände bezeichnen wir im folgenden als **Individuen**, die Eigenschaften und Beziehungen zwischen ihnen als **Prädikate**.

BEISPIEL 1 (4.6.):

a) Die Aussage „*8 ist eine gerade Zahl*" ist eine Aussage über die natürliche Zahl 8. Sie enthält das Prädikat „ist eine gerade Zahl". Dieses Prädikat ist eine Eigenschaft. Eigenschaften bezeichnet man als **einstellige Prädikate**, da sie auf einen Gegenstand zutreffen oder nicht zutreffen.
b) Die Aussage „*2 ist ein Teiler von 10*" sagt etwas über eine Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen 2 und 10 aus. Diese Aussage enthält das **zweistellige Prädikat** „ist Teiler von", also eine zweistellige Relation.
c) Die Aussage „P_1 *liegt zwischen* P_2 *und* P_3" enthält ein **dreistelliges Prädikat**, nämlich eine dreistellige Relation zwischen den Punkten P_1, P_2, P_3.

Zur symbolischen Darstellung von Aussagen der **Prädikatenlogik** verwenden wir **Individuenvariable** (Variable für Gegenstände), für die wir kleine lateinische Buchstaben benutzen.
Als Variable für bestimmte Prädikate verwenden wir große lateinische Buchstaben wie P, R usw. bzw. die in der Mathematik üblichen Zeichen für Relationen.
Wollen wir zum Ausdruck bringen, daß das einstellige Prädikat P auf ein bestimmtes Individuum zutrifft, so setzen wir das Zeichen für dieses Individuum hinter das Zeichen P. Entsprechend verfahren wir bei zweistelligen Prädikaten, d. h., wir setzen das Zeichen für alle Individuen, auf die ein mehrstelliges Prädikat zutreffen soll, hinter das Zeichen R.

BEISPIEL 2 (4.6.):

a) $G\,8$ ist ein symbolischer Ausdruck für die Aussage a) im Beispiel 1 (4.6.), wobei G das Zeichen für die Eigenschaft „ist eine gerade Zahl" sein soll.

b) $T\,2{,}10$ ist ein symbolischer Ausdruck für die Aussage b) im Beispiel 1 (4.6.), wobei T das Zeichen für die Relation „ist Teiler von“ sein soll. Hierbei kommt es auf die Reihenfolge von 2 und 10 an.
Üblicher ist allerdings in diesem Falle die symbolische Darstellung $2 \mid 10$ (2 teilt 10).

Im Beispiel 2 (4.6.) sind G und T Zeichen für bestimmte Prädikate, also **Prädikatenkonstanten**. In den beiden Ausdrücken treten keine Variablen auf, sie enthalten nur **Prädikatenkonstanten** und **Individuenkonstanten** (Zeichen für bestimmte Individuen). Deshalb sind diese Ausdrücke symbolische Darstellungen von *Aussagen*.

Wir können aber auch *Aussageformen* symbolisch wiedergeben.

BEISPIEL 3 (4.6.):

	Aussageform	Symbolische Darstellung
a)	x ist eine gerade Zahl.	$G\,x$
b)	x ist Teiler von y.	$x \mid y$
c)	x ist kleiner als y.	$x < y$

Durch Belegung der Individuenvariablen mit Elementen aus dem Individuenbereich (Grundbereich der Variablen) können wir aus den Aussageformen Aussagen gewinnen. Der Individuenbereich könnte im Beispiel 3 (4.6.) etwa der Bereich N sein.

Im Teil A 2.3. haben wir ein weiteres Verfahren kennengelernt, mit dessen Hilfe wir aus Aussageformen Aussagen bilden können. Wir haben dieses Verfahren als **Bindung der freien Variablen** oder **Quantifizierung** bezeichnet (↗ 29). Das Beispiel 3 (4.6.) a) könnte jetzt folgendermaßen formuliert werden.

„*Es gibt (mindestens) eine natürliche Zahl x, für die gilt: x ist eine gerade Zahl.*“

Das ist eine wahre Aussage.

Durch die Einführung von „es gibt ...“ wurde die *Existenz* von mindestens einem Element des Grundbereiches, das die vorgegebene Aussageform erfüllt, als Behauptung aufgestellt. Diese Aussage ist eine **Existentialaussage**. Aussagen mit den Formulierungen „ein Teil“, „fast alle“, „die Mehrzahl“, „einige“ usw. sind ebenfalls Existentialaussagen. Man spricht bei den Existentialaussagen auch von **partikulären Aussagen**, weil diese sich nicht auf alle Elemente des betreffenden Bereiches beziehen, sondern nur auf einen Teil. Die Quantifizierung nennt man in diesem Falle auch **Partikularisierung**.

Entsprechend werden Aussagen mit „für alle ...“ **Universalaussagen** oder **Allaussagen** genannt, weil diese sich auf *alle* Elemente des Variablenbereiches erstrecken. Eine derartige Quantifizierung nennt man auch **Generalisierung**.

Die Quantifizierungen „Partikularisierung“ und „Generalisierung“ sind **prädikatenlogische Operationen**.

Wir haben aus Aussageformen durch Vorschalten der **Operatoren** (Symbol für eine mathematische Operation — lat.) „es gibt ...“, „für alle ...“, „es gibt kein ...“ wahre oder falsche Aussagen erzeugt. Für diese Operatoren — auch **Quantifikatoren** oder kürzer **Quantoren** genannt — werden in der mathematischen Logik besondere Zeichen eingeführt.

Der **Existenzquantor (Existentialoperator, Partikularisator)** „es gibt (mindestens) ein ..." wird mit „$\exists$" symbolisiert. Wenn das Symbol „$\exists$" vor einer Aussageform $\mathsf{H}(x)$ steht, so will man damit ausdrücken, daß es *mindestens ein* Element des Grundbereiches mit dem in der Aussageform $\mathsf{H}(x)$ widergespiegelten Merkmal gibt.
Wir verwenden die Schreibweise „$\exists\, x\, \mathsf{H}(x)$".

BEISPIEL 4 (4.6.):
Die Aussage
„Es gibt eine natürliche Zahl x, für die gilt: $x - 2 = 7$"
läßt sich schreiben:

$$\exists\, x\, (x \in N \wedge x - 2 = 7)\,.$$

Man kann auch schreiben:

$$\exists\, x\, (x - 2 = 7)\,, \quad \text{Individuenbereich } N\,.$$

Das (senkrechte) Durchstreichen oder die Verbindung des Symbols „$\exists$" mit dem Symbol „$\sim$" soll zum Ausdruck bringen, daß es *kein* Element des Grundbereiches mit dem in der Aussageform $\mathsf{H}(x)$ angegebenen Merkmal gibt.

BEISPIEL 5 (4.6.):
a) $\sim \exists\, x\, (x \in N \wedge x^2 - 3 = 0)$
b) $\sim \exists\, x\, (x \in N \wedge x^3 - 5 = 0)$

Der **Allquantor (Alloperator, Generalisator)** „für alle ..." wird mit „$\forall$" symbolisiert. Wenn das Symbol „$\forall$" vor einer Aussageform $\mathsf{H}(x)$ steht, so will man damit ausdrücken, daß das in der Aussageform $\mathsf{H}(x)$ widergespiegelte Merkmal für *jedes* Element des Grundbereiches zutrifft.

$\forall\, x$ — der Allquantor mit einer Variablen gepaart —

bedeutet:
„für alle x ...".
Das (senkrechte) Durchstreichen oder die Verbindung des Allquantors mit dem Zeichen „$\sim$" soll zum Ausdruck bringen, daß das in $\mathsf{H}(x)$ widergespiegelte Merkmal *nicht für alle* Elemente des Grundbereiches zutrifft.

BEISPIEL 6 (4.6.):
Die Aussage
a) „Für alle natürlichen Zahlen x gilt: $x + 1 = 1 + x$" erhält mit den entsprechenden Symbolen die Gestalt:

$$\forall\, x\, (x \in N \wedge x + 1 = 1 + x)$$

oder:

$$\forall\, x\, (x + 1 = 1 + x)\,, \quad \text{Individuenbereich } N.$$

b) „Nicht für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2\,."$$

Symbolisiert:

$$\sim \forall\, a\, \forall\, b\, \forall\, c\, (a, b, c \in N \wedge a^2 + b^2 = c^2)$$

oder:

$$\sim \forall\, a\, \forall\, b\, \forall\, c\, (a^2 + b^2 = c^2)\,, \quad \text{Individuenbereich } N$$

Sind zur Quantifizierung nur die Individuenvariablen zugelassen, so spricht man von der **Prädikatenlogik 1. Stufe.** Die quantifizierten Individuenvariablen sind nicht mehr *freie Variable,* sondern **gebundene Variable.**
Zum Aufbau prädikatenlogischer Ausdrücke benutzen wir neben den Symbolen für Individuenvariable, Individuenkonstanten, Prädikatenvariable und Quantoren auch die Funktoren der Aussagenlogik.
In der Aussagenlogik haben wir den Wahrheitswert eines Ausdrucks durch Belegung der darin vorkommenden Variablen mit Wahrheitswerten unter Berücksichtigung der entsprechenden Festlegungen ermittelt.
Der Wahrheitswert eines prädikatenlogischen Ausdrucks ist aber sowohl vom Quantor als auch von der Individuenvariablen und von ihrem zugrunde gelegten Individuenbereich sowie von der Belegung (Interpretation) der Prädikatenvariablen abhängig. Demnach können nur solche prädikatenlogische Ausdrücke als **prädikatenlogische Gesetze** (Identitäten) bezeichnet werden, die bei *jeder* Belegung ihrer Variablen den Wahrheitswert (W) annehmen.

Der prädikatenlogische Ausdruck

$$\forall\, x\, \big(P(x) \vee \sim P(x)\big)$$

ist ein **prädikatenlogisches Gesetz.** Es entsteht nämlich bei jeder Belegung der Individuenvariablen x aus dem vorgegebenen nichtleeren Individuenbereich und bei jeder Belegung der Prädikatenvariablen P eine wahre Aussage. Dieser Ausdruck ist die prädikatenlogische Fassung des aus der Aussagenlogik bekannten **Satzes vom ausgeschlossenen Dritten.**

Man kann aus aussagenlogischen Identitäten (Gesetzen) prädikatenlogische Identitäten (Gesetze) erhalten, wenn man die Variablen im betreffenden aussagenlogischen Ausdruck durch prädikatenlogische Aussageformen ersetzt.

BEISPIEL 7 (4.6.):
Wir ersetzen in der bekannten aussagenlogischen Identität

$$(p \to q) \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$$

die Aussagenvariable p durch $P(x)$ und die Aussagenvariable q durch $Q(x)$.
Der prädikatenlogische Ausdruck

$$(P(x) \to Q(x)) \leftrightarrow (\sim Q(x) \to \sim P(x))$$

ist dann ebenfalls eine Identität.

Durch Belegung der Individuenvariablen x aus dem nichtleeren Individuenbereich und der Prädikatenvariablen entstehen nämlich aus $P(x)$, $Q(x)$, $\sim P(x)$, ... Aussagen. Der Gesamtausdruck wird zu einer Aussagenverbindung, deren Wahrheitswert bei jeder Belegung der Variablen x aus dem Individuenbereich (W) ist.

Durch Vorschalten des Allquantors $\forall$ mit Bindung der freien Variablen x entsteht ein weiteres prädikatenlogisches Gesetz.

BEISPIEL 8 (4.6.):

$$\forall\, x\, \Big(\big(P(x) \to Q(x)\big) \leftrightarrow \big(\sim Q(x) \to \sim P(x)\big)\Big)$$

Feststellung:

Jeder allgemeingültige aussagenlogische Ausdruck läßt sich in einen allgemeingültigen prädikatenlogischen Ausdruck überführen, aber nicht umgekehrt.

BEISPIEL 9 (4.6.):
Prädikatenlogische Gesetze, die sich nicht durch Einsetzungen aus aussagen-

logischen Gesetzen gewinnen lassen, sind z. B.:

a) $\forall x\, \mathsf{H}(x) \rightarrow \mathsf{H}(a)$; b) $\mathsf{H}(a) \rightarrow \exists x\, \mathsf{H}(x)$.

$\forall x\, \mathsf{H}(x) \rightarrow \mathsf{H}(a)$ besagt:

Wenn jedes Individuum eines Individuenbereiches eine bestimmte Eigenschaft H hat, so hat auch ein bestimmtes Individuum a diese Eigenschaft.

$\mathsf{H}(a) \rightarrow \exists x\, \mathsf{H}(x)$ besagt:

Wenn ein bestimmtes Individuum eines Individuenbereiches eine bestimmte Eigenschaft H hat, so gibt es mindestens ein Individuum a mit dieser Eigenschaft.

Wir könnten den Versuch unternehmen, durch Einsetzungen aus einem erfüllbaren, jedoch nicht allgemeingültigen aussagenlogischen Ausdruck einen ebenfalls erfüllbaren, aber nicht allgemeingültigen prädikatenlogischen Ausdruck zu gewinnen. Setzen wir beispielsweise in die **aussagenlogische Neutralität** $p \wedge q$ für die Aussagenvariable p den Ausdruck

$$\forall x\, (\mathsf{H}(x) \vee \sim \mathsf{H}(x))$$

und für q den Ausdruck

$$\exists x\, (\mathsf{H}(x) \wedge \sim \mathsf{H}(x))$$

ein, so erhalten wir

$$\forall x\, (\mathsf{H}(x) \vee \sim \mathsf{H}(x)) \wedge \exists x\, (\mathsf{H}(x) \wedge \sim \mathsf{H}(x)) .$$

Dieser Ausdruck ist aber eine Kontradiktion.

Dagegen gilt:

Jeder nicht erfüllbare aussagenlogische Ausdruck ist auch prädikatenlogisch nicht erfüllbar.

Einige **prädikatenlogische Äquivalenzen**, die die Beziehungen zwischen den beiden Quantoren $\forall$ und $\exists$ zum Ausdruck bringen, verdienen besondere Aufmerksamkeit. Eine prädikatenlogische Äquivalenz ist wie eine aussagenlogische Äquivalenz genau dann allgemeingültig, wenn die Wahrheitswerte ihrer beiden Glieder bei gleicher Belegung ihrer Variablen in jedem Falle übereinstimmen.

1. **$\forall x\, \mathsf{H}(x)$ ist äquivalent mit $\sim \exists x\, (\sim \mathsf{H}(x))$.**

BEISPIEL 10 (4.6.):

„**Für jede** natürliche Zahl x gilt: $x + 1 = 1 + x$"

ist äquivalent mit

„**Es gibt keine** natürliche Zahl x, für die nicht $x + 1 = 1 + x$ gilt".

Symbolisiert:

$\forall x\, (x + 1 = 1 + x)$, Individuenbereich N ,

äquivalent mit

$\sim \exists x\, (\sim (x + 1 = 1 + x))$, Individuenbereich N, d. h.

äquivalent mit

$\sim \exists x\, (x + 1 \neq 1 + x)$, Individuenbereich N .

2. **$\exists x\, \mathsf{H}(x)$ ist äquivalent mit $\sim \forall x\, (\sim \mathsf{H}(x))$.**

BEISPIEL 11 (4.6.):

„**Es gibt** natürliche Zahlen x, y, z, für die gilt:

$x^2 + y^2 = z^2$"

ist äquivalent mit

„**Nicht für alle** natürlichen Zahlen x, y, z gilt:

Es ist *nicht* so, daß $x^2 + y^2 = z^2$ ist".

Symbolisiert:

$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists\, z\, (x^2 + y^2 = z^2)$, Individuenbereich N,
äquivalent mit
$\sim \forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, \big(\sim (x^2 + y^2 = z^2)\big)$, Individuenbereich N,
und dies ist äquivalent mit
$\sim \forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, (x^2 + y^2 \neq z^2)$, Individuenbereich N, d. h.:
„Nicht für alle natürlichen Zahlen x, y, z ist $x^2 + y^2 \neq z^2$".

3. $\sim \forall\, x\, \mathsf{H}(x)$ **ist äquivalent mit** $\exists\, x\, \big(\sim \mathsf{H}(x)\big)$.

BEISPIEL 12 (4.6.):
„**Nicht für alle** natürlichen Zahlen x, y, z gilt: $x^2 + y^2 = z^2$"
ist äquivalent mit
„**Es gibt** natürliche Zahlen x, y, z, für die gilt: Es ist *nicht* $(x^2 + y^2 = z^2)$".
Symbolisiert:

$\sim \forall\, x\, \forall\, y\, \forall\, z\, (x, y, z \in N \wedge x^2 + y^2 = z^2)$
äquivalent mit
$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists\, z\, \big(\sim (x, y, z \in N \wedge x^2 + y^2 = z^2)\big)$, d. h.:
$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists\, z\, \big(x, y, z \in N \wedge \sim (x^2 + y^2 = z^2)\big)$,
$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists\, z\, \big(x, y, z \in N \wedge (x^2 + y^2 \neq z^2)\big)$.

4. $\sim \exists\, x\, \mathsf{H}(x)$ **ist äquivalent mit** $\forall\, x\, \big(\sim \mathsf{H}(x)\big)$.

BEISPIEL 13 (4.6.):
„**Es gibt keine** rationale Zahl x, für die gilt: $x = \sqrt{2}$"
ist äquivalent mit
„**Für alle** rationalen Zahlen x gilt: Es ist *nicht* $x = \sqrt{2}$".

In vielen Fällen haben wir es mit Aussageformen zu tun, die durch Verknüpfung von zwei oder von mehr als zwei Aussageformen entstanden sind.

BEISPIEL 14 (4.6.):
„Es gibt natürliche Zahlen x, für die gilt: Wenn x eine Primzahl ist, so ist x ungerade."
Symbolisiert:

$\exists\, x\, \big(x \in N \wedge (\mathsf{H}_1(x) \rightarrow \mathsf{H}_2(x))\big)$, wobei
$\mathsf{H}_1(x)$: „x ist Primzahl" und
$\mathsf{H}_2(x)$: „x ist ungerade" bedeuten.

Die Übersetzung prädikatenlogischer Ausdrücke in die Umgangssprache ist gewöhnlich einfacher als die Übersetzung in umgekehrter Richtung. Vor allem gibt es dort Schwierigkeiten, wo zwei oder mehr als zwei Operatoren auftreten.
Wir betrachten dazu als Beispiel die Aussageform $\mathsf{H}(x, y)$: $x < y$ über dem Grundbereich N.
Wir können folgende Aussagen bilden.

1. $\forall\, x\, \forall\, y$: $x < y$	„Für jedes Paar natürlicher Zahlen $[x; y]$ gilt: $x < y$."
2. $\forall\, x\, \exists\, y$: $x < y$	„Zu jeder natürlichen Zahl x gibt es mindestens eine natürliche Zahl y, so daß gilt: $x < y$."
3. $\exists\, x\, \forall\, y$: $x < y$	„Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x, so daß für jede natürliche Zahl y gilt: $x < y$."

4. $\exists x \exists y$: $x < y$ „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl x, zu der es mindestens eine natürliche Zahl y gibt, so daß gilt: $x < y$.“

5. $\exists y \forall x$: $x < y$ „Es gibt mindestens eine natürliche Zahl y, so daß für jede natürliche Zahl x gilt: $x < y$.“

6. $\forall y \exists x$: $x < y$ „Zu jeder natürlichen Zahl y gibt es mindestens eine natürliche Zahl x, so daß gilt: $x < y$.“

Die Aussagen 2. und 4. sind wahr. Die Aussagen 1., 3., 5. und 6. dagegen sind falsch. In den Aussagen 2., 3., 5. und 6. kommen zwei verschiedene Operatoren vor, deren Reihenfolge den Wahrheitswert der betreffenden Aussage beeinflußt. Demgegenüber beeinflußt die Reihenfolge der Quantifikation in einer Aussage mit gleichen Quantoren den Wahrheitswert der betreffenden Aussage nicht.
Es ist also gleichgültig, ob wir z. B.

$$\forall x \forall y: x < y \quad \text{oder} \quad \forall y \forall x: x < y$$

schreiben.
Ebenso dürfen wir an Stelle von

$$\exists x \exists y: x < y \quad \text{auch} \quad \exists y \exists x: x < y$$

schreiben.
Mit diesen und weiteren Fragen der Prädikatenlogik werden wir uns im Teil B „Einführung in die Mengenlehre“ beschäftigen.

4.7. Kontrollfragen (sollen auch durch Beispiele belegt werden)

1. Wann sprechen wir in der Aussagenlogik
   a) von „Wertverlaufsgleichheit“;
   b) von „logischer Gleichwertigkeit“?
2. Wann bezeichnen wir einen aussagenlogischen Ausdruck als
   a) Identität; b) Neutralität; c) Kontradiktion?
3. Wie lautet der Satz über die Prämissenverbindung?
4. Welche Variablen einer Aussageform können quantifiziert werden?
5. Wann verwenden wir bei der Quantifizierung den
   a) Allquantor; b) den Existenzquantor,
   um wahre Aussagen zu erhalten?
6. Wann bezeichnen wir einen prädikatenlogischen Ausdruck als Identität?
7. Wie kann man aus aussagenlogischen Gesetzen prädikatenlogische Gesetze gewinnen?
8. Geben Sie zu dem prädikatenlogischen Ausdruck
   a) $\forall x\, \mathrm{H}(x)$ unter alleiniger Verwendung des Existenzquantors,
   b) $\exists x\, \mathrm{H}(x)$ unter alleiniger Verwendung des Allquantors
   einen äquivalenten Ausdruck an!

5. Logisches Schließen

Objekte unserer bisherigen Betrachtungen waren Aussagen, Aussageformen und ihre Verknüpfungen. Wir wissen, daß jede Aussage einen Wahrheitswert hat, unabhängig davon, ob wir diesen Wahrheitswert kennen oder nicht.

Im Teil A 5. befassen wir uns mit verschiedenen Methoden, mit deren Hilfe wir im Aussagenkalkül eine Entscheidung darüber herbeiführen können, ob eine vorgegebene Aussage wahr oder falsch ist.
Das geschieht dadurch, daß wir die Entscheidung über Wahrheit und Falschheit von Aussagen auf bereits bekannte Aussagen zurückführen, die als wahr bekannt sind oder als wahr vorausgesetzt werden. Wir sprechen dabei von **Beweisen**. Es wird auch von **Widerlegungen** gesprochen, die aber ebenfalls Beweise dafür sind, daß eine Aussage, die widerlegt wird, falsch ist.

Das Problem der Wahrheitsfindung im Bereich der Prädikatenlogik wird auf Grund eines fehlenden allgemeinen Entscheidungsverfahrens nur so weit abgehandelt, wie es dem Ziel dieses Buches angemessen erscheint.

Für das Beweisen stehen uns die schon bekannten **Gesetze und Regeln der Aussagen- und Prädikatenlogik** zur Verfügung. Weitere lernen wir in diesem Teil des Buches kennen. Unser Hauptanliegen wird die Anwendung dieser Gesetze und Regeln sein, wobei gleichzeitig wichtige **Beweismethoden** abgehandelt werden. Das Beweisen selbst muß ständig geübt werden, denn die Kenntnis von Beweismethoden befähigt noch nicht zum Führen von Beweisen.

5.1. Folgerungsbegriff

Grundlage der Betrachtungen im Teil A 5. ist die **Implikation**. Sie ist, wie wir später noch erkennen werden, schon in ihrer einfachsten Form die **Basis für einen logischen Schluß**. Deshalb müssen wir uns nochmals mit der Implikation beschäftigen.

Es ist uns bereits bekannt, daß nicht nur Aussagen, sondern auch Aussageformen zu sinnvollen sprachlichen Gebilden verknüpft werden können.
Beispielsweise ist der Satz
„Wenn eine Zahl x durch 6 teilbar ist, so ist x durch 3 teilbar"
eine **implikative Verbindung** der beiden Aussageformen
„x ist durch 6 teilbar" und
„x ist durch 3 teilbar".
Man erkennt, daß in diesen Aussageformen „x" eine freie Variable ist.
Die vorgegebene Implikation kann kürzer auch so geschrieben werden:
„Wenn $6 \mid x$, so $3 \mid x$".
Für die Variable x muß ein Grundbereich angegeben werden.
Für implikative Verbindungen zweier Aussageformen

$$\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots) \text{ und } \mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$$

kann man in Anlehnung an die Definition der Implikation (↗ 46) wie folgt formulieren.

DEFINITION 1 (5.1.) — **Implikation von Aussageformen**
Eine implikative Verbindung zweier Aussageformen
$\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$
in der Form
„Wenn $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$, so $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$"
ist wieder eine Aussageform.
Sie geht durch Belegung aller freien Variablen genau dann in eine falsche Aussage über, wenn die Aussageform $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ durch diese Belegung in eine wahre Aussage und die Aussageform $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ in eine falsche Aussage übergeführt wird.

Für konjunktive, alternative usw. Verbindungen von Aussageformen können entsprechende Definitionen formuliert werden.
Wir haben die **materiale Implikation** kennengelernt, eine Implikation also, bei der vom inhaltlichen Zusammenhang der beiden Aussagen abgesehen wurde.
In der Umgangssprache und teilweise auch in der Mathematik werden jedoch mit Hilfe der Implikation Kausal- und Konditionalbeziehungen, zeitliche und andere inhaltliche Zusammenhänge von Sachverhalten ausgedrückt. Mit diesen Implikationen werden wir uns zunächst beschäftigen. Für zwei implikativ verknüpfte Aussageformen wird das künftig — wie oft in der praktischen Anwendung — bedeuten, daß sie beide ein und denselben Grundbereich besitzen, aus dem die Variablenbelegungen vorgenommen werden.
Der inhaltliche Zusammenhang wird äußerlich dadurch gekennzeichnet, daß in den implikativ verknüpften Aussageformen gleiche Variable auftreten.

Wir gehen für unsere weiteren Betrachtungen nochmals von der Implikation „Wenn $6 \mid x$, so $3 \mid x$" (↗ 72) aus und benutzen dabei eine besondere Eigenschaft dieser Aussageform. Nach Festlegung des Grundbereichs ergibt sich, daß *jede* Zahl aus dem Grundbereich, die die Aussageform „$6 \mid x$" erfüllt, d. h. in eine wahre Aussage überführt, auch die Aussageform „$3 \mid x$" erfüllt, d. h. zu einer wahren Aussage macht. Der Sachverhalt, daß in diesem Fall „$3 \mid x$" zu einer falschen Aussage wird, kann nicht eintreten. Also wird die Implikation „Wenn $6 \mid x$, so $3 \mid x$" bei *allen* Variablenbelegungen aus dem Grundbereich in eine wahre Aussage übergeführt.

Mit anderen Worten: Die Aussageform ist über dem Individuenbereich allgemeingültig, bzw. die Allaussage

„Für alle x gilt: Wenn $6 \mid x$, so $3 \mid x$“

ist wahr.

Wenn $\mathsf{H}_1(x)$ die Aussageform „$6 \mid x$“ und

$\mathsf{H}_2(x)$ die Aussageform „$3 \mid x$“ symbolisieren,

so kann man auch sagen:

„(Wenn $\mathsf{H}_1(x)$, so $\mathsf{H}_2(x)$) ist allgemeingültig über dem Grundbereich“ bzw.

„Für alle x aus dem Grundbereich gilt: Wenn $\mathsf{H}_1(x)$, so $\mathsf{H}_2(x)$

ist eine wahre Aussage“.

Eine andere äquivalente Ausdrucksweise für diesen Sachverhalt lautet:

„Aus $\mathsf{H}_1(x)$ folgt $\mathsf{H}_2(x)$“.

Mit dieser Formulierung haben wir eine **Aussage** über **Aussageformen** erhalten. Eine Aussage der zuletzt angeführten Art nennt man auch **Folgerungsaussage** oder kurz **Folgerung**.

DEFINITION 2 (5.1.) — **Folgerung**

Es seien $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ Zeichen für Aussageformen, deren freie Variable $x_1, x_2, \ldots$ Leerstellen für Elemente aus einem Grundbereich sind.

„Aus $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“

gilt dann und nur dann, wenn folgende Allaussage wahr ist:

„Für alle $x_1, x_2, \ldots$ gilt:

Wenn $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$, so $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“.

Die Aussage „Aus $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“ über die Aussageformen $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ heißt **Folgerungsaussage** oder **Folgerung**.

Ist die obige Allaussage wahr, so ist $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ in bezug auf $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ eine **hinreichende Bedingung** und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ in bezug auf $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ eine **notwendige Bedingung**.

Wenn die Allaussage

„Für alle $x_1, x_2, \ldots$ gilt:

Wenn $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$, so $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“

und die Allaussage

„Für alle $x_1, x_2, \ldots$ gilt:

Wenn $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$, so $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$“

wahr sind, so ist die Aussageform $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ in bezug auf $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ eine **notwendige und hinreichende Bedingung und umgekehrt**. In diesem Falle bezeichnet man die Aussageformen $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ auch als **äquivalent**. Dieser Sachverhalt hat eine große Bedeutung besonders beim Umformen von Gleichungen und Ungleichungen, die Aussageformen darstellen. Dort ist man bestrebt, nur in äquivalente Gleichungen bzw. Ungleichungen umzuformen (↗ 49 ff.).

Der **Folgerungsbegriff** ist für das **Beweisen mathematischer Sätze** von größter Bedeutung. Oft wird fälschlicherweise angenommen, daß auch die Umkehrung eines bewiesenen Satzes gelten muß. Es ist uns jedoch bekannt, daß die Vertauschung der Prämisse mit der Konklusion in einer Implikation im allgemeinen nicht gestattet ist (↗ 48).

Wir wollen das in Verbindung mit dem Folgerungsbegriff an einem *Beispiel* demonstrieren.
Über dem Grundbereich der ganzen Zahlen (G) seien die Aussageformen

$$\mathsf{H}_1(a) : a^2 \geqq 0 \qquad \text{und} \qquad \mathsf{H}_2(a) : a \geqq 0$$

gegeben.
Wir bilden eine Implikation
„Wenn $a^2 \geqq 0$, so $a \geqq 0$“
und untersuchen über dem Grundbereich G den Wahrheitswert der Allaussage.
„Für alle ganzen Zahlen a gilt: Wenn $a^2 \geqq 0$, so $a \geqq 0$.“
Wir wissen, daß das Quadrat einer nichtnegativen Zahl ebenfalls nicht negativ ist. Für nichtnegative ganze Zahlen ist also die Aussageform „Wenn $a^2 \geqq 0$, so $a \geqq 0$“ allgemeingültig. Damit haben wir jedoch nicht alle ganzen Zahlen in unsere Untersuchung einbezogen. Durch Belegung der Variablen mit negativen ganzen Zahlen wird die oben angeführte Implikation stets zu einer falschen Aussage. Das bedeutet, daß die gegebene Allaussage falsch ist. Also gilt die Folgerung
„Aus $a^2 \geqq 0$ folgt $a \geqq 0$“
im Sinne der Definition 2 (5.1.) nicht.
Die Umkehrung
„Aus $a \geqq 0$ folgt $a^2 \geqq 0$“.
gilt über dem Bereich G, d. h., diese Folgerungsaussage ist wahr. Z. B. wird bei Belegung von a durch negative ganze Zahlen die Prämisse zu einer falschen Aussage. Damit ist die Implikation wahr.

Es gibt auch viele Aussageformen, die zwar über ein und demselben Grundbereich erklärt sind, aus denen sich jedoch keine gültigen Folgerungen bilden lassen. Man kann sich das an den über dem Grundbereich G gegebenen Aussageformen

$\mathsf{H}_1(a, b)$: a und b sind gerade Zahlen;
$\mathsf{H}_2(a, b)$: $a \cdot b < 0$

klarmachen.

Wir wenden uns nun dem Begriff der Folgerung zu, und zwar für den Fall, daß keine *Aussageformen*, sondern *Aussagen* miteinander implikativ verknüpft sind.
Auch in diesem Falle finden wir in der Mathematik häufig die Formulierung „Aus A_1 folgt A_2“. Das soll nichts anderes bedeuten als die Redeweise „Die Implikation $A_1 \rightarrow A_2$ ist wahr“. Die Folgerungsaussage „Aus A_1 folgt A_2“ gilt in dem Fall, daß A_1 und A_2 Aussagen sind, also dann und nur dann, wenn A_1 falsch oder A_2 wahr ist, sie gilt also nicht, wenn A_1 wahr und A_2 falsch ist. Das entspricht völlig dem Gebrauch der Implikation in der Mathematik.
Diese Verwendung des Folgerungsbegriffes bei Aussagen weicht erheblich vom Gebrauch dieses Begriffes in der Umgangssprache ab.

BEISPIEL 1 (5.1.):
Wir betrachten die Folgerungsaussagen
(1) Aus $3 < 12$ folgt $3 \mid 12$;
(2) Aus $3 < 12$ folgt $3 < 12 + 2$.

Beide Folgerungsaussagen sind im Sinne der obigen Erläuterung gültig, weil die Implikationen „$3 < 12 \rightarrow 3 \mid 12$“ und „$3 < 12 \rightarrow 3 < 12 + 2$“ wahr sind. In der Umgangssprache und z. T. auch in der Mathematik wird jedoch die Redeweise im Falle (1) als nicht zutreffend bezeichnet. Eine Ursache dafür ist darin zu suchen, daß unter dem „Folgern“ oft ein „Herleiten“ oder „Ableiten“ (↗ 84)

verstanden wird. Man hat bei Formulierungen dieser Art häufig im Sinn, daß die Wahrheit der ersten Aussage, im Falle (1) „$3 < 12$“, notwendigerweise die Wahrheit der zweiten Aussage „$3 \mid 12$“ nach sich zieht. Im Sinne der Logik hängt aber die Wahrheit einer Implikation nicht davon ab, ob Prämisse und Konklusion in irgendeinem Zusammenhang stehen, wie das z. B. in der Folgerungsaussage (2) der Fall ist.

Um diesen Mißverständnissen aus dem Wege zu gehen, benutzen wir den Folgerungsbegriff vorwiegend bei Aussageformen.

Die meisten Sätze in der Mathematik sind dem Charakter nach **Allaussagen** (↗ Beispiele im Teil A 5.5.).
Auf Grund der Definition 2 (5.1.) und der Erläuterungen dazu ist es möglich, an Stelle von wahren Allaussagen **Folgerungsaussagen** wie

„Aus $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“

zu setzen.
Die Umkehrung eines solchen Satzes heißt dann

„Aus $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$“.

Es sei noch bemerkt, daß die Folgerung

„Aus $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“

unter Benutzung der Begriffe **Teilmenge** und **Erfüllungsmenge** definiert werden kann. Man sagt dazu, daß die Folgerung „Aus $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ folgt $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$“ gilt, d. h. wahr ist, wenn die Erfüllungsmenge der Aussageform $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ eine Teilmenge der Erfüllungsmenge der Aussageform $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ ist.
Das bedeutet aber: Stets dann, wenn $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ wahr ist, ist auch $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ wahr. Es kann also nicht vorkommen, daß $\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots)$ bei irgendeiner Belegung wahr ist und $\mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$ bei derselben Belegung falsch wird. Also ist

$$\mathsf{H}_1(x_1, x_2, \ldots) \rightarrow \mathsf{H}_2(x_1, x_2, \ldots)$$

eine allgemeingültige Implikation. Damit ist der Zusammenhang mit der Definition der Folgerung (↗ Definition 2 (5.1.)) hergestellt.

5.2. Aussagenlogisches Schließen

Im Teil A 5.2. beschäftigen wir uns mit „Grundbausteinen“ von **Beweisen**.
Wir werden mit einer Reihe von Begriffen vertrautgemacht und mit Methoden konfrontiert, die uns in die Lage versetzen, die Richtigkeit einiger unserer Denkweisen zu erkennen.

Aussagen gewinnt man u. a. dadurch, daß man

(1) die Ergebnisse der Untersuchung von Sachverhalten formuliert;
(2) Aussagen mit Hilfe von gewissen Wörtern zu Aussagenverbindungen verknüpft (↗ Teil A 3.);
(3) Aussagen aus bereits bekannten Aussagen — wie sie uns beispielsweise in Büchern mitgeteilt werden — unter Anwendung bestimmter Schlußregeln gewinnt.

Diese letzte Art des Gewinnens von Aussagen bezeichnen wir als **Schließen**.

Zur Verdeutlichung der Unterschiede zwischen den hier angegebenen Arten der Aussagengewinnung sollen folgende Beispiele dienen.

Zu (1): Die Untersuchung der Innenwinkel eines gegebenen Dreiecks ABC führt zur Formulierung der Aussage: „Die Summe der Größen der Innenwinkel von ABC beträgt 180°."

Zu (2): „5 ist eine ungerade Zahl *und* 10 ist größer als 9."
(Bei der Verknüpfung von Aussagen braucht zwischen diesen — wie wir wissen — keine inhaltliche Beziehung zu bestehen.)

Zu (3): Aus „$5 > 3$" und „$-7 < 0$" schließen wir auf „$5 \cdot (-7) < 3 \cdot (-7)$".

Wir wenden uns nunmehr der Gewinnung von **Aussagen** und **Aussageformen** aus gegebenen **durch Anwendung von Schlußregeln** zu.

Wir benutzen im Teil A 5.2. formale Regeln und gelangen mit ihrer Hilfe zum sogenannten **aussagenlogischen Schließen**. Wir sprechen hier vom aussagenlogischen Schließen, weil die Schlüsse nur auf Grund von Gesetzen der Aussagenlogik durchgeführt werden. Solche Gesetze sind allgemeingültige Ausdrücke, die also bei jeder Belegung der Aussagenvariablen den Wahrheitswert W erhalten (↗ 57).

Mit Hilfe von aussagenlogischen Gesetzen, die uns beim Gewinnen von Aussagen aus gegebenen besonders interessieren, werden wir sogenannte **Schlußregeln** formulieren. Hierbei muß man zwischen den Schlußregeln und den zugrunde liegenden aussagenlogischen Gesetzen unterscheiden. Die Regeln bauen sich auf Gesetzen auf. Während die *Gesetze* der *Objektsprache* angehören, gehören die *Regeln* der *Metasprache* an. Wir können mit Klaus ([11], Seite 310) sagen: „Das Gesetz verhält sich gegenüber seinen Anwendungen neutral, die Regel hingegen ist eine Anleitung zum . . . Handeln."
Die Schlußregeln sind rein formaler Natur. Bei diesen Regeln sind also keine inhaltlichen Zusammenhänge von konkreten Aussagen zu sehen. **Schlußregeln sind formale Umformungsregeln für Ausdrücke.** Diese Ausdrücke werden bei der praktischen Anwendung mit Aussagen oder Aussageformen belegt.

Wie schon betont wurde, bildet die **Implikation** eine Grundlage unseres Schließens. Schon beim Kennenlernen der Wahrheitswerte der Implikation wurden wir darauf hingewiesen, daß man aus einer falschen Prämisse *jede beliebige* Schlußfolgerung ziehen kann (↗ 47). Dieser Sachverhalt führt dazu, daß man bei Schlüssen bestrebt ist, von wahren Aussagen auszugehen. Diese Ausgangsaussage(n) bezeichnet man auch als **Prämisse(n)** oder **Voraussetzung(en)**. Die Wahrheit der Voraussetzung(en) muß bei Beweisen gesichert sein.
Wie das geschieht, werden wir in den Teilen A 5.3. und A 5.5. erfahren.

Die Aussagen, die man beim Schließen gewinnt, nennt man **Konklusion** oder **Schlußfolgerung**. Damit haben wir die Begriffe erläutert, die zum Verständnis der Definition 1 (5.2.) nötig sind.

DEFINITION 1 (5.2.) — **Aussagenlogischer Schluß**
In der **Aussagenlogik** versteht man unter einem **Schluß** das Gewinnen einer Aussage aus einer gegebenen unter Verwendung von **Schlußregeln**, die so beschaffen sind, daß unter der Voraussetzung der Wahrheit der Prämisse mit Sicherheit auch die Konklusion wahr ist.

Wenn mehrere Ausgangsaussagen vorhanden sind, können wir auch von *einer* Prämisse sprechen, da dann die Konjunktion der Einzelprämissen als Ausgangsaussage aufgefaßt werden muß und diese wieder *eine* Prämisse ist. Entsprechendes gilt für die Konklusion.

Zwischen der Prämisse (oder den Prämissen) und der Konklusion besteht eine Beziehung, die der Struktur nach eine **materiale Implikation** ist. Es ist uns bekannt, daß eine Implikation genau dann falsch ist, wenn ihre Prämisse wahr und ihre Konklusion falsch ist.
Die beim aussagenlogischen Schließen benutzten Schlußregeln definieren wir wie folgt.

DEFINITION 2 (5.2.) — **Gültige Schlußregeln**
Eine **Schlußregel** heißt genau dann **gültig**, wenn der Fall nicht eintreten kann, daß die Prämisse wahr *und* die Konklusion falsch ist.

DEFINITION 3 (5.2.) — **Zwingender oder richtiger Schluß**
Ein **Schluß**, der nach einer gültigen Schlußregel vollzogen wird, heißt **zwingend** oder **richtig**.

Die Anwendung einer gültigen Schlußregel sichert noch nicht die Wahrheit der Konklusion. Entsprechend beinhaltet die Richtigkeit eines Schlusses nur: *Immer* wenn die Prämissen wahr sind, *dann* muß auch die Konklusion wahr sein. Die Prämissen brauchen aber nicht immer wahr zu sein. Sind sie nämlich niemals wahr, so kann man keine Aussage über die Richtigkeit des Schlusses machen.

In vielen Fällen werden wir mit Schlüssen zu tun haben, deren **Prämissen aus mehreren Einzelaussagen** bestehen. Diese Einzelaussagen, die man ebenfalls Prämissen nennt, werden miteinander konjunktiv zur Prämisse des betreffenden Schlusses verknüpft. Eine solche Konjunktion ist nach der Definition 1 (3.3.) genau dann wahr, wenn alle in ihr vorkommenden Aussagen wahr sind. Wenn die Wahrheit der Prämisse gefordert ist, dann müssen also alle Aussagen als Einzelprämissen wahr sein. Bei Anwendung von gültigen Schlußregeln auf die wahre Prämisse ist in jedem Falle die Wahrheit der Konklusion gesichert.

Schlußregeln werden oft in Form von sogenannten **Schlußfiguren** angegeben. Das sind schematische Darstellungen der betreffenden Schlüsse.
In Schlußfiguren schreibt man die einzelnen Prämissen untereinander. Wenn man alle Prämissen erfaßt hat, macht man einen Strich, der die unter dem Strich stehende Konklusion von den Prämissen abtrennt.

BEISPIEL 1 (5.2.):

(1) Wenn A_1, so A_2	1. Prämisse	Prämisse der Schlußfigur
Nun aber A_1	2. Prämisse	
A_2		Konklusion der Schlußfigur
(2) Wenn A_1, so A_2	1. Prämisse	Prämisse der Schlußfigur
Nicht A_2	2. Prämisse	
Nicht A_1		Konklusion der Schlußfigur

Oder kürzer:

$$\text{(1)}\quad \frac{\begin{array}{l}\text{Wenn } A_1, \text{ so } A_2\\ A_1\end{array}}{A_2}$$

(Gelesen: Wenn die Implikation (wenn A_1, so A_2) wahr ist *und* A_1 wahr ist, so ist A_2 wahr.)

$$\text{(2)}\quad \frac{\begin{array}{l}\text{Wenn } A_1, \text{ so } A_2\\ \text{Nicht } A_2\end{array}}{\text{Nicht } A_1}$$

(Gelesen: Wenn die Implikation (wenn A_1, so A_2) wahr ist, *und* (nicht A_2) wahr ist, dann ist (nicht A_1) wahr.)

Die Beispiele (1) und (2) könnten konkretisiert folgende Schlüsse sein.

Zu (1): Wenn die Zahl π ein nichtperiodischer, unendlicher Dezimalbruch ist, dann ist π keine rationale Zahl.
π ist ein nichtperiodischer, unendlicher Dezimalbruch.

π ist keine rationale Zahl.

Zu (2): Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, so läßt sich $\sqrt{2}$ mit ganzzahligem a und b in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen.

$\sqrt{2}$ läßt sich nicht mit ganzzahligen a und b in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen.

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Es erhebt sich nun die Frage, wie man in der Aussagenlogik einen exakten Nachweis führen kann, ob es sich um einen zwingenden Schluß handelt, ob wir nach einer gültigen Schlußregel geschlossen haben.
Wir können diese Frage leicht beantworten, wenn wir eine entsprechende, uns bereits geläufige Formalisierung der vorgelegten Schlüsse einführen, d. h., wenn wir von den konkreten Aussagen abstrahieren und zu Wahrheitswertvariablen übergehen.

Für Beispiel 1 (5.2.) (1) bedeutet das folgendes:

$$\text{Übergang von}\quad \frac{\begin{array}{c}\text{wenn } A_1,\text{ so } A_2\\ A_1\end{array}}{A_2}\quad \text{zu}\quad \frac{\begin{array}{c}p \to q\\ p\end{array}}{q}$$

Der Schlußfigur

$$\frac{\begin{array}{c}p \to q\\ p\end{array}}{q}$$

ordnen wir den aussagenlogischen Ausdruck

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

zu, dessen Prämisse die Konjunktion der beiden Prämissen der Schlußfigur ist.
Wenn dieser Ausdruck eine aussagenlogische Identität ist, die also bei jeder Belegung der Wahrheitswertvariablen den Wahrheitswert W erhält, dann können wir daraus nach Definition 2 (5.2.) auf die Gültigkeit der vorgelegten Schlußregeln schließen. (Aus diesem Sachverhalt wird deutlich, daß von konkreten Aussagen und ihren inhaltlichen Zusammenhängen abgesehen wird und nur die Denkstrukturen betrachtet werden.)
Die Überprüfung des vorliegenden Ausdrucks erfolgt mit Hilfe einer vollständigen Wahrheitswerttabelle.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

In der Spalte (5) dieser Tabelle erscheint nur der Wahrheitswert W. Der vorgelegte Ausdruck ist allgemeingültig. Es kann also nicht sein, daß die Prämisse

(↗ Kopf der Spalte (4)) den Wahrheitswert W und die Konklusion (↗ Kopf der Spalte (2)) den Wahrheitswert F hat. Somit ist die hier behandelte Schlußregel nach der Definition 2 (5.2.) gültig.

Diese Verfahrensweise wird durch folgenden Satz begründet.

SATZ 1 (5.2.)

Zu jeder aussagenlogischen Schlußregel gibt es einen Ausdruck in Form einer Implikation, der genau dann eine aussagenlogische Identität ist, wenn die Schlußregel gültig ist.

Wenn nämlich die Schlußregel gültig ist, so ergibt sich aus der Definition 2 (5.2.) sofort, daß die der Schlußregel entsprechende Implikation allgemeingültig, also eine aussagenlogische Identität ist. Wenn die Implikation eine aussagenlogische Identität ist, so kann es nicht vorkommen, daß die Prämisse wahr und die Konklusion falsch ist. Nach Definition 2 (5.2.) ist die Schlußregel gültig.

Für den *Nachweis der aussagenlogischen Identität einer Implikation* gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, von denen wir nur drei behandeln.

Bei dem *ersten Verfahren* erbringen wir den Nachweis, ob ein *Schluß nach einer gültigen Schlußregel* vollzogen wurde, in folgenden Schritten:

1. Wir ermitteln die **Prämissen** und die **Konklusion** des Schlusses und ordnen ihnen den entsprechenden aussagenlogischen Ausdruck zu.
2. Wir stellen die **Schlußfigur** auf.
3. Wir bilden die der Schlußregel entsprechende **Implikation**, deren Vorderglied die Konjunktion der Prämissen des Schlusses ist, deren Nachglied die Konklusion des Schlusses ist.
4. Wir untersuchen den Ausdruck auf **Allgemeingültigkeit**.
5. Wir **werten** die Untersuchung **aus**.

Zum 4. Schritt sei bemerkt, daß wir nicht alle möglichen Belegungen der Aussagenvariablen dieses Ausdrucks zu untersuchen brauchen. Wichtig sind nur die Fälle, in denen die Prämisse wahr ist. Bei einer gültigen Schlußregel soll nämlich in allen Fällen, in denen die Prämisse wahr ist, auch die Konklusion wahr sein. In den Fällen jedoch, in denen die Prämisse falsch ist, wissen wir sofort, daß die Implikation wahr ist, gleichgültig welchen Wert die Konklusion besitzt. Aus der dritten Zeile der Wahrheitswerttabelle zum Beispiel 1 (5.2.) (↗ 78) ist z. B. ersichtlich, daß man auch aus einer falschen Prämisse zu einer wahren Konklusion kommen kann. Eine gültige Schlußregel gibt uns keine Auskunft darüber, ob die Prämisse wahr ist. Sie besagt nur, daß *in dem Falle, wenn* die Prämisse wahr ist, auch die Konklusion den Wahrheitswert W besitzt.

Wir führen jetzt die Untersuchung über die Gültigkeit der im Beispiel 1 (5.2.) zugrunde liegenden Schlußregel nach dem angegebenen Verfahren durch.

1. Wir ermitteln die Einzelaussage(n) der Prämisse und der Konklusion des Schlusses, ordnen jeder Einzelaussage eine Wahrheitswertvariable zu und stellen für Prämisse(n) und Konklusion die aussagenlogischen Ausdrücke auf.
   p: Die Zahl π ist ein nichtperiodischer, unendlicher Dezimalbruch;
   entsprechend:
   q: π ist keine rationale Zahl.

Prämissen sind: $p \rightarrow q$ und p
Konklusion: q

2. Wir stellen die Schlußfigur auf, d. h.:
Wir abstrahieren vom konkreten Inhalt der Aussagen p, q und sehen p, q als Variable für beliebige Aussagen an.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad p \quad} \\ q \end{array}$$

3. Wir formen in eine Implikation um.
$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
4. Wir untersuchen die Implikation auf Allgemeingültigkeit.
(↗ Wahrheitswerttabelle 78)
5. Wir werten aus.
Der Ausdruck $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ ist eine aussagenlogische Identität, also ist die geprüfte Schlußregel gültig und der nach ihr vollzogene Schluß zwingend.

Die eben geprüfte Schlußregel hat bei unseren Gedankenabläufen (oft in verkürzter Form) und für Beweisführungen eine große Bedeutung. Sie wird in der Logik als **Abtrennungsregel** oder **Modus ponens (Festlegung** — lat.) bezeichnet.

Auch die dem Beispiel 1 (5.2.) zugrunde liegende allgemeine Schlußregel sei auf ihre Gültigkeit überprüft.

1. p: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.
q: $\sqrt{2}$ läßt sich mit ganzzahligen a und b in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen.
Prämissen sind: $p \rightarrow q$ und $\sim q$
Konklusion: $\sim p$
2. $$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad \sim q \quad} \\ \sim p \end{array}$$
3. $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
4.

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
W	W	F	W
W	F	F	W
F	W	F	W
F	F	W	W

5. Weil der Ausdruck $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$ eine aussagenlogische Identität ist, handelt es sich um eine gültige Schlußregel.

Diese Schlußregel ist unter dem Namen **Aufhebungsregel** oder **Modus tollens (Aufhebung** — lat.) bekannt.

Darüber hinaus kann an dem zuletzt dargestellten Beispiel die Gewinnung einer wahren Aussage aus gegebenen wahren Aussagen mit Hilfe einer gültigen Schlußregel gezeigt werden.
Wir gehen also von der gültigen Schlußregel

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{\quad \sim q \quad} \\ \sim p \end{array}$$

aus und betrachten p als Bezeichnung für die Aussage „$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl“, q als Bezeichnung für die Aussage „$\sqrt{2}$ läßt sich mit ganzzahligen a und b in der Form $\frac{a}{b}$ darstellen“.

Wir haben uns dann zu überzeugen, ob bei diesen festen Bedeutungen von p und q die Prämissen $p \rightarrow q$ und $\sim q$ wahr sind. Ist das der Fall, so wissen wir auch, daß dann $\sim p$ wahr ist, d. h. p falsch ist, denn die benutzte Schlußregel ist gültig. Nun sind $p \rightarrow q$, $\sim q$ und $\sim p$ wahre Aussagen, d. h., die Konklusion „$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl“ ist wahr.

Für die folgenden drei Beispiele von Schlüssen sollen nur noch geringe Hilfen für die Untersuchung der Gültigkeit von Schlußfiguren angegeben werden.

BEISPIEL 2 (5.2.):

(a) Wenn $3 \mid 1970$, so $6 \mid 1970$.
Es ist nicht wahr, daß $3 \mid 1970$.
———
Folglich ist nicht wahr, daß $6 \mid 1970$.

(b) Wenn Dreiecke gleichschenklig sind, so müssen sie rechtwinklig sein.
Die Dreiecke sind gleichschenklig.
———
Folglich müssen die Dreiecke rechtwinklig sein.

(c) Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar.
Wenn die Menge der rationalen Zahlen und die der irrationalen Zahlen abzählbar ist, so ist die Menge der reellen Zahlen abzählbar.
Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.
———
Folglich ist die Menge der irrationalen Zahlen nicht abzählbar.

Die Wahrheitswerttabelle zum Beispiel 2 (5.2.) (a) hat folgendes Aussehen.

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge \sim p$	$((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$
W	W	F	W
W	F	F	W
F	W	W	F
F	F	W	W

Aus dieser Tabelle folgt:

Der vorgelegte Ausdruck ist *nicht* allgemeingültig, also ist die im Beispiel 2 (5.2.) (a) dargestellte Schlußregel *nicht* gültig (der Schluß ist nicht zwingend), weil aus einer wahren Prämisse nicht in jedem Falle eine wahre Konklusion folgt.

Im Beispiel 2 (5.2.) (b) ist die Prämisse falsch. Eine falsche Prämisse läßt aber bekanntlich jede beliebige Konklusion zu. Deswegen ist bei einem Schluß aus einer falschen Prämisse die Wahrheit der Konklusion nicht gesichert. In diesem Beispiel ist die Konklusion ebenfalls falsch. Die hier angewandte Schlußregel (Modus ponens) ist jedoch gültig.

Die gültige Schlußregel, die dem Beispiel 2 (5.2.) (c) zugrundeliegt, kann durch folgende Schlußfigur dargestellt werden.

$$\begin{array}{c} p \\ (p \wedge q) \rightarrow r \\ \sim r \\ \hline \sim q \end{array}$$

BEISPIEL 3 (5.2.):
„Wenn ich Logik studiere, so lerne ich präziser denken, und wenn ich präziser denken lerne, so kann ich besser sozialistische Menschen erziehen."
Folglich gilt:
„Wenn ich Logik studiere, so kann ich besser sozialistische Menschen erziehen"
Dieser Schluß hat die folgende Struktur.

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

Mit Hilfe einer vollständigen Wahrheitswerttabelle findet man leicht, daß der entsprechende Ausdruck

$$\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)$$

eine aussagenlogische Identität — also allgemeingültig — ist. Es wurde demnach hier nach einer gültigen Schlußregel geschlossen.

Eine derartige Schlußregel wird in der Literatur als **Kettenschluß** oder **Regel der Transitivität (durchgängig — lat.) der Implikation** bezeichnet.

In diesem Zusammenhang stellen wir die *Frage, ob die Umkehrung einer gültigen Schlußregel wieder eine gültige Schlußregel ist.*
Kann man von der Wahrheit der Konklusion auf die Wahrheit der Prämisse schließen?
Diese Frage wurde bereits auf Seite 48 beantwortet, als wir uns mit der Implikation beschäftigt hatten. Wir wissen bereits, daß die Vertauschung der Prämisse mit der Konklusion in einer Implikation im allgemeinen nicht zulässig ist.
Es treten aber auch Fälle auf, in denen die implikative Verknüpfung zweier Ausdrücke und ihre Konversion stets denselben Wahrheitswert besitzen. Sie sind also wertverlaufsgleich. Wir haben es in solchen Fällen mit semantischen Äquivalenzen zu tun.
Daraus folgt, daß die **Umkehrung einer gültigen Schlußregel genau dann wieder eine gültige Schlußregel** ist, wenn **Prämisse und Konklusion dieser Regel wertverlaufsgleich** sind.
Eine aus Prämisse und Konklusion gebildete Äquivalenz muß in diesem Falle allgemeingültig sein.

BEISPIEL 4 (5.2.):

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to p} \\ p \leftrightarrow q \end{array} \qquad \text{Umkehrung:} \qquad \begin{array}{c} \underline{\quad p \leftrightarrow q \quad} \\ (p \to q) \wedge (q \to p) \end{array}$$

Aus gültigen Schlußregeln lassen sich auf Grund der Einsetzungsregel (↗ 60) weitere Schlußregeln aufbauen, die ebenfalls gültig sind.
Man geht dabei zweckmäßigerweise von dem allgemeingültigen Ausdruck aus, den man aus einer gültigen Schlußregel gewonnen hat.

BEISPIEL 5 (5.2.):
Angenommen, wir haben die aussagenlogische Identität

$$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$$

erhalten. Wir setzen z. B. für die Wahrheitswertvariable p an allen Stellen $\sim r \vee s$ ein. Dann ist auch der Ausdruck

$$((\sim r \vee s) \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim(\sim r \vee s))$$

eine aussagenlogische Identität.

Es gibt ein *zweites Verfahren*, um den *Schluß nach einer gültigen Schlußregel* nachzuweisen.

Mit Hilfe der **Einsetzungsregel** und der auf Seite 80 erläuterten **Abtrennungsregel** kann man aus gewissen Axiomen alle allgemeingültigen Ausdrücke des Aussagenkalküls herleiten.

Auf Grund der Einsetzungsregel können alle gültigen Schlußregeln, die mit Hilfe von Wahrheitswertvariablen dargestellt wurden, durch Ausdrücke ersetzt werden. Wenn z. B. H_1 und H_2 beliebige Ausdrücke symbolisieren sollen, so lautet die **Abtrennungsregel:**

$$\begin{array}{c} H_1 \rightarrow H_2 \\ H_1 \\ \hline H_2 \end{array}$$

Durch die Einsetzungsregel haben wir ein weiteres Mittel in der Hand, um in vielen Fällen entscheiden zu können, ob es sich um einen allgemeingültigen Ausdruck handelt. Es wäre z. B. sicher sehr zeitaufwendig, mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle zu entscheiden, ob der folgende Ausdruck allgemeingültig ist.

$$[((r \wedge \sim s) \rightarrow (t \vee u)) \wedge \sim(t \vee u)] \rightarrow \sim(r \wedge \sim s)$$

Man sieht aber sofort, daß dieser Ausdruck aus dem uns bereits bekannten allgemeingültigen Ausdruck

$$((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$$

durch Einsetzung hervorgegangen ist. Da dieser Ausdruck allgemeingültig ist, folgt auf Grund des Satzes 1 (4.4.), daß dann auch der gegebene Ausdruck allgemeingültig ist.

Das *dritte Verfahren* zum Nachweis, daß *nach einer gültigen Schlußregel* geschlossen wurde, sei nur erwähnt.

Man kann auch mit Hilfe des **Ersetzbarkeitstheorems** (↗ 60) die Allgemeingültigkeit von Ausdrücken nachweisen (Umformungen).

Schließlich sei eine gültige Schlußregel angeführt, die man als **verallgemeinerte Abtrennungsregel** bezeichnet. Man erhält sie durch n-malige Anwendung der Abtrennungsregel.

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow p_1 \\ p_1 \rightarrow p_2 \\ \cdots\cdots\cdot \\ p_{n-2} \rightarrow p_{n-1} \\ p_{n-1} \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

Mit den bisherigen Kenntnissen sind wir in der Lage, weitere gültige Schlußregeln aufzustellen und deren Gültigkeit nachzuweisen (z. B. Aufstellung von gültigen Schlußregeln aus allgemeingültigen Äquivalenzen).

Die Schlüsse im täglichen Leben erfolgen oft nicht in der ausführlichen Form, wie wir sie kennengelernt haben. Aus den verschiedensten Gründen werden oft Teile der Prämisse, die ganze Prämisse oder sogar die ganze Konklusion weggelassen. Hier überläßt man es dem Leser, entsprechende Ergänzungen vorzunehmen.

Zusammenfassung

Gültige Schlußregeln des aussagenlogischen Schließens sind so gestaltet, daß aus der Wahrheit der Prämisse stets die Wahrheit der Konklusion folgt.
Über den Wahrheitsgehalt der Prämisse(n) selbst wird in einer gültigen Schlußregel nichts ausgesagt, genau wie man über den Wahrheitsgehalt der Konklusion allein nichts aussagen kann.
Bei der Anwendung von Schlußregeln — wie überhaupt bei allen logischen Untersuchungen — wird von der inhaltlichen Bedeutung der Aussagen abstrahiert und nur ihr Wahrheitswert als wesentlich angesehen.
Weil eine konkrete Aussage aus unterschiedlichen Prämissen gewonnen werden kann, ist es nicht hinreichend, bei einem Schluß, der die konkrete Aussage als Konklusion enthält, die Falschheit der Prämisse nachzuweisen, um damit von der Falschheit der Konklusion überzeugt zu sein. Die Wahrheit der Konklusion könnte sich auch aus der Wahrheit einer anderen Prämisse durch Anwendung einer gültigen Schlußregel ergeben.

5.3. Spezielle Schlußregeln

Im Teil A 5.3. beschäftigen wir uns mit einigen gültigen Schlußregeln. Den Nachweis, daß es sich um gültige Regeln handelt, überlassen wir dem Leser.

Um die in der Fachsprache übliche Formulierung der gültigen Regeln zu verstehen, wollen wir die Klärung einiger Begriffe voranstellen.

DEFINITION 1 (5.3.) — **Beweis**
Unter einem **Beweis einer Aussage** A versteht man eine endliche Kette von Umformungen, die mit Hilfe gültiger Schlußregeln vorgenommen werden und die von wahren oder als wahr angenommenen Aussagen ausgehen und zu der Aussage A führen.

Mit dem Begriff des Beweises wird in der Umgangssprache oft der Begriff der **Ableitung** identifiziert. Das ist jedoch *nicht* zulässig. Der Begriff der Ableitung ist umfassender als der des Beweises. Jeder Beweis ist also eine Ableitung, aber nicht jede Ableitung ist ein Beweis.

Während ein Beweis die Wahrheit der Ausgangsaussagen (Prämissen) verlangt, wird die Wahrheit der Ausgangsaussagen bei einer Ableitung nicht gefordert. Man will bei einer Ableitung nur feststellen, ob aus gegebenen Prämissen eine bestimmte Konklusion mit Hilfe gewisser Schlußregeln ableitbar ist.

Die Reihenfolge der gültigen Schlußregeln, die hier ausgeführt werden, entspricht der Reihenfolge der behandelten Aussagenfunktionen. Sie gibt keine Rangfolge bezüglich der Bedeutung für das Beweisen von Sätzen oder für das Erarbeiten der anderen gültigen Schlußregeln an. Bei der Aufführung der Regeln halten wir uns an die in der Fachsprache übliche Bezeichnungsweise.

I a) Schluß auf eine Negation
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen und einer Aussage A_1 ein Widerspruch folgt, so ist aus den gegebenen Voraussetzungen die Aussage „nicht A_1“ beweisbar.
Der Schluß auf eine Negation wird bei den **indirekten Beweisen**, die wir im Teil A 5.5. behandeln, angewandt.

I b) Schluß aus einer Negation
Aus „nicht (nicht A_1)“ ist die Aussage A_1 beweisbar.
Zu dieser Schlußregel gehört die folgende Schlußfigur.

$$\frac{\sim(\sim p)}{p}$$

Diese Schlußfigur erscheint selbstverständlich (↗ 59). Dennoch ist es erforderlich, den entsprechenden Ausdruck, also $(\sim(\sim p)) \rightarrow p$, mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle zu prüfen.

II a) Schluß auf eine Konjunktion
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage A_1 beweisbar ist *und* wenn aus den gegebenen Voraussetzungen die Aussage A_2 beweisbar ist, so ist aus denselben Voraussetzungen die Aussage „A_1 und A_2“ beweisbar.
Die Schlußfigur sieht wie folgt aus.

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ p \rightarrow r \\ \hline q \wedge r \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{c} q \\ r \\ \hline q \wedge r \end{array}$$

II b) Schluß aus einer Konjunktion
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage „A_1 und A_2“ beweisbar ist, so ist aus diesen Voraussetzungen die Aussage A_1 beweisbar und aus denselben Voraussetzungen auch die Aussage A_2 beweisbar.
Wir erhalten dazu zwei Schlußfiguren, weil man aus einer wahren Konjunktion auf die Wahrheit der einzelnen Glieder der Konjunktion schließen kann.

$$\frac{p \wedge q}{p}; \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

III a) Schluß auf eine Alternative
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage A_1 beweisbar ist, so ist aus diesen Voraussetzungen auch die Aussage „A_1 oder A_2“ beweisbar.
Diese Regel sagt aus, daß man aus der Wahrheit einer Aussage A stets auf die Wahrheit einer beliebigen Alternative schließen kann, die A als Alternativglied enthält. Die entsprechenden Schlußfiguren sehen wie folgt aus.

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad \text{oder} \qquad \frac{q}{p \vee q}$$

III b) Schluß aus einer Alternative
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage „A_1 oder A_2“ beweisbar ist *und* wenn aus diesen Voraussetzungen und der Aussage A_1 eine Aussage A_3 beweisbar ist *und* wenn aus diesen Voraussetzungen und der Aussage A_2 die Aus-

sage A_3 beweisbar ist, so ist allein aus den gegebenen Voraussetzungen die Aussage A_3 beweisbar.
Das ist der Schluß aus einer Alternative, der auf Fallunterscheidungen führt.

Beweis der Wahrheit (Richtigkeit) der Aussage A_3:
Aus der Wahrheit der Aussage „A_1 oder A_2" nimmt man folgende Fälle an.

Fall 1: Die Aussage A_1 ist wahr.
Dann wird die Wahrheit der Implikation „wenn A_1, so A_3" bewiesen.
Nach der Abtrennungsregel ist dann A_3 wahr.

Fall 2: Die Aussage A_2 ist wahr.
Dann wird die Wahrheit der Implikation „wenn A_2, so A_3" bewiesen.
Nach der Abtrennungsregel ist dann A_3 wahr.

Damit ist A_3 bewiesen. Die entsprechende Schlußfigur dieser Schlußregel sieht wie folgt aus.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß es nicht ausreicht, nur *einen* Fall zu untersuchen, denn die folgenden Schlußregeln sind *nicht* gültig.

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{p \rightarrow r} \\ r \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ r \end{array}$$

Die Schlußfiguren

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

sind dagegen Schlußfiguren gültiger Schlüsse aus einer Alternative, was man leicht nachprüfen kann.

IV a) Schluß auf eine Implikation
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen und der Aussage A_1 die Aussage A_2 beweisbar ist, so ist allein aus den gegebenen Voraussetzungen die Implikation „wenn A_1, so A_2" beweisbar.
Hier wird zum Ausdruck gebracht, daß man die Implikation „wenn A_1, so A_2" bewiesen hat, wenn aus der Annahme der Wahrheit von A_1 und den gegebenen Voraussetzungen die Wahrheit von A_2 folgt. Wenn ein Satz in der Form „wenn A_1, so A_2" vorliegt, so wollen wir — in Anlehnung an die Lehrbücher der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule — A_1 auch als **Voraussetzung** und A_2 als **Behauptung** dieses Satzes bezeichnen (↗ Teil A 5.5.).

IV b) Schluß aus einer Implikation
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage „wenn A_1, so A_2" beweisbar ist und aus diesen Voraussetzungen die Aussage A_1 beweisbar ist, so ist aus den Voraussetzungen die Aussage A_2 beweisbar.
Diese Schlußregel ist die bereits behandelte **Abtrennungsregel**. Als Schlüsse aus einer Implikation kann man z. B. auch solche ansehen, die auf der Grundlage folgender Schlußfiguren durchgeführt werden.

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \sim q \end{array}}{\sim p} \qquad \text{oder} \qquad \frac{p \to q}{\sim q \to \sim p}$$

V a) Schluß auf eine Äquivalenz
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage „wenn A_1, so A_2" beweisbar ist *und* wenn aus den gegebenen Voraussetzungen die Aussage „wenn A_2, so A_1" beweisbar ist, so ist aus den gegebenen Voraussetzungen die Aussage „A_1 genau dann, wenn A_2" beweisbar.
Auf der Grundlage unserer Kenntnisse über die Äquivalenz wird die Aufstellung der Schlußfigur zu dieser Schlußregel keine weiteren Schwierigkeiten bereiten.

V b) Schluß aus einer Äquivalenz
Wenn aus gegebenen Voraussetzungen die Aussage „A_1 genau dann, wenn A_2" beweisbar ist, so ist aus diesen Voraussetzungen die Aussage „wenn A_1, so A_2" und auch die Aussage „wenn A_2, so A_1" beweisbar.
Außerdem gibt es noch weitere Möglichkeiten, aus einer Äquivalenz zu schließen, beispielsweise nach Schlußregeln, die in Form von Schlußfiguren hier angedeutet werden.

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ p \end{array}}{q} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

Außer den angeführten Schlußregeln gibt es auch noch weitere, auf die wir hier nicht eingehen. Es sei nur erwähnt, daß man aus jeder aussagenlogischen Identität, die in Form einer Implikation gegeben ist, eine gültige Schlußregel gewinnen kann. Für das Führen von Beweisen benötigen wir noch Regeln, die wir mit den Mitteln der Aussagenlogik nicht mehr angeben können. Mit diesen beschäftigen wir uns im Teil A 5.4.

5.4. Prädikatenlogisches Schließen

Bei der Behandlung der Schlußregeln haben wir bisher nur Aussagen untersucht. *Es fragt sich nun, ob die Schlußregeln ihre Gültigkeit auch dann behalten, wenn in ihnen an Stelle von Aussagen* ***Aussageformen*** *vorkommen.*

Wir gehen von einem Schluß aus, dessen Gültigkeit wir ohne besondere Schwierigkeiten aus unserem Erfahrungsbereich bestätigen können.

BEISPIEL 1 (5.4.):
„Wenn ein Gegenstand aus Stahl ist, so wird dieser vom Magneten angezogen."
„Rasierklingen sind aus Stahl."

„Folglich werden Rasierklingen vom Magneten angezogen."

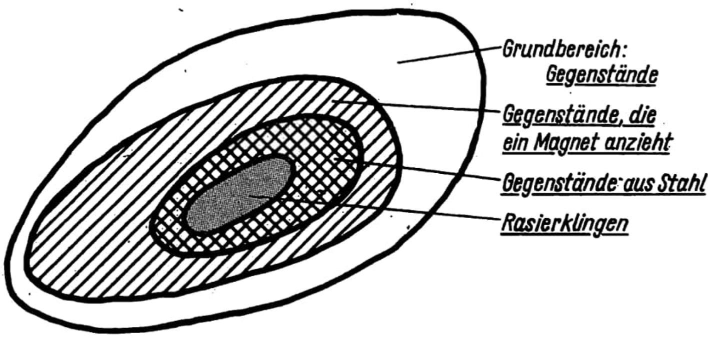
Es hat den Anschein, als hätten wir es im Beispiel 1 (5.4.) mit der Abtrennungsregel zu tun. Bei genauerer Untersuchung zeigt sich jedoch, daß hier *zwei* Schlüsse enthalten sind.

Es kommen Aussageformen über dem Grundbereich „Gegenstände" vor.

$H_1(g)$: „g ist aus Stahl."
$H_2(g)$: „g wird vom Magneten angezogen."

Die Erfüllungsmenge von $H_1(g)$ ist in der Erfüllungsmenge von $H_2(g)$ enthalten. Jede Belegung, die $H_1(g)$ erfüllt, erfüllt auch $H_2(g)$. Belegt man g mit einem Element aus der Menge der Rasierklingen, so wird $H_1(g)$ und damit auch $H_2(g)$ wahr.

Die Sachverhalte lassen sich zeichnerisch leicht darstellen (↗ Bild 88/1).



88/1

Für alle Gegenstände g gilt:
Wenn g aus Stahl ist, so wird g vom Magneten angezogen.
Die symbolische Darstellung lautet:

$$\forall g(H_1(g) \rightarrow H_2(g)) .$$

Das ist eine wahre Aussage.
Auf Seite 68 hatten wir das prädikatenlogische Gesetz

$$\forall x\, H(x) \rightarrow H(a)$$

kennengelernt. Aus ihm erhält man die Schlußregel

$$\frac{\forall x\ H(x)}{H(a)}$$

Wenden wir sie an, so können wir aus

$$\forall g(H_1(g) \rightarrow H_2(g))$$

auf

$$H_1(r) \rightarrow H_2(r)$$

schließen, wobei r Variable für Rasierklingen ist.
Es ergibt sich nach diesem Schluß zunächst also die Konklusion
„Wenn r aus Stahl ist, so wird r vom Magneten angezogen".
Nun gilt aber $H_1(r)$, denn Rasierklingen sind aus Stahl, also können wir die Abtrennungsregel anwenden und erhalten die Konklusion $H_2(r)$.

Die aussagenlogischen Schlußregeln behalten ihre Gültigkeit auch dann, wenn wir an die Stelle von Wahrheitswertvariablen der Aussagen Aussageformen setzen, wie wir am Beispiel der Abtrennungsregel erkannt haben. Dennoch bedeutet das prädikatenlogische Schließen mehr als das einfache Anwenden der Schlußregeln der Aussagenlogik für Aussageformen. Das prädikatenlogische Schließen geht über das aussagenlogische Schließen hinaus, da bei diesem sowohl Gesetze der Aussagenlogik als auch Gesetze der Prädikatenlogik angewandt werden.

Aus allgemeingültigen prädikatenlogischen Implikationen und Äquivalenzen gewinnt man — ähnlich wie in der Aussagenlogik — **Schlußregeln**.

VI a) Schluß auf „für jedes"
Wenn eine Aussage $\mathsf{H}(a)$ für ein *beliebiges* a beweisbar ist, so ist die Aussage „für jedes x gilt $\mathsf{H}(x)$" beweisbar.

Die Bedeutung dieses Schlusses kann man bei Beweisführungen im Verlaufe der gesamten Mathematikausbildung verfolgen und erkennen. Wir haben es hier mit einer **Verallgemeinerung** zu tun.

Große Bedeutung hat auch folgende Schlußregel.

VI b) Schluß aus „für jedes"
Wenn die Aussage „für jedes x gilt $\mathsf{H}(x)$" beweisbar ist, so ist die Aussage $\mathsf{H}(a)$ für ein *beliebiges* Individuum a beweisbar.

VII a) Schluß auf „es gibt ein"
Wenn sich ein Individuum angeben läßt, so daß die Aussage $\mathsf{H}(a)$ beweisbar ist, so ist die Aussage „es gibt ein x, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt" beweisbar.

Diese Schlußweise ist die Grundlage von sogenannten **Existenzbeweisen**.
Ein Existenzbeweis läßt sich auch durch Schließen auf eine Verneinung durchführen, indem man die Annahme „es gibt *kein* x, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt" zum Widerspruch führt.

VII b) Schluß aus „es gibt ein"
Wenn die Aussage „es gibt ein x, für das $\mathsf{H}(x)$ gilt" beweisbar ist, dann ist $\mathsf{H}(a)$ beweisbar, wobei vorausgesetzt wird und in allen folgenden Überlegungen zu beachten ist, daß mit a ein Element gemeint ist, für das $\mathsf{H}(a)$ gilt. Die Variable a ist also hier *keine freie* Variable (wie etwa in der Schlußregel VI b)), sondern eine sogenannte *markierte* (an bestimmte Voraussetzungen gebundene) Variable, in die man nicht beliebig einsetzen kann.

Aus den auf den Seiten 68 f. angeführten prädikatenlogischen Äquivalenzen kann man gültige Schlußregeln aufstellen.
Für die Äquivalenz unter 1. (↗ 68) lauten diese Schlußregeln beispielsweise:

$$\frac{\forall x\, \mathsf{H}(x)}{\sim \exists x\, (\sim \mathsf{H}(x))} \quad \text{und} \quad \frac{\sim \exists x\, (\sim \mathsf{H}(x))}{\forall x\, \mathsf{H}(x)}$$

Bemerkung:
In der traditionellen Logik hat man ein besonderes Augenmerk den sogenannten **Syllogismen** gewidmet. Diese sind mittelbare Schlüsse, bei denen von zwei Aussagen auf eine dritte geschlossen wird, wobei die beiden Teilprämissen durch einen sogenannten Mittelbegriff in einem bestimmten Zusammenhang stehen müssen.

Die Anwendung der Schlußfiguren erfolgt im Rahmen der Beweisverfahren im Teil A 5.5.

5.5. Beweisverfahren

Zu den Beweisverfahren, wie sie in vielen Bereichen der Mathematik angewendet werden, gehören der **direkte Beweis** und der **indirekte Beweis**. (Hier sei bemerkt, daß der Beweis durch vollständige Induktion auch zu den direkten Beweisen gehört.)

Im Teil A 5.5. werden einige Grundlagen des direkten und des indirekten Beweises erläutert. Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion ist im Teil C 11.1. dargestellt.
Auf die Notwendigkeit des Beweisens und die im Lehrplanwerk der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule erhobenen Forderungen über das Beweisen gehen wir hier nicht ein.

Wenn man eine mathematische Aussage beweisen will, sollte man sie, wenn es möglich ist (das ist nicht immer der Fall), in Form einer **Implikation** wiedergeben. Diese implikative Darstellung einer mathematischen Aussage ermöglicht dann das Bilden der Umkehrung(en) dieser Aussage.

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß man das Vorderglied eines in Form einer Implikation gegebenen Satzes als **Voraussetzung** und das Nachglied als **Behauptung** bezeichnet. Beim Vorderglied der Implikation müßte man deutlicher von *einer* Voraussetzung sprechen, denn es werden im allgemeinen noch weitere Voraussetzungen nötig sein, um beim eigentlichen Beweis auf die Behauptung zu schließen.

Mit den bisherigen Ausführungen wurden bereits die Gliederung und die Reihenfolge der Teilschritte des Beweises eines Satzes angedeutet. Jeder Beweis gliedert sich — schon bei Euklid — in
das Ermitteln der Voraussetzung,
das Feststellen der Behauptung und
das Führen des Beweises.
Für das Beweisen eines Satzes ist das Aufstellen von Voraussetzungen und Behauptung eine erste Aufgabe. Dabei ist man bestrebt, in die Voraussetzung möglichst die zweckmäßigsten Fakten aufzunehmen.

5.5.1. *Der direkte Beweis*

Das Wesen eines **direkten Beweises** besteht darin, daß aus den bereits bewiesenen, als wahr anerkannten oder als wahr angenommenen Voraussetzungen mit Hilfe von gültigen Schlußregeln nach einer endlichen Anzahl von Schritten die Behauptung gewonnen wird.

BEISPIEL 1 (5.5.):
Satz: *In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.*
Wir formen den Satz in eine Aussage um, die eine Implikation enthält.
Für alle Vierecke gilt:
Wenn das Viereck ein Parallelogramm ist, so halbieren seine Diagonalen einander.
Nach der Schlußregel aus einer Allaussage (↗ 89, VI b)) ist es statthaft, den Beweis für ein beliebiges Parallelogramm zu führen.

Voraussetzung (V):	Gegeben sei ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$. Der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ sei M.
(V_1) Satz:	*In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten kongruent.*
(V_2) Satz:	*Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.*
(V_3) Satz:	*Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie in den Längen aller Seiten und den Größen aller Winkel übereinstimmen.*

(V₄) Kongruenzsatz: *Dreiecke, die in der Länge einer Seite und den Größen der dieser Seite anliegenden Winkel übereinstimmen, sind kongruent.*

(V_5) Definition: *Ein Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten nennt man Parallelogramm.*

Die Voraussetzungen V_1, V_2, ..., V_5 gehören nicht zu den unmittelbaren Voraussetzungen des Satzes. Man fügt oft bereits bewiesene Aussagen beim Schließen bzw. Beweisen zu der (den) Prämisse(n) hinzu, um das Beweisverfahren zu verkürzen. Wenn man aus den Axiomen der entsprechenden Theorie direkt schließen müßte, könnten viele Beweise von Sätzen wegen ihrer Länge nicht geführt werden. Bei Hinzunahme weiterer Definitionen oder bereits bewiesener Aussagen zur Prämisse wählt man die jeweils zweckmäßigsten aus.

Es ist eine **Allaussage** zu *beweisen.*
Nach dem Schluß auf „für jedes" genügt es, folgendes zu beweisen.

Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbieren einander.

Behauptung: $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{MD}$

Beweis:	Wegen	Schlußfigur	
Wenn $\square\, ABCD$ ein Paralellogramm ist, so ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.	(V_1) Schluß VIb)	$p \to q$	
$\square\, ABCD$ ist ein Parallelogramm.	(V)	p	(1)
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$		q	
Wenn $\square\, ABCD$ ein Parallelogramm ist, so ist $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.	(V_5)	$p \to r$	
$\square\, ABCD$ ist ein Parallelogramm.	(V)	p	(2)
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$		r	
Wenn $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, so $\sphericalangle MDC \cong \sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MCD \cong \sphericalangle MAB$.	(V_2)	$r \to (s \wedge t)$	
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	(2)	r	(3)
$\sphericalangle MDC \cong \sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MCD \cong \sphericalangle MAB$		$s \wedge t$	
Wenn $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\sphericalangle MDC \cong \sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MCD \cong \sphericalangle MAB$, so $\triangle ABM \cong \triangle CDM$.	(V_4)	$(q \wedge s \wedge t) \to u$	
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ und $\sphericalangle MDC \cong \sphericalangle MBA$ und $\sphericalangle MCD \cong \sphericalangle MAB$	(1), (3)	$q \wedge s \wedge t$	(4)
$\triangle ABM \cong \triangle CDM$		u	
Wenn $\triangle ABM \cong \triangle CDM$, so $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{MD}$.	(V_3)	$u \to (v \wedge w)$	
$\triangle ABM \cong \triangle CDM$	(4)	u	(5)
$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{MD}$		$v \wedge w$	

q. e. d.

Damit wurde die Implikation „Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, so halbieren seine Diagonalen einander" bewiesen. Der Beweis wurde für ein beliebiges Parallelogramm erbracht.

Nach dem Schluß (VI a) gilt die Behauptung für jedes Viereck, das ein Parallelogramm ist.

Zum Beweis im Beispiel 1 (5.5.) wurde — im Gegensatz zur üblichen Verfahrensweise — keine Skizze angefertigt, wenn auch eine treffende Skizze oft das Beweisen erleichtert und Denkanregungen gibt. Bei grundsätzlichen Zusatzvereinbarungen kann auch in der Geometrie ein exakt aufgebauter Beweis ohne eine Skizze geführt werden. Manchmal verleitet sie nämlich dazu, Eigenschaften einer Figur zu entnehmen, die diese Figur nicht besitzt, vor allem dann, wenn man spezielle Figuren zugrundelegt.
Grundsätzlich ist gegen das Anfertigen einer Skizze auch im Mathematikunterricht nichts einzuwenden, wenn die Schüler daran gewöhnt sind, jeden Schritt des Beweises exakt zu begründen.

Beweise werden in der Praxis nicht in einer solchen ausführlichen Form wie im Beispiel 1 (5.5.) geführt. Man schreibt gewöhnlich nicht alle Voraussetzungen ($V_1, V_2, \ldots, V_n$) auf. Die Begründung der einzelnen Schritte wird ebenfalls in abgekürzter Form angegeben. Bei geometrischen Beweisen werden in unserer Schule Skizzen angefertigt und Bezeichnungen aus den Skizzen entnommen. Dies geschieht z. T. deshalb, weil man dadurch Zeit und Schreibarbeit einspart. Ein weiterer Grund, weshalb man nicht alle Voraussetzungen anführt, ist darin zu suchen, daß man beim Beginn einer Beweisführung noch nicht übersehen kann, welche wahren Aussagen man als Voraussetzungen dafür benötigen wird. Wir verzichten im folgenden auch auf die Zuordnung der entsprechenden Schlußfiguren und somit auf die lückenlose Angabe der Beweiskette, wobei wir uns stets den gesamten Denkablauf auch ohne die ausführliche Darstellung der einzelnen Beweisschritte bewußtmachen sollten.

In vielen Fällen werden Umkehrungen zu Sätzen gebildet und diese dann ebenfalls bewiesen. Wir weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, daß in der Mathematik der Begriff der Umkehrung eines Satzes mit der Konversion der Implikation nicht in jedem Falle übereinstimmt (↗ [13], Seite 891).

Um die **Beziehungen zwischen Satz und Umkehrung des Satzes** zu verdeutlichen, führen wir einige Beispiele mit Angabe der entsprechenden Voraussetzungen und Behauptungen in der Tabelle auf Seite 93 an. Es werden dabei Aussageformen angeführt, die leicht auf die Struktur „aus . . . folgt . . .“ gebracht werden können.
Man erkennt auch hieran deutlich, daß eine Umkehrung stets eine neue Aussage ist, die bewiesen werden muß, wenn man sie als gültig ansehen soll.
Man beachte besonders die Struktur im Beispiel (3).

$$\text{S:}\quad (p \wedge q) \rightarrow r \qquad \begin{array}{ll} \text{U}_1: & r \rightarrow (p \wedge q) \\ \text{U}_2: & (p \wedge r) \rightarrow q \\ \text{U}_3: & (q \wedge r) \rightarrow p \end{array}$$

Wir wollen nunmehr die Umkehrung des Satzes im Beispiel 1 (5.5.) formulieren und auch beweisen. Dabei demonstrieren wir eine mögliche **Kurzform des direkten Beweises**, wie sie später angewandt werden könnte. In der Praxis werden leider oft die Schlüsse auf die Allaussage und aus der Allaussage (↗ VI a) und VI b) auf Seite 89) weggelassen. Man muß darauf achten, daß diese Schlußweisen mitgesprochen werden.

Umkehrung des Satzes: *Für alle Vierecke gilt:*
Wenn die Diagonalen des Vierecks einander halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

	S: Satz U: Umkehrung des Satzes	Voraussetzung	Behauptung
(1)	S: Wenn α ein rechter Winkel ist, so ist α einem seiner Nebenwinkel kongruent.	α ist ein rechter Winkel.	α ist einem seiner Nebenwinkel kongruent.
	U: Wenn α einem seiner Nebenwinkel kongruent ist, so ist α ein rechter Winkel.	α ist einem seiner Nebenwinkel kongruent.	α ist ein rechter Winkel.
(2)	S: Wenn das Viereck *ABCD* ein Rhombus ist, so stehen seine Diagonalen senkrecht aufeinander.	Das Viereck *ABCD* ist ein Rhombus.	Die Diagonalen des Vierecks *ABCD* stehen senkrecht aufeinander.
	U: Wenn die Diagonalen des Vierecks *ABCD* senkrecht aufeinander stehen, so ist das Viereck ein Rhombus.	Die Diagonalen des Vierecks *ABCD* stehen senkrecht aufeinander.	Das Viereck *ABCD* ist ein Rhombus.
(3)	S: Wenn zwei Dreiecke in je einer Seite und den entsprechenden Höhen übereinstimmen, so sind sie flächengleich.	Zwei Dreiecke stimmen in je einer Seite und den entsprechenden Höhen überein.	Die Dreiecke sind flächengleich.
	U_1: Wenn zwei Dreiecke flächengleich sind, so stimmen sie in je einer Seite und in den entsprechenden Höhen überein. U_2: Wenn zwei Dreiecke in je einer Seite übereinstimmen und flächengleich sind, so stimmen sie in den den Seiten entsprechenden Höhen überein. U_3: Wenn zwei Dreiecke in je einer Höhe übereinstimmen und flächengleich sind, so stimmen sie in den den Höhen entsprechenden Seiten überein.	Zwei Dreiecke sind flächengleich. Zwei Dreiecke stimmen in je einer Seite überein und sind flächengleich. Zwei Dreiecke stimmen in je einer Höhe überein und sind flächengleich.	Die Dreiecke stimmen in je einer Seite und den entsprechenden Höhen überein. Die Dreiecke stimmen in den den (gegebenen) Seiten entsprechenden Höhen überein. Die Dreiecke stimmen in den den Höhen entsprechenden Seiten überein.

Genau genommen wird die Umkehrung der entsprechenden *Aussageform* gebildet und gezeigt, daß sie im Bereich der Vierecke allgemeingültig ist.

Voraussetzung:	Gegeben sei ein beliebiges Viereck $ABCD$. M sei der Mittelpunkt der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, das heißt, $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ und $\overline{BM} \cong \overline{MD}$.
Behauptung:	Das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Beweis:

$\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (nach Voraussetzung)
$\overline{BM} \cong \overline{MD}$ (nach Voraussetzung)
$\sphericalangle\, AMB \cong \sphericalangle\, DMC$ (Scheitelwinkel)

$\triangle\, AMB \cong \triangle\, CMD$ (Kongruenzsatz SWS)

Daraus folgt $\sphericalangle\, MAB \cong \sphericalangle\, MCD$ (wegen der Dreieckskongruenz)

und daraus $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (nach Wechselwinkelsatz, weil $\sphericalangle\, MAB$ und $\sphericalangle\, MCD$ kongruente Wechselwinkel sind).

Analog gilt $\triangle\, AMD \cong \triangle\, BMC$ (Kongruenzsatz SWS).

Daraus folgt $\sphericalangle\, MAD \cong \sphericalangle\, MCB$ (wegen der Dreieckskongruenz)

und daraus $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (nach Wechselwinkelsatz, weil $\sphericalangle\, MAD$ und $\sphericalangle\, MCB$ kongruente Wechselwinkel sind).

Aus $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ folgt nach Definition des Parallelogramms die Behauptung.

Damit ist nach IV a) die Implikation bewiesen und nach dem Schluß auf eine Allaussage (↗ VI a)) die Umkehrung des Satzes wahr. q. e. d.

Gezeigt wurde:

(1) „Für alle Vierecke V gilt:
Wenn das Viereck V ein Parallelogramm ist,
so halbieren seine Diagonalen einander"

und

(2) „Für alle Vierecke V gilt:
Wenn die Diagonalen von V einander halbieren,
so ist V ein Parallelogramm".

Wir haben also die Aussage

$$\forall\, V\, \mathrm{H}_1(V) \wedge \forall\, V\, \mathrm{H}_2(V)$$

bewiesen.

Hieraus ergibt sich nach dem entsprechenden prädikatenlogischen Gesetz (Verteilungsgesetz für $\forall$):

$$\forall\, V\, (\mathrm{H}_1(V) \wedge \mathrm{H}_2(V))\,.$$

Das ist eine Äquivalenz, da $\mathrm{H}_1(V)$ eine Implikation und $\mathrm{H}_2\,(V)$ ihre Konversion ist (Schluß auf eine Äquivalenz).

Wir haben also folgenden Satz erhalten.

Für alle Vierecke gilt:
Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbieren.

Damit haben wir einen neuen Satz erhalten.

Wenn dagegen ein zu beweisender Satz gegeben ist, der die Struktur einer Äquivalenz hat, so sind nach dem Schluß aus einer Äquivalenz (↗ V b)) zwei Sätze zu beweisen. (Man muß eine Implikation und ihre Konversion beweisen.) Ist das erfolgt, so ist nach dem Schluß auf eine Äquivalenz (↗ V a)) der ursprüngliche Satz bewiesen.

In einigen Fällen ist es zweckmäßig, nicht den Satz in seiner ursprünglichen Form, sondern die aussagenlogisch gleichwertige Kontraposition zu beweisen. Dieses Vorgehen erweist sich vor allem beim Beweisen der Umkehrung eines Satzes als vorteilhaft, da man hier manchmal dem Beweisgedanken für den ursprünglichen Satz in analoger Weise folgen kann.

In einzelnen Fällen ist es auch möglich, die Behauptung durch Umformungen in äquivalente Aussagen auf eine wahre Aussage zurückzuführen. Dieses Vorgehen ist ein gültiges Beweisverfahren.
Im Grunde genommen erfolgt hier eine Umformung von Aussageformen in dazu äquivalente.

BEISPIEL 3 (5.5.):
Voraussetzung: Für alle $x \in P$ gilt: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Behauptung: Für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ und $n \in G$ gilt:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Beweis: Für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ gilt: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

genau dann, wenn

für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ gilt: $\cos^2 x + \cos^2 x \cdot \tan^2 x = 1$

genau dann, wenn

für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ gilt: $\cos^2 x + (\cos x \cdot \tan x)^2 = 1$

genau dann, wenn

für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ gilt: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Das ist nach Voraussetzung eine wahre Aussage. Also ist wegen der Umformungen in äquivalente Aussagen die Behauptung eine wahre Aussage. q. e. d.

Bei dieser Art der Beweisführung muß man sich ständig davon überzeugen, daß die Äquivalenzen wahr sind. Das ist oft sehr schwer und nicht immer möglich. Im allgemeinen darf man nämlich bei einem Beweis nicht von der Behauptung ausgehen. Dem Beweis im Beispiel 3 (5.5.) liegt eine verallgemeinerte Schlußregel von

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \end{array}}{p}$$

zugrunde.

Die zu beweisenden Aussagen sind oft in Form von Allaussagen formuliert bzw. können so formuliert werden. Dabei kann es vorkommen, daß eine solche Aussage falsch ist. Der Nachweis dafür, daß eine Allaussage falsch ist, kann durch ein einziges Gegenbeispiel erbracht werden.

BEISPIEL 4 (5.5.):

Für alle Vierecke gilt:
Wenn die Diagonalen des Vierecks senkrecht aufeinander stehen, so ist das Viereck ein Rhombus.

Durch Angabe eines Drachenvierecks, das kein Rhombus ist, wird die obige Allaussage widerlegt.

$\forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \rightarrow \mathsf{H}_2(x))$ erweist sich als falsch, wenn
$\exists x\, (\mathsf{H}_1(x) \wedge \sim \mathsf{H}_2(x))$ wahr ist.

Im allgemeinen ist die Angabe von Beispielen bei Allaussagen *nicht* beweiskräftig. Durch Beispiele können höchstens Vermutungen für Allaussagen aufgestellt werden (oder Allaussagen widerlegt werden).
Etwas anderes ist es, wenn sich eine Allaussage auf endlich viele Objekte bezieht. In diesem Falle könnte durch vollständige Angabe der Objekte und Untersuchung des betreffenden Sachverhalts festgestellt werden, ob die Allaussage wahr ist. Man spricht in solchen Fällen von einem **Beweis durch Verifikation.**
Diese Beweise haben die Schlußregel III b) (↗ 85 f.) als Grundlage und können sehr umfangreich sein. Einen solchen Beweis finden wir im Beispiel 7 (5.5.) (↗ 97 f.).

5.5.2. *Der indirekte Beweis*

Wie bei jedem anderen Beweisverfahren läßt sich auch hier eine Gliederung in *Voraussetzung*, *Behauptung* und eigentlichen *Beweis* angeben.
Beim Beweis der Behauptung geht man von einer sogenannten **Annahme** aus, die durch **Negation der Behauptung** gebildet wird. Aus der Annahme schließt man mit gültigen Schlußregeln so lange weiter, bis ein **Widerspruch zur Voraussetzung** (zu einer wahren Aussage oder allgemeingültigen Aussageform) **oder zur Annahme** gefunden ist. (Hier bricht die praktische Beweisführung ab.) Da auf Grund des Satzes vom ausgeschlossenen Widerspruch eine Aussage und ihr Negat nicht gleichzeitig wahr sein können, ist wegen des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten die Annahme falsch und das Negat der Annahme — also die Behauptung — wahr (↗ 85, Schlußregel I a)).

BEISPIEL 5 (5.5.):

Es wird ein *Widerspruch* zur *Voraussetzung* hergeleitet.

Satz:	*Ein ungleichseitiges Dreieck kann nicht in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt werden.*
Implikation:	*Wenn ein Dreieck ungleichseitig ist, so kann es nicht in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt werden.*
Voraussetzung:	Das gegebene Dreieck ABC sei ungleichseitig.
Behauptung:	$\triangle\, ABC$ kann nicht in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt werden.
Beweis indirekt	
Annahme:	$\triangle\, ABC$ kann in zwei kongruente Teildreiecke zerlegt werden.

Wenn $\triangle\, ABC$ in zwei kongruente Teildreiecke zerlegbar ist, so gibt es eine Verbindungsstrecke zwischen einem Eckpunkt und einem Punkt der entsprechenden

Gegenseite, so daß das $\triangle ABC$ wie verlangt zerlegt wird. Die Verbindungsstrecke heiße $\overline{CD}$ (sie könnte auch $\overline{AD}$ oder $\overline{BD}$ heißen — am Beweisgedanken ändert sich nichts). Also ist $\triangle ADC \cong \triangle DBC$.
Dann liegen der gemeinsamen Seite $\overline{CD}$ in den kongruenten Dreiecken auch kongruente Winkel gegenüber, also $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle CBD$. Damit hat $\triangle ABC$ aber zwei kongruente Winkel. Weil in einem Dreieck kongruenten Winkeln auch kongruente Seiten gegenüberliegen, ist $\overline{AC} \cong \overline{BC}$. Also ist $\triangle ABC$ gleichschenklig. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß $\triangle ABC$ ungleichseitig ist.
Auf Grund des Widerspruchs schließen wir weiter: Die Annahme — $\triangle ABC$ ist gleichschenklig — ist also falsch.
Da aber nach gültigen Schlußregeln geschlossen wurde (die auf allgemeingültigen Implikationen beruhen), muß der Ausgangspunkt, die Annahme, auch falsch sein und damit die Negation der Annahme, die Behauptung, wahr sein. Da der Nachweis für ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck ABC erbracht wurde, gilt die Behauptung für alle derartigen Dreiecke.

BEISPIEL 6 (5.5.):
Es wird ein *Widerspruch zur Annahme* hergeleitet.

Satz:	*Es gibt keine größte Primzahl.* (Diesen Satz findet man auch in der Form: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*) Als bekannt wird die Definition des Begriffs „Primzahl" im Bereich der natürlichen Zahlen vorausgesetzt.
Behauptung:	Es gibt keine größte Primzahl.
Beweis indirekt:	
Annahme:	Es ist nicht wahr, daß es keine größte Primzahl gibt, d. h., es gibt eine größte Primzahl. Sie heiße z.

Wenn es eine größte Primzahl gibt, dann bilde man das Produkt aller Primzahlen von der kleinsten bis zur größten. Dieses Produkt bezeichne man mit a. Dann ist

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot z\,.$$

Wenn man zu a jetzt 1 addiert, so ist $a + 1$ durch keine der bisherigen Primzahlen teilbar. Die Summe $a + 1$ läßt bei Division durch jede der im obigen Produkt erfaßten Primzahlen den Rest 1.
Also läßt sich $a + 1$ durch eine Primzahl p dividieren, die *nicht* in a als Faktor enthalten ist — im Widerspruch zur Voraussetzung, daß a das Produkt aller Primzahlen darstellen soll —, oder $a + 1$ ist *selbst* eine Primzahl, die *größer* als z ist — was ebenfalls ein Widerspruch zur Annahme ist. Wenn aber dieser Sachverhalt bei Anwendung gültiger Schlußregeln eintritt, so bedeutet das, daß die Annahme falsch und die Behauptung „es gibt keine größte Primzahl" wahr ist. q. e. d.

BEISPIEL 7 (5.5.):
Es wird ein *Widerspruch zur Voraussetzung* hergeleitet.

Satz:	*Wenn die Summe der Größen α und β zweier Innenwinkel eines Dreiecks ABC gleich der Größe R eines rechten Winkels ist, so ist die Größe γ des dritten Innenwinkels ebenfalls gleich R.*
Voraussetzung:	Für ein beliebiges Dreieck ABC sie $\alpha + \beta = 1R$.
Behauptung:	$\gamma = 1R$.

Beweis indirekt:

Annahme: $\gamma \neq 1\,\mathrm{R}$, das heißt, $\gamma < 1\,\mathrm{R}$ oder $\gamma > 1\,\mathrm{R}$

Fall 1: $\gamma < 1\,\mathrm{R}$

Dann ist wegen $\alpha + \beta = 1\,\mathrm{R}$

$$\alpha + \beta + \gamma < 2\,\mathrm{R}.$$

(Widerspruch zum Satz von der Summe der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks)

Fall 2: $\gamma > 1\,\mathrm{R}$

Dann ist wegen $\alpha + \beta = 1\,\mathrm{R}$

$$\alpha + \beta + \gamma > 2\,\mathrm{R}.$$

(Widerspruch zum Satz von der Summe der Größen der Innenwinkel eines Dreiecks)

Da weitere Fälle nicht möglich sind und die vorliegenden zu einem Widerspruch führen, ist die Annahme $\gamma \neq 1\,\mathrm{R}$ falsch, woraus die Wahrheit der Behauptung folgt.

Zusammenfassung

Wie bei jedem anderen Beweisverfahren, werden auch beim **indirekten Beweis Voraussetzungen** und eine **Behauptung** aufgestellt. Der eigentliche indirekte Beweis beginnt mit einer **Annahme**, die die **Negation der Behauptung** ist. Aus der Annahme wird mit gültigen Schlußregeln unter Benutzung wahrer Aussagen geschlußfolgert, bis man zu einer Aussage gelangt, die im **Widerspruch zur Annahme oder zur Voraussetzung** steht.

Demnach gibt es zwei Möglichkeiten der Führung des indirekten Beweises.

1. Möglichkeit: Bei einem *Widerspruch zur Voraussetzung* weiß man, daß die zuletzt erhaltene Aussage falsch ist. Weil den Schlußweisen allgemeingültige Implikationen zugrundeliegen, muß die Annahme (der Ausgang unserer Schlüsse) falsch und die Behauptung wahr sein.

2. Möglichkeit: Bei einem *Widerspruch zur Annahme* bestehen zunächst zwei Möglichkeiten, wobei auf Grund des Schließens mit gültigen Schlußregeln die eine ausscheidet, bei der die Annahme wahr und die zuletzt erhaltene Aussage falsch ist. Bei Verwendung gültiger Schlußregeln gibt es nur den Fall, daß die Annahme falsch und die zuletzt erhaltene Aussage wahr ist. Aus der Falschheit der Annahme kann auf die Wahrheit der Behauptung geschlossen werden.

Symbolisierte Darstellung des Sachverhaltes mit Hilfe von Wahrheitswertvariablen:

Voraussetzung: p
Behauptung: q
Beweis indirekt: Annahme: $\sim q$

(1) Schlußverfahren des indirekten Beweises, bei dem ein ***Widerspruch zur Voraussetzung*** hergeleitet wird

$\sim q \rightarrow r$	Soll die Anwendung gültiger Schlußregeln (oft verallgemeinerte Abtrennungsregel) ausdrücken.
$\sim r$	Das gilt, wenn r in Widerspruch zur Voraussetzung p steht.
$\overline{\sim(\sim q)}$	Aufhebungsregel

Nach letzter Schlußregel muß $\sim(\sim q)$ wahr sein. Wir schließen nach der Schlußregel I b) (↗ 85) weiter.

$\sim(\sim q)$	Nach letzter Schlußregel wahr
$\overline{q}$	Schluß aus einer Negation

(2) Schlußverfahren des indirekten Beweises, bei dem ein ***Widerspruch zur Annahme*** hergeleitet wird

$\sim q \rightarrow r$	Soll die Anwendung gültiger Schlußregeln (oft verallgemeinerte Abtrennungsregel) ausdrücken.
$\sim(\sim q \wedge r)$	Widerspruch zur Annahme Annahme und Aussage r können nicht gleichzeitig gelten (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch und ausgeschlossenen Dritten).
$\overline{\sim(\sim q)}$	Gültige Schlußregel

Nach letzter Schlußregel muß aber $\sim(\sim q)$ wahr sein. Wir schließen nach der Schlußregel I b) (↗ 85) weiter.

$\sim(\sim q)$	Nach letzter Schlußregel wahr
$\overline{q}$	Schluß aus einer Negation

Demnach ist die Behauptung q wahr.

Der indirekte Beweis wird als Beweismethode bei vielen Sätzen angewandt. Besonders **Existenzaussagen, Aussagen über Eindeutigkeit**, aber auch **Umkehrungen von Sätzen und negierte Aussagen** beweist man indirekt.
Es gibt Sätze in der Mathematik, die bisher nur indirekt bewiesen werden konnten.

5.6. **Kontrollfragen** (sollen auch durch Beispiele belegt werden)

1. Wann wird eine konjunktive Verknüpfung zweier Aussageformen zu einer wahren Aussage?
2. Was versteht man unter einer Folgerung?
3. Wann spricht man von der Äquivalenz zweier Aussageformen?
4. Warum ist mit der Wahrheit eines gegebenen Satzes nicht auch die Wahrheit (einer) seiner Umkehrung(en) gesichert?
5. Was versteht man in der Aussagenlogik unter Schließen?
6. Was versteht man unter einer gültigen Schlußregel und wie weist man die Gültigkeit nach?
7. Worin besteht der Unterschied zwischen einem aussagenlogischen Gesetz (einer aussagenlogischen Identität) und einer gültigen Schlußregel?
8. Welche Möglichkeiten gibt es, um die Allgemeingültigkeit eines aussagenlogischen Ausdrucks nachzuweisen?
9. Was versteht man unter einem Beweis einer Aussage?

10. Worin bestehen die Unterschiede zwischen einer Ableitung und einem Beweis?
11. Wie sehen die Schlußfiguren für die Schlußregeln IVa), IVb), Va), Vb) (↗86 f.) aus?
12. Welche Beziehungen bestehen zwischen aussagenlogischer Identität und prädikatenlogischer Identität?
13. Welche allgemeingültigen prädikatenlogischen Äquivalenzen kennen Sie?
14. Welche Arten von Beweisverfahren gibt es?
15. Welches sind die charakteristischen Merkmale der bekannten Beweisverfahren?
16. Welche Beweise müssen für einen Satz geführt werden, der als Äquivalenz formuliert ist?

Teil B Einführung in die Mengenlehre

6. Mengenbildung

Wir alle haben das Wort „Menge“ in unserem bisherigen Mathematikunterricht bereits gehört oder es in der Umgangssprache schon benutzt, ohne Begriffsumfang und -inhalt genauer zu kennen. Das Wort „Menge“ kann in der Umgangssprache verschiedene Bedeutung haben. Meist wird es im Sinne von „eine unbestimmte (große) Anzahl" oder von „viel“ gebraucht.
In der **Mengenlehre** benutzt man das Wort „Menge“ in einem ganz bestimmten einheitlichen Sinn, nämlich im Sinne von „Gesamtheit“. Die Mengenlehre untersucht die Eigenschaften von „Gesamtheiten“, die man **Mengen** nennt, sowie Beziehungen zwischen diesen und Operationen mit ihnen.
Der Begründer der Mengenlehre ist der deutsche Mathematiker Georg Cantor, geboren am 3. März 1845 in Petersburg als Sohn eines Kaufmanns, gestorben am 6. Januar 1918 als Professor an der Universität in Halle. Er gehört zu den bedeutendsten Mathematikern der Welt. Seine Forschungsgebiete und -ergebnisse, seine wissenschaftlichen Arbeiten und erkenntnistheoretischen Untersuchungen haben in der Mathematik eine revolutionierende Wirkung ausgelöst.
Gegenwärtig übt die Mengenlehre ihren modernisierenden und effektivierenden Einfluß auf die Gestaltung des Mathematikunterrichts aus.
Bereits in der Konzeption für den Mathematikunterricht in der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule der Deutschen Demokratischen Republik heißt es dazu:

> „Das Neuartige im Mathematiklehrgang ist nicht so sehr in einigen Stoffabänderungen zu sehen, sondern vornehmlich in modernen mathematischen Betrachtungs- und Behandlungsweisen, die große Möglichkeiten für die Rationalisierung des Lernprozesses in sich bergen. Wie die mengentheoretische Arbeitsweise für die gesamte mathematische Wissenschaft fundamental ist, so sollen Mengenlehre und mathematische Logik als Prinzipien den Mathematikunterricht durchziehen.“

In den auf der Grundlage dieser Konzeption stufenweise erarbeiteten Lehrplänen für den Mathematikunterricht der Klassen 1 bis 12 (vollständig eingesetzt ab 1. 9. 1971) ist die Mengenlehre als Unterrichtsprinzip, den mathematischen Bildungszielen der jeweiligen Klassenstufe entsprechend, enthalten; vgl. auch die

Bemerkungen zur „Leitlinie Mengenlehre“ in „Lehrplan für Mathematik Klassen 6 bis 8“, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1968, Best.-Nr. 00 30 03, Seite 5 ff.

6.1. Mengenbildung und Elementbeziehung

Wir nehmen an, ein Pionier schreibt aus einem Ferienlager folgenden Brief.

Liebe Eltern!
Unsere Gruppe traf gestern gegen 16.00 Uhr im Lager ein. Bis zum Eröffnungsappell hatten wir noch eine *Menge* Zeit. Wir bummelten durchs Lager und zählten die Zelte. Das war eine sehr große *Menge*. Heute vormittag war ich in der Arbeitsgemeinschaft Junger Mathematiker.. Wir stellten uns zunächst gegenseitig Fragen. Mein Partner fragte mich nach der *Menge* aller Teiler von 24 und ein andermal nach einer geraden Primzahl. Ich konnte beide Fragen richtig beantworten und positive Punkte für mich buchen. Meine Gegenfrage nach mindestens einer weiteren geraden Primzahl blieb unbeantwortet. Mir gefällt es im Lager sehr gut. Ich schlafe mit Jens, Bernd, Ralf und Peter in einem Zelt. Das Essen schmeckt ausgezeichnet. Gestern abend gab es frische Pellkartoffeln mit Quark und heute mittag Kartoffelbrei mit gebratener Leber. Bernd hat jedesmal riesige *Mengen* von Kartoffeln gegessen.
Viele Grüße an alle! Euer Fritz

Fritz benutzt viermal das Wort „Menge“ zur Bezeichnung gewisser Viel- bzw. Ganzheiten. Nicht jedesmal nutzt er das Wort „Menge“ im Sinne der Mengenlehre bzw. der Mathematik. In der Mathematik werden nur solche Vielheiten als Mengen bezeichnet, die bestimmte wohlunterschiedene Objekte zu einem Ganzen zusammenfassen.
Im Sinne der Mathematik darf Fritz nicht von einer „Menge Zeit“ und auch nicht von einer „Menge Kartoffelbrei“ sprechen, wenn er mit „Menge“ nicht die Gesamtheit einzelner Zeitsekunden, -minuten oder -stunden bzw. der Löffel voll Kartoffelbrei meint.
Wohl aber bilden alle Pioniere eines bestimmten Ferienlagers und alle Zelte, alle Teiler der Zahl 24, die geraden Primzahlen und auch die Pellkartoffeln, die Bernd gegessen hat, eine Menge im mathematischen Sinne. Aber auch Fritz, Jens, Bernd, Ralf und Peter bilden eine Menge im Sinne der Mathematik, nämlich die Menge der Pioniere, die in dem Ferienlager ein bestimmtes Zelt gemeinsam bewohnen.

Georg Cantor sprach zunächst vom „Inbegriff aller ...“ bzw. von „Mannigfaltigkeiten“ statt von Mengen. In seiner Veröffentlichung „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre “(1895 und 1897) gibt er folgende Definition des Mengenbegriffs an:

> „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Man bezeichnet diese Definition als die „naive“ Cantorsche Mengendefinition. Sie kann — wie wir noch sehen werden — zu Widersprüchen führen. Da aber auch die Mengenlehre das Ziel hat, einen gewissen Teil der objektiven Realität richtig widerzuspiegeln, so muß sie logisch einwandfrei, d. h. ohne logische Widersprüche, sein.
Die „naive“ Mengenlehre wurde daher von der heute üblichen **axiomatischen Mengenlehre** abgelöst.

In der „naiven“ Mengenlehre benutzt man die CANTORsche Mengendefinition, ohne sich Gedanken darüber zu machen, ob die Existenz dieser Mengen gesichert ist oder nicht.
In der axiomatischen Mengenlehre verwendet man den **Mengenbegriff als Grundbegriff.** Grundbegriffe stehen am Anfang einer Theorie, sie werden im axiomatischen Aufbau dieser Theorie nicht definiert.

Wir führen weitere Beispiele für Mengen im mathematischen Sinne an.

BEISPIEL 1 (6.1.):
Menge aller Studenten eines bestimmten Instituts für Lehrerbildung zum gegenwärtigen Zeitpunkt;
Menge aller 1972 in der DDR eingeschulten Kinder;
Menge der Primzahlen;
Menge der Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$

Mengen werden gewöhnlich mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \ldots, M, N, \ldots$ und ihre Elemente, die nicht bestimmte Zahlen sind, mit kleinen Buchstaben $a, b, \ldots, m, n, \ldots$ bezeichnet.

Setzen wir in unserem Lehrbeispiel für Fritz f, für Jens j, für Bernd b, für Ralf r und für Peter p und bezeichnen wir die durch diese Pioniere gebildete Menge mit M, so sagt man:
„M besteht aus den Elementen f, j, b, r, p“ und schreibt:
„$M = \{f, j, b, r, p\}$“.
Ist b ein Element der Menge M, so sagt man auch:
„M enthält b“; „b ist in M enthalten“; „b gehört zu M“;
„b liegt in M“ und schreibt:
„$b \in M$“.
Das Zeichen „$\in$“ liest man als „ist Element von“, und die durch dieses Zeichen ausgedrückte Beziehung zwischen Dingen und Mengen bezeichnet man als die **Elementbeziehung** oder **$\in$-Beziehung.** $\in$ ist ein stilisiertes griechisches ε, es steht nur zwischen dem Zeichen für Mengen und den Zeichen für deren Elemente. Gehört ein Ding nicht zu einer bestimmten Menge, dann trifft die Elementbeziehung zwischen ihnen nicht zu.

BEISPIEL 2 (6.1.):
Es sei k ein Pionier, der nicht mit Fritz, Jens, Bernd, Ralf und Peter im gleichen Zelt schläft, also nicht zur Menge M gehört. Dieser Tatbestand läßt sich wie folgt ausdrücken.
„k ist kein Element von M“ oder:
„Es ist nicht so, daß k ein Element von M ist“ und man schreibt:
„$\sim (k \in M)$“ oder kürzer:
„$k \notin M$“.

Die Beispiele 1 (6.1.) und 2 (6.1.) zeigen, daß die Elemente einer Menge einem **Grundbereich** G bzw. **Individuenbereich** I entstammen. Für die Menge M unseres Lehrbeispiels könnten alle Jungen Pioniere, für die Menge aller Primzahlen (P_Z) im Beispiel 1 (6.1.) könnten die natürlichen Zahlen der jeweilige Individuenbereich sein.
Steht bei der Mengenbildung dann für jedes Individuum x eines Individuenbereichs I fest, ob es ein Element der betreffenden Menge M ist oder nicht, so nennt man M bezüglich des Individuenbereichs **entscheidbar.** Aber — wie wir noch zeigen werden — nicht jede Menge ist entscheidbar.

Jedes zur Menge M gehörende Individuum x des gegebenen Individuenbereichs I wird in M nur *einmal* angegeben, wobei die Reihenfolge der Individuen beliebig ist.
Der Mengenbegriff ist ein abstrakter Begriff, eine Menge also ein abstraktes Ding, das wir in keinem Falle mit unseren Sinnen wahrnehmen können. Die Menge aller Studenten eines bestimmten Instituts für Lehrerbildung kann man z. B. nie sehen, höchstens die Elemente dieser Menge, nämlich die betreffenden Studenten.

Das Angeben von Mengen
Eine Möglichkeit, Mengen anzugeben, ist, alle zu einer Menge gehörenden Individuen *aufzuzählen*, wie man das zum Beispiel im Falle einer bestimmten Seminargruppe oder aller Teiler von 24 als

$$T = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

tut.
Die Menge aller Primzahlen (P_Z) und die Menge aller Vielfachen der Zahl 3 (V) können nicht durch Aufzählen aller Elemente angegeben werden. Wohl aber sind ihre Elemente gegenüber den nicht zur Menge gehörenden Individuen des Grundbereichs durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet. So zeichnet die Eigenschaft, nur triviale Teiler zu haben und von 1 verschieden zu sein, eine natürliche Zahl als Primzahl aus, und die Eigenschaft „teilbar durch 3" charakterisiert alle Vielfachen der Zahl 3.

Mit „Eigenschaft" wird in der Mathematik ein **einstelliges Prädikat** bezeichnet, und ein solches ordnet jedem Individuum des Bereichs I einen der Wahrheitswerte W oder F zu. So ordnet die Eigenschaft „teilbar durch 3" den natürlichen Zahlen W bzw. F wie folgt zu.

$$0 \to \mathrm{W},\ 1 \to \mathrm{F},\ 2 \to \mathrm{F},\ 3 \to \mathrm{W},\ 4 \to \mathrm{F},\ \ldots,$$
$$3\,n \to \mathrm{W},\ 3\,n + 1 \to \mathrm{F},\ 3\,n + 2 \to \mathrm{F},\ \ldots$$

Für alle Individuen c, denen der Wahrheitswert W zugeordnet ist, gilt: $c \in V$.
Man sagt dann:
„c besitzt die Eigenschaft V" oder
„Die Eigenschaft V trifft auf c zu".
In diesem Sinne fallen **Mengen** (die auf Grund der Mengenbildungsaxiome gebildet werden) mit den **Eigenschaften** zusammen. Sie fassen die und nur die Dinge zu einem Ganzen zusammen, die bestimmte gemeinsame Eigenschaften aufweisen; mit anderen Worten: Qualitäten und Quantitäten bilden eine dialektische Einheit.

BEISPIEL 3 (6.1.):
Die Eigenschaft „teilbar durch 3" ist das charakteristische Gemeinsame, das alle Vielfachen der Zahl 3 auszeichnet. Andererseits bestimmt die Menge der Vielfachen von 3 die Eigenschaft „teilbar durch 3".

BEISPIEL 4 (6.1.):
Die Eigenschaft „gelb" ist das charakteristische Gemeinsame, das allen Dingen zukommt, die eine bestimmte Wellenlänge des weißen Lichtes reflektieren oder Licht nur dieser Wellenlänge ausstrahlen bzw. durchlassen. Die Menge der Dinge, die diese bestimmte Wellenlänge des weißen Lichtes reflektieren, Licht dieser Wellenlänge ausstrahlen oder durchlassen, ist die Eigenschaft „gelb".

Eigenschaften lassen sich durch Aussageformen $\mathsf{H}(x)$ zum Ausdruck bringen, und folglich lassen sich Mengen mit Hilfe von Aussageformen $\mathsf{H}(x)$ in der allgemeinen

Form

$$M = \{x \in I; \mathsf{H}(x)\}$$

angeben. Zu M gehören alle Individuen x aus dem Individuenbereich I, die die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ zur wahren Aussage machen. Da eine Aussage nach dem Prinzip der Zweiwertigkeit der Aussagenlogik entweder wahr oder falsch ist, gehört jedes x aus I entweder zu M oder nicht zu M. Aber man kann nicht immer entscheiden, ob $x \in M$ oder $x \notin M$, denn es gibt auch Aussagen — z. B. die „GOLDBACHsche Vermutung" —, für die der Wahrheitswert noch nicht entschieden ist.

BEISPIEL 5 (6.1.):
Setzen wir als I den Bereich N voraus, dann sind genau diejenigen x aus N Element der Menge aller Vielfachen von 3 (V), für die gilt: $3 \mid x$.
Das sind die natürlichen Zahlen 0, 3, 6, ..., $3n$, ... ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), und es gilt:

$$V = \{0, 3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\} = \{x \in N; 3 \mid x\} .$$

BEISPIEL 6 (6.1.):
Ist I der Bereich N, dann gilt für die Menge der Teiler von 24 (T):

$$T = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} = \{t \in N; t \mid 24\} .$$

Mengenbildungsaxiom für Mengen 1. Stufe
Aus dem Teil A wissen wir, daß **Aussageformen** über einem bestimmten Grund- bzw. Individuenbereich in **Kontradiktionen**, **Neutralitäten** und **Identitäten** eingeteilt werden können.
Eine *Kontradiktion* über N ist zum Beispiel $x < x$, eine *Neutralität* $3 \mid x$ und eine *Identität* $x = x$.
Es entsteht die Frage, ob *jede beliebige* Aussageform $\mathsf{H}(x)$ über einem bestimmten Individuenbereich I stets eine Menge angibt.

Als eines der Grundprinzipien der Mengenlehre wird folgendes **Axiom** an den Anfang der Theorie über Mengen gestellt.

> Es gibt eine **Menge** M, die genau diejenigen (d. h. alle die, aber auch nur die) Individuen x als Elemente enthält, die eine gewisse Aussageform $\mathsf{H}(x)$ erfüllen.
> *Symbolisiert:* $\exists\, M\, \forall\, x\, (x \in M \leftrightarrow \mathsf{H}(x))$

Die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ muß in dem Mengenbildungsschema eine im Sinne der Aussagenlogik sinnvolle Zeichenreihe, d. h. für die Mengenbildung eine zulässige Aussageform, sein, in der die Variable x frei auftritt, da die durch das Schema $\exists\, M\, \forall\, x\, (x \in M \leftrightarrow \mathsf{H}(x))$ gegebenen Mengenbildungsaxiome nicht zu logischen Widersprüchen führen dürfen.
Der Ausdruck $x \notin x$ ist z. B. keine für die Mengenbildung zulässige Aussageform, denn er führt — wie wir noch sehen werden — auf einen logischen Widerspruch, der als **RUSSELLsche Antinomie** bekannt ist.

Wir nennen Mengen, die nach diesen Axiomen gebildet werden, **Mengen 1. Stufe**. Elemente dieser Mengen sind Individuen. Wir verstehen darunter jedes mit unseren Sinnen wahrnehmbare Ding, auch Vorstellungen im Hirn oder Traumbilder eines Menschen, sowie jeden Bewegungsvorgang in der Materie.

Mengen höherer Stufen
Fassen wir Mengen 1. Stufe wieder zu Mengen zusammen, so erhalten wir **Mengen 2. Stufe**, auch **Mengensysteme** genannt.

Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ Mengen 1. Stufe, so ist $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ eine Menge 2. Stufe. Wir werden Mengensysteme mit großen deutschen Buchstaben bezeichnen. Die Existenz der Mengen 2. Stufe sichert **das Mengenbildungsaxiom für Mengen zweiter Stufe.**

Es gibt eine **Menge 2. Stufe (ein Mengensystem $\mathfrak{M}$)**, das genau diejenigen Mengen X als Elemente enthält, die eine gegebene Aussageform $\mathsf{H}(X)$ erfüllen.
Symbolisiert: $\exists\, \mathfrak{M}\, \forall\, X\, (X \in \mathfrak{M} \leftrightarrow \mathsf{H}(X))$

Fassen wir Mengen 2. Stufe wieder zu einer Menge zusammen, so erhalten wir **Mengen 3. Stufe**, auch **Mengenfamilien** genannt. Analog kann man Mengen 4. Stufe bzw. beliebiger k-ter Stufe bilden. Ihre Elemente sind dann Mengen 3. bzw. $(k-1)$-ter Stufe. In dieser Verallgemeinerung sind Individuen **Mengen nullter Stufe.** Für Mengen höherer Stufe gelten entsprechende Mengenbildungsaxiome.

Wir finden in der Umwelt viele Beispiele, die wir im Sinne des Stufenaufbaues der Mengenlehre deuten können.

BEISPIEL 7 (6.1.):
Ein anschauliches Beispiel für den Stufenaufbau der Mengenlehre erhalten wir, wenn wir als Individuenbereich alle Lehrerstudenten an den Instituten für Lehrerbildung nehmen.
Jede Seminargruppe ist dann eine *Menge 1. Stufe*, ihre Elemente sind Studenten (Individuen, Mengen nullter Stufe).
Jedes Institut (ohne das pädagogische, technische und Verwaltungspersonal) ist ein Mengensystem, eine *Menge 2. Stufe*. Ihre Elemente sind die Seminargruppen des jeweiligen Instituts, sie sind Mengen 1. Stufe.
Die Institute eines bestimmten Bezirks ergeben dann eine Mengenfamilie, eine *Menge 3. Stufe*. Ihre Elemente sind die einzelnen Institute des betreffenden Bezirks, sie sind Mengen 2. Stufe.
Alle Institute für Lehrerbildung der DDR ergeben bei dieser Betrachtung eine *Menge 4. Stufe*. Ihre Elemente sind die Institutsmengen der einzelnen Bezirke, sie sind Mengen 3. Stufe.

BEISPIEL 8 (6.1.):

Mengen	(a)	(b)
1. Stufe	Streichholzschachteln	Familien
2. Stufe	Streichholzschachtelpäckchen	Hausgemeinschaften
3. Stufe	Pakete Streichholzschachtelpäckchen	Wohngebiete
	usw.	usw.

Leere Menge (Nullmenge) — Allmenge
Jedes Mengenbildungsaxiom sichert bei einer zulässigen Aussageform über einem Individuenbereich I die Existenz *mindestens einer* Menge.

DEFINITION 1 (6.1.) — **Leere Menge**
Es sei $\mathsf{H}(x)$ eine Kontradiktion über I. Dann nennen wir die Menge $M = \{x \in I; \mathsf{H}(x)\}$, die kein einziges Element enthält, eine **leere Menge (auch Nullmenge)** über I und bezeichnen sie mit $\emptyset_I$.

BEISPIEL 9 (6.1.):
$\mathsf{H}(x)$ sei $2\,x \mid x$.
Die Menge, die durch diese Aussageform über dem Bereich der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen (N_0) gebildet wird, enthält kein einziges Element:

$$\{x \in N_0;\, 2\,x \mid x\} = \emptyset_{N_0}$$

BEISPIEL 10 (6.1.):
$\mathsf{H}(x)$ sei die Aussageform: x umkreiste im Jahre 1960 in einem Raumschiff die Erde. Wenn I hier die Gesamtheit der Menschen bedeutet, dann gilt auch wieder:

$$\{x \in I;\, \mathsf{H}(x)\} = \emptyset_I\,,$$

denn es gibt keinen Menschen, der bereits 1960 die Erde in einem Raumschiff umkreiste.

DEFINITION 2 (6.1.) — **Allmenge**
Es sei $\mathsf{H}(x)$ über einem Individuenbereich I eine Identität. Dann nennen wir die Menge

$$M = \{x \in I;\, \mathsf{H}(x)\}\,,$$

die alle Individuen des Bereiches I als Elemente enthält, eine **Allmenge** über I und bezeichnen sie mit $\boldsymbol{A_I}$.

BEISPIEL 11 (6.1.):
Es sei $\mathsf{H}(x, y)$ die Aussageform $(x - y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2$, I der Bereich aller Zahlenpaare $[x; y]$ mit $x, y \in P$ (P die Menge der reellen Zahlen).
Wir wissen, daß obige Aussageform allgemeingültig ist. Es gilt:

$$\{[x; y] \in I;\, (x - y)^2 = x^2 - 2\,x\,y + y^2\} = A_I\,.$$

Entsprechend bezeichnet man Mengen mit genau einem Element als **Einermengen**, mit genau zwei Elementen als **Zweiermengen**, mit genau drei Elementen als **Dreiermengen** usw.

BEISPIEL 12 (6.1.):
$2\,x + 3 = 0$, $x^2 + 2\,x = 15$ und $4\,x^3 = 5\,x - 8\,x^2$ seien Aussageformen über P. Dann ist

$$\{x \in P;\, 2\,x + 3 = 0\}$$

eine Einermenge,

$$\{x \in P;\, x^2 + 2\,x = 15\}$$

eine Zweiermenge und

$$\{x \in P;\, 4\,x^3 = 5\,x - 8\,x^2\}$$

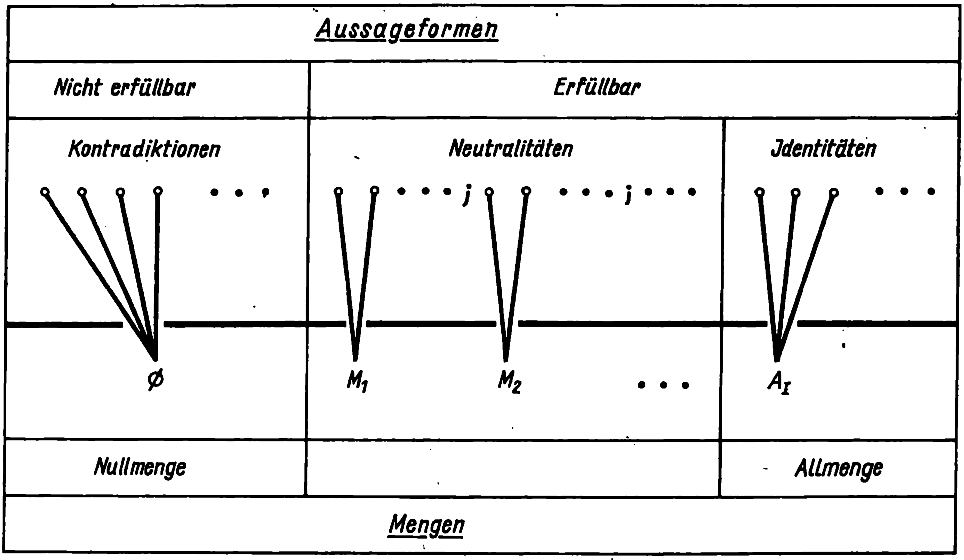
eine Dreiermenge, wie man durch das Lösen dieser Gleichungen leicht feststellt.

Zunächst werden wir von einer **endlichen Menge** sprechen, wenn die Anzahl ihrer Elemente endlich ist, im entgegengesetzten Falle von einer unendlichen Menge (↗ Definition 3 (9.7.)).
Die Existenz unendlicher Mengen sichert das sogenannte **Unendlichkeitsaxiom**.

Es gibt wenigstens eine **unendliche Menge**.

Die **leere Menge** und die **Allmenge** nehmen bei der Mengenbildung über einem bestimmten Individuenbereich I eine Sonderstellung ein.
Nullmengen werden mit Hilfe von Kontradiktionen, Allmengen mit Hilfe von Identitäten gebildet; Nullmengen enthalten kein einziges Individuum, Allmengen

dagegen alle Individuen des Bereichs. Mengen, die über I nach einem Axiom gebildet werden, in dem die zulässige Aussageform $\mathsf{H}(x)$ eine Neutralität ist, enthalten wenigstens ein Element, aber nicht alle Elemente des Individuenbereichs I. Diese Tatsache läßt sich in einer Skizze wie folgt festhalten (↗ Bild 109/1 und Tabelle im Beispiel 13 (6.1.)).



109/1

Im Bild 109/1 wird angedeutet, daß verschiedene Aussageformen ein und dieselbe Menge bilden können und daß nur eine leere Menge und über einem bestimmten Individuenbreich nur eine Allmenge existiert, die mit dem jeweiligen Individuenbereich zusammenfällt. Das bestätigen auch folgende Beispiele.

BEISPIEL 13 (6.1.):

Kontradiktionen	Neutralitäten	Identitäten
$\emptyset_R = \{x \in R;\, x \neq x\}$ $\emptyset_N = \{x \in N;\, x < 0\}$	$M_1 = \{x \in N\,;\, 6 \mid x\}$ $M_1 = \{x \in N\,;\, 2 \mid x \wedge 3 \mid x\}$ $M_1 = \{x \in N;\sim (2 \nmid x \vee 3 \nmid x)\}$ $M_1 = \{x \in N\,;\sim (2 \mid x \rightarrow 3 \nmid x)\}$	$A_R = \{x \in R;\, x = x\}$ $A_N = \{x \in N;\, 0 \leqq x\}$ $A_N = \{x \in N;\, x \mid x\}$

Es ist üblich, den Individuenbereich einer Allmenge nicht in jedem Falle extra zu kennzeichnen. Bei der leeren Menge wäre eine solche Kennzeichnung sogar überflüssig, denn es gibt — wie wir noch beweisen werden — *genau eine* leere Menge (erster Stufe).

6.2. Mengenbildung und Begriffsgewinnung

Im Teil A „Einführung in die mathematische Logik“ haben wir dargelegt, was man unter einem Begriff versteht und wie man Begriffe erklärt, die eine bestimmte Klasse von Individuen gedanklich *richtig* widerspiegeln. Wir vergleichen jetzt die **Bildung von Mengen** mit der **Gewinnung von Begriffen**.

Zur **Bildung von Mengen 1. Stufe** ist in der Regel ein bestimmter Bereich von Individuen vorgegeben, die objektiv real oder im menschlichen Bewußtsein existieren. Jede über einem solchen Individuenbereich I nach einem Mengenbildungsaxiom gebildete Menge enthält Individuen als Elemente, die sich durch gemeinsame Eigenschaften auszeichnen.
Wir weisen aber darauf hin, daß in der Mengenlehre auch Mengen gebildet und betrachtet werden, für deren Elemente sich nicht ohne weiteres gemeinsame Merkmale (Eigenschaften oder Beziehungen) angeben lassen.
Ein Beispiel dafür ist die sogenannte „Auswahlmenge E“. Aus den nichtleeren Mengen 1. Stufe $M_1, M_2, \ldots, M_k$, von denen keine zwei Mengen ein Element gemeinsam haben, wird jeweils genau ein Element entnommen. Diese ausgewählten Elemente bilden die Menge E.

Die Existenz einer Auswahlmenge sichert das

Auswahlaxiom 1. Stufe.

> Zu jedem Mengensystem $\mathfrak{M}$, das nur nichtleere, paarweise elementfremde Mengen M enthält, existiert eine **Auswahlmenge** E, die von jedem $M \in \mathfrak{M}$ genau ein Element $m \in M$ enthält.

Der Begriffsbildung liegt im allgemeinen kein speziell abgegrenzter Bereich zugrunde. Mathematische, logische und naturwissenschaftliche Begriffe sind aus realen Eigenschaften und Beziehungen materieller Gegenstände der Außenwelt abstrahiert. Die Abstraktion führt von den ursprünglich vorliegenden Gegenständen, ihren Erscheinungen und Beziehungen zu Abstraktionsklassen. Geht man von einem Individuum dieser Klassen zu einem anderen derselben Klasse über, so findet man Merkmale, die hierbei unverändert erhalten (invariant) bleiben (↗ Definition 2 (1.3.)).

Die Bildung von Mengen und die Gewinnung von Begriffen weist Analogien auf, die besonders dann sichtbar werden, wenn Begriffe durch die **Art-Gattung-Beziehung** erklärt werden.

BEISPIEL 1 (6.2.):
Wir bilden die Menge der geraden natürlichen Zahlen (N_g) durch Auszeichnen der Eigenschaft „2 teilt x“ oder „x ist Vielfaches der Zahl 2“ über dem Individuenbereich N und geben sie wie folgt an.

$$N_g = \{x \in N;\, 2 \mid x\} \qquad \text{oder} \qquad N_g = \{x \in N;\, x = 2\,n \wedge n \in N\}$$

Wir gewinnen den Begriff „gerade natürliche Zahlen“ durch das Hinzufügen des artbildenden Unterschiedes „ist durch 2 teilbar“ oder „ist Vielfaches der Zahl 2“ zum Gattungsbegriff „natürliche Zahl“ und definieren den Begriff wie folgt.

> „**Natürliche Zahlen** nennen wir **gerade** genau dann, wenn sie durch 2 teilbar sind.“

Oder:

> „Als **gerade natürliche Zahlen** bezeichnen wir die und nur die natürlichen Zahlen, die Vielfache der Zahl 2 sind.“

BEISPIEL 2 (6.2.):
Wir bilden die Menge der Rechtecke (R) durch Auszeichnen gewisser Eigenschaften unter den ebenen konvexen Vierecken.
Bezeichnen wir die Menge der Vierecke als Individuenbereich mit V, so können wir die Menge der Rechtecke angeben als:

$R = \{x \in V;\ x$ hat vier untereinander kongruente Winkel$\}$ oder
$R = \{x \in V;\ x$ hat zwei Paar parallele Gegenseiten und einen rechten Winkel$\}$ oder
$R = \{x \in V;\ x$ hat zueinander kongruente, einander halbierende Diagonalen$\}$.

Den Begriff „Rechteck" gewinnen wir durch Hinzufügen artbildender Unterschiede zum Gattungsbegriff „Viereck". Wir erhalten gleichwertige Definitionen.

Rechteck nennt man ein Viereck mit vier kongruenten Winkeln.
Rechteck nennt man ein Viereck mit zwei Paar paralleler Gegenseiten und einem rechten Winkel.
Rechteck nennt man ein Viereck mit kongruenten, einander halbierenden Diagonalen.

Für die Bildung der Menge der Rechtecke könnte auch die Menge der Parallelogramme und für die Bildung der Menge der Quadrate selbst die Menge der Rechtecke als Individuenbereich dienen.
Entsprechend kann man den Begriff „Rechteck" auch mit dem Gattungsbegriff „Parallelogramm" und den Begriff „Quadrat" mit dem Gattungsbegriff „Rechteck" unter Hinzufügung geeigneter Artbegriffe erklären.

Wir stellen das Verfahren der Mengenbildung dem der Begriffsgewinnung durch die „Art-Gattung-Beziehung" gegenüber.

Mengenbildung		**Begriffsgewinnung**	
Menge	Individuenbereich, Aussageform	**Art**	Gattung, Artbildender Unterschied

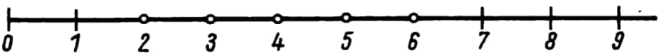
Es gibt Mengen, die über verschiedenen Individuenbereichen gebildet werden können, und es gibt Begriffe, die von verschiedenen Gattungsbegriffen aus erklärt werden können.
Eine Menge kann für die Bildung einer anderen als Individuenbereich dienen, und ein Begriff kann im Hinblick auf einen anderen als Gattungsbegriff fungieren.
Verschiedene Begriffsinhalte können den gleichen Begriffsumfang haben, verschiedene Aussageformen können über demselben Individuenbereich ein und dieselbe Menge bilden.

6.3. Darstellung von Mengen

Viele mathematische Sachverhalte lassen sich graphisch darstellen. Auch (beliebige) Mengen können durch sogenannte **Venndiagramme**, Mengen von Zahlen durch **diskrete Punktmengen** (↗ Beispiel 1 (6.3.)) oder durch **Intervalle** (↗ Beispiel 2 (6.3.)) veranschaulicht werden.

BEISPIEL 1 (6.3.) (↗ Bild 112/1):

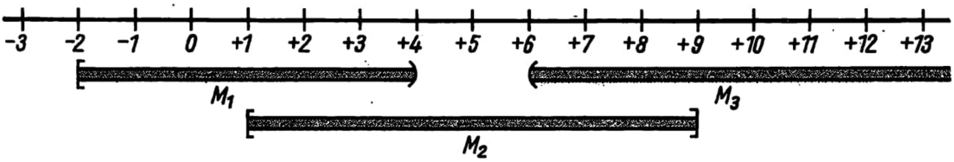
$$M = \{x \in N; 2 \leqq x < 7\}$$



112/1

BEISPIEL 2 (6.3.) (↗ Bild 112/2):

$$M_1 = \{x \in P; -2 \leqq x < +4\}$$
$$M_2 = \{x \in P; +1 \leqq x \wedge x \leqq +9\}$$
$$M_3 = \{x \in P; +6 < x\}$$

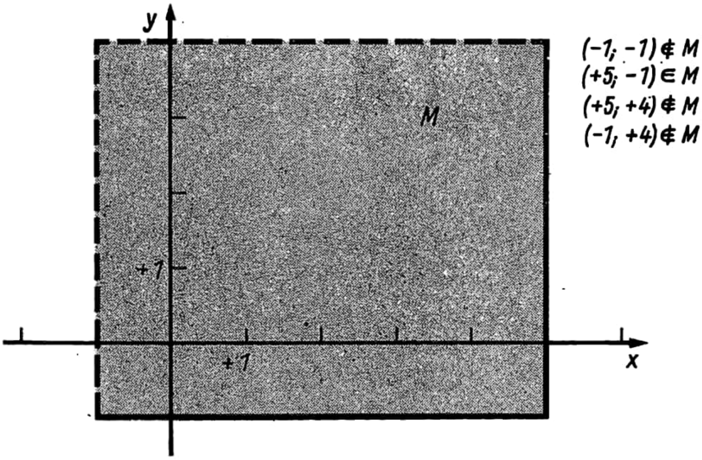


112/2

BEISPIEL 3 (6.3.) (↗ Bild 112/3):

$$M = \{(x; y) \in I; (-1 < x \leqq +5) \wedge (-1 \leqq y < +4)\}$$

Zum Individuenbereich I gehören in diesem Beispiel alle möglichen Paare reeller Zahlen.



112/3

Bemerkungen:

(1) Ist das Intervall als Veranschaulichung einer Zahlenmenge über dem Bereich der reellen Zahlen einseitig oder beiderseits abgeschlossen, dann geben wir das in der graphischen Darstellung durch eckige Klammern, im anderen Falle durch runde Klammern an. Die Mengen aus Beispiel 2 (6.3.) können wir bei Vorgabe des Individuenbereichs auch wie folgt angeben.

$$M_1 = [-2; +4), \quad M_2 = [+1; +9], \quad M_3 = (+6; +\infty)$$

(2) Entsprechen die Randpunkte eines Venndiagramms bestimmten Elementen der Menge, so ziehen wir diese Linie voll aus. Ist das nicht der Fall, so wollen wir diese Linie gestrichelt angeben.

6.4. Kontrollfragen

1. Wie wird das Wort „Menge" in der Umgangssprache verwendet? In welchem Sinne benutzt man den Begriff „Menge" in der Mathematik?
2. Wie lautet die CANTORsche „naive" Mengendefinition?
3. Welche Möglichkeiten zum Angeben einer Menge kennen wir?
4. Wie kann man Mengen darstellen?
5. Wann bezeichnen wir eine Menge als „leere Menge", wann als „Allmenge", und auf Grund welcher Aussageformen werden diese Mengen gebildet?
6. Wann nennen wir eine Menge M bezüglich des Individuenbereichs I „entscheidbar"?
7. Erläutern Sie den Stufenaufbau der Mengenlehre! Erklären Sie die Begriffe „Mengensystem" und „Mengenfamilie"!

7. Beziehungen zwischen Mengen

Im Teil B 6. haben wir dargelegt, wie man Mengen bilden und angeben kann. Im Teil B 7. wollen wir **Mengen vergleichen, Beziehungen (Relationen) zwischen Mengen** betrachten, **Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten dieser Beziehungen** herausarbeiten und beweisen.

Schon im Kindergarten und in der 1. Klasse der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule vergleichen die Schüler Mengen, denn der Mengenvergleich bildet die Grundlage für die Gewinnung des Begriffs der natürlichen Zahl. Im Lehrplan für den Mathematikunterricht in Klasse 1 finden wir folgende Formulierungen.

- Vergleichen zweier Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit durch elementweises Zuordnen
- Gewinnen der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, (6, 7, 8, 9, 10) durch Abstraktion aus zahlreichen Mengen entsprechender Mächtigkeit
- Veranschaulichen der Zahlen 1 bis 5 (6 bis 10) durch Mengen entsprechender Mächtigkeit
- Feststellen der Mächtigkeit gegebener Mengen
- Vergleichen von Zahlen nach Vergleichen entsprechender Mengen usw.

7.1. Gleichheit von Mengen

Vergleichen wir zwei beliebige reelle Zahlen miteinander, so sind sie entweder gleich oder die eine ist entweder größer oder kleiner als die andere. Wir fragen, ob solche oder ähnliche Relationen auch zwischen Mengen bestehen und wie sie definiert sind.

Vergleichen wir die Elemente der Mengen

$$\begin{aligned} B_1 &= \{3, 2, 7, 5\} , \\ B_2 &= \{x \in N; [1 < x < 10 \wedge \forall n\,(n \mid x \rightarrow n = 1 \vee n = x)]\} , \\ B_3 &= \{x \in N; 1 < x < 4\} , \\ B_4 &= \{x \in N; x^2 + 6 = 5x\} \end{aligned}$$

miteinander, so stellen wir fest:
Die Mengen B_1 und B_2 enthalten ein und dieselben Elemente, und auch B_3 enthält die und nur die Elemente, die B_4 enthält.

Wir wollen solche Mengen zunächst **umfangsgleich** nennen.

DEFINITION 1 (7.1.) — **Umfangsgleichheit**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I.
Dann nennen wir M_1 **umfangsgleich** mit M_2 (in Zeichen $M_1 \underset{u}{=} M_2$) genau dann, wenn für alle x gilt:
$x \in M_1$
genau dann, wenn $x \in M_2$.
Das heißt: $M_1 \underset{u}{=} M_2 \leftrightarrow \forall x\,(x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)$.

Nicht in allen Fällen ist es möglich, die Umfangsgleichheit von Mengen — z. B. für B_1 und B_2, B_3 und B_4 — durch Aufzählen der Elemente zu prüfen bzw. nachzuweisen.

Wir vergleichen die Menge aller Primzahlen (P_z) mit der Menge aller Primzahlen, die nicht durch 2 teilbar sind (P_u). P_z und P_u sind unendliche Mengen, es ist nicht möglich, ihre Elemente alle aufzuzählen. Wir finden aber: $2 \in P_z$ und $2 \notin P_u$, P_z und P_u unterscheiden sich durch das Individuum 2, sie sind nicht umfangsgleich.

Wir vergleichen noch die Menge aller Geraden einer fest vorgegebenen Ebene, die durch einen beliebigen, aber fest gewählten Punkt P gehen, (G), mit der Menge aller Strahlen, die von P ausgehen (S). Für diese Mengen ist es nicht möglich, alle Elemente der einen nacheinander anzugeben und sie mit Elementen der anderen zu vergleichen, die ebenfalls nicht alle einzeln angegeben werden können. Auch „anschaulich" ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß die Mengen G und S sich mindestens in einem Element unterscheiden. Überlegen wir aber gründlich, so stellen wir fest: Einem beliebigen Element aus G entsprechen zwei bestimmte Elemente aus S; jede Gerade durch P besitzt zwei Strahlen, die von P ausgehen, G und S sind also nicht umfangsgleich.

Wir erinnern uns an den Stufenaufbau der Mengenlehre.

Aus der inhaltlichen Vorstellung über den Stufenaufbau entnehmen wir, daß umfangsgleiche Mengen M_1 und M_2 Elemente ein und desselben Mengensystems $\mathfrak{M}$ sein müssen. Das ist in der Tat so, denn dem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre wird als weiteres Axiom das folgende vorangestellt.

Das Extensionalitätsaxiom für Mengen 1. Stufe
Sind Mengen M_1 und M_2 umfangsgleich (enthalten sie also dieselben Elemente), so enthält jedes Mengensystem $\mathfrak{M}$, das die Menge M_1 enthält, auch die Menge M_2, und umgekehrt.

Symbolisiert: $M_1 \underset{u}{=} M_2 \rightarrow \forall \mathfrak{M}\,(M_1 \in \mathfrak{M} \leftrightarrow M_2 \in \mathfrak{M})$

Entsprechend gelangen wir zu den Extensionalitätsaxiomen für Mengen höherer Stufe.
Enthalten z. B. zwei Mengensysteme $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ dieselben Elemente, so gehören sie beide zur gleichen Mengenfamilie.

Das Extensionalitätsaxiom für Mengen 2. Stufe

Sind Mengensysteme $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ umfangsgleich, so enthält jede Mengenfamilie $\mathcal{M}$, die das Mengensystem $\mathfrak{M}_1$ enthält, auch das Mengensystem $\mathfrak{M}_2$, und umgekehrt.

Symbolisiert: $\mathfrak{M}_1 \underset{u}{=} \mathfrak{M}_2 \rightarrow \forall\, \mathcal{M}\, (\mathfrak{M}_1 \in \mathcal{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \in \mathcal{M})$

Wir betrachten jetzt neben den Mengen B_1 und B_2 eine weitere mit ihnen umfangsgleiche Menge, etwa

$$B_5 = \{x \in N;\, 2 \leqq x \leqq 7 \wedge x \neq 4 \wedge x \neq 6\}\ .$$

Durch Vergleich stellen wir folgendes fest.

1. Jede Menge ist mit sich selbst umfangsgleich.
2. Ist eine Menge mit einer zweiten umfangsgleich, so ist die zweite Menge auch mit der ersten umfangsgleich.
3. Ist eine Menge mit einer zweiten umfangsgleich und diese mit einer dritten umfangsgleich, so ist die erste auch mit der dritten umfangsgleich.

Das sind drei wichtige **Eigenschaften der Umfangsgleichheit.** Die erste nennen wir **Reflexivität**, die zweite **Symmetrie** und die dritte **Transitivität.**

SATZ 1 (7.1.)
Die Umfangsgleichheit von Mengen ist **reflexiv, symmetrisch und transitiv.**

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus der Definition 1 (7.1.).

Neben diesen Eigenschaften gilt für die Umfangsgleichheit von Mengen das **Leibnizsche Ersetzbarkeitstheorem**, nach welchem — unter der Voraussetzung, daß M_1 und M_2 umfangsgleiche Mengen bezeichnen — in jeder Aussage M_1 durch M_2 ersetzt werden kann, ohne daß sich der Wahrheitswert ändert.
Die einfachste Aussage, in der M_1 vorkommt, ist: $M_1 \in \mathfrak{M}$.

Wegen des Extensionalitätsaxioms

$$M_1 \underset{u}{=} M_2 \rightarrow \forall\, \mathfrak{M}\, (M_1 \in \mathfrak{M} \leftrightarrow M_2 \in \mathfrak{M})$$

ist dann auch $M_2 \in \mathfrak{M}$ eine Aussage, die mit $M_1 \in \mathfrak{M}$ den gleichen Wahrheitswert hat.

Mit der *Reflexivität*, der *Symmetrie*, der *Transitivität* und der Gültigkeit des Leibnizschen Ersetzbarkeitstheorems besitzt die Umfangsgleichheit die wesentlichen Eigenschaften der **Identität.**

DEFINITION 2 (7.1.) — **Gleichheit — Identität**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I.
Dann nennen wir M_1 **gleich (identisch** mit) M_2 (in Zeichen $M_1 = M_2$) genau dann, wenn für alle x gilt:
$x \in M_1$ genau dann, wenn $x \in M_2$.
Das heißt: $M_1 = M_2 \leftrightarrow \forall\, x\, (x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)$.

Die Mengenbildungsaxiome sichern mit der Formulierung „es gibt eine Menge M, . . ." die Existenz *mindestens einer* Menge M, die genau diejenigen Individuen x als Elemente enthält, die die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ erfüllen. Aus dem Extensionalitätsaxiom folgt, daß es *höchstens eine* solche Menge gibt, denn es gilt der Satz 2 (7.1.).

SATZ 2 (7.1.)
Zu einer gegebenen Aussageform $\mathsf{H}(x)$ gibt es über einem festen Individuenbereich I höchstens eine Menge M, die genau diejenigen Individuen x enthält, für die $\mathsf{H}(x)$ über I gilt.

Beweis:
Gegeben sei die Aussageform $\mathsf{H}(x)$.
Annahme: Es gibt Mengen M_1, M_2, die genau diejenigen Elemente x enthalten, für die $\mathsf{H}(x)$ eine wahre Aussage wird, d. h.,
$x \in M_1 \leftrightarrow \mathsf{H}(x)$,
$x \in M_2 \leftrightarrow \mathsf{H}(x)$.
Daraus folgt:
$x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2$ für beliebige x, also
$M_1 = M_2$ nach Definition 2 (7.1.). q. e. d.

Aus dem Mengenbildungsaxiom und dem Satz 2 (7.1.) folgt nun, daß es zu einer gegebenen Aussageform $\mathsf{H}(x)$ über einem Individuenbereich I *genau eine* Menge M gibt, die gerade die Individuen x als Elemente enthält, für die die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ gilt. Die Existenz dieser Menge — *es gibt mindestens eine* — sichert das Mengenbildungsaxiom und die Eindeutigkeit — *es gibt höchstens eine* — der Satz 2 (7.1.). Jetzt sind wir berechtigt, von *derjenigen Menge M* zu sprechen, die aus genau denjenigen Individuen a besteht, auf die eine gegebene Aussageform $\mathsf{H}(x)$ zutrifft bzw. für die $\mathsf{H}(a)$ eine wahre Aussage ist.

Wir fragen nach der Beziehung, die zwischen gleichen Mengen und den diese Mengen erzeugenden Aussageformen besteht.
Für die Aussageformen der gleichen Mengen B_3 und B_4 beispielsweise gilt:
Jedes Individuum x aus N erfüllt die Aussageform $\mathsf{H}_{B_3}(x)$: $1 < x < 4$ genau dann, wenn es die Aussageform $\mathsf{H}_{B_4}(x)$: $x^2 + 6 = 5x$ erfüllt.
Diese Äquivalenz zwischen den Aussageformen gleicher Mengen ist charakteristisch für die Gleichheit von Mengen.

SATZ 3 (7.1.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageformen von M_1 bzw. M_2.
Dann ist M_1 gleich M_2 genau dann, wenn gilt:
Die Aussage
$\forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x))$
ist wahr.
Symbolisiert:
$\forall M_1, \forall M_2\, [M_1 = M_2 \leftrightarrow \forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x))]$

Beweis:
Es ist eine Allaussage zu beweisen.
Allaussagen werden bewiesen, indem man die Aussage für beliebige Mengen M_1 und M_2 beweist.
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann ist die Äquivalenz

$$M_1 = M_2 \leftrightarrow \forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x))$$

zu beweisen.
Äquivalenzen werden bewiesen, indem man die Implikation von „links nach rechts“ und die von „rechts nach links“ beweist.

1. Implikation:

$$M_1 = M_2 \rightarrow \forall x\,(\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x)),$$

Nach Definition 2 (7.1.) ist

$$M_1 = M_2 \text{ äquivalent mit } \forall x\,(x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)\,.$$

Das Mengenbildungsaxiom sichert die Allaussagen

$$\forall x\,\big(x \in M_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_1(x)\big) \quad \text{und} \quad \forall x\,\big(x \in M_2 \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x)\big)\,,$$

aus denen nach dem Schluß aus einer Allaussage die Äquivalenzen

$$x \in M_1 \leftrightarrow \mathsf{H}_1(x) \quad \text{und} \quad x \in M_2 \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x)$$

für beliebige Individuen x folgen.
Es sei x ein solches Individuum, für das $x \in M_1$ bzw. $x \in M_2$ gilt. Nach der Abtrennungsregel folgt dann aus den Äquivalenzen die Erfüllung von $\mathsf{H}_1(x)$ und die Erfüllung von $\mathsf{H}_2(x)$. Wir dürfen $x \in M_1$ durch $\mathsf{H}_1(x)$ und $x \in M_2$ durch $\mathsf{H}_2(x)$ ersetzen.
Dann folgt aus der Äquivalenz

$$M_1 = M_2 \leftrightarrow \forall x\,(x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)$$

die Richtigkeit der Implikation

$$M_1 = M_2 \rightarrow \forall x\,(\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x))\,.$$

2. Implikation:

$$\forall x\,\big(\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x)\big) \rightarrow M_1 = M_2$$

Den Beweis führe der Leser selber.

Aus 1. und 2. Implikation folgt nach dem Schluß auf eine Äquivalenz und nach dem Schluß auf „für alle" die Richtigkeit des Satzes 3 (7.1.). q. e. d.

Der Satz 3 (7.1.) bringt eine wesentliche Beziehung zwischen erzeugenden Aussageformen gleicher Mengen zum Ausdruck. Diese Beziehung gestattet es, die Gleichheit von Mengen auch mit Hilfe ihrer erzeugenden Aussageformen zu erklären.

**Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenem Individuenbereich, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageformen.
Dann nennen wir M_1 gleich M_2 genau dann, wenn die Aussage $\forall x\,(\mathsf{H}_1(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_2(x))$ wahr ist.**

Diese Formulierung ist mit Definition 2 (7.1.) völlig gleichwertig. Beide definieren ein und denselben Begriff, nämlich den der „Gleichheit von Mengen".

Nach den Mengenbildungsaxiomen und dem Satz 2 (7.1.) ist es sicher, daß *jede* Kontradiktion über einem Individuenbereich *I genau eine* Menge bestimmt, nämlich die **leere Menge**. Über ein und demselben Inidividuenbereich gibt es mehrere Kontradiktionen, sie alle sind aber untereinander äquivalent. Nach Satz 3 (7.1.) sind die durch sie erzeugten Mengen *gleich*, und es gibt über dem Individuenbereich *I* die leere Menge $\emptyset_I$.
Wir vergleichen die leeren Mengen verschiedener Individuenbereiche, z. B.:

$$\emptyset_N = \{x \in N\,;\, x \neq x\} \quad \text{und} \quad \emptyset_V = \{x \in V\,;\, x \text{ hat 3 Diagonalen}\}$$

(V sei die Menge aller Vierecke).
$\emptyset_N$ und $\emptyset_V$ sind sicher Mengen 1. Stufe, denn sie wurden mit Aussageformen $\mathsf{H}(x)$ für Individuen gebildet.

Wir zeigen, daß leere Mengen 1. Stufe gleich sind.

SATZ 4 (7.1.)
Es gibt genau eine leere Menge 1. Stufe.

Beweis:
Es seien I_1 und I_2 verschiedene Individuenbereiche.
Weiter seien $\emptyset_{I_1}$ die leere Menge über I_1 und $\emptyset_{I_2}$ die leere Menge über I_2.
Zu zeigen ist, daß die leere Menge 1. Stufe vom Individuenbereich *unabhängig* ist, daß also

$$\emptyset_{I_1} = \emptyset_{I_2} \quad \text{bzw.} \quad \forall\, x\, (x \in \emptyset_{I_1} \leftrightarrow x \in \emptyset_{I_2})$$

gilt.

1. Es sei a ein beliebiges, aber festes Element aus I_1.
   Dann ist die Implikation $a \in \emptyset_{I_1} \rightarrow a \in \emptyset_{I_2}$ wahr, denn die Prämisse „a ist Element von $\emptyset_{I_1}$" ist wegen Definition 1 (7.1.) sicher falsch.
2. Es sei b ein beliebiges, aber festes Element aus I_2.
   Dann ist die Implikation $b \in \emptyset_{I_2} \rightarrow b \in \emptyset_{I_1}$ wiederum wahr, denn die Prämisse ist nach Definition 1 (7.1.) wieder falsch.

Mit dem Schluß auf „für alle" erhalten wir die Aussagen

$$\forall\, x\, (x \in \emptyset_{I_1} \rightarrow x \in \emptyset_{I_2}) \quad \text{und} \quad \forall\, x\, (x \in \emptyset_{I_2} \rightarrow x \in \emptyset_{I_1}) .$$

Schließen wir daraus auf eine Konjunktion und wenden das Verteilungsgesetz

$$\forall\, x\, \mathsf{H}_1(x) \wedge \forall\, x\, \mathsf{H}_2(x) \leftrightarrow \forall\, x\, \big(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)\big)$$

an, so erhalten wir

$$\forall\, x\, (x \in \emptyset_{I_1} \rightarrow x \in \emptyset_{I_2} \wedge x \in \emptyset_{I_2} \rightarrow x \in \emptyset_{I_1}) ,$$

woraus nach dem Schluß auf eine Äquivalenz

$$\forall\, x\, (x \in \emptyset_{I_1} \leftrightarrow x \in \emptyset_{I_2})$$

folgt, was mit $\emptyset_{I_1} = \emptyset_{I_2}$ äquivalent ist. q. e. d.

Satz 4 (7.1.) berechtigt, von **der leeren Menge 1. Stufe** zu sprechen und diese allgemein mit $\emptyset$ zu kennzeichnen.
Analog kann man zeigen, daß es jeweils *genau eine* leere Menge zweiter, dritter, ..., k-ter Stufe gibt.

7.2. Gleichheit von Mengen und Identität von Begriffen

Im Teil B 7.1. haben wir die *Gleichheit von Mengen* behandelt. Jetzt fragen wir nach der **Gleichheit (Identität) von Begriffen**.

Zwei Begriffe sind identisch-gleich, wenn sie im Begriffsinhalt und im Begriffsumfang übereinstimmen, d. h., wenn sie **intensional identisch** und **extensional identisch** sind. Aus dem Teil B 6.2. wissen wir, daß Begriffe intensional verschieden, extensional aber gleich sein können. So sind die Begriffe „gleichseitiges Dreieck" und „gleichwinkliges Dreieck" ihrer Intension nach nicht identisch, wohl aber ihrer Extension nach. Sind Begriffe ihrer Intension nach identisch — z. B. „Schifferklavier" und „Akkordeon" —, so sind sie es auch ihrer Extension nach.

DEFINITION 1 (7.2.) — **Extensionale Identität**
Es seien B_1 und B_2 beliebige Begriffe.
Dann nennen wir B_1 **extensional identisch** mit B_2 genau dann, wenn sie dieselbe Klasse von Individuen widerspiegeln, d. h., wenn sie dieselben Elemente enthalten bzw. umfangsgleich sind.

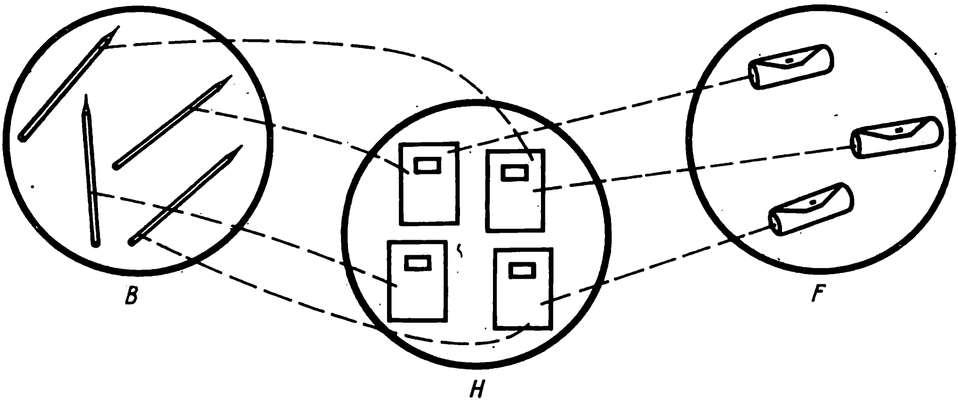
Die Definitionen 2 (7.1.) und 1 (7.2.) weisen gemeinsame Züge auf. Beide beziehen sich auf den Umfang, die erste auf den Umfang von Mengen, die zweite auf den Umfang von Begriffen. Wie eine Menge, so ist auch ein Begriff unabhängig von den Beschreibungsmöglichkeiten bereits durch die zur Klasse gehörenden Individuen eindeutig bestimmt.

7.3. Gleichmächtigkeit von (endlichen) Mengen

Die **Gleichmächtigkeit** ist eine Beziehung zwischen Mengen; sie ist ein Ausdruck dafür, daß die betrachteten Mengen dieselbe Anzahl von Elementen besitzen. Wir können diesen Begriff an dieser Stelle noch nicht exakt definieren, dafür fehlen noch wesentliche Voraussetzungen. Dennoch wollen wir die *Gleichheit von Mengen* gegenüber der *Anzahlgleichheit* abgrenzen.

Wir betrachten die Menge der Kontrollkarten (K), die an eine bestimmte Menge Junger Pioniere (P) vor einer gemeinsamen Bahnfahrt ausgegeben werden. Es bekommt jeder Pionier genau eine Kontrollkarte, und jede Kontrollkarte wird genau einem Pionier gegeben. Wir sagen dann gewöhnlich: Es wurden genau soviel Kontrollkarten ausgegeben, wie Pioniere mitfuhren.
Mengentheoretisch stellen wir fest: Die Mengen K und P sind nicht gleich, denn ihre Elemente sind verschieden. Aber K und P haben die gleiche Anzahl von Elementen, sie sind **anzahlgleich. Anzahlgleichheit** wäre als Relation zwischen Mengen nur für Mengen sinnvoll, deren Elementeanzahl man durch Auszählen ermitteln kann, also anwendbar nur auf „endliche“ und nicht auf „unendliche“ Mengen.

Wir wollen zwei (im anschaulichen Sinn) endliche Mengen M_1 und M_2 als **gleichmächtig** bezeichnen (in Zeichen $M_1 \sim M_2$), wenn sie die „gleiche Anzahl“ von Elementen enthalten. Das ist genau dann der Fall, wenn jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten so zugeordnet werden kann, daß dabei auch jedem Element der zweiten Menge genau ein Element der ersten zugeordnet ist.



120/1

Unter der **Mächtigkeit** einer (im anschaulichen Sinn) endlichen Menge verstehen wir die „Anzahl" ihrer Elemente.
In „Mathematik, Lehrbuch für Klasse 1", Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968, Seiten 3 ff, werden verschiedene Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit verglichen.
In unserem Beispiel ist B eine Menge von Bleistiften, H eine Menge von Heften und F eine Menge von Federtaschen (↗ Bild 120/1).
Vergleichen wir diese Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit, so stellen wir fest:

$$B \sim H\,, \quad B \nsim F\,, \quad H \sim B\,, \quad H \nsim F\,, \quad F \nsim B\,, \quad F \nsim H\,.$$

Gleichheit und Gleichmächtigkeit von Mengen stehen zueinander in der **Aus-folgt-Beziehung**. Offensichtlich ist, daß gleiche (identische) Mengen auch gleichmächtig sind und daß gleichmächtige Mengen nicht notwendig gleich sind. Aus der Gleichheit von Mengen folgt die Gleichmächtigkeit.

Die Gleichheit ist hinreichend für die Gleichmächtigkeit, aber nicht notwendig.

Die Gleichmächtigkeit ist notwendig für die Gleichheit, aber nicht hinreichend.

Diesen Zusammenhang können wir auch als Implikation formulieren.

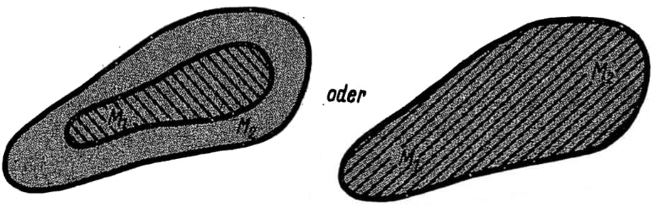
Wenn zwei Mengen M_1 und M_2 gleich sind, so sind sie auch gleichmächtig.

7.4. Inklusion von Mengen

Im Teil B 6.1. haben wir erwähnt, daß eine Menge als Individuenbereich für die Bildung einer anderen Menge dienen kann. Auf diese Tatsache wollen wir näher eingehen.

DEFINITION 1 (7.4.) — **Teilmenge**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I.
Dann nennen wir die Menge M_1 eine **Teilmenge** oder **Untermenge** der Menge M_2 (in Zeichen $M_1 \subseteqq M_2$) bzw. die Menge M_2 eine **Obermenge** der Menge M_1 (in Zeichen $M_2 \supseteqq M_1$) genau dann, wenn für alle x gilt:
Wenn $x \in M_1$, so $x \in M_2$.
Das heißt: $M_1 \subseteqq M_2 \leftrightarrow \forall x\,(x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$

$M_1 \subseteqq M_2$ lesen wir auch „M_1 enthalten in M_2" bzw. „M_2 umfaßt M_1" (↗ Bild 121/1).



121/1

Prüfen wir die Mengen

$$B_1 = \{x \in N; x \mid 6\}, \quad B_2 = \{x \in N; x \mid 30\},$$
$$B_3 = \{x \in N; 3 \mid x\}, \quad B_4 = \{x \in N; x = 3n \wedge n \in N\}$$

hinsichtlich der Teilmengenrelation, so stellen wir fest:

$$B_1 \subseteqq B_2 \quad \text{und} \quad B_3 \subseteqq B_4,$$

denn jedes Element der Menge B_1 ist auch Element der Menge B_2, und jedes Element von B_3 ist ein solches von B_4. Für die letzten beiden Mengen gilt auch die Umkehrung: Jedes Element von B_4 ist auch Element von B_3.
Für die Aussagenformen $\mathsf{H}_{B_1}(x)$ und $\mathsf{H}_{B_2}(x)$ der Mengen B_1 und B_2 gilt die Implikation:

$$\text{Wenn } \mathsf{H}_{B_1}(x), \text{ so } \mathsf{H}_{B_2}(x),$$

d. h., wenn ein Individuum x aus N die Aussageform $x \mid 6$ erfüllt, so erfüllt es auch die Aussageform $x \mid 30$. Entsprechendes gilt für

$$\mathsf{H}_{B_3}(x): 3 \mid x \quad \text{und} \quad \mathsf{H}_{B_4}(x): x = 3n \wedge n \in N.$$

Diese Beziehungen sind charakteristisch für Mengen, die zueinander in der Teilmengenrelation stehen.

SATZ 1 (7.4.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ ihre erzeugenden Aussageformen.
Dann ist M_1 **Teilmenge von** M_2 genau dann, wenn gilt:
Die Aussage $\forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \rightarrow \mathsf{H}_2(x))$ ist wahr.
Symbolisiert:
$\forall M_1 \forall M_2 [M_1 \subseteqq M_2 \leftrightarrow \forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \rightarrow \mathsf{H}_2(x))]$

Der *Beweis* verläuft analog dem des Satzes 3 (7.1.) und wird daher dem Leser überlassen.

Auf Grund der Mengenbildungsaxiome ist es möglich, alle Relationen zwischen Mengen allein mit Hilfe der Elementbeziehungen zu definieren und stets eine dazu äquivalente Formulierung anzugeben, die auf die erzeugenden Aussageformen Bezug nimmt. Das gilt auch für die Teilmengenrelation bzw. Enthaltenseinsrelation.

Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageformen.
Dann nennen wir M_1 **Teilmenge von** M_2 genau dann, wenn die Aussage

$$\forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \rightarrow \mathsf{H}_2(x))$$

wahr ist.

Für die Mengen B_3 und B_4 gilt sowohl $B_3 \subseteqq B_4$ als auch $B_4 \subseteqq B_3$. Drücken wir diese Enthaltenseinsrelation mit erzeugenden Aussageformen der Mengen B_3 und B_4 aus, so gelten die Implikationen

$$\forall x\, (\mathsf{H}_{B_3}(x) \rightarrow \mathsf{H}_{B_4}(x)) \quad \text{und} \quad \forall x\, (\mathsf{H}_{B_4}(x) \rightarrow \mathsf{H}_{B_3}(x)).$$

Aus beiden zusammen folgt die Äquivalenz

$$\forall x\, (\mathsf{H}_{B_3}(x) \leftrightarrow \mathsf{H}_{B_4}(x))$$

und schließlich nach Satz 3 (7.1.) die Gleichheit von B_3 und B_4.
Dieser Sachverhalt gilt allgemein; das bestätigt Satz 2 (7.4.).

SATZ 2 (7.4.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann gilt $M_1 \subseteqq M_2$ **und** $M_2 \subseteqq M_1$ genau dann, wenn $M_1 = M_2$.
Symbolisiert:
$\forall M_1 \forall M_2 [(M_1 \subseteqq M_2 \wedge M_2 \subseteqq M_1) \leftrightarrow M_1 = M_2]$

Beweis:
Es ist eine Allaussage zu beweisen.
Es seien also M_1, M_2 beliebige Mengen 1. Stufe.
Dann haben wir die Äquivalenz

$$(M_1 \subseteqq M_2 \wedge M_2 \subseteqq M_1) \leftrightarrow M_1 = M_2$$

nachzuweisen. Das geschieht durch den Beweis zweier Implikationen.

1. Implikation

$$(M_1 \subseteqq M_2 \wedge M_2 \subseteqq M_1) \rightarrow M_1 = M_2$$

Nach Definition 1 (7.4.) ist

$$M_1 \subseteqq M_2 \text{ äquivalent mit } \forall x (x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$$

und

$$M_2 \subseteqq M_1 \text{ äquivalent mit } \forall x (x \in M_2 \rightarrow x \in M_1)\,.$$

Nach dem Schluß auf eine Konjunktion und dem Verteilungsgesetz

$$(\forall x\, \mathsf{H}_1(x) \wedge \forall x\, \mathsf{H}_2(x)) \leftrightarrow \forall x\, (\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x))$$

folgt aus

$$\forall x (x \in M_1 \rightarrow x \in M_2) \wedge \forall x (x \in M_2 \rightarrow x \in M_1)$$

die Aussage

$$\forall x [(x \in M_1 \rightarrow x \in M_2) \wedge (x \in M_2 \rightarrow x \in M_1)]$$

und daraus nach dem Schluß auf eine Äquivalenz

$$\forall x (x \in M_1 \leftrightarrow x \in M_2)\,,$$

und diese ist nach Definition 2 (7.1.) äquivalent mit

$$M_1 = M_2\,.$$

2. Implikation

$$M_1 = M_2 \rightarrow M_1 \subseteqq M_2 \wedge M_2 \subseteqq M_1$$

Der Beweis verläuft entsprechend dem der 1. Implikation und wird dem Leser überlassen.

Aus 1. und 2. Implikation folgt nach dem Schluß auf eine Äquivalenz und nach dem Schluß auf „für alle" die Richtigkeit des Satzes 2 (7.4.). q. e. d.

Für die Mengen B_1 und B_2 gilt:

$$B_1 \subseteqq B_2 \text{ und } B_1 \neq B_2\,.$$

In solch einem Falle schreiben wir

$$B_1 \subset B_2 \text{ (gelesen: } B_1 \text{ echt enthalten in } B_2\text{)}.$$

DEFINITION 2 (7.4.) — **Echte Teilmenge**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I.
Dann nennen wir M_1 **echte Teilmenge** von M_2 (in Zeichen $M_1 \subset M_2$) bzw. M_2 **echte Obermenge** von M_1 (in Zeichen $M_2 \supset M_1$) genau dann, wenn für alle x gilt:

Wenn $x \in M_1$, so $x \in M_2$, und es gibt mindestens ein y so, daß $y \in M_2$ und $y \notin M_1$.
Das heißt:
$M_1 \subset M_2 \leftrightarrow \forall x (x \in M_1 \rightarrow x \in M_2) \wedge \exists y (y \in M_2 \wedge y \notin M_1)$.

Fügen wir den Mengen B_1 und B_2 eine dritte Menge hinzu, in der B_2 enthalten ist – etwa $B_5 = \{x \in N; x \mid 60\}$ – und vergleichen B_1 mit B_5, so stellen wir fest: B_1 ist auch in B_5 enthalten.
Diese Eigenschaft wird als **Transitivität der Relation „$\subseteqq$"** bezeichnet. Sie ist keine Besonderheit unserer Beispielsmenge, sie ist charakteristisch für die Mengenrelationen „$\subseteqq$" und „$\subset$".

Wir formulieren und beweisen diese Eigenschaft für „$\subseteqq$".

SATZ 3 (7.4.)
Es seien M_1, M_2 und M_3 beliebige Mengen über einem gegebenen Individuenbereich I.
Dann gilt:
Wenn M_1 enthalten ist in M_2 und M_2 enthalten ist in M_3, so ist auch M_1 enthalten in M_3.
Symbolisiert:
$\forall M_1 \forall M_2 \forall M_3 [(M_1 \subseteqq M_2 \wedge M_2 \subseteqq M_3) \rightarrow M_1 \subseteqq M_3]$

Voraussetzung: M_1, M_2 und M_3 seien beliebige Mengen, für die gilt:
$M_1 \subseteqq M_2$ und $M_2 \subseteqq M_3$.
Behauptung: $M_1 \subseteqq M_3$

Beweis:
Wir betrachten ein beliebiges Element x aus der Menge M_1.
Wegen der Voraussetzung $M_1 \subseteqq M_2$, die nach Definition 1 (7.4.) mit $\forall x (x \in M_1 \rightarrow x \in M_2)$ äquivalent ist, gilt auch $x \in M_2$, und nach der Voraussetzung von $M_2 \subseteqq M_3$, die mit $\forall x (x \in M_2 \rightarrow x \in M_3)$ äquivalent ist, ist das Element x aus M_1 dann auch Element von M_3.
Nach dem Schluß auf „für alle" sind unter den gegebenen Voraussetzungen alle x aus M_1 auch Elemente von M_3. q. e. d.
Nach Definition 1 (7.4.) ist jede Menge (nicht echte) Teilmenge von sich selbst, denn jede Menge erfüllt die getroffene Definition; es gilt:

$$\forall M (M \subseteqq M).$$

Auch die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge nicht nur einer bestimmten, sondern jeder beliebigen Menge M. Sie steht mit jeder Menge M in der Teilmengenrelation

$$\forall M (\emptyset \subseteqq M),$$

denn die Prämisse $x \in \emptyset$ ist in dem zu $\emptyset \subseteqq M$ nach Definition 1 (7.4.) äquivalenten Ausdruck $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in M)$ stets falsch und somit die Implikation $x \in \emptyset \rightarrow x \in M$ für alle x wahr.
Die leere Menge ist also Teilmenge jeder beliebigen Menge M, und jede Menge ist zugleich (nicht echte) Teil- und (nicht echte) Obermenge von sich selbst:

$$\forall M (\emptyset \subseteqq M \wedge M \subseteqq M).$$

Weitere Beispiele für die Inklusion von Mengen

BEISPIEL 1 (7.4.):
Wir bilden alle möglichen Teilmengen der Menge $M \doteq \{x \in N; x \mid 10\}$.
Geordnet nach Nullmenge, Einermengen, Zweiermengen, Dreiermengen und Vierermengen erhalten wir:

$\emptyset \subseteqq M$	$\{1\} \subseteqq M$	$\{1, 2\} \subseteqq M$	$\{1, 2, 5\} \subseteqq M$	$\{1, 2, 5, 10\} \subseteqq M$
	$\{2\} \subseteqq M$	$\{1, 5\} \subseteqq M$	$\{1, 2, 10\} \subseteqq M$	
	$\{5\} \subseteqq M$	$\{1, 10\} \subseteqq M$	$\{1, 5, 10\} \subseteqq M$	
	$\{10\} \subseteqq M$	$\{2, 5\} \subseteqq M$	$\{2, 5, 10\} \subseteqq M$	
		$\{2, 10\} \subseteqq M$		
		$\{5, 10\} \subseteqq M$		

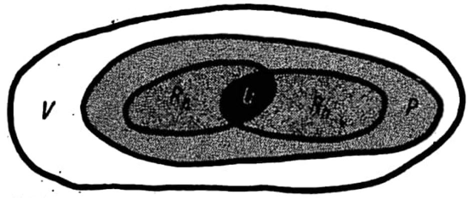
BEISPIEL 2 (7.4.):
Es sei L die Menge der von der Deutschen Reichsbahn eingesetzten Lokomotiven. Dann bilden die Mengen E (elektrische Loks) und D (Dieselloks) echte Teilmengen von L:

$$E \subset L \quad \text{und} \quad D \subset L.$$

BEISPIEL 3 (7.4.):
Es seien
M_1 die Menge der Vierecke mit vier kongruenten Seiten und vier kongruenten Winkeln,
M_2 die Menge der Vierecke mit vier kongruenten Winkeln,
M_3 die Menge der Vierecke mit kongruenten Diagonalen, die einander halbieren und aufeinander senkrecht stehen,
M_4 die Menge der Vierecke mit kongruenten Diagonalen, die einander halbieren,
M_5 die Menge der Vierecke mit Diagonalen, die aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren,
M_6 die Menge der Vierecke mit einander halbierenden Diagonalen,
M_7 die Menge der Vierecke mit zwei Paar kongruenten Gegenseiten,
M_8 die Menge der Vierecke mit zwei Paar kongruenten Gegenwinkeln,
M_9 die Menge der Vierecke mit zwei Paar parallelen Gegenseiten.

Wir stellen fest:

1. Die Mengen M_1 und M_3 sind gleich, sie geben die Menge Q der Quadrate an. Ebenso sind M_2 und M_4 gleich, sie geben die Menge R_e der Rechtecke an. Auch M_6 bis M_9 sind gleich, sie geben die Menge P der Parallelogramme an. Die Menge M_5 gibt die Menge der Rhomben (R_h) an.
   Es sei $\mathsf{H}_1(x)$ die Aussageform „x hat einander halbierende Diagonalen“, $\mathsf{H}_2(x)$ die Aussageform „x hat aufeinander senkrecht stehende Diagonalen“ und $\mathsf{H}_3(x)$ die Aussageform „x hat kongruente Diagonalen“.
   Bezeichnen wir die Menge der Vierecke mit V und nehmen diese als Individuenbereich, so können wir die Mengen Q, R_e, R_h und P mit Hilfe der Aussageformen $\mathsf{H}_1(x)$, $\mathsf{H}_2(x)$ und $\mathsf{H}_3(x)$ angeben:
   $Q \;\; = \{x \in V; \mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)\}$;
   $R_h = \{x \in V; \mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)\}$;
   $R_e = \{x \in V; \mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)\}$;
   $P \;\; = \{x \in V; \mathsf{H}_1(x)\}$.
2. $\forall x\, [(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)) \rightarrow (\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x))]$;
   $\forall x\, [(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)) \rightarrow (\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_3(x))]$;
   $\forall x\, [(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)) \rightarrow \mathsf{H}_1(x)]$;
   $\forall x\, [(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)) \rightarrow \mathsf{H}_1(x)]$ und $\forall x\, [(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_3(x)) \rightarrow \mathsf{H}_1(x)]$



126/1

sind offensichtlich wahre Aussagen.
Nach Satz 1 (7.4.) gelten dann folgende Teilmengenrelationen (↗ Bild 126/1):

$$Q \subseteqq R_h; \quad Q \subseteqq R_e; \quad Q \subseteqq P; \quad R_h \subseteqq P; \quad R_e \subseteqq P.$$

7.5. Inklusion von Mengen und mathematische Bedingungen

Die **Inklusion von Mengen** haben wir in Definition 1 (7.4.) mit Hilfe der Implikation definiert und im Satz 1 (7.4.) als Implikation formuliert.
Wenden wir Satz 1 (7.4.) auf unsere Beispielmengen

$$B_1 = \{x \in N; x \mid 6\} \qquad \text{und} \qquad B_2 = \{x \in N; x \mid 30\}$$

an, dann ergibt sich:

$$B_1 \subseteqq B_2 \leftrightarrow \forall\, x\, (x \mid 6 \rightarrow x \mid 30).$$

Wir haben schon festgestellt: Wenn ein Individuum a aus N die Aussageform $x \mid 6$ erfüllt, so erfüllt es auch die Aussageform $x \mid 30$. Die Wahrheit der Prämisse $x \mid 6$ überträgt sich auf die Wahrheit der Konklusion $x \mid 30$, die Wahrheit der Konklusion folgt aus der Wahrheit der Prämisse.
Die Erfüllung der Aussageform $x \mid 6$ ist hinreichend (aber nicht notwendig) dafür, daß auch die Aussageform $x \mid 30$ erfüllt wird, „$x \mid 6$" ist eine **hinreichende Bedingung** für „$x \mid 30$". Die Erfüllung der Aussageform $x \mid 30$ ist notwendig (aber nicht hinreichend) dafür, daß die Ausssageform $x \mid 6$ erfüllt wird, „$x \mid 30$" ist eine **notwendige Bedingung** für „$x \mid 6$", denn wäre nämlich x kein Teiler von 30, so könnte x auch kein Teiler von 6 sein. Die von der Bedingung „$x \mid 6$" erzeugte Menge B_1 ist in der von „$x \mid 30$" erzeugten Menge B_2 **enthalten** und die von der Bedingung „$x \mid 30$" erzeugte Menge **umfaßt** die von „$x \mid 6$" erzeugte.

Die Aussageformen der Mengen B_3 und B_4 weisen hinsichtlich mathematischer Bedingungen eine Besonderheit auf.
„$3 \mid x$" ist sicher eine hinreichende Bedingung für „$x = 3\,n \wedge n \in N$", und „$x = 3\,n \wedge n \in N$" eine notwendige Bedingung für „$3 \mid x$". Die von „$3 \mid x$" erzeugte Menge B_3 ist in der von „$x = 3\,n \wedge n \in N$" erzeugten Menge B_4 *enthalten*.
Aber auch die Umkehrung gilt. „$x = 3\,n \wedge n \in N$" ist eine hinreichende Bedingung für „$3 \mid x$", und „$3 \mid x$" ist eine notwendige Bedingung für „$x = 3\,n \wedge n \in N$".
Die Menge B_4 ist in B_3 *enthalten*. „$3 \mid x$" ist eine **hinreichende und notwendige Bedingung** für „$x = 3\,n \wedge n \in N$" und umgekehrt.
Die von „$3 \mid x$" erzeugte Menge B_3 ist **gleich** der von „$x = 3\,n \wedge n \in N$" erzeugten Menge B_4.
Wir betrachten noch zwei Mengen aus dem Beispiel 3 (7.4.).
In der Tat ist „$(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x))$" eine hinreichende Bedingung für „$\mathsf{H}_1(x)$" und „$\mathsf{H}_1(x)$" eine notwendige Bedingung für „$(\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x))$". Die von der ***hinrei-***

chenden Bedingung „($H_1(x) \wedge H_2(x)$)" über dem Individuenbereich V erzeugte Menge R_h ist in der von der *notwendigen Bedingung* „$H_1(x)$" erzeugten Menge P *enthalten*, und die Menge P *umfaßt* die Menge R_h.

Diese Beziehung zwischen der Enthaltenseinsrelation von Mengen und den mathematischen Bedingungen ist wieder keine Besonderheit unserer Beispielmengen, sie gilt allgemein.

Eine Menge M_1 ist in der Menge M_2 **enthalten** genau dann, wenn die die Menge M_1 erzeugende Aussageform $H_1(x)$ eine **hinreichende Bedingung** für die die Menge M_2 erzeugende Aussageform $H_2(x)$ und $H_2(x)$ eine **notwendige Bedingung** für $H_1(x)$ ist bzw. wenn aus der Aussageform $H_1(x)$ die Aussageform $H_2(x)$ folgt.

Eine Menge M_1 ist **gleich** der Menge M_2 genau dann, wenn $H_1(x)$ eine **hinreichende und notwendige Bedingung** für $H_2(x)$ ist und umgekehrt bzw. wenn aus der Aussageform $H_1(x)$ die Aussageform $H_2(x)$ und aus der Aussageform $H_2(x)$ die Aussageform $H_1(x)$ folgt.

7.6. Inklusion von Mengen und Subordination von Begriffen

Im Beispiel 3 (7.4.) gaben wir die Mengen Q, R_h, R_e und P über dem Individuenbereich V mit Hilfe der Aussageformen $H_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, bzw. deren Konjunktionen an. Aus dem Venndiagramm in diesem Beispiel sind folgende Mengenbeziehungen leicht erkennbar:

$$\begin{array}{llll} Q \subset V, & Q \subset P, & Q \subset R_e, & Q \subset R_h; \\ R_h \subset V, & R_h \subset P; & & \\ R_e \subset V, & R_e \subset P; & & \\ P \subset V. & & & \end{array}$$

Wählen wir als Gattung den Begriff „Viereck", dann können wir auch die Begriffe „Quadrat", „Rhombus", „Rechteck" und „Parallelogramm" mit den durch die Aussageformen $H_i(x)$ ausgedrückten Eigenschaften definieren.

Quadrat nennt man ein Viereck mit einander halbierenden, aufeinander senkrecht stehenden und kongruenten Diagonalen.

Rhombus nennt man ein Viereck mit einander halbierenden und aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen.

Rechteck nennt man ein Viereck mit einander halbierenden und kongruenten Diagonalen.

Parallelogramm nennt man ein Viereck mit einander halbierenden Diagonalen.

Für die Definition der Begriffe „Quadrat", „Rhombus" und „Rechteck" wäre schon der Begriff „Parallelogramm" und für den Begriff „Quadrat" schon der Begriff „Rhombus" oder „Rechteck" als Gattungsbegriff hinreichend.

Den zwischen den Mengen Q, R_h, R_e, P und V geltenden Relationen entsprechen analoge Beziehungen zwischen den Begriffen „Quadrat", „Rhombus", „Rechteck", „Parallelogramm" und „Viereck".

Jedes Quadrat ist ein Viereck (Parallelogramm, Rechteck und Rhombus); bzw.
Wenn x ein Quadrat ist, so ist x ein Viereck (Parallelogramm, Rechteck, Rhombus).

Jeder Rhombus ist ein Viereck (Parallelogramm); bzw.
Wenn x ein Rhombus ist, so ist x ein Viereck (Parallelogramm).

Jedes Rechteck ist ein Viereck (Parallelogramm); bzw.
Wenn x ein Rechteck ist, so ist x ein Viereck (Parallelogramm).

Jedes Parallelogramm ist ein Viereck; bzw.
Wenn x ein Parallelogramm ist, so ist x ein Viereck.

Diese Beziehung zwischen Begriffen heißt **Subordination (Unterordnung)**. Der Artbegriff ist dem Gattungsbegriff untergeordnet, der Artbegriff ist der *subordinierte* Begriff, der Gattungsbegriff der *subordinierende* Begriff.
„Parallelogramm" ist gegenüber „Viereck" der subordinierte, letzter gegenüber dem ersten der subordinierende Begriff.
„Rechteck" ist gegenüber „Quadrat" der subordinierende, gegenüber „Parallelogramm" der subordinierte Begriff.
Die Subordination trifft auch auf die Begriffe „Metallarbeiter" und „Arbeiter", „Arbeiter" und „Werktätiger", „Bruder" und „Verwandter", „Obstbaum" und „Baum", „Primzahl" und „natürliche Zahl", ... zu, und sie trifft auch auf folgende Kette von Begriffen zu: „Linde", „Laubbaum", „Baum", „Pflanze" und „Lebewesen".
Es ließe sich die Reihe von Beispielen für die Subordination von Begriffen beliebig fortsetzen.

7.7. Potenzmengen, Mengen höherer Stufen

Im Beispiel 1 (7.4.) haben wir von der Menge $M = \{x \in N; x \mid 10\}$ alle möglichen Teilmengen gebildet. Fassen wir diese zu einem neuen Ganzen zusammen, so erhalten wir eine Menge von Mengen.

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{5\}, \{10\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 10\}, \{2, 5\}, \{2, 10\}, \{5, 10\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 10\}, \{1, 5, 10\}, \{2, 5, 10\}, \{1, 2, 5, 10\}\}$$

DEFINITION 1 (7.7.) — **Potenzmenge**
Es sei M eine beliebige Menge.
Dann nennen wir die Menge aller Teilmengen von M die **Potenzmenge** von M (in Zeichen $\mathfrak{P}(M)$).

Die Bildung von Potenzmengen ist eine Möglichkeit zur Bildung neuer Mengen. Die Existenz der Potenzmengen sichert das
Mengenbildungsaxiom für Mengen 2. Stufe:

$$\exists\, \mathfrak{M}\, \forall X\, (X \in \mathfrak{M} \leftrightarrow \mathsf{H}(X)),$$

und die Eindeutigkeit folgt aus dem
Extensionalitätsaxiom für Mengen 2. Stufe:

$$\mathfrak{M}_1 \underset{\text{u}}{\;} \mathfrak{M}_2 \rightarrow \forall \mathcal{M}\, (\mathfrak{M}_1 \in \mathcal{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}_2 \in \mathcal{M}).$$

Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ der Menge $M = \{x \in N;\ x \mid 10\}$ hat 16 Elemente, ihre Mächtigkeit ist 16, die der Menge M aber 4. Wir fragen nach dem Zusammenhang der Mächtigkeiten einer Menge M und ihrer Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Die Mächtigkeit der Potenzmenge ist stets größer als die der Menge selbst. Wir beschränken uns im folgenden auf „endliche" Mengen.
Ist $M = \emptyset$, so ist $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
Ist $M = \{a\}$, so ist $\mathfrak{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$.
Ist $M = \{a, b\}$, so ist $\mathfrak{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$; oder:
Hat M drei Elemente, so hat $\mathfrak{P}(M)$ 2^3 Elemente; oder:
Ist die Mächtigkeit von M gleich 4, dann ist die von $\mathfrak{P}(M)$ gleich 2^4; usw.

SATZ 1 (7.7.)
Die Potenzmenge jeder endlichen Menge M der Mächtigkeit n hat genau 2^n Elemente.

Auf einen *Beweis* dieses Satzes wird verzichtet. Er kann mit Hilfe der vollständigen Induktion über n oder mit Hilfe von Sätzen aus der Kombinatorik geführt werden.

7.8. Über Antinomien und deren Vermeidung

Im Teil B 6. haben wir darauf hingewiesen, daß die „naive" CANTORsche Mengendefinition zu Widersprüchen führen kann.
Wir wollen das an einigen Beispielen demonstrieren.
BERTRAND RUSSELL (1872—1970), englischer Mathematiker, Philosoph und Mitbegründer der mathematischen Logik, Nobelpreisträger und Friedenskämpfer, betrachtete *die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.* Die CANTORsche Mengendefinition erlaubt eine solche Mengenbildung. Wir wollen diese Menge mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen. Nach dem „Satz vom ausgeschlossenen Dritten" — so schloß RUSSELL — kann für $\mathfrak{R}$ selbst nur gelten:
Entweder enthält $\mathfrak{R}$ sich selbst als Element oder $\mathfrak{R}$ enthält sich nicht selbst als Element.

$$\mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \succ\!\!-\!\!\prec \sim (\mathfrak{R} \in \mathfrak{R})$$

(1) Wir nehmen an, daß $\mathfrak{R}$ sich selbst als Element enthalte, also $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$ gelte. Dann gehört aber $\mathfrak{R}$ nicht zur Menge aller der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
Aus $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$ folgt gerade $\sim (\mathfrak{R} \in \mathfrak{R})$.

(2) Nehmen wir dagegen an, daß $\mathfrak{R}$ sich nicht selbst als Element enthalte, also $\sim (\mathfrak{R} \in \mathfrak{R})$ gelte.
Dann gehört aber $\mathfrak{R}$ zur Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten.
Aus $\sim (\mathfrak{R} \in \mathfrak{R})$ folgt gerade $\mathfrak{R} \in \mathfrak{R}$.

Nach dem Schluß auf eine Äquivalenz erhalten wir aus (1) und (2):
$\mathfrak{R}$ ist Element von $\mathfrak{R}$ genau dann, wenn $\mathfrak{R}$ nicht Element von $\mathfrak{R}$ ist.
Und das ist offensichtlich ein Widerspruch. Dieser Widerspruch wird als **RUSSELLsche Antinomie** bezeichnet.
Ein weiterer Widerspruch, der aus der „naiven" CANTORschen Mengendefinition folgt, ist die **Erste CANTORsche Antinomie** oder **BURALI-FORTIsche Antinomie.** Dieser Widerspruch entsteht bei der Bildung der **Menge aller Mengen**.
Für die Antinomien vom RUSSELLschen Typ sind viele Beispiele bekannt.
So führt die Bildung der „Menge M aller Männer eines Dorfes, die sich nicht selbst rasieren" auf die RUSSELLsche Antinomie, wenn man als Dorfbarbier einen Mann bezeichnet, der alle die und nur die Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren, und wenn man weiter voraussetzt, daß es in einem gewissen Dorf genau einen Dorfbarbier gibt, daß niemand sich in einem fremden Ort rasieren läßt und daß auch kein Fremder einen Mann des Dorfes rasiert.
Eine logische Antinomie liegt immer dann vor, wenn sich aus gewissen Voraussetzungen mit logisch einwandfreien Mitteln eine Aussage H und ebenso ihr Negat $\sim \mathsf{H}$ herleiten bzw. beweisen läßt. In jeder exakten Wissenschaft sind Antinomien zu vermeiden; wenn man These und Antithese gelten läßt, hört jedes vernünftige Schließen auf. Daher forschte man seit dem Auftreten antinomischer

Erscheinungen nach ihren Ursachen und nach Möglichkeiten zu deren Vermeidung.
Bis zur jüngsten Gegenwart war man der Meinung, daß CANTOR seine Mengendefinition zu allgemein faßte und den Rahmen unserer unmittelbaren und gesicherten Erfahrung überstieg, daß er mit der Formulierung

„... jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens ..."

seiner Definition einen über die Erfahrung hinausgehenden Gültigkeitsbereich zugrunde legte, der auch solche Mengenbildungen wie „Menge aller Mengen" und „Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten" zuläßt. Und diese rufen die Antinomien hervor. Sollen sie vermieden werden, so ist neben der CANTORschen Mengendefinition festzulegen, welche Mengen Gegenstand der Theorie sein sollen und welche nicht.
FRAENKEL formulierte hierzu das **Zirkelfehlerprinzip**:

„Keine Gesamtheit kann Glieder enthalten, die nur mittels jener Gesamtheit definierbar sind und somit ihrerseits von jener Gesamtheit abhängen."

Der Logiker RUSSELL stellte die Forderung auf:

„Mengen dürfen nur Elemente der nächstkleineren Stufe enthalten."

Werden diese „Verbotsvorschriften" bei jeder Mengenbildung beachtet, dann gibt es keine Mengen mehr, die sich selbst als Element oder Mengen verschiedener Stufen als Elemente enthalten.

Wir haben dem Aufbau der Mengenlehre im wesentlichen ein **Axiomensystem**, bestehend aus den **Mengenbildungsaxiomen** und **Extensionalitätsaxiomen** erster, zweiter, ..., k-ter Stufe, dem **Unendlichkeitsaxiom** und dem **Auswahlaxiom** zugrunde gelegt.
Mit diesem axiomatischen Aufbau, in dem der Mengenbegriff als Grundbegriff an den Anfang der Theorie über Mengen gestellt wird, werden die bislang bekannten Antinomien der CANTORschen Mengenlehre vermieden.
Nach den Mengenbildungsaxiomen werden nur Mengen gleicher Stufe zu einer Menge M zusammengefaßt. Hat M die Stufe k, so haben ihre Elemente die Stufe $(k-1)$, und es können nur Ausdrücke der Form

$$M^{(k-1)} \in M^{(k)} \quad \text{mit} \quad k \geqq 1$$

als Index im Stufenaufbau der Mengenlehre und nie Ausdrücke der Form

$$M^{(k)} \in M^{(k)}$$

gebildet werden. Nach den Bemerkungen auf Seite 106 ist $M^{(k)} \in M^{(k)}$ ein unzulässiger Ausdruck.

7.9. Kontrollfragen

1. Wann heißen zwei Mengen gleich bzw. gleichmächtig?
   Wann ist eine Menge in einer anderen enthalten?
2. Drücken Sie die Identität und die Inklusion für zwei Mengen mit Hilfe erzeugender Aussageformen aus!
3. Drücken Sie die Gleichheit zweier Mengen bzw. die Relation „$\subseteqq$" zwischen Mengen mit Hilfe der Folgerungsbeziehung zwischen Aussageformen aus!
4. Geben Sie analoge Beziehungen zwischen Begriffen an, die Beziehungen zwischen Mengen entsprechen!
5. Welche Axiome haben wir dem Aufbau der Mengenlehre zugrunde gelegt?
   Erläutern Sie ihren Inhalt!

8. Operationen mit Mengen

Das Wort „Operation“ ist aus dem Mathematikunterricht der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule und aus dem Wortschatz der modernen Umgangssprache bekannt.
Wir erinnern uns an die **Rechenoperationen.**
Die *Addition,* die *Multiplikation* und das *Potenzieren* ordnen je *zwei* Zahlen eines bestimmten Zahlenbereichs eindeutig *eine* Zahl dieses Bereichs zu. Auch die *Subtraktion,* die *Division,* das *Radizieren* und das *Logarithmieren* tun das in solchen Bereichen, in denen sie uneingeschränkt ausführbar sind. Wir sprechen von **zweistelligen Rechenoperationen.**

$$a + b \to c; \qquad q \cdot r \to s; \qquad d^e \to f$$

Wird jeder Zahl eines Zahlenbereichs eindeutig wieder eine Zahl des Bereichs zugeordnet, so können wir diesen Vorgang als eine **einstellige Rechenoperation** bezeichnen.
Als Beispiele wären die Reziprokenbildung im Bereich der von Null verschiedenen rationalen Zahlen und die Bildung der entgegengesetzten Zahl im Bereich der ganzen Zahlen zu nennen.

$$\left(+\frac{a}{b}\right) \to \left(+\frac{b}{a}\right); \qquad (+g) \to (-g)$$

Im Teil B 8. lernen wir nunmehr **Mengenoperationen** kennen, die jeder Menge bzw. je zwei Mengen nach bestimmter Vorschrift eindeutig wieder eine Menge zuordnen.

8.1. Komplement einer Menge

Im Teil B 8. kommen wir zu einer Reihe von *Anwendungen der Mengenbildungsaxiome und Extensionalitätsaxiome.*
Auf Grund dieser Axiome gibt es, wie wir gezeigt haben, zu einer gegebenen Aussageform $\mathsf{H}(x)$ genau eine Menge, die gerade diejenigen Individuen als Elemente enthält, für die $\mathsf{H}(x)$ gilt.

Es sei über dem Individuenbereich I eine beliebige Menge M gegeben. Die Individuen aus I, die nicht zu M gehören, bilden dann auf Grund der Mengenbildungsaxiome wieder eine Menge, wenn wir für sie als erzeugende Aussageform beispielsweise „$x \notin M$" nehmen. Die Eindeutigkeit dieser Menge sichert das Extensionalitätsaxiom für Mengen 1. Stufe.

DEFINITION 1 (8.1.) — **Komplement einer Menge**
Es sei M eine beliebige Menge über dem Individuenbereich I.
Dann nennen wir die Menge, die genau diejenigen Individuen enthält, die nicht zu M gehören, die **Komplementärmenge** von M (in Zeichen $\overline{M}$, gelesen: *Komplement von*).
Das heißt: $\overline{M} = \{x \in I;\, x \notin M\}$.

In unseren Beispielmengen war der Individuenbereich selbst eine Menge. Das ist bei den meisten Mengenbildungen der Fall, auch bei den Mengen, die im Rahmen der Schulmathematik gebildet bzw. betrachtet werden. Daher führen wir das **Komplement einer Teilmenge T bezüglich M** ein.
Wir betrachten über dem Individuenbereich I eine beliebige Menge M und eine ihrer Teilmengen T.
Das Komplement von T bezüglich M über I enthält auf Grund von Definition 1 (8.1.) alle die Individuen aus I, die einerseits zu M, andererseits aber nicht zu T gehören. Wir können diese Menge mit

$$\{x \in I;\quad x \in M \wedge x \notin T \wedge T \subseteqq M\}$$

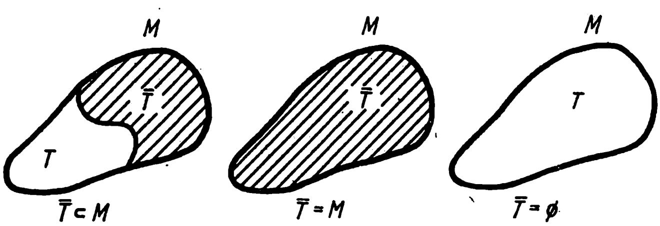
angeben. Für $M = I$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\{x \in M;\quad x \notin T \wedge T \subseteqq M\}.$$

Wählen wir — entsprechend Definition 1 (8.1.) — für das Komplement von T bezüglich M das Zeichen $\overline{T}$, so gilt:

$$\overline{T} = \{x \in M;\quad x \notin T \wedge T \subseteqq M\}.$$

Für das Komplement $\overline{T}$ von T bezüglich M lassen sich drei Fälle unterscheiden und graphisch wie im Bild 132/1 darstellen.



132/1

BEISPIEL 1 (8.1.)
Wir ermitteln $\overline{T}$ von T in M.

Gegebene Menge M		Teilmenge	Komplementärmenge
1.	$M = \{x \in N;$ $5 \leqq x \leqq 20\}$	$T = \{x \in N; 4 \mid x\}$	$\overline{T} = \{x \in N; 4 \nmid x\}$
2.	M sei die Menge aller Dreiecke.	T sei die Menge aller rechtwinkligen Dreiecke.	$\overline{T}$ ist die Menge der nicht rechtwinkligen Dreiecke.
3.	M sei die Menge der Primzahlen (P_z)	$Q = \{x \in P_z; 4 \mid x\}$, d. h. $Q = \emptyset$	$\overline{Q} = \{x \in P_z; \sim(4 \mid x)\}$ $= P_z$
4.	M sei die Menge der natürlichen Zahlen (N).	$S = \{x \in N; x \geqq 0\}$	$\overline{S} = \{x \in N; x < 0\}$ $= \{x \in N; \sim(x \geqq 0)\}$ $= \emptyset$

Die Beispiele lassen vermuten, daß eine erzeugende Aussageform der Komplementärmenge $\overline{T}$ das Negat der erzeugenden Aussageform von T ist. Diese Vermutung bestätigt der Satz 1 (8.1.).

SATZ 1 (8.1.)
Es sei M eine beliebige Menge und $\mathsf{H}(x)$ eine Aussageform über M, die die Teilmenge T von M erzeugt.
Dann bestimmt das Negat $\sim\mathsf{H}(x)$ über M die **Komplementärmenge** $\overline{T}$ in M.
Symbolisiert:
$T = \{x \in M; \mathsf{H}(x)\} \rightarrow \overline{T} = \{x \in M; \sim\mathsf{H}(x)\}$

Voraussetzung: M sei eine beliebige Menge, $T = \{x \in M; H(x)\}$ eine ihrer Teilmengen.
Behauptung: $\overline{T} = \{x \in M; \sim H(x)\}$ ist die Komplementärmenge von T in M.
Beweis:
Nach dem Mengenbildungsaxiom gehören genau diejenigen Elemente aus M zur Teilmenge T, die die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ zur wahren Aussage machen. Alle Elemente der Menge M, die $\mathsf{H}(x)$ nicht erfüllen, erfüllen dem Prinzip der Zweiwertigkeit entsprechend das Negat $\sim\mathsf{H}(x)$ und gehören nicht zur Teilmenge T von M, sondern nach Definition 1 (8.1.) zur Komplementärmenge $\overline{T}$ von T in M. q. e. d.

Aus dem Teil A „Einführung in die mathematische Logik“ ist bekannt, daß die zweite logische Verneinung eines Ausdrucks die erste aufhebt, daß $\sim\big(\sim(\mathsf{H}(x))\big)$ mit $\mathsf{H}(x)$ semantisch äquivalent ist.
Wenden wir diese Tatsache auf die Bildung von Komplementärmengen an, dann ergibt sich als Folgerung:

FOLGERUNG 1 (8.1.) aus Satz 1 (8.1.):
Ist $\overline{T} = \{x \in M; \sim\mathsf{H}(x)\}$ die Komplementärmenge von $T = \{x \in M; \mathsf{H}(x)\}$ in M, dann ist $\overline{\overline{T}} = \big\{x \in M; \sim\big(\sim(\mathsf{H}(x))\big)\big\}$ die Komplementärmenge von $\overline{T}$ in M, und sie ist wegen $\sim\big(\sim(\mathsf{H}(x))\big) \leftrightarrow \mathsf{H}(x)$ gleich T.

Also ist T die Komplementärmenge von $\overline{T}$ in M, wenn $\overline{T}$ eine solche von T in M ist. Aus diesem Grunde werden T und $\overline{T}$ auch kurz als **Komplementärmengen in M** bezeichnet.

Die Bildung von Komplementärmengen ist eine **einstellige Mengenoperation.** Sie ordnet jeder Teilmenge einer beliebigen Menge M eindeutig wieder eine Teilmenge von M zu. Dabei können die im Bild 132/1 angegebenen Fälle eintreten. Aus den Fällen (2) und (3) lesen wir den Inhalt der folgenden Sätze ab.

SATZ 2 (8.1.)
Es sei M eine beliebige Menge.
Dann ist die **Komplementärmenge der leeren Menge $\emptyset$ bezüglich M** gleich M.

Symbolisiert: $\forall\, M\,(\overline{\emptyset} = M)$ (Allgemein: $\overline{\emptyset} = A_I$)

SATZ 3 (8.1.)
Es sei M eine beliebige Menge.
Dann ist die **Komplementärmenge der Menge M in M** die leere Menge $\emptyset$.

Symbolisiert: $\forall\, M\,(\overline{M} = \emptyset)$ (Allgemein: $\overline{A_I} = \emptyset$)

Die *Beweise* dieser Sätze sind einfach, sie stützen sich auf die Definitionen 1 (8.1.) und 2 (7.1.) bzw. 1 (7.4.). Es wird dem Leser empfohlen, die Beweise selber zu führen.

Die Sätze 2 (8.1.) und 3 (8.1.) stehen zueinander in enger Beziehung, sie bedingen einander. Bilden wir in $\overline{\emptyset} = M$ beiderseits die Komplementärmenge, so erhalten wir $\overline{\overline{\emptyset}} = \overline{M}$ und schließlich wegen der Folgerung 1 (8.1.) $\emptyset = \overline{M}$. Diese Beziehung ist wegen Satz 3 (8.1.) allgemeingültig. Auf die gleiche Weise erhalten wir aus dem Satz 3 (8.1.) den Satz 2 (8.1.).

8.2. Durchschnitt von Mengen

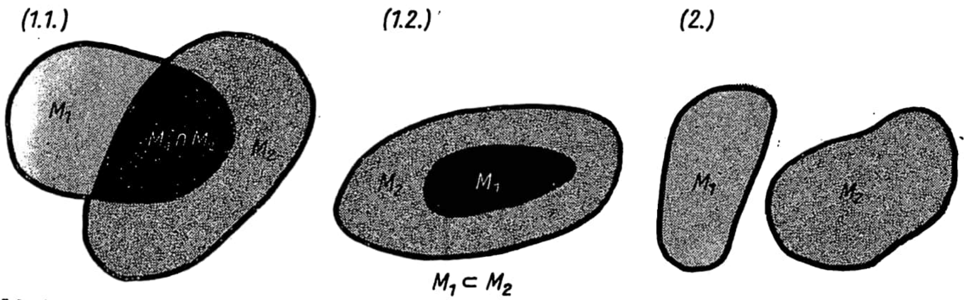
Sind zwei Mengen gegeben, so kann man nach den Elementen fragen, die sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten sind.
Diese Elemente bilden wieder eine Menge, ihre Existenz und Eindeutigkeit sichern entsprechende Mengenbildungsaxiome und das Extensionalitätsaxiom, wenn wir für diese Menge beispielsweise

$$x \in M_1 \quad \textbf{und} \quad x \in M_2$$

als erzeugende Aussageform nehmen.

DEFINITION 1 (8.2.) — **Durchschnitt**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann nennen wir die Menge, die genau diejenigen Elemente enthält, die in M_1 **und** M_2 enthalten sind, den **Durchschnitt** von M_1 und M_2 (in Zeichen $M_1 \cap M_2$, gelesen: *M_1 geschnitten mit M_2*).
Das heißt: $M_1 \cap M_2 =: \{x \in I;\, x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$;
oder: $x \in (M_1 \cap M_2) \leftrightarrow x \in M_1 \wedge x \in M_2$.

Es lassen sich zwei Fälle unterscheiden (↗ Bild 135/1).



135/1

(1.) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ (2.) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

(1.1.) $M_1 \subseteq\!\!\!\!/\; M_2$ und $M_2 \subseteq\!\!\!\!/\; M_1$ (1.2.) $M_1 \subseteqq M_2$ oder $M_2 \subseteqq M_1$

BEISPIEL 1 (8.2.):

Wir ermitteln den Durchschnitt zweier Mengen.

Gegebene Mengen		Durchschnitt
(1.1.)	$A = \{x \in G;\ -3 < x\}$ $B = \{x \in G;\ x \leqq +1\}$	$A \cap B = \{x \in G;\ -3 < x \wedge x \leqq +1\}$ $= \{x \in G;\ -3 < x \leqq +1\}$
(1.2.)	$C = \left\{x \in R;\ x \geqq +\frac{5}{4}\right\}$ $D = \left\{x \in R;\ x > +\frac{6}{5}\right\}$	$C \cap D = \left\{x \in R;\ +\frac{5}{4} \leqq x \wedge \frac{6}{5} < x\right\}$ $= \left\{x \in R;\ +\frac{5}{4} \leqq x\right\}$ $= C$
(2.)	I sei die Menge der Dreiecke. $E = \{x \in I;\ x$ ist rechtwinklig$\}$ $F = \{x \in I;\ x$ ist gleichseitig$\}$	$E \cap F = \{x \in I;\ x$ ist rechtwinklig und gleichseitig$\}$ $= \emptyset$

Die Beispiele lassen vermuten, daß eine erzeugende Aussageform des Durchschnitts zweier Mengen die Konjunktion der erzeugenden Aussageformen dieser Mengen (oder eine zu dieser Konjunktion äquivalente Aussageform) ist. Es gilt nämlich der Satz 1 (8.2.).

SATZ 1 (8.2.)

Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ ihre erzeugenden Aussageformen.

Dann gilt:

$$M_1 \cap M_2 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x)\} \cap \{x \in I;\ \mathsf{H}_2(x)\} = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)\}\,.$$

Beweis:
Nach Voraussetzung enthält M_1 genau die Elemente, die $\mathsf{H}_1(x)$ über dem Individuenbereich I erfüllen, und M_2 genau die Elemente, die $\mathsf{H}_2(x)$ über dem Individuenbereich I erfüllen. Die Konjunktion $\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$ erfüllen dann die Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 enthalten sind. Das sind aber nach Definition 1 (8.2.) genau die Elemente des Durchschnitts $M_1 \cap M_2$.
Andererseits sind die Elemente aus $M_1 \cap M_2$ nach Definition 1 (8.2.) in M_1 und in M_2 enthalten, d. h., sie erfüllen sowohl die Aussageform $\mathsf{H}_1(x)$ als auch $\mathsf{H}_2(x)$ und somit auch die Konjunktion $\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$.
Danach enthält $M_1 \cap M_2$ die und nur die Individuen des Grundbereichs als Elemente, die die Aussageform $\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$ erfüllen. q. e. d.

Die Durchschnittsbildung von Mengen ist eine **zweistellige Mengenoperation**. Sie ordnet je zwei Mengen eindeutig wieder eine Menge zu.
Dabei können einige typische Fälle betrachtet werden. Wir haben sie im Bild 135/1 dargestellt.

Zum Fall (1.1.):

Ein Teil der Menge M_1 ist in der Menge M_2 echt enthalten, bzw. die Menge M_2 umfaßt einen echten Teil der Menge M_1 und umgekehrt. Diese Teilmenge ist der Durchschnitt von M_1 und M_2; der Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ ist also Teilmenge von M_1 und auch von M_2. Das bestätigt auch der Durchschnitt $A \cap B$ im Beispiel 1 (8.2.). Die Durchschnittsmenge $A \cap B = \{-2, -1, 0, +1\}$ beispielsweise ist eine Teilmenge der Menge aller ganzen Zahlen, die größer als -3 sind bzw. der Menge aller ganzen Zahlen, die kleiner oder gleich $+1$ sind.
Wegen $M_1 \cap M_2 \subseteqq M_1$ und $M_1 \cap M_2 \subseteqq M_2$ stellt die den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ erzeugende Aussageform nach Satz 1 (7.4.) und den Ausführungen im Teil B 7.5. eine hinreichende Bedingung für die Aussageformen, die M_1 und M_2 erzeugen, dar. Sind das die Aussageformen $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$, so ist nach Satz 1 (8.2.) die Konjunktion $\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$ eine erzeugende Aussageform des Durchschnitts $M_1 \cap M_2$ und als solche eine hinreichende Bedingung für $\mathsf{H}_1(x)$ und für $\mathsf{H}_2(x)$.

Zum Fall (1.2.):

Die eine Menge ist Teilmenge der anderen, und der Durchschnitt beider fällt mit dieser Teilmenge zusammen. Das veranschaulichen auch die Mengen C und D im Beispiel 1 (8.2.).
Ist der Durchschnitt zweier Mengen gleich einer der beiden Mengen, etwa M_1, so ist die Menge M_1 Teilmenge der anderen. Sie erzeugende Aussageformen implizieren einander, sie stehen in der „wenn–so"-Beziehung zueinander. Eine erzeugende Aussageform der Untermenge stellt bezüglich einer erzeugenden Aussageform der Obermenge eine hinreichende Bedingung dar. Im Beispiel 1 (8.2.) gilt unter anderem

$$C \cap D = C.$$

Die Aussageform $\mathsf{H}_C(x)\colon x \geqq +\frac{5}{4}$ ist bezüglich $\mathsf{H}_D(x)\colon x > +\frac{6}{5}$ eine hinreichende Bedingung, $\mathsf{H}_D(x)$ bezüglich $\mathsf{H}_C(x)$ eine notwendige Bedingung.

Zum Fall (2.):

Die Mengen M_1 und M_2 haben im Bild 135/1 (2.) kein Element gemeinsam. Der Durchschnitt ist leer. Zwei Mengen, deren Durchschnitt leer ist, heißen disjunkt oder elementfremd.

Es ergeben sich zwei Folgerungen.

FOLGERUNG 1 (8.2.) aus Definition 1 (8.2.):
Wird eine beliebige Menge M mit der leeren Menge $\emptyset$ geschnitten, so ist der Durchschnitt $M \cap \emptyset$ leer.
Symbolisiert: $\forall M\ (M \cap \emptyset = \emptyset)$

Das bedeutet insbesondere, daß jede Menge M zur leeren Menge $\emptyset$ disjunkt und die leere Menge $\emptyset$ Teilmenge von jeder Menge M ist.

FOLGERUNG 2 (8.2.) aus Definition 1 (8.2.):
Wird eine beliebige Menge M mit der Allmenge A_I ihres Individuenbereichs I geschnitten, so ist der Durchschnitt $M \cap A_I$ gleich M.
Symbolisiert: $\forall M\ (M \cap A_I = M)$

Wir haben den Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2 allein mit Hilfe der Elementbeziehung definiert und im Satz 1 (8.2.) eine dieser Definition äquivalente Formulierung angegeben, die sich auf erzeugende Aussageformen $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ der Mengen M_1 und M_2 bezieht.

Wir stellen die im Teil B 8.2. betrachteten Durchschnittsbildungen und entsprechende Beziehungen zwischen den erzeugenden Aussageformen in einer Übersicht zusammen.

Dabei seien $M_1 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x)\}$ und $M_2 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_2(x)\}$ beliebige Mengen 1. Stufe.

Durchschnittsbildungen	Beziehungen zwischen den Aussageformen
$M_1 \cap M_2$	$\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$
$M_1 \cap M_2 \subseteqq M_1$ $M_1 \cap M_2 \subseteqq M_2$	$\mathsf{H}_1(x) \wedge \mathsf{H}_2(x)$ ist hinreichende Bedingung für $\mathsf{H}_1(x)$ und für $\mathsf{H}_2(x)$.
$M_1 \subseteqq M_2$ $\leftrightarrow M_1 \cap M_2 = M_1$	$\mathsf{H}_1(x)$ ist hinreichende Bedingung für $\mathsf{H}_2(x)$ genau dann, wenn $\mathsf{H}_1(x)$ erzeugende Aussageform von $M_1 \cap M_2$ ist.

Die Durchschnittsbildung von Mengen läßt sich sukzessiv auf mehr als zwei Mengen ausdehnen.

$$((M_1 \cap M_2) \cap M_3) \cap \cdots \cap M_n$$

8.3. Durchschnitt von Mengen — Verschiebung von Begriffen

Wir fragen, ob es zwischen den Begriffen auch eine solche Beziehung (Operation) gibt, die dem Durchschnitt von Mengen entspricht.
Aus den vorangehenden Darlegungen und dem Teil B 7. wissen wir, daß eine Menge in einer anderen ganz oder nur mit einem Teil enthalten sein kann oder gar nicht.

Ähnliche Beziehungen gibt es zwischen den Begriffen. Ist die Klasse von Individuen eines Begriffs ganz in der Klasse eines anderen Begriffs enthalten, so sprechen wir — wie schon bekannt — von der *Subordination* (*Unterordnung*). Ist aber die Klasse von Individuen eines Begriffs nur mit einem Teil in der Klasse eines anderen Begriffs enthalten, gibt es also Individuen, die — entsprechend den Elementen des Mengendurchschnitts — die invarianten Merkmale sowohl der einen als auch der anderen Klasse besitzen, und gibt es auch solche Individuen, die nur eins der beiden charakteristischen Merkmale haben, so sprechen wir von einer **Begriffsverschiebung (Überlagerung)** oder von der Beziehung zwischen **interferierenden Begriffen.**

Die Begriffe „Rhombus" und „Rechteck" sind interferierende Begriffe. Im Sozialismus sind auch die Begriffe „Student" und „Arbeiter" Beispiele für eine Begriffsverschiebung. Es gibt studierende Arbeiter, z. B. viele Fernstudenten. Es gibt aber auch Arbeiter, die nicht als Studenten immatrikuliert sind, und es gibt Studenten — z. B. die meisten Direktstudenten —, die keine Arbeiter sind. Die Begriffe „Student" und „Forscher" unterliegen gegenwärtig im Zuge der III. Hochschulreform auch einer Begriffsverschiebung. Es gibt im Forschungsstudium forschende Studenten.

Haben die zugehörigen Klassen zweier Begriffe kein einziges Individuum gemeinsam, gibt es also kein Individuum, das die invarianten Merkmale der Klassen beider Begriffe besitzt, so heißen auch solche Begriffe **disjunkt.** „Dreieck" und „Viereck", „Materialist" und „Idealist" sind zum Beispiel disjunkte Begriffe.

8.4. Vereinigung von Mengen

Es seien wieder beliebige Mengen M_1 und M_2 gegeben.
Konkretisieren wir in $\{x \in I;\ \mathsf{H}(x)\}$ die Aussageform $\mathsf{H}(x)$ mit „$x \in M_1$ **oder** $x \in M_2$", so erhalten wir entsprechend den Mengenbildungsaxiomen und dem Extensionalitätsaxiom genau eine Menge, die genau diejenigen Elemente enthält, die in M_1 oder (nicht ausschließendes) in M_2 enthalten sind.

DEFINITION 1 (8.4.) — **Vereinigung**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann nennen wir die Menge, die genau diejenigen Elemente enthält, die in M_1 **oder** M_2 enthalten sind, die **Vereinigung** von M_1 und M_2 (in Zeichen $M_1 \cup M_2$, gelesen: M_1 *vereinigt mit* M_2).

Das heißt: $M_1 \cup M_2 = \{x \in I;\ x \in M_1 \vee x \in M_2\}$;

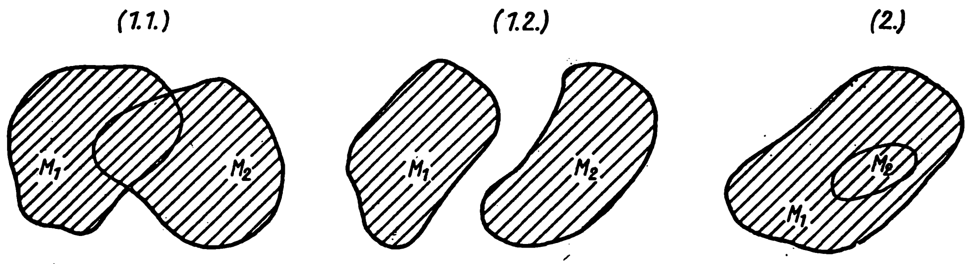
oder: $x \in (M_1 \cup M_2) \leftrightarrow x \in M_1 \vee x \in M_2$.

Auch hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden (↗ Bild 139/1).

(1.) $M_1 \cup M_2 \neq M_1$ und $M_1 \cup M_2 \neq M_2$

(1.1.) $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ (1.2.) $M_1 \cap M_2 = \emptyset$

(2.) $M_1 \cup M_2 = M_1$ oder $M_1 \cup M_2 = M_2$



139/1

BEISPIEL 1 (8.4.):
Wir ermitteln die Vereinignng zweier Mengen.

Gegebene Mengen		Vereinigung
(1.1.)	A sei die Menge aller Mitglieder der DSF B sei die Menge aller Mitglieder des DTSB.	$A \cup B$ ist die Menge aller Mitglieder der DSF **oder** des DTSB.
(1.2.)	$C = \{x \in N;\ 4 \mid x\}$ $D = \{x \in N;\ x \text{ ist Primzahl}\}$	$C \cup D = \{x \in N;\ 4 \mid x \vee x \text{ ist Primzahl}\}$
(2.)	$E = \{x \in N;\ 12 \mid x\}$ $F = \{x \in N;\ 4 \mid x\}$	$E \cup F = \{x \in N;\ 12 \mid x \vee 4 \mid x\} = F$

Die Beispiele lassen vermuten, daß eine erzeugende Aussageform der Vereinigung zweier Mengen die Alternative der erzeugenden Aussageformen dieser Mengen (oder eine zu dieser Alternative äquivalente Aussageform) ist. Die Bestätigung liefert Satz 1 (8.4.).

SATZ 1 (8.4.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ ihre erzeugenden Aussageformen.
Dann gilt:

$$M_1 \cup M_2 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x)\} \cup \{x \in I;\ \mathsf{H}_2(x)\} = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x) \vee \mathsf{H}_2(x)\}.$$

Ein *Beweis* ist analog dem des Satzes 1 (8.2.) zu führen und kann dem Leser zur Übung überlassen werden.

Auch die Vereinigungsbildung ordnet als **zweistellige Mengenoperation** je zwei Mengen eindeutig wieder eine Menge zu. Diese umfaßt jede Einzelmenge, bzw. jede einzelne Menge ist Teilmenge der Vereinigungsmenge.

$$M_1 \subseteqq M_2 \cup M_2 \qquad \text{und} \qquad M_2 \subseteqq M_1 \cup M_2$$

Das zeigen auch entsprechende Venndiagramme und die Fälle im Beispiel 1 (8.4.).
Sind $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageformen der Mengen M_1 und M_2, so sind $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ wegen der Beziehungen $M_1 \subseteqq M_1 \cup M_2$ und $M_2 \subseteqq M_1 \cup M_2$ nach den Sätzen 1 (7.4.) und 1 (8.4.) hinreichende Bedingungen für die Alternative $\mathsf{H}_1(x) \vee \mathsf{H}_2(x)$.
Betrachten wir beispielsweise die Mengen A und B in Beispiel 1 (8.4.). Die Mit-

gliedschaft in der DSF ist hinreichend dafür, zu denen zu gehören, die in der DSF **oder** im DTSB organisiert sind.

Im Falle (*1.2.*) (↗ Bild 139/1) werden disjunkte Mengen vereinigt. In diesem Falle, wie auch in den übrigen Fällen, gehört jedes Element der Einzelmengen zur Vereinigungsmenge.

In den Fällen (*1.1.*) *und* (*2.*) werden die Elemente, die in beiden Mengen enthalten sind, in der Vereinigungsmenge nur einmal angegeben.

Im Falle (2.) ist z. B. die Menge M_2 Teilmenge der Menge M_1 und M_1 somit die Vereinigung beider Mengen. Das bestätigen auch die Mengen E und F im Beispiel 1 (8.4.).

$$E = \{0, 12, 24, 36, \ldots\}$$

ist eine Teilmenge von

$$F = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$$

und daher

$$E \cup F = F.$$

Zwischen Aussageformen $\mathsf{H}_1(x)$, $\mathsf{H}_2(x)$ inklusiver Mengen M_1, M_2 und einer Aussageform ihrer Vereinigungsmenge besteht nach den Sätzen 1 (7.4.) und 1 (8.4.) folgender Zusammenhang.

$\mathsf{H}_1(x)$ ist eine hinreichende Bedingung für $\mathsf{H}_2(x)$ genau dann, wenn $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageform der Vereinigung $M_1 \cup M_2$ ist.

Es ergeben sich zwei Folgerungen.

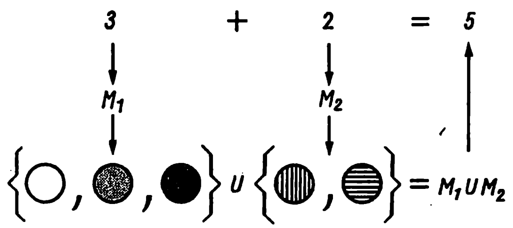
FOLGERUNG 1 (8.4.) aus Definition 1 (8.4.):
Wird eine beliebige Menge M mit der leeren Menge $\emptyset$ vereinigt, so ist die Vereinigung $M \cup \emptyset = M$.
Symbolisiert: $\forall M\,(M \cup \emptyset = M)$

FOLGERUNG 2 (8.4.) aus Definition 1 (8.4.):
Wird eine beliebige Menge M mit der Allmenge A_I ihres Individuenbereichs I vereinigt, so ist die Vereinigung $M \cup A_I$ gleich der Allmenge A_I.
Symbolisiert: $\forall M\,(M \cup A_I = A_I)$

Die Vereinigungsbildung disjunkter Mengen 1. Stufe bildet die mengentheoretische Grundlage für die Erarbeitung der Addition in der Klasse 1 der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule.

Soll z. B. die Grundaufgabe 3 + 2 erarbeitet werden, so legen die Schüler für die natürliche Zahl 3 eine beliebige Dreiermenge und für die Zahl 2 eine zu dieser Dreiermenge elementfremde Zweiermenge. Diese Mengen werden nun vereinigt. Die Vereinigungsmenge ist eine *Vertretermenge* für die Summe „3 + 2", also für die natürliche Zahl 5.

Diesen Erarbeitungsprozeß veranschaulicht Bild 140/1.



140/1

Wir fassen die Ausführungen des Teiles B 8.4. zusammen, indem wir die betrachteten Vereinigungsbildungen auch mit Hilfe äquivalenter Beziehungen zwischen den erzeugenden Aussageformen beschreiben. Dabei seien

$$M_1 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_1(x)\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{x \in I;\ \mathsf{H}_2(x)\}$$

beliebige Mengen 1. Stufe.

Vereinigungsbildungen	**Beziehungen zwischen den Aussageformen**
$M_1 \cup M_2$.	$\mathsf{H}_1(x) \vee \mathsf{H}_2(x)$
$M_1 \subseteq M_1 \cup M_2$ $M_2 \subseteq M_1 \cup M_2$	$\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ sind hinreichende Bedingungen für $\mathsf{H}_1(x) \vee \mathsf{H}_2(x)$.
$M_1 \subseteq M_2$ $\leftrightarrow M_1 \cup M_2 = M_2$	$\mathsf{H}_1(x)$ ist hinreichende Bedingung für $\mathsf{H}_2(x)$ genau dann, wenn $\mathsf{H}_2(x)$ erzeugende Aussageform von $M_1 \cup M_2$ ist.

Auch die Vereinigungsbildung von Mengen läßt sich sukzessiv auf mehr als zwei Mengen ausdehnen.

$$((M_1 \cup M_2) \cup M_3) \cup \cdots \cup M_n$$

8.5. Vereinigung von Mengen und Koordinierung von Begriffen

Wir fragen wieder, ob es eine der Mengenvereinigung analoge Beziehung (Operation) zwischen den Begriffen gibt.

Wir betrachten z. B. die Begriffe „Füllfederhalter“ und „Bleistift“. Beide haben den gemeinsamen Oberbegriff „Schreibgeräte“. Die Begriffe „Auto“, „Eisenbahn“, „Schiff“ und „Flugzeug“ fallen unter den Oberbegriff „Transportmittel“, und die Begriffe „hören“, „sehen“, „tasten“, „schmecken“ und „riechen“ haben „empfinden“ zum gemeinsamen Ober- bzw. Gattungsbegriff.

Begriffe, die einen gemeinsamen Oberbegriff haben, bezeichnet man als **koordinierte Begriffe**. Die Klasse des Oberbegriffs umfaßt alle die Individuen, die wenigstens zur Klasse eines im Oberbegriff enthaltenen Begriffs gehören. Von dieser Sicht aus ist die Begriffskoordinierung eine der Mengenvereinigung *analoge Operation*.

Solche koordinierten Begriffe ein und desselben Gattungsbegriffs, die die größten Unterschiede untereinander ausweisen (soweit feststellbar), bezeichnet man als **konträre Begriffe**. „Schwarz“ und „weiß“, „weit“ und „nah“ sind jeweils konträre Begriffe.

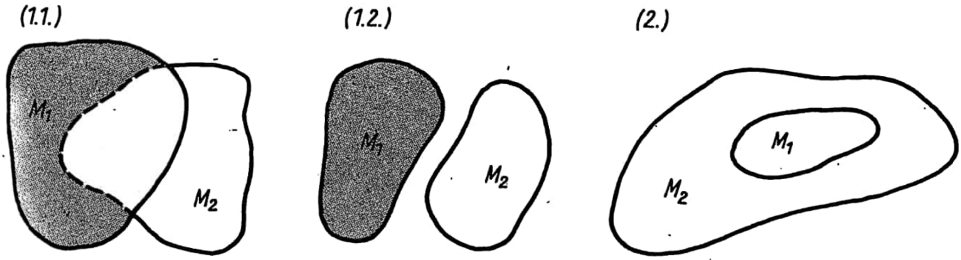
Die Bestimmung dieser Begriffe erinnert an die Bildung komplementärer Mengen. Komplementäre Mengen nennen wir **zueinander kontradiktorisch**. (Entsprechendes gilt auch für Begriffe.)

8.6. Differenz von Mengen

Wir setzen zwei Mengen 1. Stufe M_1 und M_2 und die Aussageform $\mathsf{H}(x)$: „$x \in M_1$ **und nicht** $x \in M_2$" voraus.
Dann ist $M = \{x \in I; \mathsf{H}(x)\}$ die Menge, die genau diejenigen Elemente enthält, die wohl in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind. Ihre Existenz und Eindeutigkeit ist durch entsprechende Axiome gesichert.

DEFINITION 1 (8.6.) — **Differenz von Mengen**
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann nennen wir die Menge, die genau diejenigen Elemente enthält, die in M_1 **und nicht** in M_2 enthalten sind, die **Differenz** von M_1 und M_2 (in Zeichen $M_1 \setminus M_2$, gelesen: M_1 *minus* M_2).
Das heißt: $M_1 \setminus M_2 = \{x \in I; x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$;
oder: $x \in M_1 \setminus M_2 \leftrightarrow x \in M_1 \wedge x \notin M_2$.

Für die Differenzbildung wollen wir die im Bild 142/1 dargestellten Fälle besonders betrachten.



142/1

$$(1.)\quad M_1 \setminus M_2 \neq \emptyset \qquad\qquad (2.)\quad M_1 \setminus M_2 = \emptyset$$

$$(1.1.)\quad M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \qquad\qquad (1.2.)\quad M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

BEISPIEL 1 (8.6.):
Wir ermitteln die Differenz zweier Mengen.

Gegebene Mengen		**Differenz**
(1.1.)	$A = \left\{x \in P; +\frac{3}{4} \leqq x\right\}$ $B = \left\{x \in P; x < +\frac{4}{3}\right\}$	$A \setminus B = \left\{x \in P; +\frac{4}{3} \leqq x\right\}$
(1.2.)	Grundbereich sei $I = \{x \in N; 0 < x < 100\}$. $C = \{x \in I; 7 \mid x\}$ $D = \{x \in I; 15 \mid x\}$	 $C \setminus D = \{x \in I; 7 \mid x \wedge \sim (15 \mid x)\} = C$ $D \setminus C = \{x \in I; 15 \mid x \wedge \sim (7 \mid x)\} = D$
(2.)	$E = \{x \in G; 6 \mid x\}$ $F = \{x \in G; 3 \mid x\}$	$E \setminus F = \{x \in G; 6 \mid x \wedge \sim (3 \mid x)\} = \emptyset$

Die Beispiele lassen vermuten, daß eine erzeugende Aussageform der Differenz von M_1 und M_2 diejenige ist, die aus der erzeugenden Aussageform von M_1 und dem Negat der erzeugenden Aussageform von M_2 (oder einer zu dieser Konjunktion äquivalenten Aussageform) gebildet wird.

SATZ 1 (8.6.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen, $\mathsf{H}_1(x)$ und $\mathsf{H}_2(x)$ ihre erzeugenden Aussageformen.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} M_1 \setminus M_2 &= \{x \in I;\, \mathsf{H}_1(x)\} \setminus \{x \in I;\, \mathsf{H}_2(x)\} \\ &= \{x \in I;\, \mathsf{H}_1(x) \wedge \sim (\mathsf{H}_2(x))\} \end{aligned}$$

Beweis:
Nach Voraussetzung enthält M_1 genau die Elemente, die über dem Grundbereich I die Aussageform $\mathsf{H}_1(x)$, und M_2 genau die Elemente, die $\mathsf{H}_2(x)$ erfüllen. Das Negat $\sim \mathsf{H}_2(x)$ wird dem Satz der Zweiwertigkeit entsprechend von keinem einzigen Element aus M_2 erfüllt; und die Konjunktion $\mathsf{H}_1(x) \wedge \big(\sim (\mathsf{H}_2(x))\big)$ wird nur von solchen Elementen erfüllt, die zur Menge M_1, nicht aber zu M_2 gehören. Das sind nach Definition 1 (8.6.) genau die Elemente der Differenz $M_1 \setminus M_2$.
Andererseits gehören die Elemente von $M_1 \setminus M_2$ nach Definition 1 (8.6.) zur Menge M_1 und nicht zu M_2, d. h., sie erfüllen die Aussageform $\mathsf{H}_1(x)$ und nicht die Aussageform $\mathsf{H}_2(x)$, wohl aber wegen der Zweiwertigkeit in der Aussagenlogik das Negat $\sim \mathsf{H}_2(x)$ und somit die Konjunktion $\mathsf{H}_1(x) \wedge \big(\sim (\mathsf{H}_2(x))\big)$.
Danach gehören zu $M_1 \setminus M_2$ die und nur die Elemente, die die Aussageform $\mathsf{H}_1(x) \wedge \big(\sim (\mathsf{H}_2(x))\big)$ erfüllen. q. e. d.

Die Differenz ordnet zwei Mengen gleicher Stufe eindeutig wieder eine Menge zu, auch sie ist eine **zweistellige Mengenoperation.**
Es sei jetzt — wie im Satz 1 (8.6.) —

$$M_1 = \{x \in I;\, \mathsf{H}_1(x)\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{x \in I;\, \mathsf{H}_2(x)\}.$$

Nach den Ausführungen im Teil B 8.1. ist

$$\overline{M}_2 = \{x \in I;\, x \notin M_2\} = \{x \in I;\, \sim (\mathsf{H}_2(x))\}$$

die Komplementärmenge von M_2, und dem Satz 1 (8.2.) entsprechend ist die Konjunktion von $\mathsf{H}_1(x)$ und $\sim(\mathsf{H}_2(x))$ eine erzeugende Aussageform des Durchschnitts von M_1 und $\overline{M}_2$.

$$M_1 \cap \overline{M}_2 = \{x \in I;\, \mathsf{H}_1(x) \wedge \sim (\mathsf{H}_2(x))\}$$

Vergleichen wir diese Durchschnittsmenge mit der im Satz 1 (8.6.) angegebenen Differenzmenge, so stellen wir fest: $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M}_2$.
Nach dem LEIBNIZschen Ersetzbarkeitstheorem dürfen wir in jedem Mengensystem $M_1 \setminus M_2$ durch $M_1 \cap \overline{M}_2$ ersetzen und umgekehrt.
Wenden wir auf $M_1 \cap \overline{M}_2$ die im Teil B 8.2. gewonnene Beziehung zwischen dem Durchschnitt von Mengen und ihren Einzelmengen an, so gilt

$$M_1 \cap \overline{M}_2 \subseteqq M_1$$

und wegen des Ersetzbarkeitstheorems auch

$$M_1 \setminus M_2 \subseteqq M_1 .$$

Diese Beziehung zwischen der Differenz zweier Mengen und dem „Minuenden" veranschaulicht das Venndiagramm im *Falle (1.1.)*. Und wenn man berücksichtigt, daß jede Menge Teilmenge von sich selbst und die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist, so bringen auch die Diagramme in den *Fällen (1.2.) und (2.)* diese Beziehung zum Ausdruck.

SATZ 2 (8.6.)
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen.
Dann ist die Differenz $M_1 \setminus M_2$ Teilmenge von M_1.
Symbolisiert: $\forall M_1 \forall M_2 (M_1 \setminus M_2 \subseteqq M_1)$

Beweis:
Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen und x ein beliebiges Element von $M_1 \setminus M_2$. Aus $x \in M_1 \setminus M_2$ folgt nach Definition 1 (8.6.) $x \in M_1 \wedge x \notin M_2$ und hieraus nach dem Schluß aus einer Konjunktion $x \in M_1$.
Nach dem Schluß auf eine Implikation und anschließend auf „für jedes" gilt dann

$$\forall x (x \in M_1 \setminus M_2 \rightarrow x \in M_1) \quad \text{bzw.} \quad M_1 \setminus M_2 \subseteqq M_1 .$$

M_1 und M_2 waren beliebige Mengen. Schließen wir für $M_1 \setminus M_2 \subseteqq M_1$ auf „für alle", so ergibt sich die Richtigkeit des Satzes 2 (8.6.). q. e. d.

Im Falle (*1.2.*) sind M_1 und M_2 disjunkte Mengen. Man kann von den Elementen der Menge M_1 keines streichen, das auch in M_2 enthalten wäre, und in M_2 keines streichen, das auch in M_1 enthalten wäre. Für disjunkte Mengen M_1 und M_2 gelten die Beziehungen

$$M_1 \setminus M_2 = M_1 \quad \text{bzw.} \quad M_2 \setminus M_1 = M_2 .$$

Ist andererseits die Differenz $M_1 \setminus M_2$ zweier Mengen M_1, M_2 gleich der Menge M_1, dann haben diese Mengen kein einziges Element gemeinsam. Es gilt also:

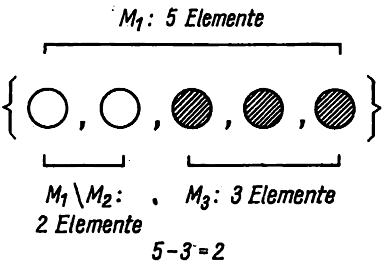
$$M_1 \setminus M_2 = M_1 \leftrightarrow M_1 \cap M_2 = \emptyset \leftrightarrow M_2 \setminus M_1 = M_2 \quad \text{oder}$$
$$M_1 \setminus M_2 = M_1 \leftrightarrow M_2 \setminus M_1 = M_2 .$$

Diese Beziehungen werden auch durch die Mengen C und D im Beispiel 1 (8.6.) bestätigt.

Im Falle (*2.*) lassen sich bei der Differenzbildung $M_1 \setminus M_2$ alle Elemente in M_1 streichen, denn wegen der Voraussetzung $M_1 \subseteqq M_2$ ist jedes Element von M_1 auch ein solches von M_2. Wird dagegen $M_2 \subseteqq M_1$ vorausgesetzt, dann ist $M_2 \setminus M_1$ die leere Menge. Ist umgekehrt die Differenz zweier Mengen leer, dann ist sicher eine Menge in der anderen enthalten. Diesen Zusammenhang zwischen der Inklusion und der Differenz von Mengen zeigen auch die Mengen E und F im Beispiel 1 (8.6.). Allgemein gilt also:

$$M_1 \subseteqq M_2 \leftrightarrow M_1 \setminus M_2 = \emptyset .$$

Die Differenzbildung zweier Mengen 1. Stufe, von denen die eine Teilmenge der anderen ist, bildet die mengentheoretische Grundlage für die Erarbeitung der Subtraktion in der Klasse 1. Die Grundaufgabe 5 – 3 wird mit Hilfe von Repräsentantenmengen erarbeitet. Der Schüler legt eine Fünfermenge und nimmt von dieser eine Dreiermenge weg (↗ Bild 144/1).



144/1

8.7. Differenz, Vereinigung und Durchschnitt komplementärer Mengen

Im Teil B 8.1. haben wir den Begriff „Komplementärmenge" eingeführt. Jetzt wollen wir mit **komplementären Mengen** T **und** $\overline{T}$ in M **zweistellige Mengenoperationen** ausführen.

Als Beispiel für M wählen wir die Menge O aller Sportler unserer Republik, die 1968 an den Olympischen Spielen teilnahmen, und S sei die Menge derjenigen, die mit mindestens einer Medaille ausgezeichnet wurden.

Dann gehören zur Komplementärmenge $\overline{S}$ von S in O alle die Aktiven, die keine Medaille erkämpfen konnten. Offensichtlich ist die Differenz $S \setminus \overline{S}$ die Menge S, denn S und $\overline{S}$ sind Komplementärmengen und nach dem im Teil B 8.6. beschriebenen *Fall* (*1.2.*) der Differenzbildung gilt dann

$$S \setminus \overline{S} = S\,.$$

SATZ 1 (8.7.)
Es sei M eine beliebige Menge und T eine ihrer Teilmengen.
Dann ist die Differenz der Komplementärmengen T **und** $\overline{T}$ **die Teilmenge** T.
Symbolisiert: $\forall\, T\, \forall\, M\, (T \subseteq M \rightarrow T \setminus \overline{T} = T)$

Voraussetzung: M sei eine beliebige Menge und T eine ihrer Teilmengen.

Behauptung: $T \setminus \overline{T} = T$ bzw. $\forall\, x\, (x \in T \setminus \overline{T} \leftrightarrow x \in T)$

Beweis:

Es sei x ein beliebiges Element aus $T \setminus \overline{T}$.
Aus $x \in T \setminus \overline{T}$ folgt nach Definition 1 (8.6.) $x \in T \wedge x \notin \overline{T}$ und hieraus nach dem Schluß aus einer Konjunktion $x \in T$. Nach dem Schluß auf eine Implikation und anschließend auf „für jedes" gilt dann:

$$\forall\, x\, (x \in T \setminus \overline{T} \rightarrow x \in T)\,.$$

Es sei nun x ein beliebiges Element aus T.
Dann ist x nach den Ausführungen im Teil B 8.1. sicher kein Element der Komplementärmenge $\overline{T}$ von T in M. Aus $x \in T \wedge x \notin \overline{T}$ folgt nach Definition 1 (8.6.) $x \in T \setminus \overline{T}$. Nach dem Schluß auf eine Implikation und anschließend auf „für jedes" gilt also auch:

$$\forall\, x\, (x \in T \rightarrow x \in T \setminus \overline{T})\,.$$

Nach dem Schluß auf eine Konjunktion und Anwendung des Verteilungsgesetzes für $\forall$ sowie des Schlusses auf eine Äquivalenz erhalten wir aus

$$\forall\, x\, (x \in T \setminus \overline{T} \rightarrow x \in T) \wedge \forall\, x\, (x \in T \rightarrow x \in T \setminus \overline{T})$$

schließlich

$$\forall\, x\, (x \in T \setminus \overline{T} \leftrightarrow x \in T) \quad \text{bzw.} \quad T \setminus \overline{T} = T\,. \qquad \text{q. e. d.}$$

Die Menge der Sportler, die keine Medaille gewannen, erhalten wir durch Differenzbildung aus O und S, d. h., die Komplementärmenge $\overline{S}$ von S in O ist die Differenz von O und S, also:

$$\overline{S} = O \setminus S.$$

Dieser Zusammenhang ist ein wesentliches Merkmal von Komplementärmengen in einer Menge M.

SATZ 2 (8.7.)

Es seien T und $\overline{T}$ beliebige Komplementärmengen in einer Menge M.

Dann ist die Komplementärmenge $\overline{T}$ gleich der Differenz von M und T.

Symbolisiert: $\forall T \, \forall M \, (T \subseteq M \rightarrow \overline{T} = M \setminus T)$

Voraussetzung: M sei eine beliebige Menge, T und $\overline{T}$ seien Komplementärmengen in M.

Behauptung: $\overline{T} = M \setminus T$ bzw. $\forall x \, (x \in \overline{T} \leftrightarrow x \in M \setminus T)$

Beweis:

Es sei x ein beliebiges Element aus $\overline{T}$.

Nach den Ausführungen im Teil B 8.1. ist dann x sicher kein Element von T. Aus $x \in M$ und $x \notin T$ folgt nach dem Schluß auf eine Konjunktion $x \in M \wedge x \notin T$, woraus auf Grund von Definition 1 (8.6.) $x \in M \setminus T$ folgt.

Nach dem Schluß auf eine Implikation und anschließend auf „für jedes" gilt dann:

$$\forall x \, (x \in \overline{T} \rightarrow x \in M \setminus T).$$

Es sei nun x ein beliebiges Element aus $M \setminus T$.

Aus $x \in M \setminus T$ folgt nach Definition 1 (8.6.) $x \in M \wedge x \notin T$ und hieraus nach dem Schluß aus einer Konjunktion $x \notin T$. Da T und $\overline{T}$ Komplementärmengen in M sind, so folgt aus $x \notin T$ schließlich $x \in \overline{T}$.

Nach dem Schluß auf eine Implikation und anschließend auf „für jedes" gilt nun auch:

$$\forall x \, (x \in M \setminus T \rightarrow x \in \overline{T}).$$

Aus

$$\forall x \, (x \in \overline{T} \rightarrow x \in M \setminus T) \quad \text{und}$$
$$\forall x \, (x \in M \setminus T \rightarrow x \in \overline{T})$$

folgt durch den Schluß auf eine Konjunktion, durch Anwendung des Verteilungsgesetzes für $\forall$ und durch den Schluß auf eine Äquivalenz die Behauptung. q. e. d.

Die Menge S der Medaillengewinner und die Menge $\overline{S}$ derjenigen Sportler, die keine Medaille erkämpften, ergeben zusammen die Menge O der Sportler unserer Republik, die an der Olympiade 1968 teilnahmen. Weiterhin ist klar, daß es keinen Sportler geben kann, der zur Menge der Medaillengewinner und auch zur Menge der Nichtmedaillengewinner gehört, d. h., die Mengen S und $\overline{S}$ sind disjunkt. Diese Beziehungen gelten für beliebige Komplementärmengen in einer Menge.

SATZ 3 (8.7.)

Es seien T und $\overline{T}$ beliebige Komplementärmengen in einer Menge M.

Dann gilt:

a) Die Vereinigung der Komplementärmengen T und $\overline{T}$ in M ist gleich M.
Symbolisiert: $\forall T \, \forall M \, (T \subseteqq M \rightarrow T \cup \overline{T} = M)$

b) Der Durchschnitt der Komplementärmengen T und $\overline{T}$ ist leer.
Symbolisiert: $\forall T \, \forall M \, (T \subseteqq M \rightarrow T \cap \overline{T} = \emptyset)$

Wir skizzieren einzelne Beweisschritte. Es wird dem Leser empfohlen, selber ausführliche Beweise zu führen.

Zu a) Da $\overline{T}$ genau die Elemente von M enthält, die nicht zu T gehören und $T \cup \overline{T}$ genau die Elemente aus M enthält, die zu T oder zu $\overline{T}$ gehören, so enthält $T \cup \overline{T}$ genau die Elemente von M.

Zu b) Da T und $\overline{T}$ laut Voraussetzung Komplementärmengen sind, so haben sie kein Element gemeinsam, ihr Durchschnitt ist leer. q. e. d.

Wir haben die Mengenoperationen „Durchschnitt“, „Vereinigung“ und „Differenz“ für beliebige Mengen 1. Stufe M_1 und M_2 definiert und betrachtet.
Ebenso lassen sich diese Operationen für Mengen höherer Stufen erklären, z. B. für Mengensysteme $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ als

$$X \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_1 \wedge X \in \mathfrak{M}_2 \; ;$$
$$X \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 \leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_1 \vee X \in \mathfrak{M}_2 \; ;$$
$$X \in \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2 \leftrightarrow X \in \mathfrak{M}_1 \wedge X \notin \mathfrak{M}_2 \; ;$$

und es lassen sich Beziehungen herausarbeiten (sowie Eigenschaften betrachten), die denen der *Operationen mit Mengen 1. Stufe* entsprechen.

8.8. Merkmale der Mengenoperationen

Zweistellige *Rechen*operationen ordnen je zwei Zahlen eines Zahlenbereiches, in dem sie uneingeschränkt ausführbar sind, eindeutig eine Zahl des Bereiches zu.
Zweistellige *Mengen*operationen ordnen je zwei Mengen eindeutig eine Menge zu.
Im Sonderfall kann die zugeordnete Zahl mit einer der gegebenen Zahlen übereinstimmen bzw. die zugeordnete Menge mit einer der Ausgangsmengen zusammenfallen.

Das ist aber nicht die einzige Parallele zwischen den Rechenoperationen und den Mengenoperationen.
*Rechen*operationen haben bestimmte Eigenschaften, die dem Leser als *Kommutativität*, *Assoziativität* und *Monotonie* bzw. *Distributivität* bekannt sind.
Auch *Mengen*operationen haben entsprechende Eigenschaften.
In folgender Tabelle wird die Analogie zwischen diesen Eigenschaften und den Eigenschaften der Rechenoperationen sowie entsprechender Eigenschaften der Wahrheitsfunktionen hervorgehoben. Dabei seien p, q, r Variable für Wahrheitswerte. A, B, C seien Variable für Mengen 1. Stufe. a, b, c seien Variable für reelle Zahlen.

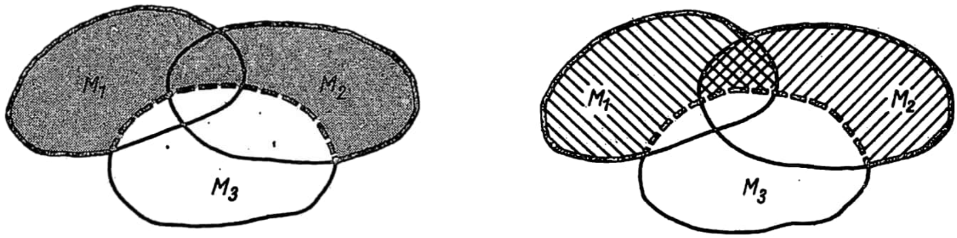
8.8.

Eigenschaft	Wahrheitsfunktion	Mengenoperation	Rechenoperation
	Konjunktion	**Durchschnitt**	**Multiplikation**
Kommutativität	$p \wedge q \underset{W}{=} q \wedge p$	$A \cap B = B \cap A$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativität	$p \wedge (q \wedge r) \underset{W}{=} (p \wedge q) \wedge r$	$A \cap (B \cap C)$ $= (A \cap B) \cap C$	$a \cdot (b \cdot c)$ $= (a \cdot b) \cdot c$
Beiderseitige Distributivität bezüglich der	*Alternative*	*Vereinigung*	*Addition*
	$p \wedge (q \vee r)$ $\underset{W}{=} (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(p \vee q) \wedge r$ $\underset{W}{=} (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$A \cap (B \cup C)$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $(A \cup B) \cap C$ $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$a \cdot (b + c)$ $= (a \cdot b)$ $+ (a \cdot c)$ $(a + b) \cdot c$ $= (a \cdot c)$ $+ (b \cdot c)$
Beiderseitige Distributivität bezüglich der		*Differenz*	*Subtraktion*
	$p \wedge (q \wedge (\sim r))$ $\underset{W}{=} (p \wedge q) \wedge (\sim (p \wedge r))$ $(p \wedge (\sim q)) \wedge r$ $\underset{W}{=} (p \wedge r) \wedge (\sim (q \wedge r))$	$A \cap (B \setminus C)$ $= (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ $(A \setminus B) \cap C$ $= (A \cap C) \setminus (B \cap C)$	$a \cdot (b - c)$ $= (a \cdot b)$ $- (a \cdot c)$ $(a - b) \cdot c$ $= (a \cdot c)$ $-(b \cdot c)$
	Alternative	**Vereinigung**	**Addition**
Kommutativität	$p \vee q \underset{W}{=} q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$	$a + b = b + a$
Assoziativität	$p \vee (q \vee r) \underset{W}{=} (p \vee q) \vee r$	$A \cup (B \cup C)$ $= (A \cup B) \cup C$	$a + (b + c)$ $= (a + b) + c$
Beiderseitige Distributivität bezüglich der (des)	*Konjunktion*	*Durchschnitts*	*Multiplikation*
	$p \vee (q \wedge r)$ $\underset{W}{=} (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $(p \wedge q) \vee r$ $\underset{W}{=} (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	$A \cup (B \cap C)$ $= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(A \cap B) \cup C$ $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$	nicht allgemeingültig
		Differenz	**Subtraktion**
Rechtsseitige Distributivität bezüglich des (der)		*Durchschnitts*	*Multiplikation*
	$(p \wedge q) \wedge (\sim r)$ $\underset{W}{=} (p \wedge (\sim r)) \wedge (q \wedge (\sim r))$	$(A \cap B) \setminus C$ $= (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$	nicht allgemeingültig

Rechtsseitige Distributivität bezüglich der		*Vereinigung*	*Addition*
	$(p \vee q) \wedge (\sim r) \underset{w}{=} (p \wedge (\sim r)) \vee (q \wedge (\sim r))$	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	nicht allgemeingültig

Eigenschaften der *Wahrheitsfunktionen* wurden im Teil A behandelt und zum größten Teil auch bewiesen. Eigenschaften der *Rechenoperationen* werden im Teil C explizit behandelt und auch bewiesen.

Wir werden nur an einem Beispiel zeigen, wie man diese Eigenschaften der **Mengenoperationen** beweisen und mit Hilfe von Venndiagrammen veranschaulichen kann.
Aus der Übersicht entnehmen wir, daß die Differenzbildung rechtsseitig distributiv bezüglich der Vereinigung ist (↗ Bild 149/1)



149/1

SATZ 1 (8.8.)
Für beliebige Mengen M_1, M_2 und M_3 gilt:
$(M_1 \cup M_2) \setminus M_3 = (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$.

Beweis:

Es ist die Gleichheit von Mengen zu beweisen.
Nach Satz 2 (7.4.) ist $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteqq B$ und $B \subseteqq A$ gilt.

(1) Wir zeigen, daß $(M_1 \cup M_2) \setminus M_3 \subseteqq (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$ gilt.
Es sei x ein beliebiges Element von $(M_1 \cup M_2) \setminus M_3$, d. h., $x \in (M_1 \cup M_2)$ und $x \notin M_3$ bzw. ($x \in M_1$ oder $x \in M_2$) und $x \notin M_3$.
Nach dem Schluß aus einer Alternative sind zwei Fälle einzeln zu betrachten.
Fall 1: Es sei $x \in M_1$ und $x \notin M_3$.
Dann ist $x \in (M_1 \setminus M_3)$, woraus wegen Definition 1 (8.4.) $x \in (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$ folgt.
Fall 2: Es sei $x \in M_2$ und $x \notin M_3$.
Dann ist $x \in (M_2 \setminus M_3)$, woraus wegen Definition 1 (8.4.) $x \in (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$ folgt.
Aus
$$x \in (M_1 \cup M_2) \setminus M_3 \rightarrow x \in (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$$
ergibt sich nach dem Schluß auf „für jedes" die Behauptung (1).

(2) Wir zeigen, daß auch $(M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3) \subseteqq (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$ gilt.
Es sei x ein beliebiges Element von $(M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3)$, d. h., $x \in (M_1 \setminus M_3)$ oder $x \in (M_2 \setminus M_3)$.

Auch hier sind nach dem Schluß aus einer Alternative zwei Fälle zu betrachten.

Fall 1: Es sei $x \in (M_1 \setminus M_3)$.
Dann ist $x \in M_1$ und $x \notin M_3$, woraus wegen Definition 1 (8.4.)
$x \in (M_1 \cup M_2)$ und $x \in M_3$, d. h.
$x \in (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$
folgt.

Fall 2: Es sei $x \in (M_2 \setminus M_3)$.
Dann ist $x \in M_2$ und $x \notin M_3$, woraus ebenfalls wegen Definition 1 (8.4.)
$x \in (M_1 \cup M_2)$ und $x \notin M_3$, d. h.
$x \in (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$
folgt.

Nach dem Schluß aus „für jedes" ergibt sich schließlich aus

$$x \in (M_1 \setminus M_3) \cup (M_2 \setminus M_3) \to x \in (M_1 \cup M_2) \setminus M_3$$

die Behauptung (2).

Aus (1) und (2) folgt nach Satz 2 (7.4.) die Richtigkeit des Satzes 1 (8.8.). q. e. d.

Wir empfehlen dem Leser, selbst weitere Eigenschaften der Mengenoperationen zu beweisen und durch Venndiagramme zu veranschaulichen.

8.9. Kontrollfragen

1. Wann bezeichnen wir zwei Untermengen einer Menge M als komplementäre Mengen in M?
2. Wie sind der Durchschnitt, die Vereinigung und die Differenz zweier Mengen M_1 und M_2 erklärt? Welche Beziehungen bestehen zwischen ihren erzeugenden Aussageformen und denen der Mengen M_1 und M_2?
3. Welche Analogien lassen sich zwischen Operationen mit Mengen und Beziehungen zwischen Begriffen aufzeigen?
4. Geben Sie analoge Eigenschaften für Wahrheitsfunktionen, Mengenoperationen und Rechenoperationen an!
5. Vergleichen Sie insbesondere die Distributivität der Konjunktion bezüglich der Alternative und umgekehrt, des Durchschnitts bezüglich der Vereinigung und umgekehrt, der Multiplikation bezüglich der Addition und umgekehrt hinsichtlich ihrer Gültigkeit miteinander!

9. Abbildungen

9.1. Das Kreuzprodukt

Das **Kreuzprodukt zweier Mengen** soll am Beispiel 1 (9.1.) erläutert werden.

BEISPIEL 1 (9.1.):
Zwei Schulklassen wollen einen Schachwettkampf durchführen. In der einen Klasse haben sich hierzu 7 Schüler und in der anderen Klasse 9 Schüler gemeldet. Es wird verabredet, daß jeder Schüler der einen Mannschaft gegen jeden Schüler der anderen Mannschaft zu spielen hat. Im Laufe des Wettkampfes, der sich natürlich über einen längeren Zeitraum zu erstrecken hat, sind somit 63 Spiele durchzuführen.
Die beiden Mannschaften stellen zwei Mengen A und B dar. Die Elemente von A werden mit $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ und die von B mit $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_9$ symbolisiert. Die 63 Paare von Spielern können wir dann folgendermaßen symbolisch schreiben.

A \ B	b_1	b_2	b_3	$\ldots$	b_9
a_1	$[a_1; b_1]$,	$[a_1; b_2]$,	$[a_1; b_3]$,	$\ldots$,	$[a_1; b_9]$
a_2	$[a_2; b_1]$,	$[a_2; b_2]$,	$[a_2; b_3]$,	$\ldots$,	$[a_2; b_9]$
a_3	$[a_3; b_1]$,	$[a_3; b_2]$,	$[a_3; b_3]$,	$\ldots$,	$[a_3; b_9]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_7	$[a_7; b_1]$,	$[a_7; b_2]$,	$[a_7; b_3]$,	$\ldots$,	$[a_7; b_9]$

Zu Beginn des Schachwettkampfes wird eine Tabelle ähnlicher Art angefertigt, in der die Plätze für die einzelnen Spielerpaare freigelassen werden. In das Kästchen eines Paares notiert man nach jedem Spiel das Ergebnis des Spieles. Es sei a ein beliebiger Spieler der Mannschaft A, b ein beliebiger Spieler der Mannschaft B. Wenn beim Spiel a gegen b der Spieler a gewonnen hat, trägt man in das Kästchen das Ergebnis 1:0 ein. Das Spiel a gegen b ging also 1:0 „für a“ aus. Hat Spieler a verloren, so trägt man in die Tabelle das Ergebnis 0:1 ein. Ging das Spiel unentschieden aus, so trägt man das Ergebnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$ ein. Beim Eintragen der

Ergebnisse in die Tabelle ist also die Reihenfolge der Elemente in der Paarung $[a; b]$ wichtig.

Wenn man die Ergebnisse in die Tabelle einträgt, stellt man sich eine Menge von Paaren vor, bei der in jedem Paar ein Element von A an der ersten Stelle und ein Element von B an der zweiten Stelle steht.
Paare dieser Art bezeichnen wir durch $[a; b]$ und nennen sie **geordnete Paare**.
Eine Paarbildung wie bei unserem Schachspiel kann im Prinzip stets bei zwei endlichen oder unendlichen Mengen vorgenommen werden. Die Menge aller geordneten Paare, die mit den Elementen aus einer Menge A und einer Menge B so gebildet werden können, daß an der ersten Stelle ein Element aus A und an der zweiten Stelle ein Element aus B steht, bezeichnet man nun als **Kreuzprodukt** oder **Kreuzmenge** der Mengen A und B. Man schreibt dafür $A \times B$ (gesprochen: „*A Kreuz B*").
Zu bemerken ist, daß A und B nicht voneinander verschieden zu sein brauchen, wie es im Beispiel 1 (9.1.) der Fall ist.

Wir betrachten dazu Beispiel 2 (9.1.), in dem eine Kreuzmenge $A \times A$ zu bilden ist.

BEISPIEL 2 (9.1.):
Gegeben sei die Menge A der Grundziffern 1, 2, 3.
Es sind alle zweistelligen Ziffern anzugeben, die mit diesen Grundziffern gebildet werden können. Hierbei ist der Fall der Wiederholung einer Grundziffer zugelassen.
Die betreffenden zweistelligen Ziffern können dem Beispiel 1 (9.1.) entsprechend mit Hilfe einer Tabelle gebildet werden.

A	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Die in der Tabelle enthaltenen Ziffern der gesuchten zweistelligen Ziffern kann man als Elemente eines Kreuzproduktes $A \times A$ auffassen.
Das geordnete Paar $[a; b]$ können wir nicht mit einer Zweiermenge $\{a, b\}$ gleichsetzen. Deshalb wird es in der Schreibweise von dieser Menge unterschieden.
In der Menge $\{a, b\}$ ist die Reihenfolge der Elemente nicht von Bedeutung. Es sind $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ einander gleich. Das geordnete Paar $[a; b]$ stimmt aber für $a \neq b$ nicht mit dem geordneten Paar $[b; a]$ überein.

Der polnische Mathematiker KURATOWSKI benutzte zur Definition des Begriffs „geordnetes Paar" den Mengenbegriff. Nach seiner Definition ist das geordnete Paar $[a; b]$ nichts anderes als die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. In dieser Menge 2. Stufe wird durch die Bildung der Einermenge $\{a\}$ das Element a aus A besonders hervorgehoben. Es ist dasjenige Element, das im geordneten Paar $[a; b]$ an der ersten Stelle steht. Dadurch wird eine gewisse „Bevorzugung" des Elementes $a \in A$ vor dem Element $b \in B$ zum Ausdruck gebracht.

DEFINITION 1 (9.1.) — **Geordnetes Paar**
Es sei a ein Element der Menge A und b ein Element der Menge B.

Die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ wird dann **geordnetes Paar** genannt und mit $[a; b]$ bezeichnet. a, b heißen die **Elemente** oder **Glieder** des **geordneten Paares** $[a; b]$.
Symbolisiert: $[a; b] =_{\text{Def}} \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Sind a und b Elemente von Mengen 1. Stufe, so ist das geordnete Paar $[a; b]$ eine Menge 2. Stufe.

DEFINITION 2 (9.1.) — **Kreuzprodukt**
Es sei a ein Element der Menge A und b ein Element der Menge B.
Die Menge aller geordneten Paare $[a; b]$ wird dann **Kreuzprodukt** oder **Kreuzmenge** der Mengen A und B genannt und mit $A \times B$ bezeichnet.
Symbolisiert: $A \times B =_{\text{Def}} \{[a; b]; a \in A \wedge b \in B\}$

Ergänzung: $A \times \emptyset =_{\text{Def}} \emptyset$; $\emptyset \times A =_{\text{Def}} \emptyset$
Hieraus folgt: Insbesondere ist $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Bemerkung:
Wir verzichten auf die Unterscheidung von leeren Mengen verschiedener Stufen.
Für $A \times A$ wird auch A^2 geschrieben. Sind A und B Mengen 1. Stufe, so ist das Kreuzprodukt $A \times B$ eine Menge 3. Stufe.

SATZ 1 (9.1.)
Zwei geordnete Paare $[a; b]$ und $[c; d]$ sind genau dann einander gleich, wenn $c = a$ und $d = b$ ist.
Symbolisiert: $[a; b] = [c; d] \leftrightarrow c = a \wedge d = b$

Auf einen *Beweis* des Satzes 1 (9.1.) soll hier verzichtet werden. Man kann ihn unter Benutzung der Definition von KURATOWSKI führen.

Aus Satz 1 (9.1.) folgt:

1. $[a; b] = [b; a] \leftrightarrow a = b$.
2. Bei der Bildung des Kreuzproduktes aus zwei Mengen A und B gilt nicht das Kommutativgesetz. Im allgemeinen ist $A \times B$ ungleich $B \times A$ (↗ Beispiel 4 (9.1.)).

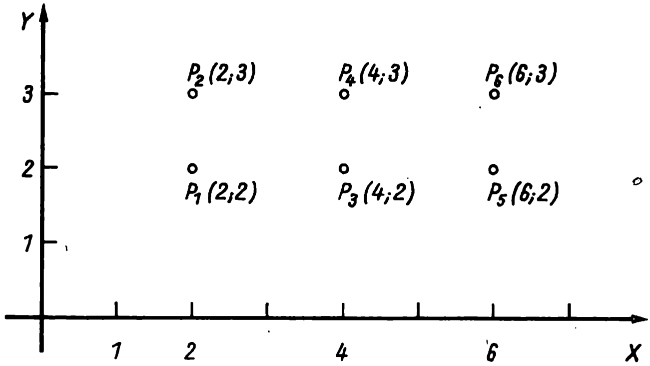
BEISPIEL 3 (9.1.):
Mit Hilfe des Kreuzproduktes kann man die Multiplikation natürlicher Zahlen definieren. Das Produkt von 2 und 3 definiert man hierbei wie folgt:
A sei eine beliebige Menge mit zwei Elementen und B eine beliebige Menge mit drei Elementen. Als Produkt von 2 und 3 definiert man die Anzahl der Elemente des Kreuzproduktes $A \times B$.

Beispiel 3 (9.1.) zeigt, daß man die Multiplikation der natürlichen Zahlen nicht nur als eine wiederholte Addition auffassen kann. Daß man die Multiplikation auch über die Bildung eines Kreuzproduktes definieren kann, wird im Unterricht der 1. Klasse beim Rechnen von Aufgaben der folgenden Art berücksichtigt.

Helga hat drei Röcke und vier Blusen. Wie viele Möglichkeiten hat sie, sich verschiedenartig anzuziehen?

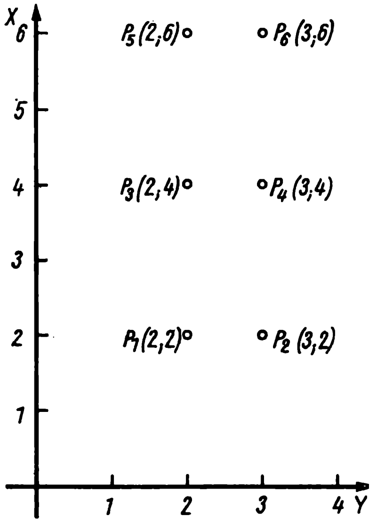
BEISPIEL 4 (9.1.):
Gegeben seien zwei Mengen X und Y. X enthalte die Elemente 2, 4, 6 und Y die Elemente 2 und 3.

$$X \times Y = \{[2;2], [2;3], [4;2], [4;3], [6;2], [6;3]\}$$
$$Y \times X = \{[2;2], [2;4], [2;6], [3;2], [3;4], [3;6]\}$$



154/1

Die Elemente des Kreuzproduktes $X \times Y$ bzw. $Y \times X$ kann man als sechs Punkte in einem Koordinatensystem darstellen (↗ Bilder 154/1 und 154/2). Die Glieder eines jeden Paares entsprechen dann den Koordinaten eines Punktes. X enthält die Abszissen und Y die Ordinaten der Punkte.



154/2

Die Menge der sechs Punkte im Koordinatensystem wird eine **graphische Darstellung des Kreuzproduktes $X \times Y$** genannt.

In Fortsetzung dieses Gedankens können wir die Menge der Punkte der Ebene im Koordinatensystem als graphische Darstellung von $P \times P$, der Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen, auffassen. (P ist die Menge der reellen Zahlen.)

BEISPIEL 5 (9.1.):
Wir stellen uns unter A die Menge der Grundziffern der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ vor. B sei gleich $A \cup \{0\}$.
$A \times B$ können wir als Menge der Ziffern aller zweistelligen natürlichen Zahlen deuten.
Die Ziffern der dreistelligen natürlichen Zahlen können wir uns als Elemente eines zweiten Kreuzproduktes $(A \times B) \times B$ vorstellen. Dieses Kreuzprodukt besteht aus allen geordneten Paaren $[\alpha; c]$, für die α ein Element aus $A \times B$, also selbst ein geordnetes Paar ist, und c ein Element aus B ist.
$[[3; 1]; 6]$ ist z. B. ein Element aus $(A \times B) \times B$. Bei diesem Element, das wir als Ziffer der dreistelligen Zahl 316 deuten können, ist natürlich auch die Reihenfolge der Grundziffern, dem dekadischen Positionssystem entsprechend, von Bedeutung.

Im allgemeinen läßt man bei einem Paar $[[a; b]; c]$ im Innern die Klammern weg, schreibt es als $[a; b; c]$ und bezeichnet es als **geordnetes Tripel**.

DEFINITION 3 (9.1.) — **Geordnetes Tripel**
Es sei a ein Element der Menge A, b ein Element der Menge B und c ein Element der Menge C.
Das geordnete Paar $[[a; b]; c]$ wird dann **geordnetes Tripel (3-Tupel)** genannt und mit $[a; b; c]$ bezeichnet.
Symbolisiert: $[a; b; c] =_{\text{Def}} [[a; b]; c]$

DEFINITION 4 (9.1.) — **Menge aller geordneten Tripel**
Es sei a ein Element der Menge A, b ein Element der Menge B und c ein Element der Menge C.
Die Menge $(A \times B) \times C$ wird dann **Menge aller geordneten Tripel** $[a; b; c]$ genannt und mit $A \times B \times C$ bezeichnet.
Symbolisiert:
$A \times B \times C =_{\text{Def}} \{[a; b; c]; a \in A \land b \in B \land c \in C\}$

Erwähnt sei an dieser Stelle, daß das Assoziativgesetz für die Bildung des Kreuzproduktes nicht gilt. $(A \times B) \times C$ und $A \times (B \times C)$ stimmen im allgemeinen nur in der Anzahl ihrer Elemente überein und sind nicht gleich.

Für $A \times A \times A$ wird auch A^3 geschrieben. Der Begriff des geordneten Tripels oder 3-Tupels kann entsprechend bis zum Begriff des **n-Tupels** erweitert werden.

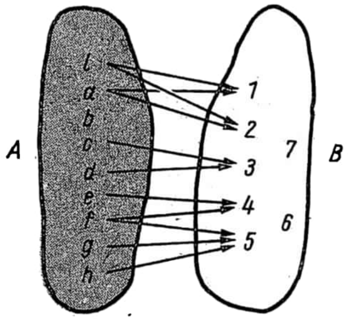
BEISPIEL 6 (9.1.)
Bei der Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen und anderer Zahlenbereiche ist die Bildung von Kreuzprodukten von besonderer Wichtigkeit.
Die Menge aller Brüche zum Beispiel kann man als Menge $N \times (N \setminus \{0\})$ auffassen (↗ Teil C 12.). (N ist die Menge der natürlichen Zahlen.)

BEISPIEL 7 (9.1.):
$P \times P \times P$ kann man sich als Punkte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem vorstellen. Zu jedem geordneten Tripel $[x; y; z]$ mit $x, y, z \in P$ gehört genau ein Punkt mit den Koordinaten $(x; y; z)$. Zu jedem Punkt im räumlichen Koordinatensystem gehört genau ein Tripel. Für diesen Sachverhalt sagt man auch:
Jedem Element von $P \times P \times P$ ist eineindeutig (oder umkehrbar eindeutig) ein Punkt des Raumes zugeordnet; oder
Die Menge $P \times P \times P$ ist eineindeutig auf die Menge der Punkte des Raumes abgebildet.

9.2. Der Abbildungsbegriff

Von besonderer Bedeutung ist in der Mathematik der Begriff „Funktion“. Der Begriff „Funktion“ baut auf dem Begriff „Abbildung“ oder ausführlicher auf dem Begriff der **Abbildung *aus* einer Menge *in* eine Menge** auf.

BEISPIEL 1 (9.2.):
Eine Gruppe von Pionieren führt eine Touristenwanderung durch. Ein Pionierleiter ist mit acht Pionieren wegen der hereinbrechenden Nacht vorausgefahren, um die Zelte aufzubauen. Mitgeführt werden Zelte verschiedener Größe.
A sei die Menge der vorausgefahrenen Pioniere einschließlich Pionierleiter und B die Menge der Zelte. Die Elemente von A werden mit l, a, b, c, d, e, f, g, h und die von B mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 symbolisiert.
Am Zeltplatz angekommen, trifft der Pionierleiter folgende Anordnung:
„Pionier a baut mit mir zuerst Zelt 1 und dann Zelt 2 auf, b repariert sein Fahrrad, c und d bauen Zelt 3 auf, e und f haben Zelt 4 aufzubauen. Sind e und f fertig, so hilft f den Pionieren g und h beim Aufbau von Zelt 5 und e errichtet eine Feuerstelle. Die Zelte 6 und 7 sind vom nachfolgenden Teil der Gruppe aufzubauen.“
Die Anordnung des Pionierleiter kann man wie im Bild 156/1 mit Hilfe von Pfeilen veranschaulichen.



156/1

Die Anordnung des Pionierleiters legt eine **Paarbildung** fest. Es sind bestimmte Elemente aus A mit bestimmten Elementen aus B zu paaren. Dafür sagt man auch: „Bestimmten Elementen aus A sind bestimmte Elemente aus B **zuzuordnen.**“
Die Anordnung des Pionierleiters zum Aufbau der Zelte wird als **Zuordnungsvorschrift** bezeichnet. Sie führt auf die folgende Menge von geordneten Paaren.

$$F = \{[l; 1], [l; 2], [a; 1], [a; 2], [c; 3], [d; 3], [e; 4], [f; 4], [f; 5], [g; 5], [h; 5]\}$$

Die durch die Zuordnungsvorschrift des Pionierleiters aus A und B gebildete Menge F ist Teilmenge von $A \times B$ und wird als „Abbildung aus A in B“ bezeichnet.

DEFINITION 1 (9.2.) — **Abbildung *aus A in B***
Es seien A und B beliebige Mengen.
Dann wird jede Teilmenge F des Kreuzproduktes $A \times B$

eine **Abbildung *aus* der Menge *A* *in* die Menge *B*** genannt.
Symbolisiert: F Abbildung aus A in $B =_{\text{Def}} F \subseteq A \times B$

A und B können auch einander gleich sein. Zum Beispiel hätte der Pionierleiter die Pioniere in Reihe zu zwei Gliedern antreten lassen können. Zwei Pioniere, die nebeneinander stehen, bilden dann ein Paar. Alle Paare stellen eine Teilmenge von $A \times A$ dar, die **Abbildung *aus* A *in* sich** genannt wird.

Der Begriff Abbildung kommt auch in der Geometrie vor. In der darstellenden Geometrie zum Beispiel werden Körper in die Zeichenebene abgebildet. Hierbei werden Punkten von dreidimensionalen Gebilden Punkte auf dem Zeichenpapier zugeordnet.

Im täglichen Sprachgebrauch wird das Wort „Abbildung" in ähnlicher Weise benutzt. Ein Objekt (Stadion), das auf dem Bildschirm unseres Fernsehapparates abgebildet wird, können wir uns aus Punkten (Urbildern) zusammengesetzt denken. Zu jedem Punkt des Objektes gehört ein bestimmter Bildpunkt auf dem Schirm. Dabei findet wie bei einer „Abbildung" eine Bildung von Paaren statt.

Die mengentheoretische Definition legt den Gebrauch des Begriffes „Abbildung" in der Mathematik fest.

Nachfolgend werden einige Begriffe definiert, auf die zum Teil bereits hingewiesen wurde und die zur Unterscheidung spezieller Abbildungen von Wichtigkeit sind.

DEFINITION 2 (9.2.) — **Bild, Urbild**
F sei eine Abbildung aus A in B.
Ist $[a; b] \in F$, so heißt b ein **Bild von a** bei der Abbildung F und a ein **Urbild von b** bei der Abbildung F.

BEISPIEL 2 (9.2.):
Im Beispiel 1 (9.2.) ist 1 ein Bild von l und a; l und a sind Urbilder von 1.

DEFINITION 3 (9.2.) — **Vorbereich, Nachbereich**
Es sei $F \subseteq A \times B$.
Die Menge aller Elemente aus A, die in F mit mindestens einem Element von B gepaart sind, heißt der **Vorbereich** (Vb) der Abbildung.
Die Menge aller Elemente von B, die in F mit mindestens einem Element von A gepaart sind, heißt der **Nachbereich** (Nb) der Abbildung.
Symbolisiert:
$\mathrm{Vb}(F) =_{\text{Def}} \{a \in A; \exists\, b\,(b \in B \wedge [a; b] \in F)\}$
$\mathrm{Nb}(F) =_{\text{Def}} \{b \in B; \exists\, a\,(a \in A \wedge [a; b] \in F)\}$

BEISPIEL 3 (9.2.):
Für Beispiel 1 (9.2.) gilt:

Vb(F) = {l, a, c, d, e, f, g, h} (b hatte sein Fahrrad zu reparieren.)
Nb(F) = {1, 2, 3, 4, 5} (Die Zelte 6, 7 wurden vom nachfolgenden Teil der Gruppe aufgebaut.)

Der Vorbereich einer Abbildung aus A in B ist stets eine Teilmenge von A und der Nachbereich eine Teilmenge von B.

9.3. Spezielle Abbildungen

Die Menge aller Abbildungen aus A in B können wir in Abhängigkeit davon, welche Beziehungen zwischen Vorbereich und A und welche zwischen Nachbereich und B bestehen, in verschiedene Teilmengen zerlegen. Wenn der Pionier b im Beispiel 1 (9.2.) sich auch am Zeltaufbau beteiligt hätte, so wäre der Vorbereich gleich der Menge A.
Eine solche Abbildung aus A in B wird dann speziell **Abbildung *von A in B*** genannt.
Wenn alle Zelte der Menge B von den Pionieren der Menge A einschließlich Pionierleiter aufzubauen sind, so ist der Nachbereich gleich der Menge B.
Man nennt dann diese Abbildung aus A in B auch **Abbildung *aus A auf B***.
Sollten sogar beide jetzt formulierten Zusatzbedingungen gleichzeitig zutreffen, das heißt, **alle Pioniere** der Menge A haben sich einschließlich Pionierleiter am Aufbau **aller Zelte** der Menge B zu beteiligen, so heißt die entsprechende Abbildung aus A in B auch **Abbildung *von A auf B***.

DEFINITION 1 (9.3.) — **Abbildung *von A*,**
Abbildung *auf B*

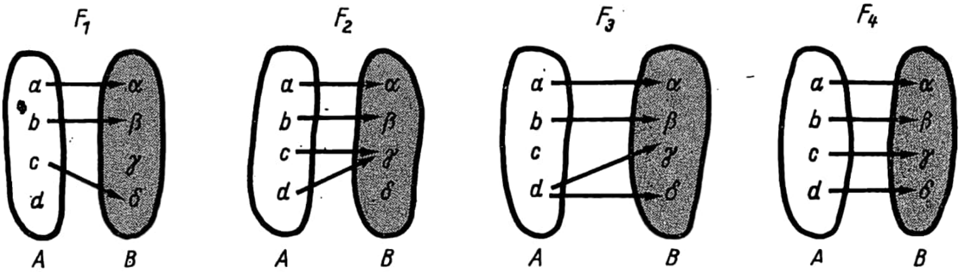
F sei eine Abbildung aus A in B.

Ist der Vorbereich von F gleich A, so heißt F eine **Abbildung *von A in B***.

Ist der Nachbereich von F gleich B, so heißt F eine **Abbildung *aus A auf B***.

Ist der Vorbereich von F gleich A und der Nachbereich von F gleich B, so heißt F eine **Abbildung *von A auf B***.

BEISPIEL 1 (9.3.):
Veranschaulichung wie im Bild 158/1 mit Hilfe von Pfeildiagrammen



158/1

$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

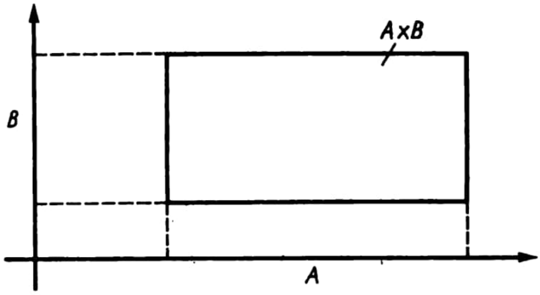
$F_1 = \{[a;\alpha], [b;\beta], [c;\delta]\}$ Abbildung *aus A in B* (nicht „von A" und nicht „auf B")

$F_2 = \{[a;\alpha], [b;\beta], [c;\gamma], [d;\gamma]\}$ Abbildung *von A in B* (nicht „auf B")

$F_3 = \{[a;\alpha], [b;\beta], [d;\gamma], [d;\delta]\}$ Abbildung *aus A auf B* (nicht „von A")

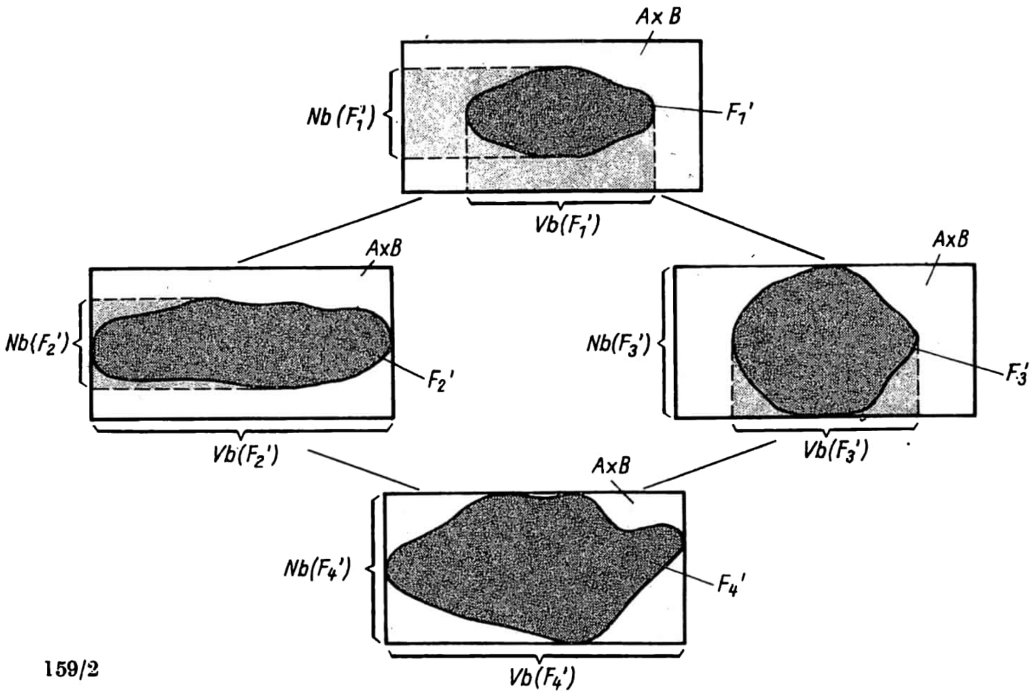
$F_4 = \{[a;\alpha], [b;\beta], [c;\gamma], [d;\delta]\}$ Abbildung *von A auf B*

Da A und B auch unendliche Mengen sein können, ist es möglich, sich $A \times B$ nach Beispiel 4 (9.1.) wie im Bild 159/1 zu veranschaulichen.



159/1

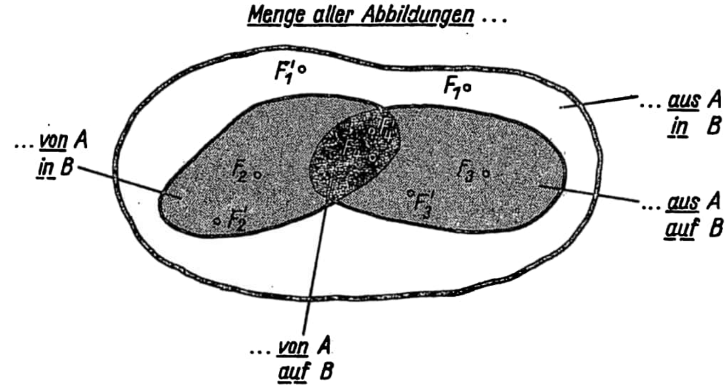
Die nach Definition 1 (9.3.) unterschiedenen speziellen Abbildungen werden dann mit Hilfe der im Bild 159/2 dargestellten Diagramme veranschaulicht.



159/2

F'_1 — Abbildung *aus* A *in* B
F'_2 — Abbildung *von* A *in* B
F'_3 — Abbildung *aus* A *auf* B
F'_4 — Abbildung *von* A *auf* B

Durch die in der Definition 1 (9.3.) vorgenommene Unterscheidung spezieller Abbildungen zerfällt die Menge aller Abbildungen in verschiedene Teilmengen. Der Zusammenhang zwischen ihnen wird über das Venndiagramm im Bild 160/1



160/1

deutlich. Dieses zeigt auch, wie die in der Definition 1 (9.3.) definierten Begriffe subordiniert sind (↗ B 7.6. „Subordination von Begriffen").

In den folgenden Ausführungen unterscheiden wir die **Abbildungen aus einer Menge A in eine Menge B** danach, ob die Elemente des einen Bereiches jeweils mit *genau einem* Element oder mit *mehreren* Elementen des anderen Bereiches gepaart sind.

Wir stellen uns wieder im Beispiel 1 (9.2.) eine veränderte Anordnung des Pionierleiters (Zuordnungsvorschrift) vor. Jeder, der beim Aufstellen der Zelte mitzuarbeiten hat, soll nun genau ein Zelt allein oder mit anderen gemeinsam aufbauen. In diesem Falle ist die Abbildung F, wir können sie uns gegebenenfalls auch wieder als eine Menge von Paaren notieren, so beschaffen, daß zu jedem Element des Vorbereichs genau ein Element des Nachbereichs gehört. Eine solche Abbildung wird als **nacheindeutig** oder kurz **eindeutig** bezeichnet.

Jetzt stellen wir uns vor, daß an jedem Zelt, das überhaupt aufgestellt werden soll, genau eine Person zu arbeiten hat. Es bleibt hierbei offen, ob ein Pionier oder der Pionierleiter mehrere Zelte aufbauen oder nicht. Es ist auch nicht nötig zu wissen, ob alle am Zeltaufbau sich beteiligen und ob jedes Zelt aufgebaut wird. Zu jedem Element des Nachbereichs gehört bei dieser Abbildung genau ein Element des Vorbereichs. Diese Abbildung wird als **voreindeutig** bezeichnet.

Ist die Anordnung des Pionierleiters so vorgenommen worden, daß jede mitarbeitende Person genau ein Zelt aufzustellen hat und jedes aufzustellende Zelt immer nur von genau einer Person aufgebaut wird, dann bezeichnet man die vorliegende Abbildung als **eineindeutig** oder **umkehrbar eindeutig**. In diesem Fall gehört zu jedem Element des Vorbereichs genau ein Element des Nachbereichs und zu jedem Element des Nachbereichs genau ein Element des Vorbereichs.

DEFINITION 2 (9.3.) — **Nacheindeutige bzw. eindeutige Abbildung**

Eine Abbildung F heißt **nacheindeutig** oder **eindeutig** genau dann, wenn aus $[a; b_1] \in F$ und $[a; b_2] \in F$ stets $b_1 \doteq b_2$ folgt.

DEFINITION 3 (9.3.) — **Voreindeutige Abbildung**

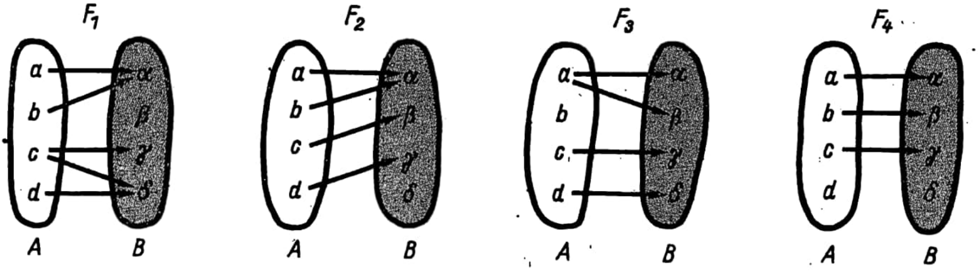
Eine Abbildung F heißt **voreindeutig** genau dann, wenn aus $[a_1; b] \in F$ und $[a_2; b] \in F$ stets $a_1 = a_2$ folgt.

DEFINITION 4 (9.3.) — Eineindeutige Abbildung
Eine Abbildung F, die sowohl nacheindeutig als auch voreindeutig ist, nennt man **eineindeutig** oder **umkehrbar eindeutig**.

BEISPIEL 2 (9.3.):
Veranschaulichung wie im Bild 161/1 mit Hilfe von Pfeildiagrammen

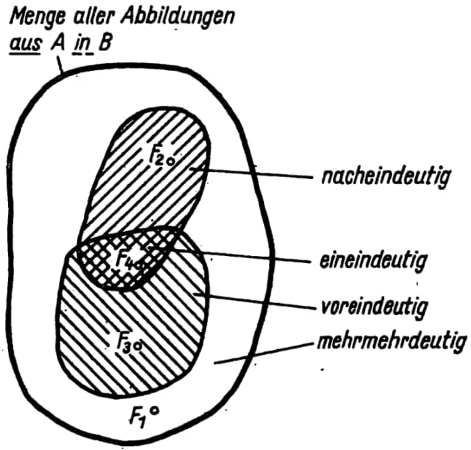
$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$F_1 = \{[a;\alpha], [b;\alpha], [c;\gamma], [c;\delta], [d;\delta]\}$	Nicht nacheindeutig und nicht voreindeutig, mehrmehrdeutig
$F_2 = \{[a;\alpha], [b;\alpha], [c;\beta], [d;\gamma]\}$	Nacheindeutig, aber nicht voreindeutig
$F_3 = \{[a;\alpha], [a;\beta], [c;\gamma], [d;\delta]\}$	Nicht nacheindeutig, aber voreindeutig
$F_4 = \{[a;\alpha], [b;\beta], [c;\gamma]\}$	Eineindeutig



161/1

Durch die in den Definitionen 2 (9.3.) bis 4 (9.3.) vorgenommene Unterscheidung zerfällt die Menge aller Abbildungen aus A in B ebenfalls in Teilmengen. Die Beziehungen zwischen ihnen werden über das Venndiagramm im Bild 161/2 deutlich.
Der Begriff der Abbildung ist auch in der Philosophie von Bedeutung. Die Abbild- oder Widerspiegelungstheorie ist das Kernstück der marxistisch-leninistischen



161/2

Erkenntnistheorie. Nach ihr ist die Erkenntnis eine Abbildung oder Widerspiegelung der objektiven Realität im menschlichen Bewußtsein. Dingen, Eigenschaften, Sachverhalten usw. aus der objektiven Realität (Urbilder) werden in einem Widerspiegelungsprozeß Empfindungen, Wahrnehmungen, Begriffe, Aussagen usw. (Bilder oder Abbilder) zugeordnet.
Die Abbilder der objektiven Realität werden zur Grundlage unseres Handelns und geben uns die Möglichkeit, auf unsere Umwelt zielstrebig einzuwirken. Im Prozeß der Auseinandersetzung mit der Umwelt werden unsere Abbilder von der objektiven Realität bestätigt oder Veränderungen unterworfen.

Gewisse Seiten des Erkenntnisprozesses sind unter Benutzung der im Teil B definierten mathematischen Begriffe erklärbar.
M sei die Menge der Dinge, Eigenschaften, Sachverhalte usw. aus der objektiven Realität.
M' sei die Menge der Gedanken, Begriffe, Aussagen, Systeme von Aussagen (Theorien) usw. im menschlichen Bewußtsein.
Das Resultat des Erkenntnisprozesses ist im mathematischen Sinn eine Abbildung *aus* M *in* M' (nicht „von M auf M'"). Es entspricht hierbei nicht jedem Element der Menge M ein Element von M'. Es ist auch nicht jedes Element von M' mit einem Element von M gepaart. Die Menge der Gedanken, Theorien usw. ist umfassender als die Menge der Abbilder. Für manche mathematische Theorie hat man erst nach ihrer Entwicklung ein Urbild in der objektiven Realität gefunden (z. B. für die nichteuklidischen Geometrien).

9.4. Funktionen

Von besonderer Bedeutung sind in der Mathematik die **eindeutigen Abbildungen.** Sie werden **Funktionen** genannt.

DEFINITION 1 (9.4.) — **Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, Argument, Funktionswert**

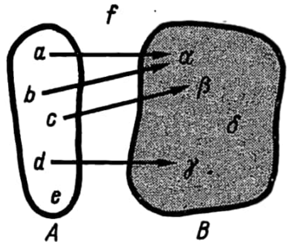
Jede eindeutige Abbildung f heißt **Funktion.**
Der Vorbereich von f heißt **Definitionsbereich** X, der Nachbereich von f heißt **Wertebereich** Y.
Die Elemente des Definitionsbereiches heißen **Argumente** und die Elemente des Wertebereiches **Funktionswerte** der Funktion f.

Ist $[a; b]$ ein Element aus f, so schreibt man dafür auch:

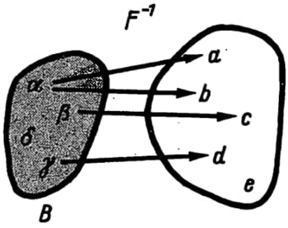
$$[a; f(a)] \quad \text{oder} \quad b = f(a)\,.$$

$b = f(a)$ wird gelesen als „b gleich f von a", b ist der Funktionswert von f an der Stelle a.

BEISPIEL 1 (9.4.):
$A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
$F = \{[a; \alpha], [b; \alpha], [c; \beta], [d; \gamma]\}$ ist eine eindeutige Abbildung *aus* A *in* B und somit eine Funktion f. Wir können sie mit Hilfe eines Pfeildiagrammes wie im Bild 163/1 veranschaulichen.



163/1



163/2

Definitionsbereich von f: $X = \{a, b, c, d\}$
Wertebereich von f: $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
Also: $f(a) = \alpha,\; f(b) = \alpha,\; f(c) = \beta,\; f(d) = \gamma$

Bezeichnet man den Definitionsbereich einer Funktion mit X, den Wertebereich mit Y, so ist f eine eindeutige Abbildung *von X auf Y*.
f kann aber als beliebige eindeutige Abbildung *aus A in B* eine Funktion *aus A in B*, wie im Beispiel 1 (9.4.), oder speziell eine Funktion *von A in B, aus A auf B* oder *von A auf B* sein.

Die Definition des Begriffes „Funktion" hat in der Vergangenheit gewisse Wandlungen erfahren. Die mengentheoretische Definition 1 (9.4.) ist eine Weiterentwicklung der von DIRICHLET (1805—1895) gegebenen Definition. DIRICHLET war der Nachfolger von GAUSS an der Universität in Göttingen. Das Zeichen „$f(a)$" wurde erstmalig von EULER (1707—1783) benutzt.

Wir wollen vom Beispiel 1 (9.4.) ausgehend zu einer neuen Abbildung kommen. Hierzu vertauschen wir in den Paaren von F alle Elemente von A mit denen von B. Die so erhaltene Abbildung bezeichnen wir mit F^{-1}.

$$F^{-1} = \{[\alpha; a], [\alpha; b], [\beta; c], [\gamma; d]\}$$

F^{-1} können wir uns mit Hilfe eines Pfeildiagrammes wie im Bild 163/2 veranschaulichen.

$$\mathrm{Vb}(F^{-1}) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \;; \qquad \mathrm{Nb}(F^{-1}) = \{a, b, c, d\}$$

F^{-1} stellt also eine Abbildung *aus B in A* dar und wird als **inverse Abbildung** oder **Umkehrabbildung** von F bezeichnet. Vorbereich und Nachbereich haben ihre Rollen miteinander vertauscht.

DEFINITION 2 (9.4.) — **Inverse Abbildung, Umkehrabbildung**
F sei eine Abbildung *aus A in B*.
Dann wird die Menge aller geordneten Paare $[b; a]$ aus $B \times A$, für die $[a; b]$ ein Element aus F ist, **inverse Abbildung F^{-1}** oder **Umkehrabbildung von F** genannt.
Symbolisiert:
F^{-1} Umkehrabbildung von $F =_{\mathrm{Def}} \{[b; a]; [a; b] \in F\}$

Die Umkehrabbildung F^{-1} von F aus Beispiel 1 (9.4.) ist *keine* eindeutige Abbildung und somit *keine* Funktion.
Ist das jedoch der Fall, z. B. bei der Funktion

$$f = \{[a; \alpha], [b; \beta], [c; \gamma]\} \;,$$

so nennen wir f **umkehrbar** und f^{-1} **Umkehrfunktion von** f oder **inverse Funktion von** f.

DEFINITION 3 (9.4.) — **Inverse Funktion, Umkehrfunktion**
Es sei f eine Funktion, deren inverse Abbildung ebenfalls eine Funktion ist.
Dann wird diese die zu f **inverse Funktion** oder **die Umkehrfunktion** von f genannt und mit f^{-1} bezeichnet.

Der Definitionsbereich der inversen Funktion f^{-1} stimmt mit dem Wertebereich von f überein. Der Wertebereich von f^{-1} ist gleich dem Definitionsbereich von f.
f ist umkehrbar genau dann, wenn f eine **eineindeutige Abbildung** ist.

BEISPIEL 2 (9.4.):
$A = \{a, b, c, d\} = B$
$f = \{[a; b], [b; c], [c; d], [d; a]\}$ ist eine eineindeutige Abbildung *von A auf sich.*
f bezeichnen wir auch als eine **Permutation (permutare: vertauschen** — lat.) der Menge A. Für unsere Menge A existieren $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ (gelesen: „vier Fakultät") verschiedene Permutationen. Hierzu gehört auch die Permutation $f_0 = \{[a; a], [b; b], [c; c], [d; d]\}$. f_0 wird als **identische Abbildung** von A bezeichnet.

Wenn man bei einer Permutation die Paare in den geschweiften Klammern vertauscht, bekommt man nach der Definition der Gleichheit von Mengen keine andere Permutation oder Abbildung von A auf sich. Die Auffassung von der Gleichheit von Mengen gilt also auch für Funktionen, die Mengen von geordneten Paaren darstellen.

BEISPIEL 3 (9.4.):
A sei die Menge der natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 sind.
Es ist die Abbildung F aus A in sich anzugeben, deren Paare $[a; b]$ die Gleichung $b = 2a + 1$ erfüllen.
Die Ermittlung von F geschieht am besten mit Hilfe einer Wertetabelle.

a	0	1	2	3	4	5
$b = 2a + 1$	1	3	5	7	9	—

Ist $a > 4$, so erhält man für $b = 2a + 1$ keine Elemente von A.
Somit gilt für F:

$$F = \{[0; 1], [1; 3], [2; 5], [3; 7], [4; 9]\}.$$

Der Vorbereich von F ist die Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, der Nachbereich die Menge $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
Da jedem Element des Vorbereichs genau ein Element des Nachbereichs zugeordnet ist, ist F eine **Funktion** f. Nach Definition 1 (9.4.) wird der Vorbereich von f **Definitionsbereich** X und der Nachbereich **Wertebereich** Y genannt. Eine Variable, die durch Elemente des Definitionsbereichs einer Funktion ersetzt werden kann, wird häufig auch mit „x" symbolisiert und **unabhängige Variable** genannt. Die

Variable für die Elemente des Wertebereichs symbolisiert man dann mit „y“ und nennt sie **abhängige Variable**. Somit können wir f wie folgt schreiben.

$$f = \{[x; y] \in X \times Y;\ y = 2x + 1\}$$

$y = 2x + 1$ wird auch **Funktionsgleichung von f** genannt.

Eine Funktionsgleichung einer Funktion f wird allgemein mit

$y = f(x)$ (gelesen: „y ist gleich f von x“)

symbolisiert. Da sie angibt, wie den Elementen des Definitionsbereiches die Elemente des Wertebereiches zuzuordnen sind, nennt man sie die durch f vermittelte **Zuordnungsvorschrift** oder **Abbildungsvorschrift**. Abbildungsvorschriften können durch *umgangssprachliche Formulierungen*, *Tabellen* oder *graphische Darstellungen* gegeben sein.
Funktionen, deren Zuordnungsvorschrift eine *Funktionsgleichung* ist, lassen sich folgendermaßen symbolisieren.

$$f = \{[x; y] \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

Es hat sich in der Mathematik eingebürgert, nur von der **Funktion $y = f(x)$** zu sprechen, wenn man den Definitionsbereich einer Funktion als bekannt voraussetzen kann.

Erwähnt sei ferner, daß nicht jede Gleichung, in der zwei Variable vorkommen, eine Funktionsgleichung ist. Beispielsweise wird $x^2 + y^2 = 5$ durch die Paare $[+1; +2]$ und $[+1; -2]$ erfüllt. Durch die Gleichung werden der Zahl 1 die Zahlen $+2$ und -2 zugeordnet. Die Gleichung ist über dem Grundbereich $P \times P$ nicht Zuordnungsvorschrift einer eindeutigen Abbildung und somit keine Funktionsgleichung.

Eine Gleichung mit zwei Variablen ist genau dann eine Funktionsgleichung, wenn ihre Lösungsmenge eine Funktion ist.

BEISPIEL 4 (9.4.):
Wird in der 1. Klasse die Addition eingeführt, so sind die Schüler zuerst mit dem Addieren im Bereich der natürlichen Zahlen bis 10 vertraut zu machen. Sie haben zu lernen, wie man die Werte der Terme $a + b$ mit $a, b \in N$ und $a + b \leqq 10$ berechnet.
Diese Aufgaben führen auf eine eindeutige Abbildung *aus* $N \times N$ *in* N, somit auf eine Funktion *aus* $N \times N$ *in* N. Diese Funktion enthält unter anderem die Tripel $[[2; 3]; 5]$, $[[6; 4]; 10]$. Allgemein kann man sie als

$$f = \{[a; b; c] \in N^3;\ a + b = c \wedge c \leqq 10\}$$

schreiben.

f wird **zweistellige Funktion** genannt. Der Begriff „Funktion“ kann auch auf **n-stellige Funktionen** erweitert werden.

BEISPIEL 5 (9.4.):
$\mathfrak{A}$ sei die Menge aller Aussagen. Aus zwei Aussagen $A, B \in \mathfrak{A}$ kann man mit Hilfe der Wörter „und“, „oder“, „wenn — so“, „genau dann — wenn“ usw. eine Aussagenverbindung, eine neue Aussage, bilden. Zwei Elementen aus $\mathfrak{A}$ wird hierbei ein drittes Element von $\mathfrak{A}$ eindeutig zugeordnet. Die eindeutige Abbildung *von* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}$, die alle Paare $[[A; B]; A \text{ und } B]$ enthält, wird **Konjunktion** genannt. Die Konjunktion ist somit eine **zweistellige Aussagenfunktion**. Man kann sie wie folgt allgemein symbolisieren.

$$\{[[A; B]; A \textit{ und } B] \in (\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}) \times \mathfrak{A}\}$$

Allgemein versteht man unter einer zweistelligen Aussagenfunktion eine eindeutige Abbildung *von* $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ *in* $\mathfrak{A}$. Eine solche Abbildung wird auch als **zweistellige Operation in $\mathfrak{A}$** bezeichnet (↗ B 10.7. „Operationen und ihre Eigenschaften").

Entsprechend der Konjunktion können die übrigen klassischen zweistelligen Aussagenfunktionen (**Alternative, Implikation, Äquivalenz**) definiert werden (↗ A 3.).

Eine einstellige Aussagenfunktion ist die **Negation** (↗ A 3.). Sie kann allgemein als

$$\{[A\,;\text{nicht } A]\,;\, A \in \mathfrak{A}\}$$

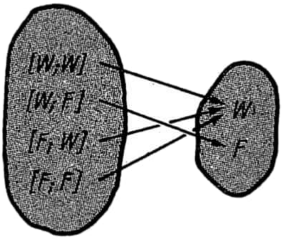
symbolisiert werden.
Jede Aussage besitzt in der klassischen zweiwertigen Logik entweder den Wahrheitswert W oder den Wahrheitswert F. Die Menge aller Aussagen kann man also eindeutig auf die Menge der Wahrheitswerte $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$ abbilden.
Mit welchem Wahrheitswert eine Aussage A zu paaren ist, hängt vom Sachverhalt ab, den diese Aussage widerspiegelt.
Welcher Wahrheitswert dem Funktionswert einer Aussagenfunktion zuzuordnen ist, legt in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen die zugehörige Wahrheitsfunktion fest.

Die **Wahrheitsfunktionen** der zweistelligen klassischen Aussagenfunktionen sind eindeutige Abbildungen *von* $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\} \times \{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$ *in* $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$, also wieder zweistellige Funktionen. Es gibt $2^4 = 16$ zweistellige Wahrheitsfunktionen und $2^2 = 4$ einstellige Wahrheitsfunktionen.

Die der **Konjunktion entsprechende Wahrheitsfunktion** wird **et-Funktion** genannt. Sie kann mit Hilfe einer Tabelle oder als Menge $f_\wedge$ wie folgt direkt angegeben werden.

$$f_\wedge = \{[[\mathrm{W}\,;\,\mathrm{W}]\,;\,\mathrm{W}], [[\mathrm{W}\,;\,\mathrm{F}]\,;\,\mathrm{F}], [[\mathrm{F}\,;\,\mathrm{W}\,;]\,\mathrm{F}], [[\mathrm{F}\,;\,\mathrm{F}]\,;\,\mathrm{F}]\}$$

Die der **Alternative entsprechende Wahrheitsfunktion** heißt **vel-Funktion**, die der **Implikation entsprechende Wahrheitsfunktion** heißt **seq-Funktion** und die der **Äquivalenz entsprechende Wahrheitsfunktion** heißt **äq-Funktion**. Als weiteres Beispiel wird noch die seq-Funktion mit Hilfe eines Pfeildiagrammes angegeben (↗ Bild 166/1).



166/1

Die der **Negation entsprechende Wahrheitsfunktion** heißt **non-Funktion**. Sie ist eine eindeutige Abbildung von $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$ auf sich. Es ist

$$f_\sim = \{[\mathrm{W}\,;\,\mathrm{F}], [\mathrm{F}\,;\,\mathrm{W}]\}\ .$$

BEISPIEL 6 (9.4.):
Schon von der 1. Klasse an sind die Schüler schrittweise mit den Multiplikationsfolgen vertraut zu machen. Jede Multiplikationsfolge ist eine Funktion aus N

in sich. Zum Beispiel enthält die Multiplikationsfolge mit der 5 die Paare [1; 5], [2; 10] und [3; 15]. Diese Multiplikationsfolge ist eine **Zahlenfolge**.

DEFINITION 4 (9.4.) — **Zahlenfolge**
Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen und deren Wertebereich eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ist, heißt eine **unendliche reelle Zahlenfolge.**
Eine Funktion, deren Definitionsbereich eine endliche Teilmenge $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ der Menge der natürlichen Zahlen ist und deren Wertebereich aus reellen Zahlen besteht, wird **endliche reelle Zahlenfolge** genannt.

Die Elemente des Wertebereichs werden **Glieder der Folge** genannt.
Ist es bei einer Zahlenfolge möglich, über eine Funktionsgleichung zu jeder natürlichen Zahl k des Definitionsbereichs die zugeordnete reelle Zahl a_k zu berechnen, so kann man die Zahlenfolge auch in folgender Form angeben.

$$f = \{[k; a_k] \in N \times P;\, a_k = f(k)\}$$

BEISPIEL 7 (9.4.):

$$f = \left\{[k; a_k] \in N \times P;\, a_k = \frac{1}{k+1}\right\}$$

Die ersten drei Glieder der Folge lauten:

$$a_0 = \frac{1}{1}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Allgemein üblich ist die folgende Schreibweise für Zahlenfolgen.

$$\{a_k\} \text{ mit } a_k = \frac{1}{k+1} \quad \text{und} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

9.5. Die graphische Darstellung von Funktionen

Im Mathematikunterricht der unteren Klassen tritt folgende Aufgabe auf.
Den Zahlen a aus der folgenden Tabelle sind die Summen a + 200 zuzuordnen.

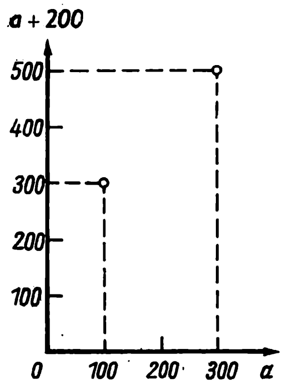
a	$a + 200$
300	500
100	
200	
400	
0	

Für $a = 300$ und $a = 100$ sind die Summen in einer Zeichnung (↗ Bild 168/1) durch einen Punkt gekennzeichnet. Übertrage das Bild in dein Heft und kennzeichne auch die übrigen Summen $a + 200$!

In dieser Aufgabe ist eine Funktion f graphisch darzustellen.

$$f = \{[300; 500], [100; 300], [200; 400], [400; 600]; [0; 200]\}$$

Wenn man eine Funktion graphisch darstellt, so ordnet man ihren Paaren $[x; y]$ Punkte mit den Koordinaten x und y zu.



168/1

DEFINITION 1 (9.5.) — **Graphische Darstellung einer Funktion**

Die Menge der Punkte einer Ebene, die den geordneten Paaren einer Funktion f eindeutig mit Hilfe eines Koordinatensystems zugeordnet wird, heißt **graphische Darstellung, Graph** oder **Bild der Funktion** f.

BEISPIEL 1 (9.5.):

Gegeben seien die Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, die zwar die gleiche Funktionsgleichung besitzen, sich aber im Definitionsbereich voneinander unterscheiden.

$$\begin{aligned} f_1 &= \{[x; y] \in N \times N;\ y = 6 - 2x\} \\ f_2 &= \{[x; y] \in G \times G;\ y = 6 - 2x\} \\ f_3 &= \{[x; y] \in R \times R;\ y = 6 - 2x\} \\ f_4 &= \{[x; y] \in P \times P;\ y = 6 - 2x\} \end{aligned}$$

f_1 ist eine endliche Menge von Paaren. Die anderen Funktionen sind unendliche Mengen.

Im folgenden sollen Paare der Funktionen direkt angegeben werden. Wir benutzen hierzu Wertetabellen. Danach sollen die entsprechenden Funktionen graphisch dargestellt werden.

f_1:

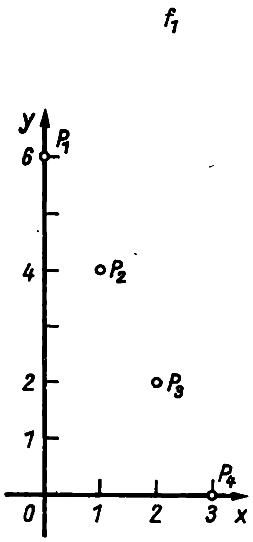
x	0	1	2	3
y	6	4	2	0

$\{0, 1, 2, 3\}$ ist somit der Definitionsbereich von f_1.
Der Graph von f_1 ist die Menge $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 werden diskrete Punkte genannt (↗ Bild 169/1).

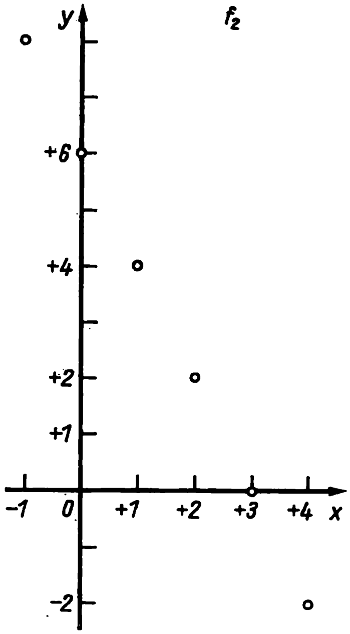
f_2: Bei f_2 kann in der Wertetabelle nur eine echte Teilmenge der Funktion angegeben werden.

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
y	$+10$	$+8$	$+6$	$+4$	$+2$	0	-2

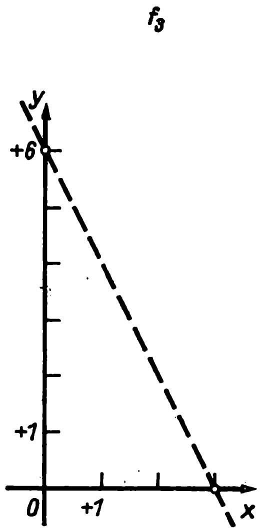
Der Graph von f_2 ist eine unendliche Menge von diskreten Punkten. Selbstverständlich können hiervon nur endlich viele gezeichnet werden (↗ Bild 169/2).



169/1



169/2



169/3

f_3: Da f_3 als Definitionsbereich die Menge der rationalen Zahlen besitzt, gehören zur graphischen Darstellung auch beispielsweise die Punkte zu den Paaren $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ und $\left[\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right]$. Da zwischen den rationalen Zahlen auf der x-Achse noch unendlich viele irrationale Zahlen liegen, gehören Punkte mit irrationalen Koordinaten nicht zum Graph der Funktion. Aus diesem Grunde wird der Graph von f_3 „gestrichelt" gezeichnet (↗ Bild 169/3).

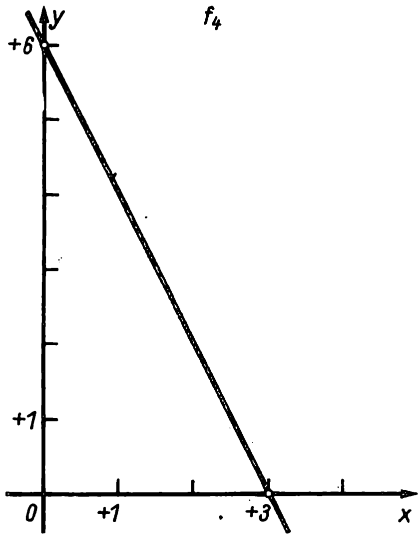
f_4: Für f_4 ist der Definitionsbereich die Menge der reellen Zahlen. Diese liegen lückenlos auf der Zahlengeraden. Zu f_4 gehört beispielsweise auch das Paar $[\sqrt{2}; 6 - 2\sqrt{2}]$. Somit ist der Graph von f_4 eine „volle" Gerade (↗ Bild 170/1).

Der Definitionsbereich einer Funktion kann auch ein **Intervall**, eine Menge lückenlos aufeinanderfolgender reeller Zahlen, sein.

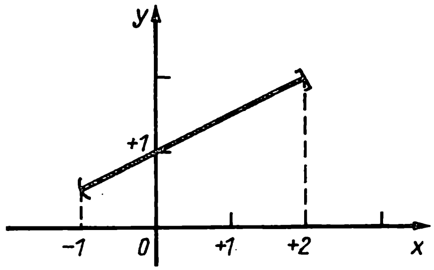
BEISPIEL 2 (9.5.):
Die Funktion f sei im Intervall $-1 < x \leqq +2$ durch die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$ definiert. Der Definitionsbereich ist ein linksseitig offenes und rechtsseitig abgeschlossenes Intervall. Man schreibt dafür auch $(-1; +2]$.
Als Menge von geordneten Paaren läßt sich f wie folgt angeben.

$$f = \left\{[x; y] \in P \times P;\quad y = \frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in (-1; +2]\right\}$$

Hier kann das Bild vollständig gezeichnet werden. Es wird durch eine runde Klammer „(" und durch eine eckige Klammer „]" begrenzt (↗ Bild 170/2).



170/1



170/2

„(“ deutet an, daß der Punkt $P\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ nicht zum Graph der Funktion gehört, da -1 auch nicht Element des Definitionsbereiches ist. Hingegen gehört der Punkt $P\ (+2; +2)$ zum Graph der Funktion, da $+2$ Element des Definitionsbereiches ist. Das wird durch die eckige Klammer „]“ angedeutet.

Eine Funktion und somit auch ihr Graph hängen also wesentlich vom Definitionsbereich der Funktion ab. Von Bedeutung für den Unterricht sind besonders solche Funktionen, deren Definitionsbereich und Wertebereich Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind. Derartige Funktionen werden auch **reellwertige Funktionen** genannt.

9.6. Operationen mit Funktionen

$\mathfrak{F}$ sei die Menge aller zweistelligen Funktionen. Von den Operationen, die man in $\mathfrak{F}$ erklären kann, sollen uns einige näher interessieren.

Die Bildung der Umkehrfunktion

Die Bildung der Umkehrfunktionen von Funktionen führt uns auf eine einstellige Operation in $\mathfrak{F}$, d. h. eine eindeutige Abbildung aus $\mathfrak{F}$ in sich (↗ 10.7.). Wir wollen sie mit „U“ symbolisieren.
U ist eine Menge, die Paare von Funktionen enthält. An der ersten Stelle eines jeden Paares steht eine Funktion f und an der zweiten Stelle die zugehörige Umkehrfunktion f^{-1}. Da es auch Funktionen gibt, die keine Umkehrfunktion besitzen, ist U keine Abbildung *von* $\mathfrak{F}$ *in* $\mathfrak{F}$.

$$U = \{[f_1; f_2] \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}; f_2 = f_1^{-1}\}$$

können wir als Operation der Bildung von Umkehrfunktionen bezeichnen. U ist als einstellige Operation in $\mathfrak{F}$ natürlich auch eine Funktion in $\mathfrak{F}$.

In der Mathematik sind noch andere einstellige Operationen von Bedeutung. Die Operation, die jeder reellen Zahl a ihren Betrag $|a|$ zuordnet, ist ebenfalls eine einstellige Operation, in diesem Fall eine eindeutige Abbildung *von P in P*.

BEISPIEL 1 (9.6.):
Gegeben sei die lineare Funktion f mit ihrer Funktionsgleichung $y = 3x - 2$ und dem Definitionsbereich P.

$$f = \{[x; y] \in P \times P; y = 3x - 2\}$$

Paare von f sind $[-1; -5]$, $[0; -2]$, $[+2; +4]$.

Zur Ermittlung des Graphen von f ist es nur nötig, zwei der zugehörigen Punkte in das Koordinatensystem einzutragen, da die graphische Darstellung eine Gerade ist. Durch die Funktionsgleichung wird jeder reellen Zahl als Urbild genau eine reelle Zahl zugeordnet. Umgekehrt erscheint jede reelle Zahl genau einmal als Bild. f ist somit eine eineindeutige Abbildung *von P auf P* und somit eine **umkehrbare Funktion**. In der graphischen Darstellung kommt die Umkehrbarkeit einer Funktion dadurch zum Ausdruck, daß jede Parallele zur x-Achse den Graph der Funktion in höchstens einem Punkt schneidet. Das trifft für alle **linearen Funktionen** mit einer Funktionsgleichung $y = mx + b$, für die $m \neq 0$ ist, zu.

f^{-1} sei die Umkehrfunktion der Funktion f, von der wir ausgegangen sind. Paare von f^{-1} sind: $[-5; -1]$, $[-2; 0]$, $[+4; +2]$. Unser Ziel ist es jetzt, für f^{-1} eine Funktionsgleichung aufzustellen. Nach den Definitionen 2 (9.4.) und 3 (9.4.) ist f^{-1} die folgende Menge geordneter Paare.

$$\{[y; x] \in P \times P; y = 3x - 2\}$$

Die Funktionsgleichung von f beschreibt somit auch die Umkehrfunktion, y ist jetzt zur unabhängigen und x zur abhängigen Variablen geworden. Wenn wir zu einer reellen Zahl y_0 aus dem Definitionsbereich von f^{-1} die zugehörige reelle Zahl x_0 des Wertebereiches berechnen wollen, ist es zweckmäßig, die Funktionsgleichung erst nach x aufzulösen.

$$y = 3x - 2$$

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$$

In die letzte Gleichung haben wir für y die Zahl y_0 einzusetzen und erhalten dann x_0. Wir können f^{-1} somit auch als

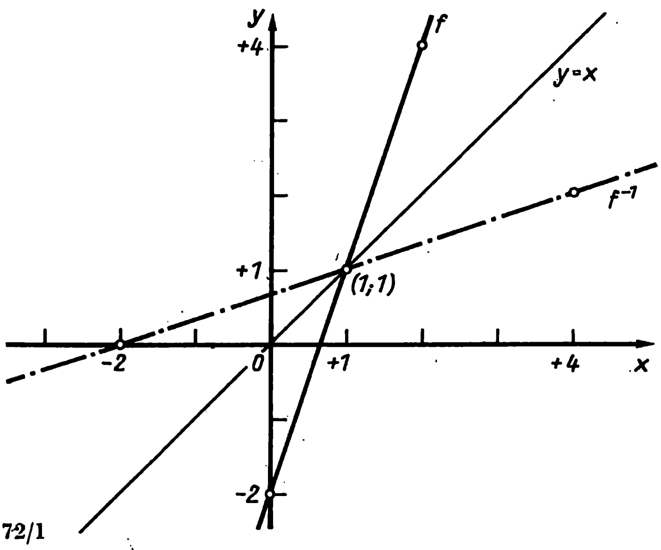
$$f^{-1} = \left\{[y; x] \in P \times P; x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right\}$$

schreiben.

Da man aber auch für die Umkehrfunktion wieder die unabhängige Variable mit x und die abhängige mit y bezeichnen will, vertauscht man x und y und erhält:

$$f^{-1} = \left\{[x; y] \in P \times P; y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right\}.$$

Bild 172/1 enthält eine graphische Darstellung von f und f^{-1} in ein und demselben Koordinatensystem. Die graphische Darstellung zeigt, daß die Graphen beider Funktionen durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ auseinander hervorgehen.



172/1

Also hat jeder Punkt $P(a;\ b)$ des Graphen der Funktion f denselben Abstand von der Geraden $y = x$ wie der Punkt $P(b;\ a)$ des Graphen von f^{-1}.

So wie wir soeben für die lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $y = 3\,x - 2$ die Umkehrfunktion ermittelt haben, kann man nach folgenden Arbeitsschritten bei jeder einstelligen Funktion mit einer Funktionsgleichung $y = f(x)$ die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion ermitteln, falls die Umkehrfunktion existiert.

1. Überprüfen der Bedingung für die Existenz der Umkehrfunktion, der Eineindeutigkeit
2. Auflösen der Funktionsgleichung nach x
3. Vertauschen der Bezeichnungen der Variablen

Das soeben angegebene Verfahren wollen wir nun im Falle einer beliebigen linearen Funktion anwenden.

Es sei

$$f = \{[x;\ y] \in P \times P;\ y = m\,x + b\} \qquad \text{mit} \qquad m, b \in P\,.$$

1. $m \neq 0$

Jede lineare Funktion mit $m \neq 0$ ist eineindeutig. f ist somit umkehrbar.
$y = m\,x + b$ ist nach x aufzulösen.

$$-\,m\,x = -\,y + b$$

$$x = \frac{1}{m}\,y - \frac{b}{m} \qquad \text{Vertauschen der Bezeichnungen}$$

$$y = \frac{1}{m}\,x - \frac{b}{m}$$

$$f^{-1} = \left\{[x;\ y] \in P \times P;\ y = \frac{1}{m}\,x - \frac{b}{m}\right\}$$

2. $m = 0$

Die Funktionen f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = b$ sind nicht eineindeutig und somit nicht umkehrbar.

Wir untersuchen jetzt die Umkehrbarkeit von **quadratischen Funktionen.**

BEISPIEL 2 (9.6.):

$$f = \{[x, y] \in P \times P: y = x^2\}$$

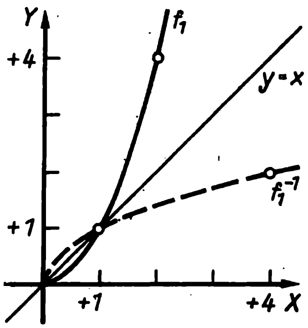
Zur Funktion gehören z. B. die Paare $[-2; +4]$ und $[+2; +4]$.
Die Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = +4$ schneidet den Graph der Funktion, die Normalparabel, in zwei Punkten. f ist somit nicht eineindeutig und besitzt keine Umkehrfunktion.
f setzt sich allerdings aus zwei Teilmengen f_1 und f_2 zusammen, die jede für sich umkehrbar sind.

$$f_1 = \{[x; y] \in P \times P; x \geqq 0 \wedge y = x^2\}$$
$$f_2 = \{[x; y] \in P \times P; x < 0 \wedge y = x^2\}$$
$$f_1 \cup f_2 = f$$

Für f_1 können wir die Umkehrfunktion ermitteln.

$$f_1^{-1} = \{[x; y] \in P \times P; y = \sqrt{x} \wedge x \geqq 0\}$$

Die graphischen Darstellungen von f_1 und f_1^{-1} zeigen, daß die Graphen dieser Funktionen symmetrisch zur Geraden $y = x$ liegen (↗ Bild 173/1).



173/1

Ähnlich kann f_2^{-1} ermittelt werden. $f_1^{-1} \cup f_2^{-1}$ ist keine Funktion. Quadratische Funktionen sind also nur in solchen Intervallen umkehrbar, in denen die Funktionen auch voreindeutig sind.

Die Verkettung von Funktionen

Zur Einführung der Operation der **Verkettung von Abbildungen** allgemein und **Verkettung von Funktionen** speziell gehen wir von Beispiel 2 (9.4.) aus.

Gegeben: $A = \{a, b, c, d\}$

Es sei f_1 eine eineindeutige Abbildung *von A auf sich*. Nach Beispiel 2 (9.4.) werden derartige Abbildungen auch **Permutationen** genannt. Ein Beispiel für eine Permutation von A ist

$$f_1 = \{[a; b], [b; c], [c; d], [d; a]\}.$$

f_1 kann auch anders geschrieben werden.

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

9.6.

Wir betrachten jetzt eine weitere Permutation von A.

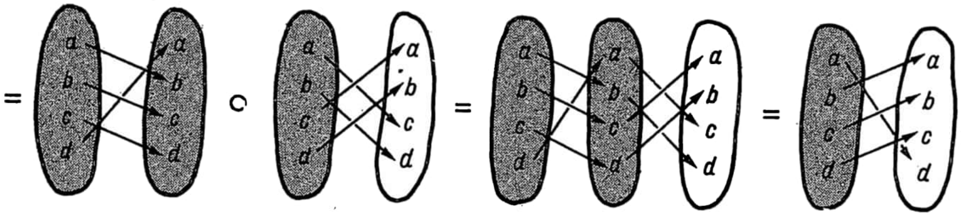
$$f_2 = \{[a; c], [d; b], [b; d], [c; a]\} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

Für die 24 möglichen Permutationen von A können wir die Operation der **Hintereinanderausführung** erklären.
Sie wird mit „$\circ$" symbolisiert („$\circ$" sprechen wir bei Permutationen speziell als „erst ..., dann ...", d. h., zuerst wird auf die ursprüngliche Reihenfolge der Elemente von A die Permutation f_1 und dann f_2 angewendet).

$$f_1 \circ f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

heißt, daß a zuerst mit b und dann mit d gepaart werden soll, daß b zuerst mit c und dann mit a gepaart werden soll usw. Wir wollen uns diesen Vorgang mit Hilfe eines Pfeildiagrammes veranschaulichen (↗ Bild 174/1).

$f_1 \circ f_2$



$$= \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$
$$= \{[a; d], [b; a], [c; b], [d; c]\}$$
$$= f_3$$

174/1

Die Hintereinanderausführung zweier Permutationen ergibt also wieder eine eindeutig bestimmte Permutation. In der Menge der $n!$ möglichen Permutationen von n Elementen ist die Operation der Hintereinanderausführung stets ausführbar. Sie ist assoziativ, aber für $n > 2$ nicht kommutativ.
Die Hintereinanderausführung von Abbildungen — auch **Verkettung** genannt — kann allgemein wie folgt erklärt werden.

DEFINITION 1 (9.6.) — **Verkettung**
F_1 sei eine Abbildung *aus* A_1 *in* B_1.
F_2 sei eine Abbildung *aus* A_2 *in* B_2.
Dann nennt man eine Abbildung F_3 *aus* A_1 *in* B_2 ($F_1 \circ F_2 = F_3$) **Hintereinanderausführung** oder **Verkettung** von F_1 und F_2 genau dann, wenn F_3 aus allen geordneten Paaren $[a; c] \in A_1 \times B_2$ besteht, für die ein b mit $[a; b] \in F_1$ und $[b; c] \in F_2$ existiert.

Für Abbildungen F_1, F_2 wird $F_1 \circ F_2$ allgemein gelesen als „F_1 verkettet mit F_2".
Aus der Definition 1 (9.6.) ergibt sich sofort: $[a; c] \in F_3$ genau dann, wenn es ein b mit $[a; b] \in F_1$ und $[b; c] \in F_2$ gibt.
Ist Vb(F_2) der Vorbereich von F_2, Nb(F_1) der Nachbereich von F_1, so folgt, daß F_3 nur dann ungleich $\emptyset$ ist, wenn $\text{Nb}(F_1) \cap \text{Vb}(F_2) \neq \emptyset$ gilt.
Für uns soll die Operation der Verkettung vor allem in $\mathfrak{F}$, der Menge aller zweistelligen Funktionen, von Interesse sein.

Sind f_1 und f_2 Funktionen aus $\mathfrak{F}$, so ist $f_1 \circ f_2$ wieder eine eindeutige Abbildung und somit eine Funktion, da bei der Bildung von $f_1 \circ f_2$ jedes Element des Definitionsbereiches von f_1 mit höchstens einem Element des Wertebereichs von f_2 gepaart wird. Der Definitionsbereich von $f_3 = f_1 \circ f_2$ ist Teilmenge des Definitionsbereiches von f_1. Wenn der Durchschnitt aus dem Wertebereich von f_1 und dem Definitionsbereich von f_2 die leere Menge ist, so ist f_3 die **leere Funktion** $\emptyset$. Die Operation der Verkettung von Funktionen ist somit stets ausführbar. Sie ist ferner assoziativ, aber nicht kommutativ.

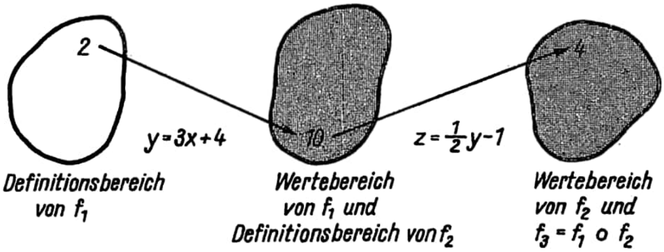
BEISPIEL 3 (9.6.):
Gegeben seien folgende lineare Funktionen.

$$f_1 = \{[x; y] \in P \times P; y = 3x + 4\}$$
$$f_2 = \left\{[x; y] \in P \times P; y = \frac{1}{2}x - 1\right\}$$

Um $f_1 \circ f_2$ besser bilden zu können, benennen wir die Variablen in f_2 wie folgt um.

$$f_2 = \left\{[y; z] \in P \times P; z = \frac{1}{2}y - 1\right\}$$

Für f_1 ist der Wertebereich die Menge der reellen Zahlen. Diese Menge ist gleichzeitig der Definitionsbereich für f_2. Werden f_1 und f_2 in dieser Reihenfolge miteinander verkettet, so wird jedem Element des Definitionsbereiches von f_1 eindeutig ein Element des Wertebereiches von f_2 zugeordnet.
Die Zuordnung wird für $x = 2$ im Bild 175/1 erläutert.



175/1

Das Paar [2; 4] ist auf diese Art als Element von f_3 ermittelt worden. Die Funktionsgleichung für $f_1 \circ f_2$ kann man aus den Funktionsgleichungen für f_1 und f_2 wie folgt gewinnen.
Zum Ermitteln eines Paares von f_3 ist ein Element x_0 des Definitionsbereiches von f_1 zuerst mit 3 zu multiplizieren, dann ist zum Produkt 4 zu addieren. Anschließend ist die erhaltene Zahl als Element y_0 des Definitionsbereiches von f_2 aufzufassen und zu dieser Zahl über $z = \frac{1}{2}y - 1$ die zugehörige Zahl z_0 des Wertebereiches von f_2 zu berechnen. Das Paar $[x_0; z_0]$ ist dann ein Element von $f_1 \circ f_2 = f_3$.
Symbolisiert:

$$x_0 \rightarrow y_0 = 3x_0 + 4 \rightarrow z_0 = \frac{1}{2}y_0 - 1$$
$$x_0 \longrightarrow z_0 = \frac{1}{2}(3x_0 + 4) - 1$$
$$z_0 = \frac{3}{2}x_0 + 1$$

Wir können also zu einem beliebigen Element x des Definitionsbereiches von f_1 das zugehörige Element des Wertebereiches von $f_1 \circ f_2$ über die Funktionsgleichung

$z = \frac{1}{2}(3x + 4) - 1$ oder vereinfacht $z = \frac{3}{2}x + 1$ erhalten. Wenn wir statt z wie üblich für die abhängige Variable y schreiben, ergibt sich:

$$f_1 \circ f_2 = \left\{[x; y] \in P \times P; y = \frac{3}{2}x + 1\right\}.$$

Verallgemeinerung
Sind f_1 und f_2 zwei reellwertige Funktionen mit Funktionsgleichungen der Form $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$, so ist die Funktionsgleichung von $f_1 \circ f_2$ wie folgt zu ermitteln.

1. Umbenennen der Variablen in $y = f_2(x)$ zu $z = f_2(y)$
2. Einsetzen von $y = f_1(x)$ in $z = f_2(y)$
3. Vereinfachen von $z = f_2(f_1(x))$ und Umbenennen der Variablen z in y

Stimmen Wertebereich Y_1 von f_1 und Definitionsbereich X_2 von f_2 nicht überein, so hat man zum Ermitteln des Definitionsbereiches von $f_1 \circ f_2$ den Durchschnitt von Y_1 und X_2 zu bilden. Alle Elemente des Definitionsbereiches von f_1, denen die Elemente dieser Durchschnittsmenge zugeordnet sind, bilden den Definitionsbereich von $f_1 \circ f_2$.

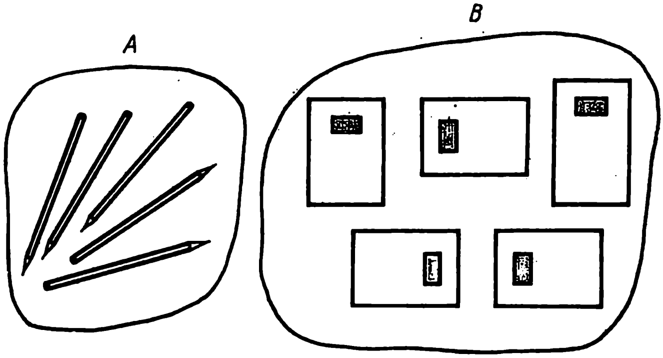
9.7. Die Mächtigkeit von Mengen; endliche und unendliche Mengen

(↗ B 7.3. „Gleichmächtigkeit von (endlichen) Mengen“)

Im Lehrplan für die Klasse 1 (Ausgabe 1967) steht auf der Seite 135 unter der Stoffeinheit 1.1.: „Vergleichen zweier Mengen bezüglich ihrer **Mächtigkeit** durch elementweises Zuordnen; mündliches Formulieren der Ergebnisse der Vergleiche unter Verwendung der Wörter ‚mehr als‘, ‚weniger als‘, ‚gleich viele‘“.

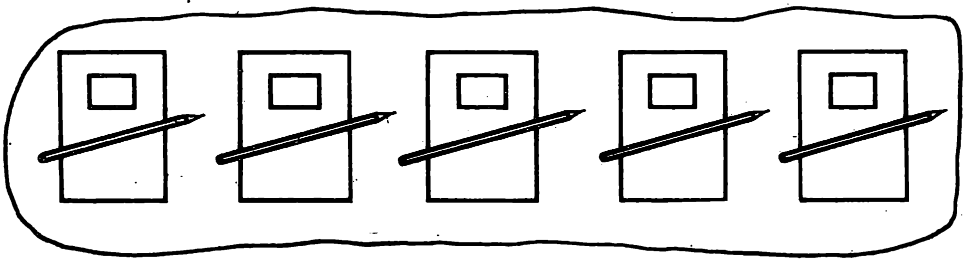
Wir wollen jetzt klären, was man unter dem **Vergleich zweier Mengen bezüglich ihrer Mächtigkeit** zu verstehen hat.
Vereinfacht können wir uns das als ein Vergleichen zweier Mengen hinsichtlich der „Anzahl ihrer Elemente“ vorstellen. Dieses Vergleichen soll nach dem Lehrplan vor dem Erarbeiten der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 geschehen, d. h., die Schüler sollen, ohne zu zählen, durch elementweises Zuordnen erkennen, ob zwei vorgelegte Mengen gleich viele Elemente haben oder nicht und welche der beiden Mengen mehr Elemente als die andere besitzt.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß zwei endliche Mengen die **gleiche Anzahl** an Elementen haben.



176/1

Gegeben sei eine Menge A von Bleistiften und eine Menge B von Heften (↗ Bild 176/1).
Zur Klärung der Frage, ob mehr oder weniger Bleistifte als Hefte oder gleich viele Bleistifte wie Hefte vorhanden sind, haben die Schüler auf jedes Heft genau einen Bleistift zu legen. Kein Bleistift darf dabei auf zwei Hefte gelegt werden (↗ Bild 177/1).



177/1

Die Schüler haben somit eine Teilmenge der Kreuzmenge $A \times B$ zu bilden, eine Abbildung *aus A in B*. In unserem Falle ist eine Abbildung *von A auf B* entstanden, da der Vorbereich gleich A und der Nachbereich gleich B ist.
Wir untersuchen diese Abbildung jetzt weiter. Zu jedem Bleistift gehört genau ein Heft und zu jedem Heft genau ein Bleistift, d. h. zu jedem Element des Vorbereichs genau ein Element des Nachbereichs und zu jedem Element des Nachbereichs genau ein Element des Vorbereichs. Unsere Menge an Bleistift-Heft-Paaren ist somit eine eineindeutige Abbildung von der Menge der Bleistifte auf die Menge der Hefte. In der 1. Klasse wird nun in diesem Falle die Redeweise verabredet: „Es sind **gleich viele** Bleistifte und Hefte vorhanden". Später sagt man auch: „Die Anzahl der Bleistifte ist **gleich** der Anzahl der Hefte".

Da wir unsere Untersuchungen in der Mengenlehre auch auf unendliche Mengen ausdehnen wollen und es hier nicht sinnvoll ist, von der gleichen Anzahl der Elemente zweier Mengen zu sprechen, wird stattdessen der Begriff der **Gleichmächtigkeit** eingeführt.

DEFINITION 1 (9.7.) – **Gleichmächtigkeit**
Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen **gleichmächtig** oder **von gleicher Mächtigkeit** ($M_1 \sim M_2$) genau dann, wenn es eine eineindeutige Abbildung *von M_1 auf M_2* gibt.

BEISPIEL 1 (9.7.):

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad M_2 = \{a, b, c, d, e\}$$

$M_1 \sim M_2$, denn

$$f = \{[1; a], [2; b], [3; c], [4; d], [5; e]\}$$

ist eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2.
f ist natürlich nicht die einzige eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2. Da M_1 und M_2 dieselbe Anzahl an Elementen haben, gibt es hiervon genau so viele, wie es Permutationen von M_1 bzw. M_2 gibt, d. h.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Überlieferte Kerbhölzer z. B. zeigen, daß die Menschen vor Tausenden von Jahren schon durch eineindeutiges Zuordnen der Elemente zweier Mengen deren Gleichmächtigkeit feststellten. Ähnliches ist bei Kindern zu beobachten. Kinder im Kindergarten können ohne zu zählen Äpfel unter sich verteilen, indem jedem Kind genau ein Apfel zugeordnet wird. Sie stellen auf diese Art fest, daß zwei Mengen, die Menge der Kinder und die Menge der verteilten Äpfel, die gleiche Anzahl von Elementen haben.

BEISPIEL 2 (9.7.):

$$M_1 = N \; ; \quad M_2 = G$$

$N \sim G$, denn

$$f = \{[0; 0], [1; +1], [2; -1], [3; +2], [4; -2], \ldots\}$$

ist eine eineindeutige Abbildung *von N auf G*.
Sie kann auch mit Hilfe eines Pfeildiagrammes dargestellt werden. Die Eineindeutigkeit der Zuordnung wird durch Doppelpfeile symbolisiert.

$$\begin{array}{lcccccccccc} N = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & 2n, & 2n+1, & \ldots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ G = \{ & 0, & +1, & -1, & +2, & -2, & \ldots, & -n, & +(n+1), & \ldots\} \end{array}$$

In jedem Mengensystem ist die Gleichmächtigkeit eine **Relation** (↗ 10.1. „Der Relationsbegriff" und 10.2. „Eigenschaften von zweistelligen Relationen"). Nach Satz 1 (10.4.) besitzt sie die Eigenschaft der **Reflexivität**, nach Satz 2 (10.4.) die der **Symmetrie** und nach Satz 3 (10.4.) die der **Transitivität**. Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, heißen **Äquivalenzrelationen**.
Da die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation ist, sagt man für $M_1 \sim M_2$ auch „**M_1 ist äquivalent zu M_2**".

Eine Äquivalenzrelation, die in einer Menge erklärt ist, bewirkt nach dem „Hauptsatz über Äquivalenzrelationen" (↗ Satz 2 (10.4.)) eine **Klasseneinteilung**, d. h. eine Zerlegung der Menge in nichtleere, elementfremde Teilmengen (Äquivalenzklassen), die vereinigt wieder die gesamte Menge ergeben. Eine solche Zerlegung wird in jedem Mengensystem auch durch die Gleichmächtigkeit bewirkt. In jeder Äquivalenzklasse liegen dann alle miteinander gleichmächtigen Mengen des betreffenden Mengensystems.

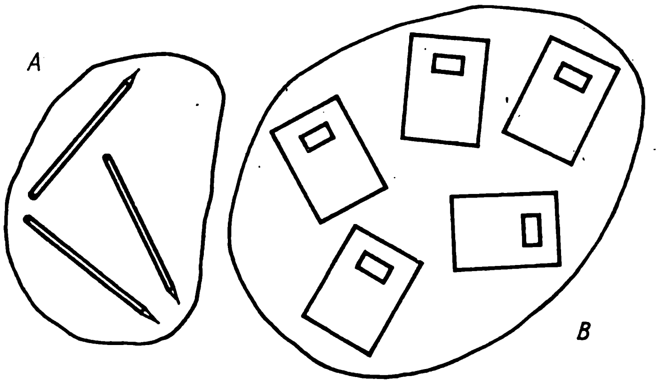
DEFINITION 2 (9.7.) — **Mächtigkeit einer Menge**
Unter der **Mächtigkeit** oder **Kardinalzahl** einer Menge *M* (**Kz (*M*)**) verstehen wir die Menge aller der Mengen, die zu *M* gleichmächtig sind.

Der Begriff der Kardinalzahl ist beim Aufbau des Bereiches der natürlichen Zahlen von Bedeutung und wird im Teil C „Aufbau der Zahlenbereiche" noch näher erläutert.

Wir wollen uns jetzt mit den Beziehungen **weniger als** und **mehr als** bzw. **von niederer Mächtigkeit** und **von höherer Mächtigkeit** beschäftigen.

BEISPIEL 3 (9.7.):
Gegeben seien die Mengen *A* und *B* (↗ Bild 179/1).
Versuchen wir jetzt wieder, auf jedes Heft genau einen Bleistift zu legen, so stellen wir fest, daß es nicht möglich ist. Möglich ist das nur für eine echte Teilmenge von *B*.
A ist also nicht zu *B*, sondern zu einer echten Teilmenge von *B* gleichmächtig. *A* besitzt in diesem Fall eine geringere Mächtigkeit als *B* bzw. *B* eine höhere Mäch-

tigkeit als A (↗ Definition 3 (9.8.)). In der 1. Klasse wird in einem solchen Falle verabredet zu sagen, es sind „weniger Bleistifte als Hefte" oder „mehr Hefte als Bleistifte" vorhanden.



179/1

Bis jetzt wurden die Begriffe **endliche Menge** und **unendliche Menge** ohne Definition benutzt. Wir wollen jetzt eine Definition dafür erarbeiten und hierzu eine typische Eigenschaft herausstellen, die nur für Mengen gilt, die wir bis jetzt als *unendlich* bezeichnet hatten.

BEISPIEL 4 (9.7.):
Gegeben seien die Mengen $M_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $M_2 = N$.
M_1 ist eine endliche und M_2 eine unendliche Menge. M_1 besitzt keine echte Teilmenge, die zu M_1 gleichmächtig ist.
Wir untersuchen jetzt diesen Sachverhalt auch für M_2. Die Menge der geraden natürlichen Zahlen (N_g) ist eine echte Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen. Hier ist eine eineindeutige Abbildung von N auf N_g möglich.

$$\begin{array}{rcccccc} N = \{0, & 1, & 2, & 3, \ldots, & n, \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ N_g = \{0, & 2, & 4, & 6, \ldots, & 2n, \ldots\} \end{array}$$

DEFINITION 3 (9.7.) — **Endliche bzw. unendliche Menge**
Eine Menge M heißt **endlich** genau dann, wenn M keine echte Teilmenge besitzt, die zu M gleichmächtig ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, heißt **unendlich**.
(Endlichkeitsdefinition von DEDEKIND (1831—1916))

Die Definition 3 (9.7.) sagt nichts über die Existenz einer unendlichen Menge aus. Ihre Existenz wird durch das **Unendlichkeitsaxiom** gesichert (↗ 108).

Der Begriff der endlichen Menge bzw. unendlichen Menge ist von Mathematikern auf verschiedene Weise definiert worden. Es gibt z. B. die Endlichkeitsdefinition von RUSSELL (↗ 221).

9.8. Abzählbare und überabzählbare Mengen

Die unendlichen Mengen werden in **abzählbare Mengen** und **überabzählbare Mengen** unterteilt.

DEFINITION 1 (9.8.) — **Abzählbare Menge**
Eine Menge heißt **abzählbar** genau dann, wenn sie zu der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig ist.

Jedem Element einer abzählbaren Menge kann eineindeutig eine natürliche Zahl zugeordnet werden. Die Elemente einer abzählbaren Menge können somit durchnumeriert werden und bilden die Glieder einer **unendlichen Folge**.

BEISPIEL 1 (9.8.):
Abzählbar sind folgende Mengen.

1. Alle unendlichen Teilmengen von N, z. B. auch die Menge der Primzahlen
2. Die Menge der ganzen Zahlen (G)
3. Die Menge der rationalen Zahlen (R)

Den Begriff „abzählbar" darf man nicht mit „zählbar" verwechseln. Zählbar heißt, man kann eine Anzahl angeben. Das gilt nur für endliche Mengen.

Für die Folge der Primzahlen ist bis heute noch keine Formel ermittelt worden, die es gestattet, zu einer beliebigen natürlichen Zahl die zugehörige Primzahl oder zu einer beliebigen Primzahl die zugehörige natürliche Zahl zu berechnen. Pierre de Fermat (französischer Mathematiker, 1601—1665) glaubte, das für eine unendliche Teilmenge der Menge aller Primzahlen erreicht zu haben. Er vermutete, in $2^{2^n} + 1$ einen Term entdeckt zu haben, der für beliebige natürliche Zahlen n eine Primzahl ergibt. Euler wies jedoch nach, daß für $n = 5$ die entstandene Zahl 4294967297 durch 641 teilbar ist.

Die Abzählbarkeit von G wurde schon im Anschluß an die Definition 1 (9.7.) gezeigt.

Die Abzählbarkeit der Menge der rationalen Zahlen ist eine Tatsache, die überrascht. Sie wird im Teil C „Aufbau der Zahlenbereiche" bewiesen.

Für abzählbare Mengen gelten folgende Sätze, die ohne Beweis angegeben werden.

SATZ 1 (9.8.)
Die Vereinigungsmenge abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

SATZ 2 (9.8.)
Wenn die Menge M abzählbar ist, so ist jede unendliche Teilmenge von M abzählbar.

DEFINITION 2 (9.8.) — **Überabzählbare Menge**
Unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind, heißen **überabzählbar**.

BEISPIEL 2 (9.8.):
Überabzählbar sind folgende Mengen.

1. Die Menge aller reellen Zahlen (P)
2. Die Menge aller Punkte einer Geraden, einer Ebene, des Raumes
3. Die Potenzmenge von N

Ein Beweis für die Überabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen ist ebenfalls im Teil C „Aufbau der Zahlenbereiche" enthalten.
Die Menge der reellen Zahlen wird auch das **Kontinuum** genannt. Wenn eine Menge zu der Menge der reellen Zahlen gleichmächtig ist, so sagt man, sie habe **die Mächtigkeit des Kontinuums.**

Man könnte vermuten, daß alle überabzählbaren Mengen gleichmächtig sind. Das trifft jedoch nicht zu. Zu jeder unendlichen Menge kann man eine Menge bilden, die ihr nicht gleichmächtig ist, nämlich die Potenzmenge dieser Menge. Somit gibt es unendlich viele Mengen, die überabzählbar und nicht gleichmächtig sind.

Es werden die Vorstellungen von den Begriffen **von niederer Mächtigkeit** bzw. **von höherer Mächtigkeit** zu einer Definition zusammengefaßt, die sowohl für endliche als auch für unendliche Mengen gilt.

DEFINITION 3 (9.8.) — **Von niederer Mächtigkeit bzw. von höherer Mächtigkeit**
Eine Menge M_1 heißt **von niederer Mächtigkeit** als eine Menge M_2 genau dann, wenn M_1 einer echten Teilmenge von M_2 gleichmächtig ist und M_1 nicht mit M_2 gleichmächtig ist. M_2 heißt dann **von höherer Mächtigkeit** als M_1.

Die Menge der natürlichen Zahlen ist somit von niederer Mächtigkeit als die Menge der reellen Zahlen.

Die Frage, ob es eine Menge von höherer Mächtigkeit als die der natürlichen Zahlen und von geringerer als die der reellen Zahlen gibt, wird das **Kontinuumsproblem** genannt. Die **Kontinuumshypothese** besagt, daß es keine solche Menge gibt. Diese von CANTOR 1884 ausgesprochene Vermutung konnte bis heute nicht bewiesen werden.

9.9. Kontrollfragen

1. Worin unterscheiden sich $[a; b]$ und $\{a, b\}$?
2. Zeigen Sie, daß $A \times B$ eine Menge 3. Stufe ist, wenn A, B Mengen 1. Stufe sind!
3. Wann ist $A \times B$ gleich $B \times A$?
4. Wann ist eine Abbildung *aus A in B* eine Abbildung *von A* und wann eine Abbildung *auf B* ?
5. Wann ist eine Abbildung *aus A in B* eine Funktion ?
6. Warum ist nicht jede Funktion umkehrbar ?
7. Begründen Sie, daß die Verkettung von Operationen nicht kommutativ ist!
8. Wann sind zwei Mengen gleichmächtig ?
9. Wann heißt eine Menge abzählbar ?
10. Wann heißt eine Menge überabzählbar ?

10. Relationen

10.1. Der Relationsbegriff

Wir haben in den Teilen B 6. bis B 9. einige wesentliche Kenntnisse aus den Anfangsgründen der Mengenlehre erworben. Wir beschäftigten uns mit **Mengenbildung, Mengenvergleich, Operationen mit Mengen, Abbildungen, Funktionen** usw. Dabei beschränkten wir uns aber im wesentlichen darauf, die Frage zu untersuchen, *welche* Elemente jeweils zu einer Menge gehören bzw. welche nicht.
Diese Betrachtungsweise allein genügt jedoch nicht mehr, wenn man tiefer in das Wesen von Mengen eindringen will. In der objektiven Realität gibt es mannigfache Beziehungen zwischen den Dingen. Der Mathematiker untersucht insbesondere Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen einer gegebenen Menge und verschafft sich einen Überblick über Eigenschaften und häufig vorkommende Typen solcher Beziehungen. Damit sei der Gegenstand unserer folgenden Betrachtungen grob umrissen.

Wir schauen uns als nächstes einige Beispiele an, um einen ersten Einblick in mögliche **Beziehungen (Relationen)** zwischen den Elementen einer Menge zu bekommen. Wir werden später sehen, daß sich dieser neue Begriff wiederum mengentheoretisch erfassen und beschreiben läßt und von großer Bedeutung für die Mathematik ist.

BEISPIEL 1 (10.1.):
Im Bücherschrank steht je ein Exemplar der Mathematiklehrbücher für die Klassen 1 bis 3 in der im Bild 182/1 dargestellten Reihenfolge. Untersucht werden soll

182/1

die Beziehung „Buch a **steht links von** Buch b“. Greift man nacheinander je zwei Bücher heraus, so stand entweder Buch a links von Buch b oder nicht.
Insgesamt läßt sich angeben:

Buch 1 *steht links von* Buch 3;
Buch 1 *steht links von* Buch 2;
Buch 3 *steht links von* Buch 2.

Beispiel 2 (10.1.):
Es sei die Menge $M = \{2, 3, 4\}$ gegeben, und die zu untersuchende Relation R sei die **$<$-Relation**, die wie folgt definiert ist.

$$a < b =_{\text{Def}} \exists\, c\,(a + c = b \wedge c \neq 0); \quad a, b, c \in N$$

Dann läßt sich feststellen:

$$2 < 3;\ 2 < 4;\ 3 < 4\,.$$

Man sieht sofort, daß die jeweils in der Relation „$<$“ zueinander stehenden Elemente die geordneten Paare

$$[2; 3]\,,\quad [2; 4]\,,\quad [3; 4]$$

bilden. Wenn man für die Relation das allgemeine Symbol „R“ benutzt, kann man auch schreiben:

$$2\,R\,3;\quad 2\,R\,4;\quad 3\,R\,4\,.$$

BEISPIEL 3 (10.1.):
Die in $M = \{2, 3, 4\}$ erklärte Relation sei die Relation **a teilt b**, die wie folgt erklärt wird.

$$a \mid b =_{\text{Def}} \exists\, c\,(a \cdot c = b); \quad a, b, c \in G$$

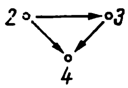
Es gilt dann

$$2 \mid 2;\quad 2 \mid 4;\quad 3 \mid 3;\quad 4 \mid 4;$$

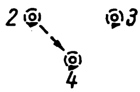
und wir finden die geordneten Paare

$$[2; 2]\,,\quad [2; 4]\,,\quad [3; 3]\,,\quad [4; 4]\,.$$

Um sich die Beziehungen auch veranschaulichen zu können, zeichnet man sogenannte Graphen, indem man die Elemente der Mengen als Punkte und die Relation durch Pfeile darstellt (↗ Bilder 183/1 und 183/2).



183/1



183/2

Das sieht dann so aus:
Jeder Pfeil repräsentiert zusammen mit den beiden Elementen ein geordnetes Paar. Steht ein Element zu sich selbst in der gegebenen Relation, dann tritt im Graph an diesem Punkt eine Schleife auf.

Man sieht, daß sowohl im Beispiel 2 (10.1.) als auch im Beispiel 3 (10.1.) das geordnete Paar $[2; 4]$ vorkommt, aus dem allein die in Frage kommende Relation nicht zu gewinnen ist. Vielmehr braucht man dazu die *Gesamtheit* der möglichen geordneten Paare, die jeweils eine Menge bilden, nämlich

$$\{[2; 3]\,,\quad [2; 4]\,,\quad [3; 4]\} \qquad \text{bzw.}$$
$$\{[2; 2]\,,\quad [2; 4]\,,\quad [3; 3]\,,\quad [4; 4]\}\,.$$

Wir bezeichnen nun diese Mengen als **zweistellige Relationen.**

$$R_1 = „<“ = \{[2;3],\quad [2;4],\quad [3;4]\}$$
$$R_2 = „\,|\,“ = \{[2;2],\quad [2;4],\quad [3;3],\quad [4;4]\}$$

Jede zweistellige Relation R in einer Menge M charakterisiert eine **Eigenschaft** (↗ Seite 105) **geordneter Paare**

$$[m_1; m_2] \quad (m_1 \in M;\ m_2 \in M)$$

dieser Menge. Für jedes mögliche geordnete Paar muß eindeutig feststehen, ob es die betreffende Eigenschaft hat oder nicht, d. h. ob es zur Relation dazugehört oder nicht.
Der Begriff *zweistellige Relation* hat zum Inhalt, daß jeweils *zwei* Elemente miteinander in Beziehung stehen, d. h. ein geordnetes Paar bilden.

Da also auch im Zusammenhang mit Relationen geordnete Paare auftreten, besteht eine Verbindung zur **Produktmenge.**
Bekanntlich ist die Produktmenge (Kreuzprodukt) $M_1 \times M_2$ zweier Mengen M_1 und M_2 die Menge *aller* geordneten Paare $[m_1; m_2]$, deren erstes Element aus der Menge M_1 und deren zweites Element aus der Menge M_2 stammt. Da wir Relationen innerhalb einer Menge M betrachten, bilden wir das **Mengenprodukt** $\boldsymbol{M \times M}$.

Die in den Beispielen 2 (10.1.) und 3 (10.1.) vorkommende Menge $M = \{2, 3, 4\}$ hat die Produktmenge

$$M \times M = \{[2;2],\ [2;3],\ [2;4],\ [3;2],\ [3;3],\ [3;4],\ [4;2],\ [4;3],\ [4;4]\}.$$

Ein Vergleich mit den Mengen R_1 bzw. R_2 zeigt, daß diese in $M \times M$ enthalten sind. Es gilt also

$$R_1 \subseteqq M \times M \qquad \text{bzw.}$$
$$R_2 \subseteqq M \times M,$$

denn jedes zu R_1 bzw. R_2 gehörende Paar gehört auch zu $M \times M$.

DEFINITION 1 (10.1.) — **Zweistellige Relation in einer Menge**

Eine **zweistellige Relation $\boldsymbol{R}$ in einer Menge $\boldsymbol{M}$** ist eine Abbildung *aus M in M*, sie ist eine Teilmenge der Produktmenge, also

$$R \subseteqq M \times M.$$

Umgekehrt stellt jede Teilmenge R von $M \times M$ eine Relation in M dar.

Damit haben wir den Begriff „Relation“ und können ihn in weiteren Beispielen anwenden, wobei wir folgende Schreib- und Sprechweisen verabreden, die alle dasselbe zum Ausdruck bringen.
$m_1\, R\, m_2$ gelesen als „m_1 *Relation* m_2“ oder auch nur „$m_1\, R\, m_2$“ bedeutet:
Zwischen m_1 und m_2 besteht die Relation R.
$[m_1; m_2] \in R$ (gelesen als „*das geordnete Paar* $[m_1; m_2]$ *ist Element der Menge* R“) bedeutet:
Das Paar $[m_1; m_2]$ hat eine bestimmte durch R charakterisierte Eigenschaft.

Zu Beispiel 3 (10.1.):

$$3\, R_2\, 3; \quad 3 \mid 3; \quad [3;3] \in R_2; \quad [3;3] \in \ |$$

Wir haben erkannt, daß sich der Relationsbegriff also auch mit den Mitteln der Mengenlehre erfassen und beschreiben läßt.
In der Mathematik versteht man unter einer Relation nicht nur schlechthin das Bestehen einer „Beziehung" zwischen den Elementen einer Menge, sondern die Menge aller entsprechend gebildeten geordneten Paare.

BEISPIEL 4 (10.1.):
Eine Familie bestehe aus Vater (v), Mutter (m) und Sohn (s), und der Vater erhalte einen FDGB-Ferienplatz für seine Familie. Wenn man jetzt die Relation R_3 „erhält einen Ferienplatz für" betrachtet, so kann man feststellen, der Vater erhält je einen Ferienscheck für sich, für die Mutter und für den Sohn. Dieser Sachverhalt läßt sich durch

$$R_3 = \{[v; v],\ [v; m],\ [v; s]\}$$

darstellen.

BEISPIEL 5 (10.1.):
Die Menge M_g sei die Menge aller Geraden g einer Ebene und die Relation R_4 die **Parallelität von Geraden** ($||$). Zwei beliebig herausgegriffene Geraden g_1 und g_2 stehen dann entweder in dieser Relation oder nicht, d. h., zwei Geraden sind zueinander parallel oder nicht. Für parallele Geraden gilt die Relation

$$R_4 = \{[g_1; g_2] \in M_g \times M_g; \quad g_1 || g_2\}.$$

BEISPIEL 6 (10.1.):
In der Menge N sei die Relation

$$R_5 = \{[0;1],\ [1;2],\ [2;3],\ [3;4], \ldots, [n; n+1], \ldots\}$$

erklärt. Wie man erkennt, ist das jeweils zweite Element im Paar stets die auf das erste Element folgende natürliche Zahl; es handelt sich bei R_5 um die **Nachfolgerrelation**. Man kann in solchen Fällen versuchen, die betreffende Relation mit Hilfe einer Aussageform darzustellen, die die Beziehung zwischen dem ersten und zweiten Element eines jeden geordneten Paares beschreibt.

Da Relationen Mengen sind, lassen sie sich auch mengentheoretisch vergleichen.

BEISPIEL 7 (10.1.):
In der Menge der natürlichen Zahlen sei

$$R = \{[a; b] \in N \times N; \quad a \mid b\};$$
$$S = \{[a; b] \in N \times N; \quad a \leqq b\}.$$

Dann gilt: $R \subseteqq S$.

Ebenso ist man berechtigt, von **Vereinigung der Relationen R und S** und vom **Durchschnitt der Relationen R und S** zu sprechen.

In den bisherigen Betrachtungen haben wir uns darauf beschränkt, Relationen zwischen den Elementen *einer* Menge zu untersuchen.
Der allgemeinere Fall, auf den wir aber nicht weiter eingehen werden, ist der, daß zweistellige Relationen zwischen den Elementen von *zwei verschiedenen* Mengen betrachtet werden.

DEFINITION 2 (10.1.) — **Zweistellige Relation zwischen zwei verschiedenen Mengen**
Eine zweistellige Relation R zwischen den Mengen M_1 und M_2 ist eine Teilmenge der Produktmenge $M_1 \times M_2$, also $R \subseteqq M_1 \times M_2$.
Umgekehrt stellt jede Teilmenge R von $M_1 \times M_2$ eine Relation zwischen den Mengen M_1 und M_2 dar.
Dann heißen die wie folgt erklärten Teilmengen von M_1 bzw. M_2 der **Definitionsbereich $D(R)$** oder **Vorbereich** von R bzw. **Wertebereich $W(R)$** oder **Nachbereich** von R.

$$D(R) = \{m_1 \in M_1;\ \exists\, m_2\, (m_2 \in M_2 \wedge [m_1; m_2] \in R)\}$$
$$W(R) = \{m_2 \in M_2;\ \exists\, m_1\, (m_1 \in M_1 \wedge [m_1; m_2] \in R)\}$$

Die Begriffe „Vorbereich“ und „Nachbereich“ werden sinngemäß auch auf Relationen in einer Menge übertragen.

BEISPIEL 8 (10.1.):

$$M_1 = \{1, 2, 3\}; \qquad M_2 = \{4, 5, 6\}; \qquad R_6 = \ |$$
$$R_6 = \{[1; 4], [1; 5], [1; 6], [2; 4], [2; 6], [3; 6]\}$$
$$D(R_6) = M_1, \qquad W(R_6) = M_2$$

BEISPIEL 9 (10.1.):

$$M = \{4, 5, 6\}; \qquad R_7 = \ >$$
$$R_7 = \{[5; 4], [6; 4], [6; 5]\}$$
$$D(R_7) = \{5, 6\} \subset M, \qquad W(R_7) = \{4, 5\} \subset M$$

Der Relationsbegriff läßt sich auch auf n-stellige Relationen in einer Menge M erweitern.

DEFINITION 3 (10.1.) — **N-stellige Relation**
Eine **n-stellige Relation R** in einer Menge M ist eine Teilmenge der Produktmenge $M \times M \times \cdots \times M = M^n$.

Es folgen *spezielle* Relationen, die in jeder Menge erklärt sind.

Nullrelation (leere Relation): $R_0 =_{\mathrm{Def}} \emptyset$
Allrelation: $R_a =_{\mathrm{Def}} M \times M$
Identische Relation: $R_1 =_{\mathrm{Def}} \{[m; m];\quad m \in M\}$

Wichtig ist auch der Begriff der *inversen Relation.*

DEFINITION 4 (10.1.) — **Inverse Relation**
In der Menge M sei die Relation $R = \{[m_1; m_2] \in M \times M\}$ definiert.
Dann heißt die **Relation**
$$R^{-1} = \{[m_2; m_1] \in M \times M;\quad [m_1; m_2] \in R\}$$
die zu R **inverse Relation.**

Als Beispiel betrachte man die in der Menge N erklärte $<$- bzw. $>$-Relation

10.2. Eigenschaften von zweistelligen Relationen

Wir werden im folgenden wichtige **Eigenschaften zweistelliger Relationen** kennenlernen.

BEISPIEL 1 (10.2.):
In der Menge N sei die zu untersuchende Relation R die **Gleichheit**.
Wie man sieht, ist jede natürliche Zahl sich selbst gleich.

$$a = a \qquad \text{bzw.} \qquad a\,R\,a$$

Wenn weiterhin eine natürliche Zahl gleich einer zweiten ist, dann ist auch die zweite gleich der ersten.

$$a = b \rightarrow b = a \qquad \text{bzw.} \qquad a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a$$

Ist schließlich eine natürliche Zahl gleich einer zweiten und diese gleich einer dritten, dann ist auch die erste gleich der dritten.

$$a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$$

Diese drei Eigenschaften einer Relation haben wir bereits bei der Relation „Gleichmächtigkeit von Mengen" kennengelernt.

DEFINITION 1 (10.2.) — **Reflexivität**
Eine in der Menge M erklärte zweistellige Relation R heißt **reflexiv** genau dann, wenn für alle Elemente von M gilt:
$a\,R\,a$.

DEFINITION 2 (10.2.) — **Symmetrie**
Eine Relation R in M heißt **symmetrisch** genau dann, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:
$a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a$.

DEFINITION 3 (10.2.) — **Transitivität**
Eine Relation R in M heißt **transitiv** genau dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:
$(a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \rightarrow a\,R\,c$.

BEISPIEL 2 (10.2.):
In der Menge N werde die **$<$-Relation** untersucht.
Diese Relation ist **transitiv**.
Sie hat aber außerdem noch drei weitere Eigenschaften.
Für jede natürliche Zahl a gilt, daß sie nicht kleiner als a ist. Wenn eine natürliche Zahl a kleiner als eine zweite Zahl b ist, dann gilt $b < a$ bestimmt nicht. Beim Vergleich zweier beliebig herausgegriffener natürlicher Zahlen a und b kann

$$a < b \qquad \text{oder} \qquad b < a \qquad \text{oder} \qquad a = b$$

sein.

DEFINITION 4 (10.2.) — **Irreflexivität**
Eine Relation R in M heißt **irreflexiv** genau dann, wenn kein Element zu sich selbst in der Relation steht, d. h.:
$\sim(a\,R\,a)$ für jedes $a \in M$.

DEFINITION 5 (10.2.) — **Asymmetrie**
Eine Relation R in M heißt **asymmetrisch** genau dann, wenn für kein Paar $[a; b]$ zugleich $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ gilt, d. h., es gilt:
$a\,R\,b \rightarrow \sim b\,R\,a$ für alle $a, b \in M$.

DEFINITION 6 (10.2.) — **Konnexität**
Eine Relation R in M heißt **konnex** genau dann, wenn mindestens einer der drei Fälle eintritt:
$a\,R\,b$, $b\,R\,a$, $a = b$ für beliebige $a, b \in M$.

Ferner lernen wir noch zwei weitere Eigenschaften kennen.

DEFINITION 7 (10.2.) — **Antisymmetrie**
Eine Relation R heißt **antisymmetrisch** genau dann, wenn aus der gleichzeitigen Gültigkeit von $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ stets die Gleichheit der Elemente folgt, d. h., es gilt:
$(a\,R\,b \wedge b\,R\,a) \rightarrow a = b$ für alle $a, b \in M$.

DEFINITION 8 (10.2.) — **Linearität**
Eine Relation R in M heißt **linear** genau dann, wenn mindestens einer der beiden Fälle $a\,R\,b$ oder $b\,R\,a$ eintritt, d. h., es gilt:
$a\,R\,b \vee b\,R\,a$ für alle $a, b \in M$.

Vor allem kommt es nun darauf an, den *Inhalt* dieser Eigenschaften voll zu erfassen, um sich anwendungsbereites Wissen zu erwerben.
Beim Ermitteln der Eigenschaften von Relationen ist zu beachten, daß die jeweilige Eigenschaft *allen* Elementen zukommt, die die entsprechenden Voraussetzungen erfüllen. Ein Trugschluß ist es z. B. anzunehmen, eine Relation sei irreflexiv, wenn sie die Eigenschaft Reflexivität nicht hat. Es gibt Relationen, die weder reflexiv noch irreflexiv sind (↗ Beispiel 4 (10.1.)). Im Graph der Relation widerspiegelt sich das so, daß bei Reflexivität *jeder* Punkt und bei Irreflexivität *kein einziger* eine Schleife trägt (↗ Beispiele 3 (10.1.) und 2 (10.1.)).
Ähnlich problematisch ist es bei den Eigenschaften Symmetrie, Asymmetrie und Antisymmetrie. Eine Relation kann entweder symmetrisch oder nicht symmetrisch sein. Wenn das letztere zutrifft, untersuchen wir sie auf die Eigenschaften Asymmetrie bzw. Antisymmetrie hin. Wir denken an die schon im Beispiel 2 (10.2.) erwähnte $<$-Relation, die sicher nicht symmetrisch ist. Da unter der Voraussetzung $a < b$ niemals $b < a$ sein kann, ist diese Relation also **asymmetrisch**. Es sei aber auch hier darauf hingewiesen, daß es Relationen gibt, die weder symmetrisch, noch asymmetrisch oder antisymmetrisch sind (↗ Relation im Beispiel 4 (10.1.)).

Wir betrachten nunmehr die **$\leqq$-Relation in der Menge N.**

$$a \leqq b =_{\text{Def}} \exists\, c\,(a + c = b)$$

Sie ist nicht symmetrisch, da die Implikation $a \leqq b \rightarrow b \leqq a$ nicht für alle a und b gilt, nämlich nicht für $a \neq b$. Sie ist auch *nicht* asymmetrisch, denn die Implikation $[a \leqq b \rightarrow \sim (b \leqq a)]$ ist ebenfalls nicht allgemeingültig, sie gilt nicht für $a = b$.

Es liegt eine **antisymmetrische Relation** vor. Für alle a und b folgt unter Voraussetzung der Gültigkeit der Konjunktion $a \leqq b \wedge b \leqq a$ das Bestehen der Beziehung $a = b$.

BEISPIEL 3 (10.2.):
In der Menge M_g aller Geraden g einer Ebene sei die Relation **steht senkrecht auf** ($\perp$) erklärt. Welche Eigenschaften hat sie?
Die Relation ist nicht reflexiv, da eine Gerade nicht senkrecht auf sich selbst stehen kann. Sie ist **irreflexiv**, da für alle Geraden g gilt:

$$\sim (g \perp g).$$

Die Relation ist **symmetrisch**, da für alle Geraden g_1, g_2 gilt:

$$(g_1 \perp g_2) \rightarrow (g_2 \perp g_1).$$

Sie ist nicht transitiv, denn es gilt für alle Geraden g_1, g_2, g_3:

$$[(g_1 \perp g_2) \wedge (g_2 \perp g_3)] \rightarrow g_1 \,||\, g_3, \qquad \text{also} \qquad \sim (g_1 \perp g_3).$$

Da diese Relation symmetrisch ist, kann sie also weder asymmetrisch noch antisymmetrisch sein. Die Relation ist nicht konnex, da es nicht nur die drei Möglichkeiten $g_1 \perp g_2$, $g_2 \perp g_1$, $g_1 = g_2$ gibt. Geraden können ganz beliebig zueinander liegen.
Somit ist diese Relation irreflexiv und symmetrisch.

Zusammenfassung:

Wenn M eine Menge und R eine Relation in M ist, dann kann diese Relation einige der folgenden Eigenschaften haben.
Die Relation R ist

reflexiv,	wenn $\forall a\,(a\,R\,a)$ gilt;
irreflexiv,	wenn $\forall a\,[\sim (a\,R\,a)]$ gilt;
transitiv,	wenn $\forall a \forall b \forall c\,([a\,R\,b \wedge b\,R\,c] \rightarrow a\,R\,c)$ gilt;
symmetrisch,	wenn $\forall a \forall b\,(a\,R\,b \rightarrow b\,R\,a)$ gilt;
asymmetrisch,	wenn $\forall a \forall b\,[a\,R\,b \rightarrow \sim (b\,R\,a)]$ gilt;
antisymmetrisch,	wenn $\forall a \forall b\,([a\,R\,b \wedge b\,R\,a] \rightarrow a = b)$ gilt;
konnex,	wenn $\forall a \forall b\,(a\,R\,b \vee b\,R\,a \vee a = b)$ gilt;
linear,	wenn $\forall a \forall b\,(a\,R\,b \vee b\,R\,a)$ gilt.

Bemerkung:
Die Unterscheidung von Konnexität und Linearität wird in der mathematischen Literatur teilweise nicht vorgenommen, man spricht dann nur von Linearität.

10.3. Ordnungsrelationen

Wir erinnern uns, unter welchen Gesichtspunkten wir bisher Mengen betrachteten. Anfangs interessierten uns nur die Mengen als *Gesamtheiten* von bestimmten Elementen. Dann gingen wir dazu über, *Beziehungen* zwischen den einzelnen Elementen einer Menge zu untersuchen.
Nun soll untersucht werden, *ob* bzw. *wie* sich die Elemente einer Menge nach gewissen Prinzipien ordnen lassen.
Es wird sich zeigen, daß dies in engem Zusammenhang mit den oben eingeführten Eigenschaften von Relationen steht; denn wenn man innerhalb einer Menge eine **Ordnung** schaffen will, muß man irgendeine Beziehung zugrundelegen, nach der

entschieden werden kann, welches von je zwei Elementen in der Reihenfolge zuerst aufgeführt werden soll.
So kann man z. B. versuchen, die Schüler einer Klasse nach Alter, Körpergröße usw. zu ordnen. Notwendige Bedingung dafür, daß eine Menge durch eine Relation geordnet werden kann, ist die **Vergleichbarkeit** ihrer Elemente.
Zwei (nicht notwendig verschiedene) Elemente einer Menge M heißen hierbei **vergleichbar bezüglich der Relation R**, wenn sie im Graph der Relation (↗ 183) durch eine **gerichtete Kante (Pfeil)** miteinander verbunden werden können bzw. wenn sie ein **geordnetes Paar** bilden, das zur Relation gehört. Unvergleichbare Elemente sind dann durch keine gerichtete Kante verbunden.

BEISPIEL 1 (10.3.):
Gegeben sei die **Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$** der Menge $M = \{a, b, c\}$, also

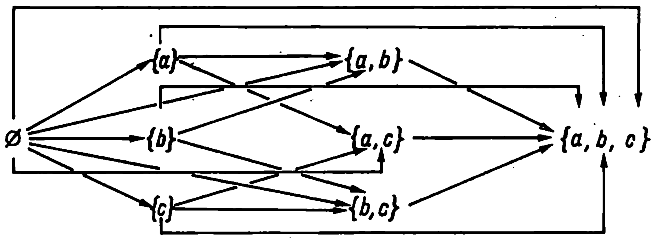
$$\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

In $\mathfrak{P}(M)$ untersuchen wir als Relation die **Inklusion ($\subseteqq$)**.
Es gilt z. B.:

$$\begin{array}{rlcrl} \{a\} & \subseteqq \{a, c\} & \qquad & \{b\} & \nsubseteqq \{a, c\} \\ \{a\} & \subseteqq \{a, b, c\} & & \{a, b\} & \nsubseteqq \{b, c\} \\ \emptyset & \subseteqq \{c\} & & \{a\} & \nsubseteqq \{b, c\} \end{array}$$

Man sieht, daß etwa $\{a\}$ und $\{a, c\}$ bezüglich der Inklusion vergleichbar, $\{a\}$ und $\{b, c\}$ hingegen unvergleichbar sind. Es existieren also in $\mathfrak{P}(M)$ in bezug auf die $\subseteqq$ -Relation vergleichbare und unvergleichbare Elemente. Wollte man nun mit diesem Prinzip eine Reihenfolge innerhalb $\mathfrak{P}(M)$ festlegen, so merkte man, daß dies nicht durchweg möglich ist. Entscheidbar ist etwa, daß die leere Menge ganz am Anfang kommen müßte, da sie Teilmenge jeder der anderen Mengen ist, daß weiterhin z. B. $\{a\}$ vor $\{a, b, c\}$ stehen müßte.
Welcher der beiden Mengen $\{a, b\}$ und $\{b, c\}$ soll aber nun der Vorrang gegeben werden? Das ist in diesem Falle nicht erklärt.

Man kann für die Teilmengenbeziehung einen Graph angeben. Nichtvergleichbare Teilmengen von M sind dann durch keinen Pfeil miteinander verbunden (Bild 190/1).



190/1

Aus Gründen einer besseren Übersicht sind die Schleifen an jeder Menge nicht eingezeichnet; denn jede dieser Mengen ist ja eine Teilmenge von sich selbst.

BEISPIEL 2 (10.3.):
Wir denken uns eine Menge von fünf Schülern verschiedenen Alters.

$$M = \{\underset{\substack{| \\ 10\ \text{J.}}}{s_1}, \quad \underset{\substack{| \\ 15\ \text{J.}}}{s_2}, \quad \underset{\substack{| \\ 13\ \text{J.}}}{s_3}, \quad \underset{\substack{| \\ 8\ \text{J.}}}{s_4}, \quad \underset{\substack{| \\ 11\ \text{J.}}}{s_5}\}$$

Untersucht wird die Relation „ist jünger als". Wir erkennen, daß hinsichtlich dieser Beziehung *alle* Schüler vergleichbar sind und demzufolge in M eine entsprechende Reihenfolge hergestellt werden kann.

$$M = \{s_4, s_1, s_5, s_3, s_2\}$$

Hätten aber einige Schüler das gleiche Alter gehabt, so wäre an die Herstellung einer solchen Reihenfolge nicht zu denken gewesen.

Für die Herstellung einer **Ordnung in einer Menge** ist eine ganz bestimmte Art von Relationen zuständig, die wir aus diesem Grund auch als **Ordnungsrelationen** bezeichnen.
Derartige Relationen zeichnen sich durch Eigenschaften aus, auf die im folgenden näher eingegangen werden soll.

Wir können sagen: Eine Menge M heißt **geordnet** genau dann, wenn in ihr eine **Ordnungsrelation** $\boldsymbol{R}$ erklärt ist.
Welche Eigenschaften sind für Ordnungsrelationen charakteristisch?

BEISPIEL 3 (10.3.):
Wir wollen uns einen möglichen Typ einer Ordnungsrelation klarmachen und stellen uns vor, es sei eine Menge Bücher im Regal zu ordnen.
Dabei ist jeweils zu entscheiden, welches Buch bei einem gewissen Einteilungsprinzip vor welchem stehen soll. Es kann sicher kein Buch vor sich selbst stehen, also ist die Relation **irreflexiv**.
Wenn man irgendein Buch a vor Buch b und Buch b vor Buch c eingeordnet hat, dann steht doch sicher auch Buch a vor Buch c; das bedeutet **Transitivität** der Relation. Weiterhin ist die Relation **asymmetrisch**, da, wenn ein Buch vor einem anderen steht, das Umgekehrte nicht der Fall sein kann. Und schließlich tritt noch die Eigenschaft **Konnexität** auf. Für zwei voneinander verschiedene Bücher muß „Buch a vor Buch b" oder „Buch b vor Buch a" gelten.

DEFINITION 1 (10.3.) — **Irreflexive Ordnungsrelation**
Eine Relation R heißt **irreflexive Ordnungsrelation** genau dann, wenn sie irreflexiv, transitiv und konnex ist.

Bemerkung:
Ist R eine irreflexive Ordnungsrelation und sind a, b Elemente von M, die in der Relation R stehen, d. h. $[a; b] \in R$ bzw. $a\,R\,b$, so sagt man: „a steht vor b" bzw. „a geht b voran" und schreibt
$a \prec b$.

SATZ 1 (10.3.)
Jede irreflexive Ordnungsrelation ist asymmetrisch.

Beweis (indirekt):
R sei eine irreflexive Ordnungsrelation in M.
Wir nehmen an, sie sei nicht asymmetrisch.
Dann müßte mindestens einmal $a\,R\,b$ und $b\,R\,a$ zugleich gelten.
Auf Grund der Transitivität folgte daraus $a\,R\,a$, was aber im Widerspruch zur Irreflexivität steht.
Mithin war die Annahme falsch, und die Behauptung ist bewiesen. q. e. d.

Bemerkung:
Die Konnexität läßt sich mit Hilfe der Asymmetrie und Irreflexivität noch weiter zur **Trichotomie** verschärfen.
Es gilt *genau einer* der drei Fälle.

$$a\,R\,b \quad \text{oder} \quad b\,R\,a \quad \text{oder} \quad a = b$$

Die Trichotomie besagt, daß von zwei verschiedenen Elementen a und b einer geordneten Menge genau eines dem anderen in der Relation R vorangeht.

Eine **Ordnungsrelation** kann aber auch **reflexiv** sein.

DEFINITION 2 (10.3.) — **Reflexive Ordnungsrelation**
Eine Relation R heißt **reflexive Ordnungsrelation** genau dann, wenn sie reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear ist.

Es läßt sich zeigen, daß hier die Linearität (ähnlich wie oben die Konnexität) garantiert, daß wirklich alle Elemente einer Menge entsprechend der vorliegenden Relation eingeordnet werden können. Wie wir aus Beispiel 1 (10.3.) entnehmen konnten, gibt es Relationen, die nur zu einer teilweisen Ordnung in einer Menge führen. Das liegt daran, daß die Eigenschaften Konnexität bzw. Linearität nicht vorliegen, auf deren Bedeutung oben hingewiesen wurde.

DEFINITION 3 (10.3.) — **Irreflexive Halbordnungsrelation**
Eine Relation R heißt **irreflexive Halbordnungsrelation** genau dann, wenn sie irreflexiv und transitiv ist.

DEFINITION 4 (10.3.) — **Reflexive Halbordnungsrelation**
Eine Relation R heißt **reflexive Halbordnungsrelation** genau dann, wenn sie reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

Außer Halbordnungs- und Ordnungsrelationen betrachten wir noch einen weiteren Typ von Ordnungsrelationen, der für die Erklärung der **Ordinalzahlen** (↗ Teil C „Aufbau der Zahlenbereiche") von entscheidender Bedeutung ist.

DEFINITION 5 (10.3.) — **Wohlordnung**
Eine geordnete Menge M heißt **wohlgeordnet bezüglich einer Ordnungsrelation R** genau dann, wenn jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein erstes Element hat, d. h. ein solches, das allen anderen Elementen vorangeht.

Wir sprechen von einer **irreflexiven Wohlordnungsrelation** bzw. von einer **reflexiven Wohlordnungsrelation**, wenn zu den Eigenschaften der entsprechenden Ordnungsrelationen noch die in der Definition 5 (10.3.) genannte Eigenschaft hinzukommt.
Es zeigt sich, daß die Struktur einer wohlgeordneten Menge besonders einfach ist. In ihr hat jedes Element einen Nachfolger. Das ergibt sich daraus, daß die Teilmenge aller Elemente, die auf irgendein Element der Menge folgen, ein erstes Element hat.

Schließlich sei nur noch darauf verwiesen, daß **jede endliche geordnete Menge auch wohlgeordnet** ist.

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse lassen sich in einer Übersicht zusammenstellen.

Ordnungsrelationen			
Irreflexivität Transitivität Asymmetrie	Irreflexive Halbordnungsrelation *Konnexität*	Irreflexive Ordnungsrelation *Jede Teilmenge hat ein erstes Element.*	Irreflexive Wohlordnungsrelation
Reflexivität Transitivität Antisymmetrie	Reflexive Halbordnungsrelation *Linearität*	Reflexive Ordnungsrelation *Jede Teilmenge hat ein erstes Element.*	Reflexive Wohlordnungsrelation

BEISPIEL 4 (10.3.):
Die endliche Menge

$$M = \{9, 12, 13, 16\}$$

ist durch die $<$-Relation geordnet. Es gilt u. a.:

$$9 < 12; \quad 9 < 13; \quad 13 < 16,$$

d. h.:

$$9 \prec 12; \quad 9 \prec 13; \quad 13 \prec 16.$$

Dieselbe Menge kann aber auch durch die „$>$“-Relation geordnet sein.

$$M = \{16, 13, 12, 9\}$$

Es gilt u. a.:

$$16 > 13; \quad 13 > 9; \quad 12 > 9,$$

d. h.:

$$16 \prec 13; \quad 13 \prec 9; \quad 12 \prec 9.$$

SATZ 2 (10.3.)
Die **Inklusion (echte Teilmengenbeziehung)** zwischen Mengen ist eine **irreflexive Halbordnungsrelation** im Bereich der Mengen einer bestimmten Stufe.

Beweis:
Es ist zu zeigen, daß die $\subset$**-Relation** irreflexiv und transitiv ist. Nach Satz 1 (10.3.) braucht die Asymmetrie nicht gesondert bewiesen zu werden.
Irreflexivität:
Für beliebige Mengen M eines Mengensystems gilt:
M ist nicht echt in sich selbst enthalten (nach (Definition der $\subset$-Beziehung zwischen Mengen).
Transitivität:
Für beliebige Mengen M_1, M_2, M_3 eines Mengensystems gilt:

$$(\overset{(1)}{M_1 \subset M_2} \wedge \overset{(2)}{M_2 \subset M_3}) \rightarrow M_1 \subset M_3$$

Für ein beliebiges, aber fest gewähltes Element $m \in M_1$ gilt laut Definition:

(1) $m \in M_1 \rightarrow m \in M_2$;
(2) $m \in M_2 \rightarrow m \in M_3$.

Aus (1) und (2) folgt wegen der Transitivität der Implikation (↗ 3.5.) $m \in M_1 \rightarrow m \in M_3$, d. h.:

$$M_1 \subseteqq M_3 .$$

Da $M_1 \subset M_2$, muß es ein m_2 geben, für das gilt:

$$m_2 \in M_2 \wedge m_2 \notin M_1 .$$

Wegen $M_2 \subset M_3$ ist auch $m_2 \in M_3$.
Daraus ergibt sich:

$M_1 \neq M_3$ und damit also $M_1 \subset M_3$.

Somit ist die Transitivität bewiesen.

SATZ 3 (10.3.)
Die $\leqq$-**Relation** in der Menge P
ist eine **reflexive Ordnungsrelation.**

Beweis:
Es ist zu zeigen, daß diese Relation reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear ist.

Reflexivität:
Für ein beliebiges $a \in P$ gilt $a \leqq a$, denn laut Definition muß es dann ein $c \in P$ geben, so daß gilt $a + c = a$. Das ist mit $c = 0$ erfüllt.

Transitivität:
Für beliebige reelle Zahlen a, b, c gilt:

$$(\overset{(1)}{a \leqq b} \wedge \overset{(2)}{b \leqq c}) \rightarrow a \leqq c .$$

Nach Definition bedeutet

(1) $a + x = b$ mit $x \geqq 0$;
(2) $b + y = c$ mit $y \geqq 0$.

Aus (1) und (2) folgt nach Einsetzen $a + (x + y) = c$ mit $x + y \geqq 0$ und somit also $a \leqq c$.

Antisymmetrie:
Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt:

$$(\overset{(1)}{a \leqq b} \wedge \overset{(2)}{b \leqq a}) \rightarrow a = b .$$

Nach Anwenden der Definition bekommt man aus (1)

$a + x = b$ mit $x \geqq 0$ und aus (2)
$b + y = a$ mit $y \geqq 0$, woraus folgt:
$a + (x + y) = a$ mit $(x + y) = 0$.

Wegen $x \geqq 0 \wedge y \geqq 0$ folgt $x = 0 \wedge y = 0$, und damit ist die Behauptung $a = b$ bewiesen.

Linearität:
Für zwei beliebige reelle Zahlen a, b trifft stets eine der beiden Möglichkeiten $a \leqq b$ oder $b \leqq a$ zu, eine andere Möglichkeit gibt es nicht (hier ohne Beweis).

Wie sich sofort aus der Betrachtung der Eigenschaften von Ordnungsrelationen ergibt, ist **jede Ordnungsrelation** natürlich **auch eine Halbordnungsrelation, aber nicht umgekehrt.**

10.4. Äquivalenzrelationen

Wir haben im Teil B 10.3. gesehen, daß Eigenschaften, die eine Relation haben kann, in verschiedenen Kombinationen auftreten und sind dabei auf den wichtigen Typ **Ordnungsrelation** gestoßen.

Eine weitere Art von Relationen lernen wir im Beispiel 1 (10.4.) kennen.

BEISPIEL 1 (10.4.):
Gegeben sei die Menge

$$M = \{12, 21, 11, 2, 13, 201, 110, 40, 10, 41\},$$

und die Relation heiße **„a hat dieselbe Quersumme wie b"**.

Quersumme	Zahlen
1	10
2	2, 11, 110
3	12, 21, 201
4	13, 40
5	41

Wir wollen jeweils alle die Elemente, die die gleiche Quersumme haben, zu Mengen zusammenfassen und erhalten:

$M_1 = \{10\}$; $M_2 = \{2, 11, 110\}$;
$M_3 = \{12, 21, 201\}$; $M_4 = \{13, 40\}$;
$M_5 = \{41\}$.

Es ist ersichtlich, daß jedes Element von M zu genau einer der entstandenen Teilmengen M_i von M gehört und daß sich dabei die Menge M erschöpft. Alle diese (disjunkten) Teilmengen ergeben zusammen wieder die Ausgangsmenge.

BEISPIEL 2 (10.4.):
In der Menge der Kinder eines Wohnbezirks sei die Relation **„a hat dieselben Eltern wie b"** erklärt (irgendwelche familiären „Sonderfälle" seien dabei ausgeschlossen).
Wie man sich leicht überzeugen kann, tritt hier etwas Entsprechendes wie im Beispiel 1 (10.4.) auf. Es entstehen ebenfalls lauter Teilmengen, in denen jeweils die Kinder zusammengefaßt sind, die dieselben Eltern haben. Jede dieser Teilmengen hat *mindestens ein* Element. Sie hat *genau ein* Element, wenn ein Kind keine Geschwister hat. Es ist aber keine der Teilmengen leer.

Was zeigen uns die Beispiele 1 (10.4.) und 2 (10.4.)? Welche Eigenschaften sind für derartige Relationen charakteristisch?

Wir sehen uns noch einmal das Beispiel 2 (10.4.) an.
Ein Kind a hat doch selbstverständlich die gleichen Eltern wie es selbst. Wenn ein Kind a dieselben Eltern hat wie Kind b (Bruder oder Schwester), dann ist auch das Umgekehrte der Fall. Hat schließlich irgendein Kind a dieselben Eltern wie b und b dieselben wie c, dann haben auch die Kinder a und c gleiche Eltern. Das sind aber gerade die uns schon bekannten Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

DEFINITION 1 (10.4.) — **Äquivalenzrelation**
Eine Relation R heißt **Äquivalenzrelation** genau dann, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Liegt eine solche Äquivalenzrelation R vor, so schreiben wir statt $a\,R\,b$ jetzt $a \sim b$ (gelesen als: **„a äquivalent b"**).

So sind etwa im Beispiel 1 (10.4.) die natürlichen Zahlen 12, 21, 201 im Sinne der dortigen Relation äquivalent, da sie alle die gleiche Quersumme (nämlich 3) haben.

SATZ 1 (10.4.)
Die Gleichmächtigkeit von Mengen (↗ Definition 1 (9.7.)) ist in $\mathfrak{M}$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis:
Zu zeigen ist die Gültigkeit der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

(1) Für jede Menge M kann eine Abbildung F *von* M *auf* M angegeben werden, die eineindeutig ist, z. B. die identische Abbildung

$$F = \{[a; b] \in M \times M; \quad a = b\}.$$

Also ist die Relation *reflexiv.*

(2) Wenn $M_1 \sim M_2$ ist, so existiert eine eineindeutige Abbildung F *von* M_1 *auf* M_2. F^{-1}, die inverse Abbildung von F, ist dann eine eineindeutige Abbildung von M_2 auf M_1.
Folglich liegt *Symmetrie* vor.

(3) Wenn $M_1 \sim M_2$ ist, so existiert eine eineindeutige Abbildung F_1 *von* M_1 *auf* M_2. Wenn $M_2 \sim M_3$ ist, so existiert eine eineindeutige Abbildung F_2 *von* M_2 *auf* M_3. Wir bilden jetzt die Abbildung $E_3 = F_1 \circ F_2$ (↗ 174 „Verkettung von Funktionen"). Da der Wertebereich von F_1 und der Definitionsbereich von F_2 übereinstimmen, gehört zu jedem $a \in M_1$ eineindeutig ein $b \in M_3$. F_3 ist somit eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_3.
Damit ist die *Transitivität* gezeigt. q. e. d.

Die Bedeutung der Äquivalenzrelationen bringt der Satz 2 (10.4.) zum Ausdruck.

SATZ 2 (10.4.) — **Hauptsatz für Äquivalenzrelationen**
Jede in einer Menge M definierte **Äquivalenzrelation** $\boldsymbol{R}$ führt zu einer Zerlegung Z von M in nichtleere, paarweise elementfremde (disjunkte) Teilmengen M_i, deren Vereinigung die gesamte Menge M ist.

Die entstandenen Teilmengen M_i heißen **Äquivalenzklassen.** Jedes Element von M_i heißt **Vertreter (Repräsentant)** der Äquivalenzklasse M_i.

SATZ 2 (10.4.) (2. Formulierung)
Jede in einer Menge M definierte **Äquivalenzrelation** $\boldsymbol{R}$ zerlegt die Menge M in Teilmengen M_i, wobei
(1) $M_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$;
(2) $M_i \cap M_k = \emptyset$ für $i \neq k$;
(3) $M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_i \cup \cdots = M$.

Beweis des Satzes 2 (10.4.) (2. Formulierung):
Zu zeigen ist die Gültigkeit von (1), (2) und (3).
Zu (1):
Man wähle ein beliebiges, aber festes Element m aus M und suche alle dazu äquivalenten Elemente, die dann eine Teilmenge M_i $(i = 1, 2, \ldots)$ von M bilden.

Diese Menge M_i ist sicher nicht leer, da auf Grund der Reflexivität $m \sim m$ gilt und somit M_i mindestens dieses eine Element m enthält.
Es kann auch der Sonderfall eintreten, daß eine einzige Äquivalenzklasse bereits die gesamte Menge erschöpft, nämlich dann, wenn alle Elemente von M einander äquivalent sind.

Zu (2):
Wäre $M_i \cap M_k \neq \emptyset$ für $M_i \neq M_k$, so gäbe es ein $m \in M$ mit $m \in M_i$ und $m \in M_k$. Das bedeutet $m \sim m_i$ für jedes $m_i \in M_i$ und $m \sim m_k$ für jedes $m_k \in M_k$. Wegen der Symmetrie ergibt sich $m_i \sim m$. Aus $m_i \sim m$ und $m \sim m_k$ folgt auf Grund der Transitivität $m_i \sim m_k$, das besagt aber: $M_i = M_k$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Mithin ist $M_i \cap M_k = \emptyset$ für $M_i \neq M_k$.

Zu (3):
Da jedes $m \in M$ einer der Teilmengen M_i angehört, gilt

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_i \cup \cdots \supseteqq M .$$

Andererseits ist stets $M_i \subseteqq M$, folglich

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_i \cup \cdots \subseteqq M ,$$

also

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_i \cup \cdots = M$$

(wegen der Antisymmetrie der Teilmengenrelation). q. e. d.

UMKEHRUNG zu SATZ 2 (10.4.)
Jede Zerlegung Z einer Menge M in nichtleere, paarweise disjunkte Teilmengen M_i, deren Vereinigung die Menge M ist, definiert eine **Äquivalenzrelation R in der Menge M**, deren Äquivalenzklassen die gegebenen Teilmengen von M sind.

Beweis der Umkehrung zu Satz 2 (10.4.):
Es liege eine vollständige Zerlegung Z der Menge M in paarweise disjunkte Teilmengen vor.
Jedes Element von M gehört aber genau einer dieser Teilmengen an.
Wir definieren in M eine Relation wie folgt.

$m_i \, R \, m_k$ genau dann, wenn m_i und m_k ein und derselben Teilmenge angehören.

Diese Relation R ist eine Äquivalenzrelation in M, denn es gilt:

(1) $m_i \, R \, m_i$ für jedes $m_i \in M$, da m_i derselben Teilmenge wie m_i angehört.
(2) Wenn $m_i \, R \, m_k$, d. h., wenn m_i derselben Teilmenge wie m_k angehört, so gehört auch m_k derselben Teilmenge wie m_i an, d. h., es ist $m_k \, R \, m_i$ für beliebige $m_i, m_k \in M$.
(3) Wenn $m_i \, R \, m_k$ und $m_k \, R \, m_l$, d. h., wenn m_i derselben Teilmenge wie m_k und m_k derselben Teilmenge wie m_l angehört, so gehören auch m_i und m_l zur selben Teilmenge. Also ist in diesem Falle auch $m_i \, R \, m_l$ für beliebige $m_i, m_l \in M$.

Die Äquivalenzklassen von R sind diejenigen Teilmengen von M, die alle einander äquivalenten Elemente von M umfassen, also die ursprünglich gegebenen Teilmengen von M.

Damit sind genau die drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Relation nachgewiesen; mithin muß es eine Äquivalenzrelation sein.

q. e. d.

Es sei noch einmal darauf verwiesen, daß es sich bei einer **Zerlegung** Z um ein **System von Teilmengen** handelt, also um eine **Teilmenge** von $\mathfrak{P}(M)$. Die Elemente von Z sind dabei die einzelnen Äquivalenzklassen.

SATZ 3 (10.4.)
Die Relation „a läßt bei Division durch m ($m \in G$) denselben Rest wie b" ist eine **Äquivalenzrelation.**

Beweis:
Zu zeigen ist die Gültigkeit der für Äquivalenzrelationen charakteristischen drei Eigenschaften.

(1) a läßt bei Division durch m denselben Rest wie a, denn $m | a - a$ bzw. $m | 0$ ist stets richtig; also ist die Relation *reflexiv*.
(2) Wenn a bei Division durch m denselben Rest wie b läßt, dann auch umgekehrt. Denn wenn $m | a - b$, dann auch $m | b - a = -(a - b)$, folglich liegt *Symmetrie* vor.
(3) Wenn a bei Division durch m denselben Rest wie b und b denselben Rest wie c läßt, dann lassen auch a und c denselben Rest bei Division durch m. Aus $m | a - b$ und $m | b - c$ folgt nämlich $m | (a - b) + (b - c)$, d. h., $m | a - c$, womit die *Transitivität* gezeigt ist.

q. e. d.

Bemerkung:
Die Relation **Restgleichheit** ist die sogenannte **Kongruenzrelation** ($\equiv$), die in der Menge der ganzen Zahlen (G) auch wie folgt definiert werden kann.

$a \equiv b \pmod{m} =_{Def} m | a - b$, d. h., es gibt ein $q \in G$ mit
$a = b + mq; \qquad a, b, m \in G$
(gelesen: „a kongruent b modulo „m", das bedeutet: „a und b sind bezüglich des festen Teilers m restgleich").

Eine ausführliche Behandlung der Zahlenkongruenz erfolgt im Stoffgebiet „Zahlentheorie".

BEISPIEL 3 (10.4.):
Wir betrachten in der Menge

$$M = \{0, 1, 2, \ldots, 12, 13, 14\}$$

die Äquivalenzrelation „läßt bei Division durch 3 ein und denselben Rest".

Zahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Rest	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Diese Relation zerlegt M in drei Äquivalenzklassen, denn es kann der Rest 0, 1 oder 2 auftreten.

$$M_1 = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$
$$M_2 = \{1, 4, 7, 10, 13\}$$
$$M_3 = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

Es ist ersichtlich, daß jedes Element von M zu genau einer der entstandenen Teilmengen M_i gehört und sich dabei die Menge M erschöpft. Alle diese disjunkten Teilmengen ergeben zusammen wieder die Ausgangsmenge. Die Klassen M_1, M_2, M_3 heißen in diesem Zusammenhang **Restklassen modulo 3.**

Wir erfuhren bereits, daß alle Elemente aus ein und derselben Klasse bezüglich der vorliegenden Relation untereinander äquivalent sind. Jede Klasse kann also durch ein beliebiges ihrer Elemente vertreten (repräsentiert) werden. So bilden etwa 0, 1, 2 im Beispiel 3 (10.4.) ein sogenanntes **Repräsentantensystem.** Die 0 vertritt alle Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 0 lassen, analog die 1 und 2. Natürlich hätten ebenso die Zahlen 12, 7, 5 oder andere Zahlen als Repräsentanten genommen werden können.

BEISPIEL 4 (10.4.):
In der Menge M aller Schüler einer Schule sei die Relation „geht in dieselbe Klasse wie" erklärt.
Man überzeugt sich leicht, daß diese Relation eine **Äquivalenzrelation** ist. Sie bewirkt genau die Einteilung der Menge der Schüler in die einzelnen Schulklassen. Auch hieran ließe sich der Inhalt des Hauptsatzes demonstrieren. Sollte sich dabei die gesamte Menge der Schüler schon in *einer* entstehenden Klasse erschöpfen, haben wir den Fall einer Einklassenschule, der in der DDR längst der Vergangenheit angehört.

Wenn wir das bisher Behandelte zusammenfassen, können wir feststellen, daß Äquivalenzrelationen und nur solche zu einer Zerlegung Z einer Menge M in Klassen führen. Dieser Übergang von einer Menge zur Menge ihrer Äquivalenzklassen hat eine sehr weitreichende Bedeutung in der Mathematik.

Wir wollen uns überlegen, wie man einen **Begriff** bildet.
Bekanntlich geschieht das so, daß man aus einer in Frage kommenden Menge alle die Elemente aussortiert, die gewisse gemeinsame charakteristische Eigenschaften haben, wobei Unwesentliches außer acht gelassen wird. Indem wir also von den (teils erheblichen) Unterschieden abstrahieren, gewinnen wir Begriffe.
Bei diesem **Abstraktionsprozeß** handelt es sich genau um den oben erwähnten Übergang von einer Menge zur Menge ihrer Äquivalenzklassen (laut Hauptsatz für Äquivalenzrelationen).

Welcher mathematische Vorgang spielt sich dabei ab?

1. Wir gehen von einer Menge M gewisser Elemente aus.
2. Wir erklären in M eine Äquivalenzrelation.
3. Wir fassen alle jeweils zueinander äquivalenten Elemente zu Klassen zusammen.
4. Wir ersetzen die Menge M von Individuen durch die aus den gerade gebildeten Klassen bestehende Menge Z.

Analog verfährt man bei einer Äquivalenzrelation in einem **Mengensystem $\mathfrak{M}$.**

BEISPIEL 5 (10.4.):
Gewinnung des Begriffes „natürliche Zahl"

1. Wir gehen von einem Mengensystem $\mathfrak{M}$ von endlichen Mengen 1. Stufe aus.
2. Wir erklären in $\mathfrak{M}$ die Äquivalenzrelation „Gleichmächtigkeit".
3. Wir fassen alle jeweils gleichmächtigen Mengen zu Klassen zusammen. Diese Klassen (endliche Kardinalzahlen) sind die natürlichen Zahlen.
4. Wir ersetzen das Mengensystem $\mathfrak{M}$ durch die Menge der natürlichen Zahlen (N).

Z. B. ist die natürliche Zahl 2 die Klasse aller Zweiermengen.
Bei diesem Abstraktionsprozeß ist die charakteristische Eigenschaft die Anzahl der Elemente einer Menge, wobei deren Art völlig belanglos ist.

BEISPIEL 6 (10.4.):
Gewinnung des Begriffes „Richtung"

1. Wir gehen von der Menge aller Geraden einer Ebene aus.
2. Wir erklären in der Menge die Äquivalenzrelation „Parallelität".
3. Wir fassen alle jeweils parallelen Geraden zu Klassen zusammen. Jede Klasse ist eine ganz bestimmte Richtung in der Ebene.
4. Wir ersetzen die Menge aller Geraden durch die Menge der entstandenen Klassen und bekommen die Menge aller Richtungen in einer Ebene.

Es sei noch hinzugefügt, daß *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* in der Geometrie ebenfalls *Äquivalenzrelationen* sind und zu ganz bestimmten Klasseneinteilungen in den jeweiligen Mengen ebener Figuren führen.

10.5. Der Isomorphiebegriff

Wir betrachten als nächstes den Begriff **Analogie**, der ebenfalls große Bedeutung in der Mathematik wie überhaupt in der Wissenschaft und im täglichen Leben hat.
Analogieschlüsse spielen u. a. bei wissenschaftlichen Untersuchungen eine besondere Rolle.

BEISPIEL 1 (10.5.):
Zwischen einer Funktion und ihrer graphischen Darstellung besteht eine Analogie.
Dabei entspricht jedem geordneten Paar der Funktion ein bestimmter Punkt der Ebene und umgekehrt den entsprechenden Punkten jeweils ein Paar der Funktion.

Besonders werden uns **Analogien zwischen Mengen** interessieren.
Wie Beispiel 1 (10.5.) zeigt, können die einander zugeordneten Mengen sehr verschiedenartig sein. Einmal sind die Elemente Zahlenpaare, zum anderen Kurvenpunkte, und zwischen diesen Mengen existiert eine eineindeutige Abbildung.

Es soll nun noch eine entscheidende Eigenschaft hinsichtlich der in den Mengen erklärten Operationen untersucht werden.

BEISPIEL 2 (10.5.):
g und u seien Restklassen modulo 2, d. h., g sei die Klasse aller ganzen Zahlen, die bei Division durch 2 den Rest 0 lassen, und u sei die Klasse, in der alle ganzen Zahlen liegen, die bei Division durch 2 den Rest 1 lassen.
Wir betrachten die Mengen

$$M_1 = \{+1, -1\} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \{g, u\}$$

einschließlich der in ihnen erklärten Multiplikation bzw. Addition.

Beide Mengen können folgendermaßen eineindeutig aufeinander abgebildet werden.

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \hline +1 & \text{———} & g \\ -1 & \text{———} & u \end{array}$$

Die Multiplikation in M_1 bzw. die Addition in M_2 kann man in folgenden „Strukturtafeln" darstellen.

	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

Wir sehen, daß das Produkt zweier Urbilder und die Summe ihrer Bilder gemäß der Abbildung F einander entsprechen.
Es ist gleichgültig, ob man zunächst in M_1 multipliziert und dann das Produkt abbildet oder ob man erst die Faktoren einzeln abbildet und dann deren Bilder in M_2 addiert.
Diese Tatsache wollen wir als **Operationstreue** bezeichnen.
Symbolisiert: $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$

$\bar{a}$ sei das Bild von a, $\bar{b}$ das Bild von b.

DEFINITION 1 (10.5.) — **Isomorphie**
Es seien zwei Mengen M_1 und M_2 mit je einer in ihnen erklärten zweistelligen Operation O_1 und O_2 vorgelegt.
M_1 und M_2 heißen **isomorph** bezüglich O_1 und O_2 genau dann, wenn es eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2 gibt, bei der die Operationen einander entsprechen bzw. sich übertragen.
Symbolisiert: $[M_1; O_1] \cong [M_2; O_2]$;
gelesen: „M_1 isomorph M_2 bezüglich der in beiden (Mengen) erklärten Operationen O_1 bzw. O_2"

BEISPIEL 3 (10.5.):
In der Menge der reellen Zahlen (P) betrachten wir die Operation Addition, in der Menge der positiven reellen Zahlen (P^*) die Multiplikation und folgende Abbildung von P auf P^*.

$$a \to \bar{a} = 10^a \quad \text{mit} \quad a \in P \quad \text{und} \quad \bar{a} \in P^*$$
$$b \to \bar{b} = 10^b \quad \text{mit} \quad b \in P \quad \text{und} \quad \bar{b} \in P^* \,.$$

Diese Abbildung ist **eineindeutig** und **operationstreu**, denn es gilt

$$a + b \to \overline{a + b} = 10^{a+b} = 10^a \cdot 10^b = \bar{a} \cdot \bar{b}\,.$$

Also ist $P \cong P^*$ bezüglich der obengenannten Operationen.
Bei Zahlenmengen bedeutet Operationstreue neben den schon betrachteten Beziehungen

$$(1) \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad \text{bzw.} \qquad (2) \quad \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

auch noch

$$(3) \quad \overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \qquad \text{bzw.} \qquad (4) \quad \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}\,,$$

je nach Art der Operationen.

Das heißt, das Bild der Verknüpfung ist gleich der Verknüpfung der Bilder. Beispiele zu (3) und (4) finden wir im Teil C.

Der Begriff „Isomorphie" ist jedoch noch allgemeiner. Er ist nicht nur an Operationen geknüpft, sondern es können beliebige Relationen betrachtet werden.

DEFINITION 2 (10.5.) — **Isomorphie**
In zwei gegebenen Mengen M_1 und M_2 seien jeweils die Relationen R_1 bzw. R_2 erklärt.
M_1 und M_2 heißen **isomorph** bezüglich der Relationen R_1 und R_2 genau dann, wenn es eine eineindeutige Abbildung F von M_1 auf M_2 gibt, so daß die Elemente x, y aus M_1 genau dann in der Relation R_1 stehen, wenn ihre Bilder $F(x)$, $F(y)$ in M_2 in der Relation R_2 stehen.

Die in Definition 2 (10.5.) definierten Beziehungen zwischen zwei Mengen bezeichnet man als **Relationstreue**.
Sind zwei Mengen mit je *zwei* in ihnen erklärten Operationen bzw. Relationen gegeben, so sind die beiden Mengen isomorph genau dann, wenn es eine eineindeutige Abbildung von der einen auf die andere Menge gibt, die relationstreu bezüglich *beider* Operationen ist.
Der Begriff der Isomorphie bedeutet soviel wie **Strukturgleichheit**, d. h., die Mengen haben trotz unterschiedlicher Natur ihrer Elemente in bezug auf die in ihnen erklärten Operationen bzw. Relationen gewisse Gemeinsamkeiten.
Die **Isomorphie** ist eine **Äquivalenzrelation** (hier ohne Beweis).

Wir weisen noch einmal darauf hin, daß es keine Isomorphie schlechthin, sondern nur eine solche hinsichtlich gewisser Relationen gibt.

10.6. Geordnete Mengen; ähnliche Mengen

Im Teil 10.3. beschäftigten wir uns mit **Ordnungsrelationen** und erfuhren einiges über sie. Dies soll jetzt noch weiter untersucht und präzisiert werden.
Für unsere weiteren Überlegungen beschränken wir uns auf irreflexiv geordnete Mengen, die wir im folgenden kurz als **geordnete Mengen** bezeichnen (↗ 194f.).

Eine geordnete Menge wird zur Unterscheidung von einer ungeordneten Menge und zur Kennzeichnung der verwendeten Ordnungsrelation mit $[M; R]$ bezeichnet. Es ist auch üblich, das geordnete Paar $[M; R]$ selbst als Ordnung zu bezeichnen.

DEFINITION 1 (10.6.) — **Gegenordnungsrelation**
Die Relation R^{-1} in M heißt **Gegenordnungsrelation zu R in M** genau dann, wenn R Ordnungsrelation in M ist.
Symbolisiert: $x\, R^{-1}\, y =_{\mathrm{Def}} y\, R\, x$

Man faßt eine Menge M und die in ihr erklärte Ordnungsrelation R zu einem geordneten Paar zusammen, da beide gewissermaßen eine Einheit bilden.
Wir werden mit der oben eingeführten Bezeichnung für Ordnungsrelationen an Stelle von $[M; R]$ auch die Bezeichnung $[M; \prec]$ für geordnete Mengen benutzen.

BEISPIEL 1 (10.6.):

1. $[N; <] = [\{0, 1, 2, 3, \ldots\}; <]$
   Hierbei ist die Menge N durch die $<$-Relation geordnet, also
   $$[M; \prec] = [N; <].$$
2. $[G; >] = [\{\ldots, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, \ldots\}; >]$
3. $[R^*; \prec] = \left[\left\{0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \ldots\right\}; \prec\right]$

Wir weisen noch darauf hin, daß also auch in der Symbolik zwischen der geordneten und der ungeordneten Menge unterschieden wird. Es sei noch festgestellt, daß sich abzählbar-unendliche Mengen wie N, G und R auf unendlich viele Arten ordnen, ja sogar wohlordnen lassen.

Bei den weiteren Betrachtungen wollen wir bei geordneten Mengen einen der vorhin erklärten Isomorphie entsprechenden Begriff einführen, d. h., es sollen **Analogien zwischen geordneten Mengen** untersucht werden. Es ist eines der Hauptanliegen der modernen Mathematik, strukturelle Gemeinsamkeiten in voneinander verschiedenen Bereichen aufzudecken.

DEFINITION 2 (10.6.) — **Gleichheit geordneter Mengen**
Zwei **geordnete Mengen** $[M_1; R_1]$ **und** $[M_2; R_2]$ heißen genau dann **einander gleich**, wenn $M_1 = M_2$ und $R_1 = R_2$ ist.

Dies ist sofort klar, wenn wir uns an die Bedingungen für die Gleichheit von geordneten Paaren erinnern.

BEISPIEL 2 (10.6.):
Die Menge der reellen Zahlen (M_1) sei durch die Relation $R_1 = <$ geordnet und die Menge der Punkte einer Geraden (M_2) durch R_2 „Punkt A liegt vor Punkt B“. Zwischen diesen beiden Mengen besteht sicher eine Analogie. Es läßt sich nämlich jeder reellen Zahl ein Punkt auf einer Geraden zuordnen und umgekehrt, d. h., es existiert eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2. Wenn man zwei beliebige reelle Zahlen, von denen die erste kleiner als die zweite ist, auf entsprechende Punkte einer Geraden abbildet, dann kann man es so einrichten, daß der erste der beiden Punkte vor dem zweiten liegt. Somit bleibt bei dieser Abbildung die Ordnung erhalten, und wir sprechen wiederum von Relationstreue.

DEFINITION 3 (10.6.) — **Ähnlichkeit**
Zwei geordnete Mengen $[M_1; R_1]$ und $[M_2; R_2]$ heißen **ähnlich** genau dann, wenn es eine eineindeutige Abbildung F von M_1 auf M_2 gibt, die relationstreu bezüglich der beiden Ordnungsrelationen ist, d. h.,
$x\, R_1\, y$ genau dann, wenn $F(x)\, R_2\, F(y)$ für jedes $x, y \in M_1$.
Symbolisiert: $[M_1; R_1] \backsim [M_2; R_2]$
$=_{\text{Def}} \exists\, F\, [F$ eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2
$\wedge \forall x \forall y\, (x\, R_1\, y \rightarrow F(x)\, R_2\, F(y))]$
mit $x, y \in M_1$; $F(x), F(y) \in M_2$

Der Begriff **Ähnlichkeit** bezieht sich nur auf geordnete Mengen, könnte aber auch durch den allgemeineren Begriff der Isomorphie ersetzt werden. Notwendige Bedingung für die Ähnlichkeit von Mengen ist deren Gleichmächtigkeit.

BEISPIEL 3 (10.6.):
Die umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge N auf eine Menge äquidistanter Punkte eines Strahls ist auch eine ähnliche Abbildung; im übrigen jede Veranschaulichung von Zahlen durch Punkte einer Geraden, bei der die Ordnung erhalten bleibt.

SATZ 1 (10.6.)
Die Menge $M_1 = N \setminus \{0\}$ der natürlichen Zahlen ist der Menge M_2 der Brüche mit dem Zähler 1 hinsichtlich der in ihnen erklärten Ordnungsrelationen ähnlich, und zwar gilt

$$[M_1; <] \backsim [M_2; >]$$

mit $[M_1; <] = [\{1, 2, 3, 4, \ldots\}; <]$

und $[M_2; >] = \left[\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}; >\right]$.

Beweis:

1. Abbildung F. $a \in M_1$ wird abgebildet auf $\frac{1}{a} \in M_2$.

F^{-1}: $\frac{1}{a} \in M_2$ wird abgebildet auf $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a \in M_1$.

Die Abbildung F ist eineindeutig.

2. $a, b \in M_1$; $\quad a < b$

$$\begin{array}{ccc} a, b \in M_1; & a < b \\ & \updownarrow \quad \updownarrow \\ \frac{1}{a}, \frac{1}{b} \in M_2; & \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \end{array}$$

Die Abbildung ist relationstreu.

Somit ist die Abbildung F eineindeutig und relationstreu bezüglich der Ordnungsrelationen, also sind die geordneten Mengen $[M_1; <]$ und $[M_2; >]$ einander ähnlich, q.e.d.

Die beiden Mengen sind aber auch noch isomorph bezüglich der Multiplikation, jedoch nicht hinsichtlich der Addition.

$$a \cdot b = c \to \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{c}, \quad \text{z. B.} \quad 5 \cdot 6 = 30 \to \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

$$a + b = c \to \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{c}, \quad \text{z. B.} \quad 5 + 6 = 11 \to \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \neq \frac{1}{11}$$

Dies bestätigt noch einmal die Feststellung, daß es keine Isomorphie bzw. Ähnlichkeit an sich gibt, sondern nur hinsichtlich gewisser Relationen.

Mit dem Begriff Ähnlichkeit (bzw. Isomorphie) ist es möglich geworden, ganze Typen von Mengen zugleich mathematisch zu erfassen.
Endliche, geordnete, gleichmächtige Mengen sind einander stets ähnlich.
Die **Ähnlichkeit** ist eine **Äquivalenzrelation** (hier ohne Beweis).

Führt man den Abstraktionsprozeß für geordnete Mengen bezüglich Ähnlichkeit durch, so ergibt sich:
Alle einander ähnlichen Mengen eines Systems von geordneten Mengen gehören in jeweils ein und dieselbe Klasse. Jede solche Klasse widerspiegelt eine ganz bestimmte Ordnung von gleichmächtigen Mengen.

DEFINITION 4 (10.6.) — **Ordnungstypus**
Es sei $\mathfrak{S}$ ein System geordneter Mengen.
Die Klasse aller zu einer geordneten Menge M ähnlichen Mengen dieses Systems heißt **Ordnungstypus von M.**

DEFINITION 5 (10.6.) — **Ordinalzahl** (↗ Teil C)
Die Ordnungstypen von wohlgeordneten Mengen heißen **Ordnungszahlen** oder **Ordinalzahlen.**

10.7. Operationen und ihre Merkmale

Einer der am häufigsten in der Mathematik auftretenden Begriffe ist der der **Operation**. Wie dieser Begriff zu definieren ist, wollen wir am Beispiel der Addition von natürlichen Zahlen erläutern.

BEISPIEL 1 (10.7.):
Die Schüler der 1. Klassen werden u. a. mit Hilfe der folgenden Tabelle mit einer Operation, die wir **Addition in der Menge der natürlichen Zahlen** nennen, vertraut gemacht.

a	b	$a+b$
8	7	
9	5	
7	9	
7	6	
5	8	

In die Spalte für „$a+b$“ ist jeweils genau eine Zahl, die Summe von a und b, einzutragen.

Addiert man also zwei natürliche Zahlen a und b, so ordnet man dem geordneten Paar $[a; b]$ eindeutig eine natürliche Zahl c, die Summe von a und b, zu.
Die Addition von natürlichen Zahlen ist somit eine Abbildung, die jedem Paar $[a; b]$ von natürlichen Zahlen genau eine natürliche Zahl c zuordnet, also eine eindeutige Abbildung von $N \times N$ auf N.
A_N ist somit eine **eindeutige Abbildung aus $N \times N$ in N.**

Das, was wir für A_N als typisch herausgestellt haben, gilt für jede zweistellige Operation O in einer Menge M.

DEFINITION 1 (10.7.) — **Zweistellige Operation in einer Menge**
Unter einer **zweistelligen (binären) Operation O** in einer Menge M versteht man eine eindeutige Abbildung aus $M \times M$ in M.

Die Definition 1 (10.7.) kann auch auf n-stellige Operationen erweitert werden.

DEFINITION 2 (10.7.) — *N*-stellige Operation in einer Menge

N-stellige Operation in einer Menge M ($n \in N$; $n \neq 0$) wird jede eindeutige Abbildung aus M^n in M genannt.

Nach der Definition 2 (10.7.) ist eine n-stellige Operation in einer Menge M eine Teilmenge von M^{n+1}, also auch eine $(n + 1)$-stellige Relation in M.

Nach Definition 1 (9.4.) werden **eindeutige Abbildungen** auch **Funktionen** genannt.

Eine einstellige Operation in einer Menge M ist somit eine Funktion aus M in sich. Eine zweistellige Operation in M ist eine Funktion aus $M \times M$ in M, eine Funktion, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $M \times M$ ist und deren Wertebereich in M enthalten ist. Für die Tatsache, daß einem geordneten Paar $[a; b] \in M \times M$ ein Element $c \in M$ durch die Zuordnungsvorschrift der Operation O eindeutig zugeordnet wird, können wir schreiben:

$$[a; b; c] \in O \quad \text{oder} \quad O(a, b) = c \quad \text{oder} \quad a\,O\,b = c\,.$$

O ist hierbei eine Variable für Operationszeichen, die gegebenenfalls durch ein bestimmtes Operationszeichen ($+$, $-$, $\cdot$, $:$, ...) ersetzt werden kann.

Zur besseren Veranschaulichung der Darlegungen und zur Herstellung der Beziehung zum Mathematikunterricht in der Schule werden im folgenden einige Beispiele für zweistellige Operationen angegeben.

BEISPIEL 2 (10.7.):

Gegeben sei die Menge $M = \{0, 1, 2\}$.

Die folgenden Mengen geordneter Tripel sind zweistellige Operationen in M. Wir können sie **Subtraktion in M(S_M)** bzw. **Multiplikation in M(M_M)** nennen.

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_M &= \{[0; 0; 0], [1; 0; 1], [1; 1; 0], [2; 0; 2], [2; 1; 1], [2; 2; 0]\} \\ \mathrm{M}_M &= \{[0; 0; 0], [0; 1; 0], [0; 2; 0], [1; 0; 0], [2; 0; 0], [1; 1; 1], \\ &\quad [1; 2; 2], [2; 1; 2]\} \end{aligned}$$

BEISPIEL 3 (10.7.):

Die **Multiplikation in der Menge der natürlichen Zahlen (M_N)**

$$\mathrm{M}_N = \{[a; b; c] \in (N \times N) \times N; c = a \cdot b\}$$

BEISPIEL 4 (10.7.):

Die Operation des **Potenzierens in der Menge der natürlichen Zahlen (P_N)**

$$\mathrm{P}_N = \{[a; b; c] \in (N \times N) \times N; c = a^b\}$$

BEISPIEL 5 (10.7.):

Weitere zweistellige Operationen in N sind:

Die **Subtraktion in N(S_N)**, die **Division in N(D_N)**, die Operation der **Bildung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (ggT_N)**, die Operation der **Bildung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier natürlicher Zahlen (kgV_N)**, die Operation des **Radizierens in N(R_N)** und die Operation des **Logarithmierens in N(L_N)**.

Bei vielen Operationen werden die Glieder ihrer Tripel mit besonderen Namen versehen. Zum Beispiel werden bei einem Tripel $[a; b; c] \in \mathrm{S}_N$ das Glied ***a* Minuend**, das Glied ***b* Subtrahend** und das Glied ***c* Differenz** genannt.

BEISPIEL 6 (10.7.):
Weitere zweistellige Operationen sind:
Die Operationen der **Bildung der Vereinigungsmenge** ($\cup$), **der Durchschnittsmenge** ($\cap$) und der **Differenzmenge** ($\setminus$) **von zwei Mengen** in einem vorgegebenen Mengensystem;
die zweistelligen logischen Operationen in der Menge aller Aussagen — **Konjunktion** ($\wedge$), **Alternative** ($\vee$), **Implikation** ($\rightarrow$), **Äquivalenz** ($\leftrightarrow$), ... ($\nearrow$Beispiel 5 (9.4.)).

BEISPIEL 7 (10.7.):
Einstellige Operationen in N sind:
Die Operationen der **Bildung des Nachfolgers, des Verdoppelns, des Quadrierens.**

BEISPIEL 8 (10.7.):
Die Operation der **Bildung der Komplementärmenge einer Teilmenge** $\boldsymbol{T}$ in einer Menge M ist eine einstellige Operation in der Potenzmenge von M.

Da $A \times B$ eine um 2 höhere Stufe als A und B besitzt, führt die Bildung der Kreuzmenge zweier Mengen im allgemeinen auf keine Operation in einer Menge.

Betrachtet man diese Vielfalt von Operationen, so kann man die Operationen hinsichtlich verschiedener Eigenschaften voneinander unterscheiden. Bei der Untersuchung dieser Eigenschaften beschränken wir uns auf zweistellige Operationen.

DEFINITION 3 (10.7.) — **Unbeschränkt ausführbare Operation**

O sei eine zweistellige Operation in einer Menge M.
O wird genau dann **unbeschränkt ausführbar** (**vollständig, algebraisch**) genannt, wenn *O* eine Abbildung *von* $M \times M$ *in* M ist.

BEISPIEL 9 (10.7.):
Unbeschränkt ausführbare Operationen in N sind:

A_N; M_N; kgV_N; ggT_N

BEISPIEL 10 (10.7.):
Beschränkt ausführbare (partielle) Operationen sind:

S_M und M_M in Beispiel 2 (10.7.); S_N; D_N; P_N (0^0 ist nicht definiert); R_N; L_N.

Um die nächste Eigenschaft von Operationen zu erarbeiten, vergleichen wir die Addition mit der Subtraktion natürlicher Zahlen.

Bezüglich der Addition gilt für alle $a, b \in N$:

$$a + b = b + a,$$

das **Kommutativgesetz.** Dafür sagt man auch:

Die Addition in N ist kommutativ.

Die **Subtraktion in N ist nicht kommutativ.** Hier ist $a - b$ gleich $b - a$ nur dann, wenn a gleich b ist.
Man könnte vermuten, daß die Subtraktion natürlicher Zahlen deshalb nicht kommutativ ist, weil sie nur beschränkt ausführbar ist. Jedoch wollen wir auch bestimmte beschränkt ausführbare Operationen als kommutativ auffassen.

Unter der *Addition in der Menge der Primzahlen* (P_z) beispielsweise wollen wir die folgende eindeutige Abbildung A_{P_z} *aus* $P_z \times P_z$ *in* P_z verstehen.

$$A_{P_z} = \{[p_1; p_2; p_3] \in (P_z \times P_z) \times P_z; p_3 = p_1 + p_2\}$$

Diese Operation ist beschränkt ausführbar. Bei der Betrachtung dieses Beispiels stellt man fest, daß eine notwendige Bedingung dafür ist, daß $[p_1; p_2; p_3] \in A_{P_z}$ gilt, daß entweder p_1 oder p_2 gleich 2 ist. Es ist bis heute unklar, wie viele Tripel diese Operation besitzt. Ist ein Tripel $[p_1; p_2; p_3]$ ein Element von A_{P_z}, so ist auch immer $[p_2; p_1; p_3]$ ein Element von A_{P_z}. Die beiden Primzahlen p_1, p_2 sind also, falls A_{P_z} für das Paar $[p_1; p_2]$ ausführbar ist, miteinander vertauschbar. Eine solche Operation wollen wir auch als **kommutativ** bezeichnen.

DEFINITION 4 (10.7.) — **Kommutative Operation**
O sei eine zweistellige Operation in der Menge M.
O heißt **kommutativ** genau dann, wenn für alle $a, b \in M$ gilt:
$a\,O\,b = c \wedge c \in M \leftrightarrow b\,O\,a = c \wedge c \in M$.

BEISPIEL 11 (10.7.):
Kommutative Operationen sind:
M_M im Beispiel 2 (10.7.); M_N; ggT_N; kgV_N; $\wedge$; $\vee$; $\leftrightarrow$; $\cup$; $\cap$.

BEISPIEL 12 (10.7.):
Nichtkommutative Operationen sind:
S_M im Beispiel 2 (10.7.); S_N; D_N; P_N; L_N; R_N; $\rightarrow$; $\setminus$.

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a + b) + c = a + (b + c)\,,$$

d. h., A_N ist **assoziativ**. Diese Operationseigenschaft wird wie folgt definiert.

DEFINITION 5 (10.7.) — **Assoziative Operation**
O sei eine zweistellige Operation in M.
O heißt **assoziativ** genau dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:
$(a\,O\,b)\,O\,c = d \wedge d \in M \leftrightarrow a\,O\,(b\,O\,c) = d \wedge d \in M$.

BEISPIEL 13 (10.7.):
Assoziative Operationen sind:
M_M im Beispiel 2 (10.7.); M_N; ggT_N; kgV_N; A_{P_z}; $\wedge$; $\vee$; $\leftrightarrow$; $\cup$; $\cap$.

BEISPIEL 14 (10.7.):
Nichtassoziative Operationen sind:
S_M im Beispiel 2 (10.7.); $\big((2-1)-1 \neq 2-(1-1)\big)$: S_N; D_N; R_N; L_N; $\rightarrow$.

Die **Distributivität** ist eine *zweistellige Relation* in der Menge aller Operationen und nicht eine Eigenschaft für Operationen. Die in diesem Abschnitt untersuchten Eigenschaften und Beziehungen von Operationen nennen wir deshalb **Operationsmerkmale**. Wir unterscheiden **linksseitige**, **rechtsseitige** und **beiderseitige Distributivität**.

DEFINITION 6 (10.7.) — **Distributive Operation**
O_1 und O_2 seien zweistellige Operationen in einer Menge M.
O_1 wird bezüglich O_2 **linksseitig distributiv** genannt genau dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:
$a\, O_1 (b\, O_2\, c) = d \wedge d \in M \leftrightarrow (a\, O_1\, b)\, O_2 (a\, O_1\, c) = d \wedge d \in M$.
O_1 heißt **rechtsseitig distributiv** bezüglich O_2 genau dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:
$(a\, O_2\, b)\, O_1\, c = d \wedge d \in M \leftrightarrow (a\, O_1\, c)\, O_2 (b\, O_1\, c) = d \wedge d \in M$.
Ist eine Operation O_1 bezüglich einer Operation O_2 **beiderseitig distributiv**, so sagt man kurz:
O_1 ist bezüglich O_2 **distributiv**.

BEISPIEL 15 (10.7.):
Distributive Operationen sind:

O_1	M_N	M_N	ggT_N	kgV_N	$\wedge$	$\vee$	$\cap$	$\cup$
O_2	A_N	S_N	kgV_N	ggT_N	$\vee$	$\wedge$	$\cup$	$\cap$

BEISPIEL 16 (10.7.):
Linksseitige (nicht rechtsseitige) Distributivität

O_1	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
O_2	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

BEISPIEL 17 (10.7.):
Rechtsseitige (nicht linksseitige) Distributivität

O_1	D_N	D_N	P_N	P_N	$\setminus$	$\setminus$	$\cap$	$\setminus$
O_2	A_N	S_N	M_N	D_N	$\cup$	$\setminus$	$\setminus$	$\cap$

P_N ist bezüglich M_N rechtsseitig distributiv, denn für alle $a, b, n \in N$ mit nicht a oder b **und** n gleich 0 gilt:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

Wir wollen nunmehr eine Relation betrachten, die zwischen der Menge der zweistelligen Operationen und der Menge der zweistelligen Relationen erklärt werden kann.

DEFINITION 7 (10.7.) — **Monotone Operation**
O sei eine zweistellige Operation in M; R sei eine zweistellige Relation in M.
O heißt **rechtsseitig monoton** bezüglich R genau dann, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt:
Wenn $a\, R\, b$, so $a\, O\, c\, R\, b\, O\, c$.

Analog kann die **linksseitige Monotonie** definiert werden.

Ist eine Operation O bezüglich einer Relation R **beiderseitig monoton**, so sagt man kurz: „**O ist monoton bezüglich R**".

BEISPIEL 18 (10.7.):
A_N ist bezüglich der $<$-Relation in N monoton, denn es gilt:

$$a < b \rightarrow a + c < b + c \ (a, b, c \in N) .$$

BEISPIEL 19 (10.7.):
M_N ist bezüglich der Teilerrelation in N monoton, denn es gilt:

$$a \mid b \rightarrow a \cdot c \mid b \cdot c \ (a, b, c \in N) .$$

BEISPIEL 20 (10.7.):
$\cup$ und $\cap$ sind bezüglich der $\subseteqq$-Relation monoton, d. h.,

$$M_1 \subseteqq M_2 \rightarrow M_1 \cup M_3 \subseteqq M_2 \cup M_3 \quad \text{und}$$
$$M_1 \subseteqq M_2 \rightarrow M_1 \cap M_3 \subseteqq M_2 \cap M_3 .$$

Für die Definition der **Umkehroperationen** ist die Eigenschaft der **Regularität** von besonderer Bedeutung.

DEFINITION 8 (10.7.) — **Regularität** (als Eigenschaft für **Operationen**)
O sei eine zweistellige Operation in M.
O heißt **rechtsseitig regulär** genau dann, wenn für alle $a, x_1, x_2, \in M$ gilt:
Aus $a\,O\,x_1 = a\,O\,x_2$ folgt $x_1 = x_2$.

Analog läßt sich die **linksseitige Regularität** erklären.

Ist eine Operation **beiderseitig regulär**, so sagt man kurz:
„**O ist regulär**".

BEISPIEL 21 (10.7.):
A_N ist eine reguläre Operation.

BEISPIEL 22 (10.7.):
M_N ist **nichtregulär**.
Es ist $0 \cdot 4 = 0 \cdot 3$, aber $4 \neq 3$.

Die Regularität ist auch eine Eigenschaft, die Elemente einer Menge M bezüglich einer Operation O haben können.

DEFINITION 9 (10.7.) — **Regularität** (als Eigenschaft für **Elemente**)
a sei ein Element der Menge M; O sei eine zweistellige Operation in M.
a heißt **rechtsseitig regulär** bezüglich O genau dann, wenn für alle $\cancel{a}$, $x_1, x_2 \in M$ gilt:
Wenn $a\,O\,x_1 = a\,O\,x_2$, so $x_1 = x_2$.

Analog kann die **linksseitige Regularität** von a bezüglich O definiert werden.

Ist a beiderseitig regulär bezüglich O, so sagt man kurz:
„a ist bezüglich O regulär".

BEISPIEL 23 (10.7.):
Jede natürliche Zahl ist bezüglich A_N regulär.
$O \in N$ ist bezüglich M_N nichtregulär.

Schon in der 1. Klasse lernen die Schüler neben der Addition und Multiplikation auch deren Umkehroperationen kennen.

DEFINITION 10 (10.7.) — **Umkehroperation** –
O sei eine zweistellige Operation in einer Menge M; a, b, c seien Elemente aus M.
Wir nennen
$(O^{-1})_1 =_{\mathrm{Def}} \{[a; b; c] \in (M \times M) \times M; c\,O\,b = a\}$
genau dann
1. Umkehroperation von O, wenn b stets linksseitig regulär bezüglich O ist.
Wir nennen
$(O^{-1})_2 =_{\mathrm{Def}} \{[a; b; c] \in (M \times M) \times M; b\,O\,c = a\}$
genau dann
2. Umkehroperation von O, wenn b stets rechtsseitig regulär bezüglich O ist.
Stimmen $(O^{-1})_1$ und $(O^{-1})_2$ überein, so sprechen wir von *der* Umkehroperation von O und bezeichnen sie mit O^{-1}.

Aus der Definition 10 (10.7.) folgt unmittelbar, daß eine Operation O *genau eine* Umkehroperation hat, wenn O *kommutativ* ist.

BEISPIEL 24 (10.7.):
Im Beispiel 2 (10.7.) ist $0 \in M$ ein **nichtreguläres Element** bezüglich M_M. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache erhalten wir als Umkehroperation von M_M die folgende Menge an geordneten Tripeln.

$$\{[0; 1; 0], [0; 2; 0], [1; 1; 1], [2; 2; 1], [2; 1; 2]\} = \mathrm{M}_M{}^{-1}$$

Da M_M kommutativ ist, existiert *genau eine* Umkehroperation. Wir können sie **Division in M** nennen.
Falls wir für die Bildung der Umkehroperation auch nichtreguläre Elemente zugelassen hätten, so würden auch die folgenden Tripel zu ihr gehören.

$$[0; 0; 0], [0; 0; 1], [0; 0; 2]$$

Eine Abbildung *aus $M \times M$ in M*, die diese Tripel enthält, ist nicht eindeutig und somit keine Operation.
Für die nichtkommutative Operation S_M im Beispiel 2 (10.7.) erhalten wir:

$$(\mathrm{S}_M^{-1})_1 = \{[0; 0; 0], [1; 0; 1], [0; 1; 1], [2; 0; 2], [1; 1; 2], [0; 2; 2]\};$$
$$(\mathrm{S}_M^{-1})_2 = \{[0; 0; 0], [1; 1; 0], [0; 1; 1], [2; 2; 0], [1; 2; 1], [0; 2; 2]\}.$$

$(\mathrm{S}_M^{-1})_1$ können wir auch **Addition in M** nennen.

BEISPIEL 25 (10.7.):
Weitere Umkehroperationen sind:

O	A_N	M_N	P_N
$(O^{-1})_1$	S_N	D_N	R_N
$(O^{-1})_2$			L_N

M_N ist nicht wieder Umkehroperation von D_N. Das Tripel $[0; 0; 0] \in M_N$ kann aus keinem Tripel von D_N erzeugt werden. Wir haben hier also nicht den Fall wie bei der Umkehrfunktion, daß eine Umkehroperation von einer Umkehroperation immer wieder die Ausgangsoperation ist.

10.8. Kontrollfragen

1. Was versteht man unter dem Begriff „Relation“, und welcher Zusammenhang besteht zwischen Produktmenge und Relation? (Begründung!)
2. In welcher Weise wird der Begriff „Relation“ in der Umgangssprache gebraucht?
3. Welche der möglichen Eigenschaften von Relationen können gleichzeitig auftreten? Nennen Sie Beispiele!
4. Welcher Unterschied besteht zwischen Asymmetrie und Antisymmetrie?
5. Erläutern Sie die Begriffe „geordnete Menge“ und „teilweise geordnete Menge“!
6. Durch welche Eigenschaften sind Halbordnungs-, Ordnungs- bzw. Wohlordnungsrelationen charakterisiert?
7. Was ist eine Äquivalenzrelation?
8. Zeigen Sie, daß die Gleichmächtigkeit eine Äquivalenzrelation ist!
9. Was besagt der Hauptsatz für Äquivalenzrelationen?
10. Erläutern Sie das Abstraktionsprinzip in der Mathematik!
11. Was bedeuten die Symbole $[M; R]$ bzw. $[M; \prec]$?
12. Geben Sie einige weitere Ordnungsprinzipien in der Menge der natürlichen Zahlen an (↗ Beispiel 1 (10.6.))!
13. Was versteht man unter Isomorphie bzw. Ähnlichkeit von Mengen?
14. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Begriffen „zweistellige Operation“ und „dreistellige Relation“ in M?
15. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Operation und Funktion?
16. Nennen Sie die wichtigsten Eigenschaften von Operationen und geben Sie die Definitionen dafür an!
17. Wie lauten die Gesetze zu den Tabellen in den Beispielen 15 (10.7.), 16 (10.7.), 17 (10.7.)?
18. Sind die Operationen des Bildens von Vereinigungsmengen und von Durchschnittsmengen bezüglich der Gleichmächtigkeit monoton?

Teil C

Aufbau der Zahlenbereiche

11. Die natürlichen Zahlen

In der Schule haben wir das Rechnen mit Zahlen gelernt. Wir können zählen, kennen die Rechengesetze und wenden sie an. Wenn wir uns trotzdem noch einmal mit Zahlen beschäftigen, dann um zu wiederholen, unsere Kenntnisse zu festigen und vor allem zu vertiefen.
Der folgende Lehrstoff ist fachliche Grundlage für den Mathematikunterricht in den unteren Klassen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule und zeigt darüber hinaus einen möglichen Aufbau von Zahlenbereichen, die in diesen Klassen nicht behandelt werden, deren Grundlage aber die natürlichen Zahlen sind.
Auch wenn wir Bekanntes wiederfinden, so wollen wir doch sorgfältig vorgehen und alle Definitionen und Sätze eingehend analysieren, um sie richtig zu verstehen und nichts zu übersehen.

Wir empfehlen dabei die Beachtung folgender Fragen.

Von welchen Objekten oder Erscheinungen ist die Rede?
Welche Eigenschaften dieser Objekte oder Erscheinungen sind zu beachten?
Welche Beziehungen zwischen den Objekten treten auf?
Welche Erscheinung wird benannt, definiert und wodurch wird sie erklärt?

Wir behandeln zunächst die **natürlichen Zahlen**, dann die **gebrochenen Zahlen** und schließlich — entsprechend der Aufgabe dieses Buches wesentlich kürzer — die **rationalen Zahlen** und die **reellen Zahlen**. Damit folgen wir den Zahlenbereichserweiterungen, die den Lehrplänen der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule entsprechen.

11.1. Die endlichen Kardinalzahlen

Viele Menschen haben sich über den Ursprung der natürlichen Zahlen Gedanken gemacht und sind dabei zu unterschiedlichen Auffassungen gelangt.

Entsprechend der marxistischen Erkenntnistheorie vertreten wir folgenden Standpunkt: Die natürlichen Zahlen haben ihre Wurzeln in der objektiven Realität.

Der Zahlbegriff wurde als Ergebnis der ständigen Auseinandersetzung der Menschen mit der Umwelt durch einen Abstraktionsprozeß aus dieser Umwelt gewonnen. Wir vermögen mit diesen Zahlen nicht nur gewisse Seiten der objektiven Realität besser — nämlich nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ — zu erfassen, sondern auch zu unseren Gunsten zu verändern. Dies forderte bereits KARL MARX in seiner 11. These über Feuerbach: „Die Philosophen haben die Welt nur verschieden interpretiert; es kommt aber darauf an, sie zu verändern."
Die Wissenschaften helfen uns als Produktivkräfte dabei. Die Mathematik nimmt unter ihnen eine bedeutende Rolle ein, und „in ihrer Sprache redet die Natur zu uns" (nach GALILEO GALILEI, 1564 bis 1642).

Es gibt jedoch auch idealistische Auffassungen, nach denen die oben geschilderte Beziehung der natürlichen Zahlen zur objektiven Realität geleugnet wird. LEOPOLD KRONECKER (1823 bis 1892) sagte: „Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Er wollte damit ausdrücken, daß uns die natürlichen Zahlen als etwas Fertiges vorgegeben sind und erst von ihnen aus weitere Zahlenbereiche konstruiert werden.

Wir gehen von Mengen aus und definieren mit ihrer Hilfe die natürlichen Zahlen. Man sagt auch, die natürlichen Zahlen werden **genetisch definiert** (↗ S. 18).

Weitere Aussagen über die natürlichen Zahlen gewinnen wir dadurch, daß wir stets auf die **mengentheoretische Definition des Zahlbegriffs** zurückgehen und Beziehungen zwischen Mengen beachten.
Die natürlichen Zahlen können aber auch **axiomatisch definiert** werden. Diesen Weg werden wir später erläutern.

Beim **mengentheoretischen Aufbau** des Bereiches der natürlichen Zahlen gehen wir von **Mengen** und einer **Äquivalenzrelation** im Bereich der Mengen aus. Daher arbeiten Schulanfänger lange und intensiv mit konkreten Mengen, z. B. mit Kastanien, Stäbchen, Rechenpfennigen und anderen Mengen; sie vergleichen, ordnen, legen dazu, nehmen weg, bevor sie mit Zahlen rechnen.
Für einen Schüler ist es natürlich nicht gleichgültig, ob er zwei Äpfel geschenkt bekommt oder zwei Kastanien — von der Intension, vom Inhalt her besteht ein großer Unterschied zwischen diesen beiden Mengen; aber wenn er die **Anzahl** erfassen soll, dann sind beide Mengen gleichzahlig. Der Schüler soll von gewissen Seiten der objektiven Realität **abstrahieren** — von Größe, Gewicht, Geschmack u. a. —, um den Zahlbegriff zu erfassen.

Der Eigenschaft von Mengen, gleiche Anzahl von Elementen zu besitzen, entspricht die aus der Mengenlehre bekannte Relation der **Gleichmächtigkeit**; sie ist die Äquivalenzrelation, die wir für eine **Klasseneinteilung** benötigen.

Wenn es nicht ausdrücklich anders vermerkt ist, wollen wir immer von **Mengen 1. Stufe** ausgehen.

DEFINITION 1 (11.1.) — **Kardinalzahl $\dot{k}$**
Es sei A eine beliebige Menge.
Die Klasse (oder das Mengensystem) aller Mengen X, die mit A gleichmächtig sind, heißt **Kardinalzahl** von A.
Wir bezeichnen sie mit „$\dot{k}$" und schreiben „$\dot{k} = \text{Kz}(A)$" oder „$\dot{k} = [A]$".

Es handelt sich also bei einer **Kardinalzahl** $\dot{k}$ um eine **Abstraktionsklasse** (Äquivalenzklasse) **nach der Gleichmächtigkeit**, die mit einer Menge A — das ist ein

Repräsentant (Vertreter) dieser Klasse — alle und nur diejenigen Mengen X enthält, die zu A gleichmächtig sind. Die Mengen X enthalten jeweils genau so viele Elemente wie die Menge A. Sind die betrachteten Mengen A und X Mengen 1. Stufe, dann ist $\dot{k}$ eine **Menge 2. Stufe.**

Mit dem geschilderten Abstraktionsprozeß erfassen wir im wesentlichen diejenigen Objekte, die in der Umgangssprache als „natürliche Zahlen" bezeichnet werden.

DEFINITION 2 (11.1) — **Natürliche Zahlen**
Es sei $\dot{k} = \text{Kz}\,(A)$.
Dann nennen wir $\dot{k}$ eine **natürliche Zahl** (oder auch **endliche Kardinalzahl**) genau dann, wenn A endlich ist.
Wir bezeichnen sie mit „k" (ohne Punkt) und schreiben „$k = \text{Kz}\,(A)$" oder „$k = [A]$".

Natürliche Zahlen werden sowohl zum Ermitteln der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge als auch zum Durchnumerieren dieser Elemente verwendet. Wir benutzen sie, um zum Beispiel die Anzahl aller Seiten dieses Buches oder um eine bestimmte Seite dieses Buches anzugeben.

Nun ist es sehr wohl ein Unterschied, ob wir bisher vier Seiten eines Kapitels oder nur die vierte Seite durchgearbeitet haben. Benutzen wir eine natürliche Zahl, um — wie im ersten Falle — die Anzahl der Elemente einer Menge (hier: Anzahl der durchgearbeiteten Seiten) anzugeben, dann verwenden wir sie als Kardinalzahl; wollen wir aber den Platz eines Elements in einer durchnumerierten Menge angeben, dann benutzen wir sie als **Ordinalzahl**. Auf den Begriff „Ordinalzahl" gehen wir nicht weiter ein, da wir ihn hier nicht mehr benötigen.

Eine Kardinalzahl bestimmt zwar die Mächtigkeit einer Menge, aber der beim Zählen stattfindende Prozeß wird dabei nicht vollständig erfaßt. Wir tippen beim Zählen — wirklich oder in Gedanken — in einer bestimmten Reihenfolge auf die einzelnen Elemente; mit anderen Worten: Wollen wir eine Menge zählen, dann muß sie geordnet sein. Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß jede endliche Menge geordnet, ja sogar wohlgeordnet werden kann.

D. Klaua sagt (↗ [10] S. 287): „Entwicklungsgeschichtlich gesehen, bilden die Ordinalzahlen den ursprünglicheren Begriff vor den Kardinalzahlen, denn die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge wurde zunächst durch Abzählen der Elemente bestimmt und nicht durch bloßes abstraktes eindeutiges Abbilden auf eine vorgegebene Menge mit bekannter Anzahl (etwa auf die Finger einer Hand). Theoretisch gesehen haben jedoch die Kardinalzahlen auf Grund ihrer logisch einfacheren Struktur den Vorrang vor den Ordinalzahlen."

Wir haben aber die natürlichen Zahlen als endliche Kardinalzahlen definiert, verwenden also Definition 2 (11.1.), ohne jedesmal das Wort „endlich" anzugeben.

DEFINITION 3 (11.1.) — **Kleiner-gleich-Relation ($\leqq$)**
Es seien $k = \text{Kz}\,(A)$ und $l = \text{Kz}\,(B)$.
Dann sagen wir: k ist kleiner-gleich l genau dann, wenn es ein $B^* \subseteqq B$ mit $A \sim B^*$ gibt.
Ist $B^* \subset B$, dann sagen wir: k ist kleiner als l.

Die Definition 3 (11.1.) ist aber nur dann sinnvoll, wenn die Entscheidung, ob $k \leqq l$ bzw. $k < l$ ist oder nicht, nicht von der Wahl der Repräsentanten A bzw. B abhängt.
Wir müssen deshalb zeigen, daß im Falle $k \leqq l$ bzw. $k < l$ für beliebige Repräsentanten X, Y von k bzw. l gilt:
X ist einer Teilmenge bzw. einer echten Teilmenge von Y äquivalent.
Wir wählen also aus der Klasse $k = [A]$ einen anderen beliebigen Repräsentanten X und aus $l = [B]$ einen anderen beliebigen Repräsentanten Y.
Somit ist $X \sim A$ und $Y \sim B$.
Da nun $A \sim B^*$ mit $B^* \subseteqq B$ ist, ergibt sich auf Grund der Transitivität der Gleichmächtigkeit: $X \sim B^*$.
Da $Y \sim B$ ist, gibt es zu $B^* \subseteqq B$ ein $Y^* \subseteqq Y$ mit $B^* \sim Y^*$.
Die Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation, daher folgt aus $X \sim B^*$ und $B^* \sim Y^*$ sofort $X \sim Y^*$, wobei $Y^* \subseteqq Y$ ist.
Also ist X einer Teilmenge von Y äquivalent.
Die Definition 3 (11.1.) ist daher unabhängig davon, welche die Klasse $[A]$ bzw. $[B]$ erzeugende Menge (Repräsentant) verwendet wird. Die Definition ist **repräsentantenunabhängig.**
Entsprechendes gilt für den Fall, daß $k < l$ ist.
Übrigens kann man zu einer beliebigen Menge M immer eine Menge N finden, für die gilt:

$$M \cap N = \emptyset \quad \text{und} \quad M \sim N\,.$$

Dazu braucht man nur die Produktmenge $N = M \times \{a\}$ zu bilden.
An Stelle des Nachweises der Repräsentantenunabhängigkeit hätte der Satz formuliert und bewiesen werden können, daß der in der Definition 3 (11.1.) für die Repräsentanten A, B von k und l ausgesprochene Sachverhalt für zwei beliebige Repräsentanten von k und l zutrifft. Aber der Beweis wurde ja auch so geführt, nur wurde der entsprechende Satz nicht formuliert.
Den Inhalt der Definition 3 (11.1.) wollen wir an einem Beispiel aus dem Unterstufenunterricht erläutern:
Vor einem Schüler liegen zwei Kastanien und drei Stäbchen, er soll die Mengen vergleichen. Dazu legt er zu jeder Kastanie genau ein Stäbchen und stellt fest, daß noch ein Stäbchen übrigbleibt. Die Menge der Kastanien ist also gleichmächtig einer echten Teilmenge der Menge der Stäbchen, folglich ist [Kastanien] $<$ [Stäbchen] oder in unserem Beispiel $2 < 3$.
Für zwei beliebige natürliche Zahlen k, l gilt der Satz (von Bernstein, geb. 1880), nach dem entweder $k < l$ oder $k = l$ oder $l < k$ ist **(Disjunktion).**
Dieser Sachverhalt wird auch **Trichotomie** genannt. Auf den Beweis dieser Aussage verzichten wir.
Die Kleiner-gleich-Relation und die Kleiner-Relation sind **Wohlordnungsrelationen,** die die Menge der natürlichen Zahlen **reflexiv** bzw. **irreflexiv wohlordnen** (↗ Definition 5 (10.3.)). Den Beweis führen wir im Anschluß an die Definition der Addition. Von Bedeutung ist der Begriff „Nachfolger einer natürlichen Zahl".

DEFINITION 4 (11.1.) — **Nachfolger**
Es seien $k = \mathrm{Kz}\,(A)$ und a ein Individuum des vorgegebenen Grundbereiches mit $A \cap \{a\} = \emptyset$.
Dann nennen wir $\mathrm{Kz}\,(A')$ mit $A' = A \cup \{a\}$ den **Nachfolger** von k und bezeichnen ihn mit „$k' = \mathrm{Kz}\,(A') = [A']$".

Vom Individuum a wird gefordert, daß es in dem vorgegebenen Grundbereich, aber nicht in A liegt.
Ein Unterstufenschüler kann nun zu jeder vorgegebenen natürlichen Zahl k den Nachfolger k' finden: Er wählt aus der Klasse k einen beliebigen Repräsentanten A (das ist eine Menge), vereinigt diese Menge mit einer Einermenge $\{a\}$, wobei a ein Element des vorgegebenen Grundbereiches ist, das nicht zu A gehört, und ermittelt die Klasse der Vereinigungsmenge $A \cup \{a\}$. Sie ist der gesuchte Nachfolger.

Wir ordnen nun Kardinalzahlen Namen und Zeichen zu.

DEFINITION 5 (11.1.) — **Die Zahl Null**
Die **Kardinalzahl der leeren Menge** nennen wir **Null**.
Symbolisiert: $0 =_{\text{Def}} \text{Kz}(\emptyset) = [\emptyset]$

Damit hat eine Kardinalzahl einen Namen bekommen. In der deutschen Sprache ist „Null" der Name, das Zahlwort, „0" ist die entsprechende Ziffer, die gleichzeitig Symbol für diejenige Klasse ist, die als einziges Element die leere Menge — bekanntlich gibt es *genau eine* leere Menge — enthält.
Ob man die Null als natürliche Zahl betrachtet oder nicht, ist Vereinbarungssache. Beim mengentheoretischen Aufbau der Zahlenbereiche rechnet man sie dazu, der Lehrplan der Unterstufe tut es ebenfalls.
Nach der Russellschen Endlichkeitsdefinition (↗ 221) ist die **leere Menge endlich**. Wenn M endlich ist, so auch $M \cup \{a\}$.

Wir können also ausgehend von der endlichen Menge M weitere endliche Mengen bilden, indem wir zu der jeweils vorhandenen (endlichen) Menge ein solches Element aus dem vorgegebenen Individuenbereich I hinzufügen, das nicht schon in der vorhandenen Menge enthalten ist.
So erhalten wir die folgenden endlichen Mengen.

$$\begin{aligned} M &= \emptyset \cup \{a\} = \{a\} && \text{mit } a \in I \\ M' &= M \cup \{b\} = \{a, b\} && \text{mit } a \neq b \text{ und } b \in I \\ M'' &= M' \cup \{c\} = \{a, b, c\} && \text{mit } c \neq a, c \neq b \text{ und } c \in I \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nach dem Unendlichkeitsaxiom (↗ 108) gibt es mindestens eine Menge, der wir immer noch ein solches Individuum entnehmen können. Die Menge M heißt **Einermenge**, die Menge M' **Zweiermenge**, die Menge M'' **Dreiermenge** usw.

Diese (endlichen) Mengen bestimmen natürliche Zahlen, denen wir Namen und Zeichen zuordnen:

$$\begin{aligned} 1 &=_{\text{Def}} \text{Kz}(\emptyset \cup \{a\}) = \text{Kz}(\{a\}) = \text{Kz}(M) \text{ mit } a \in I; \\ 2 &=_{\text{Def}} \text{Kz}(M \cup \{b\}) = \text{Kz}(\{a, b\}) \text{ mit } a \neq b \text{ und } b \in I \text{ usw.} \end{aligned}$$

„Eins", „Zwei", „Drei" usw. sind die Namen dieser Zahlen.
„1", „2", „3", . . ." sind die entsprechenden Ziffern.

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß es zu jeder natürlichen Zahl immer noch eine größere gibt, mit anderen Worten:
Es gibt **unendlich viele natürliche Zahlen**.
Aber eine natürliche Zahl „Unendlich" kann es nicht geben, da nach Definition 2 (11.1.) natürliche Zahlen endliche Kardinalzahlen, Kardinalzahlen endlicher Mengen sind. Mit anderen Worten:
Die Menge der natürlichen Zahlen (N) bestimmt zwar eine Kardinalzahl (↗ Definition 1 (11.1.)), aber diese ist nicht endlich, also keine natürliche Zahl.

Mit dieser Zahl und mit anderen unendlichen Kardinalzahlen beschäftigen wir uns nicht.

Sind die natürlichen Zahlen in der Reihenfolge 0, 1, 2, 3, . . . aufgeführt, dann wollen wir sagen, sie seien in der **natürlichen Anordnung** gegeben (0, 2, 4, . . ., 1, 3, 5, . . . ist keine „natürliche Anordnung").
Wir wollen noch daran erinnern, daß eine Menge M genau dann **abzählbar** ist, wenn sie zur Menge der natürlichen Zahlen (N) gleichmächtig ist (↗ Definition 1 (9.8.)).

Mit den bisher erzielten Ergebnissen können wir schon einige Sätze über natürliche Zahlen formulieren und beweisen.

SATZ 1 (11.1.) — **Die natürliche Zahl Null** (P I)
Null ist eine natürliche Zahl.

Beweis:
Die leere Menge ist endlich, ihre Kardinalzahl ist 0 (↗ Definitionen 2 (11.1.) und 5 (11.1.)).

Satz 1 (11.1.) (P I) und die folgenden mit P II bis P V bezeichneten Sätze gehen auf GIUSEPPE PEANO (1858 bis 1932) zurück; sie sind unter dem Namen **PEANOsches Axiomensystem** bekannt. Wir kommen darauf später zurück (↗ 223).

SATZ 2 (11.1.) — **Nachfolger** (P II)
Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau eine natürliche Zahl n', die **Nachfolger** von n ist.

Beweis:
1. *Existenzbeweis:*
Jede natürliche Zahl n ist eine (endliche) Kardinalzahl (↗ Definition 2 (11.1.)), diese ist eine nichtleere Klasse gleichmächtiger Mengen (↗ Definition 1 (11.1.)). $n = \mathrm{Kz}(\emptyset) = 0$ ist nicht ausgeschlossen.
Einen beliebigen Repräsentanten M dieser Klasse vereinigen wir mit einer Einermenge $\{a\}$, von der nur gefordert wird, daß a zum vorgegebenen Individuenbereich gehört — das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz eines solchen Individuenbereiches — und a nicht Element von M ist.
Diese Vereinigungsmenge $M \cup \{a\} = M'$ ist endlich, da M endlich ist. Sie bestimmt wieder eine endliche Kardinalzahl, also eine natürliche Zahl (↗ Definition 2 (11.1.)), die nach Definition 4 (11.1.) Nachfolger n' von n ist.
2. *Eindeutigkeitsbeweis:*
Wir nehmen an, es existieren zu der beliebigen natürlichen Zahl n die beiden Nachfolger m_1 und m_2.
Nun müssen wir zeigen, daß $m_1 = m_2$ ist.
Da n eine natürliche Zahl ist, gibt es eine endliche Menge M — beliebiger Repräsentant von n — mit $n = \mathrm{Kz}(M)$.
Nach der Definition 4 (11.1.) ist aber
$$m_1 = \mathrm{Kz}(M \cup \{a\}) \text{ und } m_2 = \mathrm{Kz}(M \cup \{b\}) \text{ mit } a \notin M \text{ und } b \notin M .$$
Nach der Definition der Kardinalzahl folgt aus $A \sim B$ sofort
$$\mathrm{Kz}(A) = \mathrm{Kz}(B) .$$
Da $M \cup \{a\} \sim M \cup \{b\}$ ist, folgt
$$\mathrm{Kz}(M \cup \{a\}) = \mathrm{Kz}(M \cup \{b\}),$$
also ist $m_1 = m_2$.

Es existiert also ein solcher Nachfolger von n, und er ist von der Wahl der Repräsentanten unabhängig, ist eindeutig bestimmt. q. e. d.

SATZ 3 (11.1.) — **Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl** (P III)
Für alle natürlichen Zahlen n gilt:
$n' \neq 0$.

Voraussetzung: n ist natürliche Zahl.
Behauptung: Für alle n gilt: $n' \neq 0$.
Beweis:
Es gibt zu jeder natürlichen Zahl $n = \mathrm{Kz}\,(M)$ einen Repräsentanten, den wir mit M bezeichnen wollen.
Nach der Definition 4 (11.1.) ist die Menge $M \cup \{a\}$ ein Repräsentant von n', falls $a \notin M$, aber a Element des vorgegebenen Individuenbereiches ist. Diese Vereinigungsmenge $M \cup \{a\}$ ist nicht leer, da sie wenigstens das Element a enthält — M kann natürlich auch die leere Menge sein —, also ist $M \cup \{a\} \neq \emptyset$, d. h.,

$$\mathrm{Kz}\,(M \cup \{a\}) \neq 0 \quad \text{oder} \quad n' \neq 0 .$$

SATZ 4 (11.1.) — **Gleichheit der Vorgänger** (P IV)
Aus der Gleichheit der Nachfolger natürlicher Zahlen folgt die Gleichheit dieser natürlichen Zahlen.

Voraussetzung: Es seien $n, m \in N$ und $n' = m'$.
Behauptung: $n = m$
Beweis:
Ist A' ein Repräsentant von n' und ist B' ein solcher von m', so ergibt sich aus $n' = m'$ sofort $A' \sim B'$
Da n' bzw. m' Nachfolger von n bzw. m ist, können wir $A' = A \cup \{a\}$ und $B' = B \cup \{b\}$ setzen, wobei A bzw. B Repräsentant von n bzw. m ist.
Somit ergibt sich

$$A \cup \{a\} \sim B \cup \{a\} \quad \text{mit} \quad a, b \in I,\, a \notin A,\, b \notin B .$$

Es gibt also eine eineindeutige Abbildung f von $G = A \cup \{a\}$ auf $H = B \cup \{b\}$ durch die Zuordnung

$$x_1 \to f(x_1) = x_2 \quad \text{mit} \quad x_1 \in G \quad \text{und} \quad x_2 \in H .$$

Wir können nun eine eineindeutige Abbildung f_1 konstruieren, bei der $x_1 = a$ und $x_2 = b$ ist vermittels der Zuordnung

$$a = x_1 \to f(x_1) = b .$$

f ist dann auch eine eineindeutige Abbildung von A auf B, also

$$A \sim B .$$

Folglich ist

$$\mathrm{Kz}\,(A) = \mathrm{Kz}\,(B) \quad \text{bzw.} \quad n = m .$$ q. e. d.

SATZ 5 (11.1.) — **Axiom der vollständigen Induktion** (P V)
Jede Menge M, welche die Zahl 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Voraussetzung: M enthalte die natürliche Zahl 0 und mit einer beliebigen natürlichen Zahl n auch n'.

Behauptung: M enthält alle natürlichen Zahlen (endliche Kardinalzahlen).

Beweis:

Es sei $\mathfrak{A}$ das System derjenigen endlichen Mengen, deren Kardinalzahlen in M enthalten sind.

Wir müssen nun zeigen, daß $\mathfrak{A}$ das System *aller* endlichen Mengen ist.

Nach Voraussetzung ist $\emptyset \in \mathfrak{A}$, da Kz $(\emptyset) = 0 \in M$ ist.

Nun ist ebenfalls nach Voraussetzung mit n auch $n' \in M$, also ist nach Konstruktion von $\mathfrak{A}$ auch jeder Repräsentant von n' Element von $\mathfrak{A}$, d. h. — wenn X Repräsentant von n und $a \in X$ — $X \cup \{a\}$ ist Element von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ enthält also die leere Menge $\emptyset$ und mit X auch $X \cup \{a\}$.

Nach der RUSSELLschen Endlichkeitsdefinition ist also $\mathfrak{A}$ das System aller endlichen Mengen. Nach Konstruktion von $\mathfrak{A}$ ergibt sich hieraus, daß alle endlichen Kardinalzahlen zu M gehören, M enthält damit alle natürlichen Zahlen. q. e. d.

Anmerkung: Die RUSSELLsche Endlichkeitsdefinition:

(1) Die leere Menge ist endlich.
(2) Wenn die Menge M endlich ist, so auch $M \cup \{a\}$.
(3) Eine Menge ist nur dann endlich, wenn das auf Grund von (1) und (2) der Fall ist.

Satz 5 (11.1.) ist von besonderer Bedeutung, denn er liefert die Grundlage für die sogenannten **Beweise durch vollständige Induktion**, die wir noch oft führen werden.

Gesichert wird dieses Beweisverfahren durch den folgenden Satz.

SATZ 6 (11.1.) — **Rechtfertigungssatz für induktive Beweise**

Es sei n eine Variable für natürliche Zahlen und $\mathsf{H}(n)$ eine Aussageform, in der als einzige Variable n vorkommt.

Wenn dann (1) $\mathsf{H}(0)$ wahr ist und wenn
(2) aus der Wahrheit von $\mathsf{H}(n)$ für ein beliebiges n auch die Wahrheit von $\mathsf{H}(n')$ (n' ist Nachfolger von n) folgt,
so ist $\mathsf{H}(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen.

Beweis:

M sei die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen n, für die $\mathsf{H}(n)$ zu einer wahren Aussage wird.

Dann ist nach Voraussetzung

(1) $0 \in M$ und
(2) wenn $n \in M$, so $n' \in M$.

Daher enthält M alle natürlichen Zahlen nach Satz 5 (11.1.). Also wird $\mathsf{H}(n)$ zu einer wahren Aussage für alle natürlichen Zahlen n. q. e. d.

Manchmal werden **Induktionsbeweise** benötigt, deren **Induktionsanfang** ((1), Satz 6 (11.1.)) sich nicht auf die Zahl 0, sondern auf eine andere natürliche Zahl $n_1 > 0$ bezieht. Dann gilt der Rechtfertigungssatz auch (nur) für alle $n \geqq n_1$ (ohne Beweis).

Das Beweisen mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion wollen wir an einer Aufgabe erläutern.
Sie ist deshalb interessant, weil der Lehrer BÜTTNER aus Braunschweig seine Schüler, zu denen auch der neunjährige CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) gehörte, einen Spezialfall dieser Aufgabe lösen ließ, um etwas Ruhe zu haben, wie er glaubte.
BÜTTNER stellte die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 40 zu addieren. Das ist ein Spezialfall der Aufgabe, die Zahlen von 1 bis n zu addieren. Die meisten Schüler rechneten:

$$1 + 2 = 3 \; ; \quad 3 + 3 = 6 \; ; \quad 6 + 4 = 10 \text{ usw.}$$

Nicht so GAUSS. Er ordnete die Zahlen zu Paaren:

$$1 + 40 \; ; \quad 2 + 39 ; \quad \ldots ; \quad 20 + 21$$

und erhielt 20 Paare, deren Summe jeweils 41 betrug. Nun brauchte er nur zu multiplizieren:

$$20 \cdot 41 = 820 \, .$$

Wir können vermuten, daß die **Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n** immer
$S_n = \frac{n}{2}(n + 1)$ ist.

Wir wollen diese Vermutung *beweisen* und greifen dazu auf Schulkenntnisse zurück.

Voraussetzung: Gegeben seien die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$.

Behauptung: Für alle $n > 0$ gilt:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = S_n = \frac{n}{2}(n + 1) \, .$$

Beweis:

1. Schritt (auch **Induktionsanfang** genannt):
Wir müssen beweisen, daß die Behauptung für $n = 1$ wahr ist.
Sei $n = 1$, dann lautet die Behauptung: $S_1 = \frac{1}{2}(1 + 1)$.
Nun ist aber $S_1 = 1$, also stimmt in diesem Falle die Behauptung.

2. Schritt (auch **Induktionsschritt** genannt):

a) **Induktionsvoraussetzung**
Wir nehmen an, daß die Behauptung für eine beliebige natürliche Zahl k wahr ist.
Sei $n = k$; Annahme: $S_k = \frac{k}{2}(k + 1)$ ist wahr.

b) **Induktionsbehauptung**
Die Behauptung ist auch für den Nachfolger k' von k wahr.
Sei $n = k' = k + 1$, dann lautet die Behauptung:

$$S_{k+1} = \frac{k + 1}{2}[(k + 1) + 1] \, .$$

c) **Beweis der Induktionsbehauptung**

$$\begin{aligned} \text{Es ist } S_{k+1} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) \\ &= S_k \qquad\qquad\qquad\quad + (k + 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2}(k+1) \qquad + (k+1) \quad \text{(nach 2. a))}$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \qquad \text{(Addition von Brüchen)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k+1}{2}[(k+1)+1]$$

Schlußfolgerung: Die Behauptung gilt (nach dem Rechtfertigungssatz) für alle natürlichen Zahlen $n > 0$. q. e. d.

11.2. Definition der Menge der natürlichen Zahlen nach PEANO

Im Teil 11.1. haben wir den Abstraktionsprozeß, der zu den natürlichen Zahlen führt, mit Hilfe mathematischer Mittel nachgezeichnet, wir haben diesen Zahlenbereich **genetisch definiert**.
Beim axiomatischen Aufbau gehen wir davon aus, daß eine nicht leere Menge mit einem ausgezeichneten Element und einer Nachfolgerrelation gegeben ist.
Erfüllen nun die Elemente dieser Menge mit der in ihr erklärten Nachfolgerrelation das PEANOsche Axiomensystem — inhaltlich ist es in den oben angeführten Sätzen P I bis P V gegeben —, dann nennt man die Elemente dieser Menge **natürliche Zahlen** und bezeichnet die Menge einschließlich ihrer Nachfolgerrelation als **Modell des PEANOschen Axiomensystems**. Man sagt auch, der Begriff der natürlichen Zahl sei **axiomatisch definiert**.

PEANOsches Axiomensystem

P I: **Null** ist eine natürliche Zahl: $0 \in N$.

P II: Für alle natürlichen Zahlen n gibt es genau eine natürliche Zahl m, die **Nachfolger** von n ist:
$\forall n \exists m \, (m = n')$.

P III: Es gibt keine natürliche Zahl n, deren Nachfolger die Zahl 0 ist:
$\sim \exists n \, (n' = 0)$.

P IV: Für alle natürlichen Zahlen m, n gilt:
Wenn $m' = n'$, so $m = n$:
$\forall m \forall n \, (m' = n' \rightarrow m = n)$.

P V: Für alle Mengen M gilt:
Wenn die natürliche Zahl 0 Element von M ist und wenn mit jeder natürlichen Zahl n auch n' Element von M ist, so enthält M alle natürlichen Zahlen:
$\forall M \, [0 \in M \wedge \forall n \, (n \in M \rightarrow n' \in M) \rightarrow M = N]$.

Die als endliche Kardinalzahlen bekannten natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ mit der für sie erklärten Nachfolgerrelation sind ein Modell dieses Axiomensystems. Aber auch die Elemente der Menge $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ der geraden Zahlen erfüllen die Forderungen des PEANOschen Axiomensystems, sofern die „Nachfolgerrelation" für sie so definiert wird, daß $0' = 2$, $2' = 4$, $4' = 6$ usw. gelten. Es gibt noch andere Modelle, aber alle sind einander isomorph bezüglich der Nachfolgerrelation (↗ Definition 2 (10.5.)).

Man sagt: Das PEANOsche Axiomensystem legt den Begriff „natürliche Zahlen" eindeutig bis auf Isomorphie fest.

Der italienische Mathematiker und Logiker GIUSEPPE PEANO (1858 bis 1932) hat 1891 dieses Axiomensystem in unwesentlich anderer Form vorgeschlagen; diese axiomatische Definition der natürlichen Zahlen, der wir uns heute noch bedienen, ist also noch nicht einmal 100 Jahre alt.

Im Teil 11.1. haben wir P I bis P V als beweisbare Sätze angesehen und auch bewiesen. Im PEANOschen Axiomensystem sind die P I bis P V **Axiome**, also unbewiesene Sätze (Aussagen).
„Ob aber ein Satz beweisbar ist oder nicht, ob er also als Axiom gilt oder nicht, hängt von seiner Stellung im Aufbau der betreffenden mathematischen Theorie ab" ([7], S. 144).

Als **Axiomensystem** bezeichnet man „die einer Gesamtheit von Aussagen eines Wissenschaftsbereichs zugrunde liegende systematische Teilmenge von Aussagen (Axiomen), aus der sich alle übrigen Aussagen — dieses Bereichs — deduktiv ableiten lassen ... das System muß **widerspruchsfrei** sein und sollte nach Möglichkeit **unabhängig** und **vollständig** sein" ([12], S. 167).

Mengentheoretischer Aufbau der Menge der natürlichen Zahlen (N)

Natürliche Zahlen
$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Äquivalenzklassen gleichmächtiger endlicher Mengen, genannt: **Endliche Kardinalzahlen**	Isomorph bezüglich der Nachfolgerrelation	**Äquivalenzklassen** ähnlicher wohlgeordneter endlicher Mengen, genannt: **Endliche Ordinalzahlen**
Äquivalenzrelation Gleichmächtigkeit ($\sim$)		**Äquivalenzrelation Ähnlichkeit** ($\backsimeq$)
Mengensystem Elemente: **Endliche Mengen**		**Mengensystem** Elemente: **Wohlgeordnete endliche Mengen**

11.3. Algebraische Operationen in N

Im Teil B „Einführung in die Mengenlehre" haben wir den Begriff **Algebraische Operation** kennengelernt (↗ Definition 1 (10.7.)).
Wir wollen solche Operationen (Abbildungen) auch für die Menge N definieren und weitere Aussagen (Sätze) über diese Operationen formulieren und beweisen.
Entsprechend der genetischen bzw. axiomatischen Definition der natürlichen Zahlen, werden wir zunächst *mengentheoretisch* und dann *induktiv* vorgehen.

Wir definieren nun **Rechenoperationen für natürliche Zahlen**, indem wir auf entsprechende Eigenschaften der **endlichen Kardinalzahlen** zurückgreifen.

DEFINITION 1 (11.3.) — Summe natürlicher Zahlen
Wir nennen $a + b$ die **Summe** von $a = \mathrm{Kz}\,(A)$ und $b = \mathrm{Kz}\,(B)$ genau dann, wenn
$a + b = \mathrm{Kz}\,(A \cup B)$ mit $A \cap B = \emptyset$.
Die natürlichen Zahlen a und b nennen wir **Summanden.**

Ist $a = b$, dann ist es ebenfalls möglich, disjunkte Repräsentanten für a und b zu finden (↗ Bemerkungen nach Definition 3 (11.1.)).

SATZ 1 (11.3.) — Summe natürlicher Zahlen
Die in Definition 1 (11.3.) definierte **Summe existiert** und ist **eindeutig bestimmt.**

Auf den Beweis des Satzes 1 (11.3.) verzichten wir. Er ergibt sich aus Existenz und Eindeutigkeit der Vereinigungsmenge disjunkter Mengen.

DEFINITION 2 (11.3.) — Addition in N
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N **Addition in N** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b ihre Summe zuordnet.

Nach Teil 10.7. ist die durch die Definition 2 (11.3.) charakterisierte Abbildung (Addition) eine algebraische Operation.
Allerdings wissen wir noch nicht, ob die Addition in N existiert und, wenn sie existiert, ob sie dann auch eindeutig bestimmt ist. Wir stellen daher die folgende Behauptung auf.

SATZ 2 (11.3.) — Addition in N
Die in Definition 2 (11.3.) erklärte Operation ist für alle natürlichen Zahlen stets und eindeutig ausführbar.

Voraussetzung: Es seien $a = \mathrm{Kz}\,(A)$, $b = \mathrm{Kz}\,(B)$, $A \cap B = \emptyset$ und „$+$" das Zeichen für die Addition.

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen a, b gibt es genau eine natürliche Zahl x mit $x = a + b$.

Beweis:
„Es gibt genau ein x ..." bedeutet, daß es *mindestens ein* solches x (*Existenz*) und zugleich *höchstens ein* solches x gibt (*Eindeutigkeit*).
Der Beweis besteht daher aus zwei Teilen.
1. Existenzbeweis
Wir müssen zeigen, daß es eine natürliche Zahl x gibt, die die o. a. Behauptung erfüllt.
Es seien also $a = \mathrm{Kz}\,(A)$, $b = \mathrm{Kz}\,(B)$, $A \cap B = \emptyset$.
Wir bilden

$$A \cup B = X\,.$$

Da A und B endlich sind, ist auch $X = A \cup B$ endlich (↗ Teil B).
Also ist $\mathrm{Kz}\,(X) = \mathrm{Kz}\,(A \cup B)$ eine natürliche Zahl, die wir mit x bezeichnen.
Laut Definition 1 (11.3.) erhalten wir damit

$$\mathrm{Kz}\,(A) + \mathrm{Kz}\,(B) = \mathrm{Kz}\,(A \cup B) = \mathrm{Kz}\,(X) \quad \text{oder}$$
$$a + b = x\,.$$

2. Eindeutigkeitsbeweis
Wir müssen zeigen, daß die Summe $a + b$ von den gewählten Repräsentanten unabhängig ist. Dazu wählen wir aus a bzw. b (das sind Klassen gleichmächtiger Mengen) andere disjunkte Vertreter — etwa A^* und B^* —, für die daher gilt:

$$A \sim A^*, \quad B \sim B^* \quad \text{und} \quad A^* \cap B^* = \emptyset .$$

Nun ist

$$A \cup B \sim A^* \cup B^*,$$

denn wir können jedes $x \in A \cup B$ auf genau ein $x^* \in A^* \cup B^*$ wegen der vorhin angegebenen Gleichmächtigkeit der verwendeten Mengen eineindeutig abbilden.
Daher ist

$$\mathrm{Kz}\,(A \cup B) = \mathrm{Kz}\,(A^* \cup B^*) .$$

Bezeichnen wir wiederum diese Vereinigungsmengen mit X bzw. X^*, dann ist

$$\mathrm{Kz}\,(X) = \mathrm{Kz}\,(X^*) \quad \text{oder} \quad x = x^*,$$

d. h., die Addition der beiden natürlichen Zahlen a und b ist von den gewählten Repräsentanten unabhängig, sie ist eindeutig bestimmt.
Damit haben wir in der Menge N eine **algebraische Operation** erklärt, die für alle $x \in N$ nicht aus N herausführt. q. e. d.
Wir sagen: **N ist abgeschlossen gegenüber der Addition.**

Im Teil B haben wir einige Eigenschaften von Mengenoperationen kennengelernt. Wir werden sie benutzen, um einige **Rechengesetze für natürliche Zahlen** zu beweisen.
Da Mengenoperationen — also auch die Vereinigungsmenge — mit Hilfe von logischen Operationen definiert sind, ist es zweckmäßig, bei den entsprechenden Definitionen und Sätzen in den Teilen A und B nachzulesen, um sich die dort angegebenen Sachverhalte zu vergegenwärtigen.
Wir wollen noch daran erinnern, daß man eine Aussage „*für alle* . . . gilt . . .“ dadurch beweist, daß man sie „*für beliebige* . . .“ beweist. Ohne es jedesmal ausdrücklich zu sagen, sollen die gewählten Repräsentanten $A, B, \ldots$ *beliebig* gewählte Repräsentanten der entsprechenden natürlichen Zahlen sein.

SATZ 3 (11.3.) — **Assoziativgesetz der Addition in N**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Voraussetzung: Es seien $a = \mathrm{Kz}\,(A)$, $b = \mathrm{Kz}\,(B)$, $c = \mathrm{Kz}\,(C)$ und
$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$,
wobei a, b, c beliebig gewählte natürliche Zahlen seien.

Behauptung: Es gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Beweis:
$(a + b) + c$ ist die natürliche Zahl (Kardinalzahl) der eindeutig bestimmten Vereinigungsmenge
$(A \cup B) \cup C$ (nach Definition 1 (11.3.)) und
$a + (b + c)$ die natürliche Zahl der Vereinigungsmenge
$A \cup (B \cup C)$ (nach Definition 1 (11.3.)).
Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß die Mengenoperation $\cup$ (Vereinigung von Mengen) assoziativ ist.
Daher gilt:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

folglich ist

$$\mathrm{Kz}\,((A \cup B) \cup C) = \mathrm{Kz}\,(A \cup (B \cup C)) \quad \text{bzw.}$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)\,.$$

Da der Satz 3 (11.3.) *für beliebige* natürliche Zahlen bewiesen wurde, gilt er auch *für alle* natürlichen Zahlen (↗ Teil 5.4.).

Soll ein Schüler die Erfüllungsmenge der Aussageform $8 + 7 + 2 = x$ ermitteln, dann geht er vielleicht folgendermaßen vor:

$$8 + 2 + 7 = (8 + 2) + 7 = 10 + 7 = 17 = x\,.$$

Er hat zwei Summanden vertauscht — das Kommutativgesetz angewendet — und dann das Assoziativgesetz benutzt.

SATZ 4 (11.3.) — **Kommutativgesetz der Addition in N**
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a + b = b + a\,.$

Voraussetzung: Es seien $a = \mathrm{Kz}\,(A)$, $b = \mathrm{Kz}\,(B)$ und $A \cap B = \emptyset$, a, b beliebig gewählte natürliche Zahlen.

Behauptung: Es gilt: $a + b = b + a$.

Beweis:

$a + b$ ist die natürliche Zahl (Kardinalzahl) der Vereinigungsmenge

$A \cup B$ (nach Definition 1 (11.3.)) und

$b + a$ die natürliche Zahl der Vereinigungsmenge

$B \cup A$ (nach Definition 1 (11.3.)).

Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß die Mengenoperation $\cup$ kommutativ ist. Daher gilt

$$A \cup B = B \cup A\,,$$

folglich ist

$$\mathrm{Kz}\,(A \cup B) = \mathrm{Kz}\,(B \cup A) \quad \text{bzw.}$$
$$a + b = b + a\,.$$

In Definition 1 (11.3.) müssen die Mengen A und B als Repräsentanten der natürlichen Zahlen a bzw. b disjunkt sein. Das muß der Lehrer beachten, wenn er den Schülern Textaufgaben gibt. Zur Übung eignen sich aber auch Aufgaben, in denen über den Durchschnitt der angegebenen Mengen nichts ausgesagt ist. Solche Aufgaben erfordern eine besonders sorgfältige Analyse des Textes, das Analysieren muß ständig geübt werden (↗ „Lehrpläne Klasse 1, Mathematik". Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1967, S. 129).

Dazu ein Beispiel aus einer Mathematikolympiade der DDR für Klasse 1:
„*Neun Schüler bereiten ein Album für ihre Patenbrigade vor, acht versehen es mit Bildern. Wie viele Schüler sind beteiligt?*"
Bei oberflächlicher Analyse des Textes könnte ein Schüler $x = 17$ als einzige Lösung der Aufgabe erhalten.
Für die Anzahl x der beteiligten Schüler gilt jedoch:

$$9 \leqq x \leqq 17\,.$$

Eine andere Aufgabe soll uns zu einer neuen Rechenoperation führen.
„*Gerd hat sechs Flaschen gesammelt, Ulf neun. Wie viele Flaschen muß Gerd noch dazu sammeln, damit er genau so viele gesammelt hat wie Ulf?*"
Die Schüler haben die Erfüllungsmenge für $6 + x = 9$ zu ermitteln. Anfänglich überlegen sie: „Wieviel muß ich zu 6 addieren, um 9 zu erhalten?" Später

lösen sie die Gleichung nach x auf und erhalten $x = 9 - 6$; sie bedienen sich einer neuen Rechenoperation, der **Subtraktion**. Allerdings bemerken die Schüler bald, daß Aufgaben dieser Art (in N) nicht immer lösbar sind.

Für die Definition 3 (11.3.) müssen wir zeigen, daß man zu zwei natürlichen Zahlen $a = \text{Kz}(A)$ und $b = \text{Kz}(B)$ mit $b \leqq a$ stets einen Repräsentanten für b finden kann, der eine Teilmenge eines Repräsentanten von a ist. Gilt zum Beispiel nicht $B \subseteqq A$, so gibt es wegen $b \leqq a$ ein $A^* \subseteqq A$ mit $B \sim A^*$. Da $b = \text{Kz}(B)$, ist auch A^* Repräsentant von b, und dieser erfüllt die Bedingung $A^* \subseteqq A$. Wir wählen also für B die Menge A^*.

DEFINITION 3 (11.3.) — **Differenz natürlicher Zahlen**
Wir nennen $a - b$ die **Differenz** von $a = \text{Kz}(A)$ und $b = \text{Kz}(B)$ genau dann, wenn
$a - b = \text{Kz}(A \setminus B) \quad \text{mit} \quad B \sim A^* \subseteqq A$
ist.
Die Zahl a nennen wir **Minuend**, die Zahl b **Subtrahend**.

SATZ 5 (11.3.) — **Differenz natürlicher Zahlen**
Die in Definition 3 (11.3.) definierte **Differenz existiert**, wenn $b \leqq a$ ist, sie ist dann auch **eindeutig bestimmt.**

Der *Beweis* ergibt sich aus Existenz und Eindeutigkeit einer Differenzmenge unter den Bedingungen von Definition 3 (11.3.).

DEFINITION 4 (11.3.) — **Subtraktion in N**
Wir nennen die eindeutige Abbildung aus $N \times N$ in N **Subtraktion in N** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b mit $a \geqq b$ ihre Differenz zuordnet.

Bei der Addition mußten die Repräsentanten (Mengen) der natürlichen Zahlen disjunkt sein (↗ Definition 1 (11.3.)). Bei der Subtraktion in N muß der Repräsentant der kleineren Zahl eine Teilmenge des Repräsentanten der größeren sein; ein solcher existiert im Falle $a \geqq b$ stets. Es „leuchtet ein", daß man von drei Kastanien nicht zwei Äpfel wegnehmen kann. Die Differenz $a - b$ ist auch nur erklärt unter der Einschränkung $a \geqq b$; es ist zum Beispiel $1 - 3 = x$ in N nicht lösbar.

SATZ 6 (11.3.) — **Subtraktion in N**
Die in Definition 4 (11.3.) erklärte Operation ist mit der angegebenen Einschränkung für alle natürlichen Zahlen stets und eindeutig ausführbar.

Voraussetzung: Es sei $a \geqq b$, $a = \text{Kz}(A)$ und $b = \text{Kz}(B)$.
Behauptung: Es gibt genau eine natürliche Zahl x mit $x = a - b$.
Beweis:
1. Existenzbeweis
Wir müssen zeigen, daß es eine natürliche Zahl x gibt, die obige Behauptung erfüllt.

Es sei $b \leqq a$.
Dann wählen wir Repräsentanten $A \in \mathrm{Kz}(A)$ und $B \in \mathrm{Kz}(B)$, für die gilt: $B \subseteqq A$ (↗ Bemerkung vor Definition 3 (11.3.)).
Nun existiert die Differenzmenge

$$A \setminus B = X \qquad \text{bzw.} \qquad A \setminus A^* = X$$

und ist eindeutig bestimmt.
Sie ist endlich, weil auch A und B bzw. A und A^* endlich sind.
Daher gilt für die entsprechenden natürlichen Zahlen:

$$\mathrm{Kz}(A) - \mathrm{Kz}(B) = \mathrm{Kz}(A \setminus B) = \mathrm{Kz}(X) \qquad \text{bzw.}$$
$$\mathrm{Kz}(A) - \mathrm{Kz}(A^*) = \mathrm{Kz}(X) \qquad \text{oder}$$
$$a - b = x \quad \text{(nach Definition 3 (11.3.))}.$$

2. Eindeutigkeitsbeweis
Wir müssen zeigen, daß die Differenz $a - b$ von den gewählten Repräsentanten unabhängig ist.
Dazu wählen wir aus a bzw. b andere Vertreter — etwa A_1 bzw. B_1 —, für die daher gilt: $A_1 \sim A$, $\;B_1 \sim B\;$ und $\;B_1 \subseteqq A_1$.
Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß mit $A_1 \sim A$ und $B_1 \sim B$ auch zutrifft $A \setminus B \sim A_1 \setminus B_1$.
Bezeichnen wir die Differenzmenge mit X bzw. X_1, dann gilt für die entsprechenden natürlichen Zahlen:

$$\mathrm{Kz}(A \setminus B) = \mathrm{Kz}(A_1 \setminus B_1) \qquad \text{oder}$$
$$\mathrm{Kz}(X) = \mathrm{Kz}(X_1), \qquad \text{das heißt,}$$
$$a - b = x = x_1 .$$

Die Differenz $a - b$ ist also eindeutig bestimmt. q. e. d.

Im allgemeinen betrachtet man die **Subtraktion** als **Umkehrung der Addition**. In der Schule begründen die Schüler die Wahrheit der Aussage $5 - 3 = 2$ mit Hilfe der Addition, und sie sagen: $5 - 3 = 2$, *denn* $2 + 3 = 5$. Damit wird der enge Zusammenhang zwischen diesen beiden Operationen unterstrichen.
Allerdings gelten für die Subtraktion weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz, wie man leicht an Beispielen nachweist.
Addition und Subtraktion bezeichnet man auch als **Rechenoperationen 1. Stufe.**

Wir wollen uns jetzt den **Rechenoperationen 2. Stufe** zuwenden.
Ein Schüler lernt, daß er die Erfüllungsmenge für die Aussageform

$$2 + 2 + 2 = x$$

auf verschiedene Art ermitteln kann. Er wendet das Assoziativgesetz an und erhält:

$$(2 + 2) + 2 = 4 + 2 = 6 = x ,$$

oder er erkennt, daß es sich hier um gleiche Summanden handelt, und rechnet

$$3 \cdot 2 = 6 = x$$

und benutzt die Multiplikation.

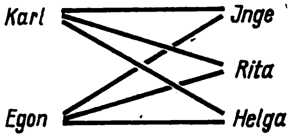
DEFINITION 5 (11.3.) — **Produkt natürlicher Zahlen**
Wir nennen $a \cdot b$ das **Produkt** von $a = \mathrm{Kz}(A)$ und $b = \mathrm{Kz}(B)$ genau dann, wenn
$a \cdot b = \mathrm{Kz}(A \times B)$.
Die Zahlen a und b nennen wir **Faktoren.**

SATZ 7 (11.3.) — **Produkt natürlicher Zahlen**
Das in Definition 5 (11.3.) definierte **Produkt existiert** und ist **eindeutig bestimmt.**

Der *Beweis* ergibt sich aus Existenz und Eindeutigkeit von $A \times B$ aus Definition 5 (11.3.).

DEFINITION 6 (11.3.) — **Multiplikation in N**
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $N \times N$ in N **Multiplikation in N** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b ihr Produkt zuordnet.

BEISPIEL 1 (11.3.):
In der Schule wird manchmal zur Einführung der Multiplikation eine Aufgabe folgender Art gestellt:
Zwei Jungen und drei Mädchen spielen Federball. Jeder Junge soll gegen jedes Mädchen spielen. Wie viele Spiele müssen ausgetragen werden?
Das Problem können wir graphisch lösen, indem wir die Namen der Kinder aufschreiben und die Namen der Kinder jeweils eines Paares durch Linien miteinander verbinden (↗ Bild 230/1).



230/1

Es gibt dann folgende Paare:
Karl—Inge, Karl—Rita, Karl—Helga, Egon—Inge, Egon—Rita, Egon—Helga.
Schreiben wir die Mannschaft der Jungen bzw. der Mädchen als Menge:

$$\text{Mannschaft } 1 = A = \{k, e\},$$
$$\text{Mannschaft } 2 = B = \{i, r, h\}$$

und bilden die Produktmenge

$$A \times B = X = \{[k; i], \quad [k; r], \quad [k; h], \quad [e; i], \quad [e; r], \quad [e; h]\},$$

dann besitzt diese Menge sechs Elemente, also ist

$$\mathrm{Kz}\,(A \times B) = \mathrm{Kz}\,(X) = x = 6.$$

Folglich sind sechs Spiele auszutragen.

Wir haben die Lösung der Aufgabe im Beispiel 1 (11.3.) mit Hilfe einer **Produktmenge** aus der Menge der Jungen und der Menge der Mädchen gefunden.

SATZ 8 (11.3.) — **Multiplikation in N**
Die in Definition 6 (11.3.) erklärte Operation ist für alle natürlichen Zahlen stets und eindeutig ausführbar.

Wir wollen den *Beweisgedanken* nur skizzieren.
Für den Nachweis der *Existenz des Produkts* $a \cdot b$ in N bei beliebigen $a, b \in N$ ist zu zeigen, daß die Produktmenge $A \times B$ mit $A \in a$ und $B \in b$ und damit auch

Kz $(A \times B)$ eindeutig bestimmt sind. Im *Eindeutigkeitsbeweis* ist zu zeigen, daß dieses Produkt von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist.

Damit haben wir in der Menge N eine weitere algebraische Operation erklärt, die für alle $x \in N$ nicht aus N herausführt.
Wir sagen:

N ist abgeschlossen gegenüber der Multiplikation.

Die Multiplikation in N genügt gewissen Gesetzen.

SATZ 9 (11.3.) — **Assoziativgesetz der Multiplikation in N**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Voraussetzung: Es seien $a = \text{Kz}\,(A)$; $b = \text{Kz}\,(B)$ und $c = \text{Kz}\,(C)$;
a, b, c beliebig gewählte natürliche Zahlen

Behauptung: Es gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Beweis:
Es ist nach Definition 5 (11.3.)

$$(a \cdot b) \cdot c = \text{Kz}\,[(A \times B) \times C] \quad \text{und}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = \text{Kz}\,[A \times (B \times C)] \quad .$$

Nun ist $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

Da im Teil B diese Behauptung nicht bewiesen wurde, wollen wir hier ihre Richtigkeit an einem *Beispiel* demonstrieren. Es seien

$$A = \{1, 2\}\ , \quad B = \{x, y, z\}\ , \quad C = \{3, 4, 5, 6\}\ .$$

Nach Definition der Produktmenge ist

$$(A \times B) \times C = \{[[a; b]; c] \colon a \in A \quad \text{und} \quad b \in B \quad \text{und} \quad c \in C\}\ .$$

Für unser Beispiel gilt also

$$(A \times B) \times C = \{[1; x; 3]\ , \ [1; x; 4]\ , \ [1; x; 5]\ , \ [1; x; 6]\ , \ [1; y; 3]\ , \ \ldots, [2; z; 6]\}\ .$$

Dabei läßt man im allgemeinen jeweils ein Paar der eckigen Klammern weg und schreibt die Elemente der Produktmenge als geordnete Tripel $[a; b; c]$.
Ersichtlich enthält auch $A \times (B \times C)$ genau die gleichen geordneten Tripel, so daß man eine eineindeutige Abbildung der beiden Mengen geordneter Tripel aufeinander herstellen kann. Die Gleichmächtigkeit der beiden Produktmengen ist also augenscheinlich, wenn man diese Darstellung als Beweis gelten läßt (ein Beispiel ist natürlich kein Beweis für eine Allaussage). Ersichtlich sind die Produktmengen sogar gleich, denn sie enthalten beide die gleichen geordneten Tripel.
Aus dieser Gleichmächtigkeit (hier sogar Gleichheit) folgt

$$\text{Kz}\,[(A \times B) \times C] = \text{Kz}\,[A \times (B \times C)], \quad \text{also}$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ . \qquad \text{q. e. d.}$$

Ein Schüler beachtet dieses Gesetz, wenn er rechnet:

$$7 \cdot 5 \cdot 2 = 7 \cdot (5 \cdot 2) = 7 \cdot 10 = 70\ .$$

Es ist üblich, beim Arbeiten mit Variablen das Rechenzeichen „·“ wegzulassen, man schreibt „$a\,b\,c$“ an Stelle von „$a \cdot b \cdot c$“.

SATZ 10 (11.3.) — **Kommutativgesetz der Multiplikation in N**
Für alle natürlichen Zahlen gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$.

Beim *Beweis* des Satzes 10 (11.3.) benutzt man die Äquivalenz der Mengen $A \times B$ und $B \times A$ für beliebige Mengen A, B.

Mit dem bisher Gesagten ist eine gewisse Übereinstimmung zwischen Addition und Multiplikation in N bezüglich der für sie erkannten Gesetze sichtbar.

Es gilt noch ein Gesetz, das eine Verbindung zwischen beiden Operationen zum Ausdruck bringt.

SATZ 11 (11.3.) — **Rechtsseitiges Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition in N**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Wir wollen einen *Beweis* skizzieren.
Es seien $a = \mathrm{Kz}\,(A)$, $b = \mathrm{Kz}\,(B)$, $c = \mathrm{Kz}\,(C)$ und $A \cap B = \emptyset$.
Dann gilt:
Für alle $[x; y]$: $[x; y] \in (A \cup B) \times C$ genau dann, wenn $[x; y] \in (A \times C) \cup (B \times C)$.
Das heißt aber:
Für alle $[x; y]$: $(x \in A$ oder $x \in B)$ und $y \in C$ genau dann, wenn $(x \in A$ und $y \in C)$ oder $(x \in B$ und $y \in C)$.

Die logische Struktur lautet:

$$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

Eine Wertetabelle zeigt sofort, daß diese Äquivalenz eine (aussagenlogische) Identität ist. Damit können wir rückwärts auf die Richtigkeit des Satzes 11 (11.3.) schließen.

Der *Beweis* für das **linksseitige Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition in N** —

Für alle $a, b, c \in N$: $c\,(a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ —

ergibt sich sofort aus der Kommutativität der Multiplikation.

Das links- und rechtsseitige Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition kann man daher zum **Distributivgesetz** zusammenfassen.

Ein Schüler rechnet zum Beispiel:

$$4 \cdot 12 = 4\,(10 + 2) = 4 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = 40 + 8 = 48$$

und wendet das Distributivgesetz an.

DEFINITION 7 (11.3.) — **Quotient natürlicher Zahlen**
Wir nennen $a : b$ mit $b > 0$ den **Quotienten** von $a = \mathrm{Kz}\,(A)$ und $b = \mathrm{Kz}\,(B)$ genau dann, wenn $a : b$ durch eine Menge X repräsentiert werden kann, für die gilt:
$a = \mathrm{Kz}\,(B \times X)$.
Die Zahl a nennen wir **Dividend**, die Zahl b **Divisor.**

SATZ 12 (11.3.) — **Quotient natürlicher Zahlen**
Der in Definition 7 (11.3.) definierte **Quotient existiert**, wenn $a = b \cdot x$, und ist dann **eindeutig bestimmt.**

DEFINITION 8 (11.3.) — **Division in N**
Wir nennen die eindeutige Abbildung aus $N \times N \setminus \{0\}$ in N **Division in N** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[a; b]$ natürlicher Zahlen a und b mit $b \neq 0$ ihren Quotienten zuordnet.

Dieser Operation liegen zwei *inhaltlich verschiedene* Sachverhalte zugrunde.

BEISPIEL 2 (11.3.):
Eine Klasse mit 27 Schülern marschiert in Dreierreihen zum Sportunterricht. Wie viele Reihen sind es?
Hier handelt es sich darum, eine Menge von Schülern in Dreiermengen einzuteilen. Man kann fragen, wie oft eine Menge von drei Schülern in einer Menge von 27 Schülern enthalten ist, und rechnet:

$$27:3 = 9\,.$$

BEISPIEL 3 (11.3.):
Eine Klasse von 27 Schülern ist in drei Gruppen mit gleicher Anzahl von Schülern aufzuteilen. Wie stark ist jede Gruppe?
Man rechnet hier:

$$27:3 = 9\,.$$

Wir haben bisher festgestellt, daß Addition und Multiplikation in N immer und eindeutig ausführbar sind. An die zur Definition verwendeten Repräsentanten (Mengen) haben wir bei der Multiplikation keine besonderen Forderungen gestellt, bei der Addition mußten sie allerdings disjunkt sein. Bei der Subtraktion $a - b$ mußte $a \geqq b$ sein, und die Repräsentanten mußten noch gewisse Teilmengenbeziehungen erfüllen (↗ Definition 3 (11.3.)).

Bei der Division $a{:}b = x$ muß $A \sim B \times X$ (↗ Definition 7 (11.3.)) und damit $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_b$ sein.
Man muß also den gewählten Repräsentanten A in b gleichmächtige, disjunkte Teilmengen A_i mit $i = 1, 2, 3, \ldots, b$ zerlegen können, andernfalls ist die Division nicht ausführbar, denn dann gibt es zu A, B auch kein X mit $A \sim B \times X$. Außerdem ist die Division $a{:}b$ für $b = 0$ nicht erklärt.

Manchmal hört man die Formulierung:
Man darf nicht durch 0 dividieren!
Was geschieht aber, wenn man es trotzdem tut?

Wir wollen das an einem *Beispiel* erläutern.
Ein Schüler begründet die Division mit Hilfe der Multiplikation:

$$8:2 = 4, \text{ denn } 4 \cdot 2 = 8.$$

Es sei nun $b = 0$. $8:0 = x$, denn $x \cdot 0 = 8$.
Es gibt aber kein x, das $8:0 = x$ bzw. $x \cdot 0 = 8$ erfüllt.
Daher fordert man $b \neq 0$ bei der Definition der Division $a{:}b$.

SATZ 13 (11.3.) — **Division in N** (ohne Beweis)
Die in Definition 8 (11.3.) erklärte Operation ist mit der angegebenen Einschränkung für alle natürlichen Zahlen stets und eindeutig ausführbar.

Für die Division gilt weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz. Das kann man durch ein *Gegenbeispiel* leicht nachweisen.

$$8:4 \neq 4:8 \quad \text{bzw.} \quad (12:6):2 \neq 12:(6:2), \quad \text{denn} \quad 1 \neq 4$$

Damit sind die **vier Grundrechenoperationen mengentheoretisch** behandelt. Auf weitere Operationen (z. B. das Potenzieren) gehen wir nicht ein.

Wir wollen nun die durch das PEANOsche Axiomensystem definierten natürlichen Zahlen voraussetzen und **Rechenoperationen induktiv mit Hilfe von Rekursionsformeln** definieren.

Dazu einige *Vorbemerkungen*:
Manchmal rechnet ein Schüler noch „an den Fingern" und löst $5 + 3 = x$, indem er die fünf Finger der linken Hand auf den Tisch legt. Dann legt er den Daumen, den Zeigefinger und den Mittelfinger der rechten Hand dazu und zählt jeweils: fünf — sechs, sieben, acht. Er hat mit anderen Worten den Nachfolger von 5, dann den Nachfolger des Nachfolgers usw. gebildet. Man kann auch sagen, er habe, statt einmal 3 zu addieren, dreimal 1 addiert.
Wir schreiben diesen Vorgang in der bekannten Symbolik.

$$\begin{aligned} 5 + 3 &= 5 + 2' = (5 + 2)' = (5 + 1')' = [(5 + 1)']' = [(5')']' \\ &= [6']' = 7' = 8 = x\,. \end{aligned}$$

Allgemein heißt das: Die Addition von n zu a wird auf eine n-malige Addition von 1 zu a zurückgeführt.

Bei den folgenden **Definitionen der Addition und Multiplikation in N** werden jeweils zwei (Rekursions-)Formeln angegeben, die Axiome für die jeweilige Operation sind (recurrere: zurücklaufen — lat.).
Es ist nicht selbstverständlich, daß man auf die angegebene Art definieren darf, aber der **Rechtfertigungssatz für induktive Definition mit Hilfe von Rekursionsformeln** von DEDEKIND sichert dies (↗ Satz 14 (11.3.)).

DEFINITION 9 (11.3.) — **Addition in N**
(induktiv mit Hilfe von Rekursionsformeln) (↗ Definition 2 (11.3.))
Eine algebraische Operation in der Menge N heißt **Addition in N** genau dann, wenn sie folgenden Rekursionsformeln genügt.
A_1: $a + 0 = a$
A_2: $a + b' = (a + b)'$

Aus der Formel A_1 ist ersichtlich, daß die Zahl Null den Summanden a „wiederherstellt", reproduziert; wir nennen daher die Zahl Null auch das **reproduzierende** (oder auch **neutrale**) **Element aus N bezüglich der Addition**.

SATZ 14 (11.3.) — **Addition in N** (↗ Satz 2 (11.3.))
Es gibt genau eine mit „+" gekennzeichnete algebraische Operation in N, die die Rekursionsformeln aus Definition 9 (11.3.) erfüllt („Rechtfertigungssatz von DEDEKIND").

Wir *weisen* die **eindeutige Bestimmtheit** dieser Operation *nach*.

Voraussetzung: Es seien N die Menge der natürlichen Zahlen und $+_1$ sowie $+_2$ zwei algebraische Operationen, die A_1 und A_2 aus Definition 9 (11.3.) erfüllen.

Behauptung: $\forall a \forall b\, (a, b \in N \wedge a +_1 b = a +_2 b)$

Beweis:

Wir beweisen die Behauptung mit Hilfe vollständiger Induktion über b. Das bedeutet: a ist eine beliebige (aber feste) natürliche Zahl, und b durchläuft alle natürlichen Zahlen.

1. Schritt (*Induktionsanfang*)

Es sei $b = 0$.

Dann lautet die Behauptung: $a +_1 0 = a +_2 0$.

Nun ist $a +_1 0 = a$ (nach A_1) und

$a +_2 0 = a$ (nach A_1),

denn beide Operationen sollen ja den Rekursionsformeln genügen. Die rechten Seiten beider Gleichungen stimmen überein, also gilt:

$$a +_1 0 = a +_2 0 .$$

2. Schritt: (a) *Induktionsvoraussetzung:*

Es sei $b = n$.

$a +_1 n = a +_2 n$ sei eine wahre Aussage.

b) *Induktionsbehauptung:*

Es sei $b = n'$.

Dann lautet die Behauptung:

$a +_1 n' = a +_2 n'$.

c) *Beweis der Induktionsbehauptung:*

Es ist

$a +_1 n' = (a +_1 n)'$ (nach A_2)

$= (a +_2 n)'$ (nach Induktionsvoraussetzung),

also ist

$a +_1 n' = a +_2 n'$ (nach A_2).

Schlußfolgerung: Nach dem „Rechtfertigungssatz für Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion" gilt somit für alle natürlichen Zahlen b:

$$a +_1 b = a +_2 b \quad \text{bei beliebigem} \quad a \in N ,$$

d. h., beide Operationen fallen zusammen. q. e. d.

SATZ 15 (11.3.) — **Assoziativgesetz der Addition in N** (↗ Satz 3 (11.3.))

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Der *Beweis* wird mit Hilfe vollständiger Induktion über c geführt und enthält keine besonderen Schwierigkeiten. Wir verzichten auf eine Darstellung.

Etwas umständlicher ist der *Nachweis der Kommutativität*, denn wir benötigen dazu *zwei* mit H_1 und H_2 bezeichneten *Hilfssätze*.

H_1-Hilfssatz (1)

Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $0 + a = a$.

Der Satz H_1 wird mit Hilfe vollständiger Induktion über a bewiesen. Auch dieser Beweis enthält keine besonderen Schwierigkeiten und wird daher hier nicht geführt.

H_2-Hilfssatz (2)
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a + b' = a' + b$.
Der Beweis kann ebenfalls mit Hilfe vollständiger Induktion über b geführt werden, wir überlassen ihn dem Leser.

Jetzt können wir auch das **Kommutativgesetz der Addition in N** beweisen.

SATZ 16 (11.3.) — **Kommutativgesetz der Addition in N**
(↗ Satz 4 (11.3.))
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a + b = b + a$.

Voraussetzung: Es seien N die Menge der natürlichen Zahlen und „+" das Zeichen für die Addition nach Definition 9 (11.3.).
Behauptung: Für alle $a, b \in N$ gilt: $a + b = b + a$.
Beweis (mit Hilfe vollständiger Induktion über b):
1. Schritt: Es sei $b = 0$.
Dann ist $a + 0 = a$ (nach A_1),
$a + 0 = 0 + a$ für alle $a \in N$ (nach H_1).
2. Schritt: a) *Induktionsvoraussetzung:*
Es sei $b = n$.
$a + n = n + a$ sei eine wahre Aussage.
b) *Induktionsbehauptung:*
$a + n' = n' + a$
c) *Beweis der Induktionsbehauptung:*
$$\begin{aligned} a + n' &= (a + n)' && \text{(nach } A_2) \\ &= (n + a)' && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= n + a' && \text{(nach } A_2) \\ a + n' &= n' + a && \text{(nach } H_2) \end{aligned}$$
Schlußfolgerung: Satz 16 (11.3.) gilt für alle natürlichen Zahlen a, b. q. e. d.

Mit Hilfe der Addition können wir nun einige **Relationen in der Menge N** erklären. Dazu geben wir vorher *zwei Hilfssätze* an.

H_3-Hilfssatz (3) (ohne Beweis)
Für alle natürlichen Zahlen a gilt: Wenn $a + b = a$, so $b = 0$.
Der *Beweis* läßt sich mit Hilfe vollständiger Induktion über a führen.

H_4-Hilfssatz (4)
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
Wenn $a + b = 0$, so $a = b = 0$.

Wir wollen hier eine *Beweismöglichkeit* angeben.
Wir nehmen an, daß etwa $a \neq 0$ wäre. Dann gibt es eine natürliche Zahl a_1, für die gilt: $a = a_1'$.
Außerdem ist dann
$$a + b = b + a = b + a_1' = (b + a_1)' \quad \text{(nach Satz 16 (11.3.) und } A_1).$$
Damit ist aber $a + b \neq 0$, denn nach P III gibt es keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 0 ist. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung $a + b = 0$. Folglich ist unsere Annahme $a \neq 0$ falsch, also ist $a = 0$. Nach H_3 ist dann $b = 0$. q. e. d.

Wir können H_4 auch durch Zurückgehen auf Definition 2 (11.3.) beweisen. Das sei dem Leser überlassen.

SATZ 17 (11.3.) — **Gleichheit natürlicher Zahlen**
Zwei beliebige natürliche Zahlen a, b sind **gleich** ($a = b$) genau dann, wenn $a + 0 = b$ ist.

Wie man leicht nachweist, ist diese Relation eine **Äquivalenzrelation**, bewirkt also eine Einteilung von N in Klassen (ohne Beweis).

DEFINITION 10 (11.3.) — **$\leqq$-Relation in N**
(↗ Definition 2 (11.1.))
Eine beliebige natürliche Zahl a ist **kleiner als** eine natürliche Zahl b **oder gleich** einer natürlichen Zahl b bzw. b ist **größer als** a **oder gleich** a genau dann, wenn es ein $n \in N$ gibt, so daß $a + n = b$ ist.

SATZ 18 (11.3.) — **Reflexive Ordnungsrelation in N**
Die in Definition 10 (11.3.) erklärte Relation ist eine **reflexive Ordnungsrelation in N.** Sie ist also **reflexiv, antisymmetrisch, transitiv** und **linear.**

Beweis:
Es sind die vier genannten Eigenschaften nachzuweisen.

1. Reflexivität:
Für alle $a \in N$ gilt:
$$a \leqq a\,,$$
denn es gibt ein $n \in N$, nämlich $n = 0$ (nach A_1), so daß gilt:
$$a + n = a\,.$$

2. Antisymmetrie:
Für alle $a, b \in N$ gilt:
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq a$, so $a = b$.
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq a$, dann gibt es nach Definition 10 (11.3.) natürliche Zahlen m und n, so daß
$$a + m = b \qquad \text{und} \qquad b + n = a\,.$$
Wir addieren auf beiden Seiten der ersten Gleichung n und erhalten
$$a + m + n = b + n$$
$$a + m + n = a \qquad \text{(nach der zweiten Gleichung).}$$
Folglich ist
$$m + n = 0 \quad (\text{nach } H_3) \quad \text{und damit}$$
$$m = n = 0 \quad (\text{nach } H_4)\,.$$
Folglich ist
$$a = b + n = b + 0 = b\,.$$

3. Transitivität:
Für alle $a, b, c \in N$ gilt:
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq c$, so $a \leqq c$.
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq c$, dann gibt es nach Definition 10 (11.3.) natürliche Zahlen m und n, so daß
$$a + m = b \qquad \text{und} \qquad b + n = c\,.$$

Wir addieren in der ersten Gleichung n und erhalten

$a + m + n = b + n = c$ (nach der zweiten Gleichung); also
$a + (m + n) = c$.

Es gibt also eine natürliche Zahl $(m + n)$, die zu a addiert c ergibt.
Folglich ist $a \leqq c$.

4. *Linearität:*
Für alle $a, b \in N$ gilt:

$a \leqq b$ oder $b \leqq a$.

Es genügt zu zeigen:
Wenn $a \nleqq b$, so $b \leqq a$,
(denn die aussagenlogischen Ausdrücke „$p \vee q$" und „$\sim p \rightarrow q$" sind wertverlaufsgleich, p entspricht der Aussageform $a \leqq b$ und q entspricht der Aussageform $b \leqq a$).
Den *Beweis* führen wir mit Hilfe vollständiger Induktion über b.

1. Schritt: Es sei $b = 0$.
Es ist zu zeigen:
Wenn $a \nleqq 0$, so $0 \leqq a$.
Diese Implikation ist wahr, wenn nur die Konklusion wahr ist, der Wahrheitswert der Prämisse ist dann ohne Belang. Nun ist $0 + a = a$ (nach H_1), das heißt aber, $0 \leqq a$ für alle $a \in N$.

2. Schritt:

a) *Es sei* $b = n$.
Wenn $a \nleqq n$, so $n \leqq a$ sei eine wahre Aussage.

b) *Es sei* $b = n'$.
Dann ist zu zeigen:
Wenn $a \nleqq n'$, so $n' \leqq a$.

c) *Es sei* $a \nleqq n'$.
Dann ist auch $a \nleqq n$; denn wäre $a \leqq n$, dann wäre auch $a \leqq n'$ (wegen der Transitivität der $\leqq$-Relation).
Aus $a \nleqq n$ folgt aber $n \leqq a$ (nach Induktionsvoraussetzung).
Daher gibt es ein $k \in N$ mit $k \neq 0$, so daß gilt:

$n + k = a$ (nach Definition 10 (11.3.));

wäre $k = 0$, dann wäre

$n + 0 = n = a$ (im Widerspruch zu $a \nleqq n$).

Weil $k \neq 0$ ist, gibt es ein k_1 mit $k_1' = k$.
Dann ist

$a = n + k = n + k_1' = n' + k_1$
(nach Hilfssatz (2)),

also $n' \leqq a$.

Schlußfolgerungen: In der Menge N ist die $\leqq$-Relation linear.
Die $\leqq$-Relation ordnet die Menge der natürlichen Zahlen reflexiv.

Nun erklären wir in N eine **irreflexive Ordnungsrelation.**

DEFINITION 11 (11.3.) — **$<$-Relation in N**
($\nearrow$ Definition 3 (11.1.))
Eine beliebige natürliche Zahl a ist **kleiner als** eine natürliche Zahl b **($a < b$)** bzw. b ist **größer als** a genau dann, wenn es ein $n \in N$ mit $n \neq 0$ gibt, so daß $a + n = b$ ist.

Die **$<$-Relation** ist eine **irreflexive Ordnungsrelation in N**, sie ist also **irreflexiv, asymmetrisch, transitiv** und **trichotom** ($\nearrow$ Teil B 10.3.), was wir nicht beweisen wollen.
Es „leuchtet ein",
daß keine natürliche Zahl a kleiner als sie selber sein kann,
daß aus $a < b$ folgt $b \nless a$,
daß die $<$-Relation transitiv ist: Wenn $a < b$ und $b < c$, so $a < c$ und
daß für zwei beliebige natürliche Zahlen a, b genau eine der folgenden Eigenschaften zutrifft: Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
Den letzten Sachverhalt bezeichneten wir als **Trichotomie.**

BEISPIEL 4 (11.3.):
Die Erfüllungsmenge für $46 + 20 = x$ können wir abschätzen.
1. Da $40 < 46$, ist $40 + 20 < 46 + 20$; also $60 < x$.
2. Da $46 < 50$, ist $46 + 20 < 50 + 20$; also $x < 70$.

Folglich gilt: $60 < x < 70$.

Wir benutzten im Beispiel 4 (11.3.) den Satz 19 (11.3.).

SATZ 19 (11.3.) — **Monotonie der Addition bezüglich der $<$-Relation**
Für alle natürlichen Zahlen a, b, x gilt:
Wenn $a < b$, so $a + x < b + x$.

Voraussetzung: Es seien $a, b, x \in N$, $a < b$.
Behauptung: Es gilt: $a + x < b + x$.
Beweis:
Es sei $a < b$.
Dann gibt es ein $n \in N$ mit $n > 0$, so daß $a + n = b$.

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } (a + n) + x &= a + (n + x) && \textbf{(Assoziativität)} \\ &= a + (x + n) && \textbf{(Kommutativität)} \\ &= (a + x) + n && \textbf{(Assoziativität)} \\ b + x &= (a + x) + n, && \text{da } a + n = b \end{aligned}$$

Folglich ist $b + x > a + x$ bzw.
$a + x < b + x$.

Wir wollen noch ohne Beweis vermerken, daß die **Addition in N** auch **monoton bezüglich der Gleichheitsrelation** ist und daß auch die **Subtraktion monoton bezüglich der $<$-Relation** ist (wenn die Subtraktion ausführbar ist).

DEFINITION 12 (11.3.) — **Subtraktion in N**
(↗ Definition 4 (11.3.))
Die **Subtraktion in N** ist diejenige Operation, die allen geordneten Paaren $[a; b]$ von natürlichen Zahlen a, b mit $a \leqq b$ diejenige natürliche Zahl x zuordnet, für die $a + x = b$ gilt.
Man schreibt: $x = b - a$.

Die Subtraktion ist unter der Einschränkung $a \leqq b$ und mit Hilfe der Addition erklärt. Wir bezeichnen daher die **Subtraktion** als **Umkehroperation der Addition** (↗ **Ausführungen vor Definition 3 (11.3.)), und es ist $(a - b) + b = a$.**
Mit Hilfe der Monotonie der Addition *zeigen* wir, daß die **Differenz** nach Definition 12 (11.3.) **eindeutig bestimmt** ist.
Wir nehmen an, daß es zu $a + x = b$ zwei natürliche Zahlen x_1 und x_2 gibt, die zwar verschieden sind, aber die Gleichung erfüllen.
Dann ist $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$.
Unbeschadet der Reihenfolge sei $x_1 < x_2$; dann ist auch $a + x_1 < a + x_2$.
Das ist aber ein Widerspruch zu $a + x_1 = a + x_2 = b$.
Folglich ist die Annahme $x_1 \neq x_2$ falsch. Es gilt $x_1 = x_2$. q. e. d.

DEFINITION 13 (11.3.) — **Multiplikation in N**
(induktiv, mit Hilfe von Rekursionsformeln)
(↗ Definition 6 (11.3.)) (↗ Satz 8 (11.3.))
Eine algebraische Operation in der Menge N heißt **Multiplikation in N** genau dann, wenn sie folgenden Rekursionsformeln genügt.
M_1: $a \cdot 0 = 0$
M_2: $a \cdot b' = a \cdot b + a$

Wir erkennen gewisse Übereinstimmung mit den Rekursionsformeln für die Addition in Definition 9 (11.3.). Die Multiplikation einer Zahl mit einer zweiten wird auf die Multiplikation mit dem Vorgänger dieser Zahl und der Addition der ersten Zahl zurückgeführt.

SATZ 20 (11.3.) — **Multiplikation in N** (↗ Satz 8 (11.3.))
Es gibt genau eine mit „·“ gekennzeichnete algebraische Operation in N, die die Rekursionsformeln in Definition 13 (11.3.) erfüllt. („Rechtfertigungssatz von DEDEKIND“)

Wir *weisen* die **eindeutige Bestimmtheit** dieser Operation *nach.*

Voraussetzung: Es seien N die Menge der natürlichen Zahlen und „$\cdot_1$“ sowie „$\cdot_2$“ zwei algebraische Operationen, die M_1 und M_2 aus Definition 13 (11.3.) erfüllen.

Behauptung: Für alle $a, b \in N$ gilt: $a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$.

Beweis: (mit Hilfe vollständiger Induktion über b):

1. *Es sei* $b = 0$.
   Dann lautet die Behauptung: $a \cdot_1 0 = a \cdot_2 0$.
   Nun ist $a \cdot_1 0 = 0$ (nach M_1);
   $a \cdot_2 0 = 0$ (nach M_1).
   Folglich ist $a \cdot_1 0 = a \cdot_2 0$.

2. a) *Es sei* $b = n$.

$a \cdot_1 n = a \cdot_2 n$ sei eine wahre Aussage.

b) *Es sei* $b = n'$.

$a \cdot_1 n' = a \cdot_2 n'$

c) $a \cdot_1 n' = a \cdot_1 n + a$ (nach M_2)

$= a \cdot_2 n + a$ (nach 2.a))

$= a \cdot_2 n'$

Schlußfolgerung: Nach dem „Rechtfertigungssatz" gilt somit für alle natürlichen Zahlen b:
$a \cdot_1 b = a \cdot_2 b$ bei beliebigem $a \in N$, d. h., beide Operationen fallen zusammen.

Wir beweisen zunächst das **Distributivgesetz** (↗ Satz 11 (11.3.)), da es für den Beweis des Assoziativgesetzes benötigt wird.

SATZ 21 (11.3.) — **Distributivgesetz** (↗ Satz 11 (11.3.))
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Voraussetzung: Es seien $a, b, c, n \in N$.
n' sei der Nachfolger von n.

Behauptung: Für alle $a, b, c \in N$ gilt:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Beweis: (mit Hilfe vollständiger Induktion über c):

1. *Es sei* $c = 0$.

$(a + b) \cdot 0 = 0$ (nach M_1)

$= 0 + 0$ (nach A_1)

$= a \cdot 0 + b \cdot 0$ (nach M_1)

2. a) *Es sei* $c = n$.

$(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$ sei eine wahre Aussage.

b) *Es sei* $c = n'$.

Es ist zu zeigen:

$(a + b) \cdot n' = a \cdot n' + b \cdot n'$.

c) $(a + b) \cdot n' = (a + b) \cdot n + (a + b)$ (nach M_2)

$= a \cdot n + b \cdot n + (a + b)$ (nach 2.a))

$= (a \cdot n + a) + (b \cdot n + b)$ (nach Satz 15 (11.3.) und Satz 16 (11.3.))

$= a \cdot n' + b \cdot n'$ (nach M_2)

Schlußfolgerung: **Das rechtsseitige Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition** gilt für alle natürlichen Zahlen.

SATZ 22 (11.3.) — **Assoziativgesetz der Multiplikation in N**
(↗ Satz 9 (11.3.))
Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Der *Beweis* mit Hilfe vollständiger Induktion über c verläuft ähnlich dem Beweis von Satz 21 (11.3.). In Beweisziffer 2.c) ist das Distributivgesetz zu benutzen. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

Für den Beweis des **Kommutativgesetzes** benötigen wir zwei Hilfssätze.

H_5-Hilfssatz (5)

Für alle natürlichen Zahlen a gilt: $0 \cdot a = 0$.

H_6-Hilfssatz (6)

Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: $a' \cdot b = a \cdot b + b$,

wobei a' der Nachfolger von a sein soll.

SATZ 23 (11.3.) — **Kommutativgesetz der Multiplikation in N**

(↗ Satz 10 (11.3.))

Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$a \cdot b = b \cdot a$.

Die *Beweise* zu den Hilfssätzen H_5 und H_6 zum Satz 23 (11.3.) kann man wiederum mit Hilfe vollständiger Induktion führen. Sie bieten keine besonderen Schwierigkeiten.

In Satz 19 (11.3.) haben wir das Monotoniegesetz der Addition bezüglich der Kleiner-Relation bewiesen. Diese Monotonie gilt natürlich auch in bezug auf die Kleiner-gleich-Relation, denn für Mengen gilt ja auch:
Wenn gilt: Wenn $A \subset B$, so $A \cup X \subset B \cup X$,
so gilt erst recht: Wenn $A \subseteqq B$, so $A \cup X \subseteqq B \cup X$.
Bei der Multiplikation liegen die Verhältnisse etwas anders, da wir die Null zu den natürlichen Zahlen rechnen.

BEISPIEL 5 (11.3.):
Es ist zwar $3 < 4$, aber $3 \cdot 0 \nless 4 \cdot 0$.
Die $\leqq$-Relation bleibt jedoch erhalten. Es ist $3 \leqq 4$ und auch $3 \cdot 0 \leqq 4 \cdot 0$.
Aus diesem Grunde ist im Satz 24 (11.3.) der Bereich für den Multiplikator eingeschränkt.

SATZ 24 (11.3.) — **Monotonie der Multiplikation bezüglich der $<$-Relation**

Für alle natürlichen Zahlen a, b, x mit $x > 0$ gilt:
Wenn $a < b$, so $a \cdot x < b \cdot x$.

Voraussetzung: Es seien $a, b, x \in N$; $x > 0$ und $a < b$.
Behauptung: Es gilt: $a \cdot x < b \cdot x$.
Beweis:
Es sei $a < b$.
Dann gibt es ein $n \in N$ mit $n > 0$, so daß

$$a + n = b.$$

Nun ist $(a + n) \cdot x = a \cdot x + n \cdot x$ (nach Satz 11 (11.3.)).
Daraus folgt $b \cdot x = a \cdot x + n \cdot x$ ($n \cdot x > 0$, da $n > 0$ und $x > 0$).
Folglich ist $b \cdot x > a \cdot x$ bzw.

$$a \cdot x < b \cdot x.$$

q. e. d.

Die **Multiplikation in N** ist auch **bezüglich der Gleichheits-Relation monoton** (ohne Beweis).

BEISPIEL 6 (11.3.):
Ein Schüler wendet beim Lösen von $168:7 = x$ Satz 24 (11.3.) an.

Er schätzt ab: $140 < 168$, also ist $140:7 = 20 < x$.
$168 < 210$, also ist $210:7 = 30 > x$.
Daher ist $140:7 < x < 210:7$ oder $20 < x < 30$.

Im Hilfssatz H_4 haben wir gezeigt, daß aus $a + b = 0$ folgt $a = b = 0$.
In Worten:
Ist die Summe zweier natürlicher Zahlen gleich 0, so sind *beide* natürliche Zahlen gleich 0.

Wir wollen nun einen entsprechenden Satz für die Multiplikation betrachten.

SATZ 25 (11.3.)
Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a \cdot b = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$.

Wir wollen die *Behauptung* des Satzes 25 (11.3.) *erläutern.*

Wenn „$a \cdot b = 0$" erfüllt ist, dann muß auch „$a = 0$ oder $b = 0$" wegen der Äquivalenz der beiden Aussageformen erfüllt sein.
„$a = 0$ oder $b = 0$" ist aber eine Alternative. Es genügt, daß „$a = 0$" oder „$b = 0$" erfüllt ist. Es können natürlich auch beide erfüllt sein.
Mit anderen Worten:
Wenigstens eine der beiden natürlichen Zahlen muß 0 sein.

Man kann den *Beweis* des Satzes 25 (11.3.) auch durch Zurückgehen auf die Definition der Multiplikation von a und b führen.

Die **Division in N** können wir mit Hilfe der Multiplikation erklären.

DEFINITION 14 (11.3.) — **Division in N**
(↗ Definition 8 (11.3.))
Wir betrachten alle Paare $[a; b]$ von natürlichen Zahlen a und b, für die $b \neq 0$ gilt und zu denen es eine natürliche Zahl x gibt, so daß $x \cdot b = a$ ist.
Die **Division in N** ist diejenige Operation, die allen diesen Paaren die (eindeutig bestimmte) Zahl x zuordnet.

Man schreibt: $x = a : b$ oder $x = \frac{a}{b}$.

Auf Grund der Definition 14 (11.3.) gilt:

$$(m : n) \cdot n = m .$$

Deshalb bezeichnet man die **Division als Umkehrung der Multiplikation.**

Für die Division gilt weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz, wie man an Beispielen leicht nachweist. Die Schüler begründen die Richtigkeit der Lösung einer Division mit Hilfe der Multiplikation und sagen zum Beispiel:

$$28 : 7 = 4 , \quad \text{denn} \quad 4 \cdot 7 = 28 , \quad \text{d. h.,}$$

im Unterricht wird die Division als Umkehrung der Multiplikation behandelt.

Damit sind die **vier Grundrechenoperationen in N** behandelt. Auf andere Operationen gehen wir nicht ein.

11.4. Die Darstellung natürlicher Zahlen im m-adischen Positionssystem

Da es unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen gibt, gibt es ebenso viele Namen und Zeichen für diese Zahlen.
Jede natürliche Zahl wird durch ein **Zeichen**, genannt **Ziffer**, dargestellt.

Es soll im folgenden erläutert werden, wie man eine solche Darstellung natürlicher Zahlen gewinnen kann. Dabei werden wir auch einige Rechenoperationen heranziehen.

Wenn man die Anzahl der Elemente einer Menge ermitteln soll, macht man als Gedächtnisstütze oft **Striche**:

| | | | | | | entspricht 7.

Um die Übersichtlichkeit zu erhöhen, faßt man die Striche in Teilmengen zusammen (𝍸||). Man kann vereinbaren, daß vier senkrechte Striche mit einem Querstrich (𝍸) eine Darstellung der Zahl Fünf sein sollen. Man könnte auch vereinbaren: 𝍸 soll durch das Symbol „F“ ersetzt werden. „FF |||“ wäre dann ein Symbol für die Zahl Dreizehn.

In unserer Sprache sind die folgenden Bezeichnungen bekannt: „Ein Dutzend“ für die Zahl Zwölf, „eine Mandel“ für die Zahl Fünfzehn, u. a.

An alten Gebäuden findet man manchmal römische Ziffern.
MCDXIX bezeichnet die Zahl 1419.

Die Römer verwendeten folgende Zeichen als Grundziffern: I = 1, X = 10, C = 100 (centum: hundert — lat.), M = 1000 (mille: tausend — lat.) und die Hilfszeichen V = 5, L = 50, D = 500.

Man ist bestrebt, natürliche Zahlen durch Aneinanderfügen von möglichst wenigen Zeichen darzustellen: III = 3. Dabei denkt man sich eine Verknüpfung der einzelnen Zeichen durch die Addition:

$$\mathrm{XXX} = \mathrm{X} + \mathrm{X} + \mathrm{X} = 30\,.$$

Man spricht daher von einem **Additionssystem.** Das Zeichen für die größere Zahl steht im allgemeinen links von dem Zeichen für die kleinere:

$$\mathrm{XI} = \mathrm{X} + \mathrm{I} = 11\,.$$

Um möglichst wenige Zeichen zu benötigen, werden folgende Vereinbarungen getroffen:
An Stelle von VIIII = V + I + I + I + I = 9 schreibt man IX = X − I = 9 (die kleinere Zahl ist zu subtrahieren, in diesem Falle steht die kleinere Ziffer links von der größeren Ziffer).
Es ist aber nicht gestattet, mehrere Grundziffern oder ein Hilfszeichen voranzustellen:
Statt VC = 95 schreibt man XCV = 100 − 10 + 5 (↗ „Kleine Enzyklopädie Mathematik“, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1965, S. 21).

Wir verwenden zur Darstellung der natürlichen Zahlen Null bis Neun die sogenannten **arabischen Ziffern:**

$$0, 1, 2, 3, \ldots, 9$$

(das arabische Wort „sifr“ bedeutet eigentlich „Null“).
Mit diesen Ziffern als **Grundziffern** gewinnen wir eine Darstellung auch für die natürlichen Zahlen, die größer oder gleich Zehn sind.

Dabei hat jede Grundziffer in der Darstellung einer natürlichen Zahl einen sogenannten **Stellenwert.**

BEISPIEL 1 (11.4.):
In der Ziffer 213 besitzt die Grundziffer 3 den Stellenwert 10^0; wegen $10^0 = 1$ spricht man von 3 **Einern.** In der Ziffer 312 hat die Grundziffer 3 den Stellenwert $10^2 = 100$, man spricht von 3 **Hundertern.**

Wir stellen also die natürlichen Zahlen mit Hilfe eines **Positionssystems (Stellenwertsystems** dar und zwar durch ein **dekadisches Positionssystem** (decem: zehn – lat.), weil die **Grundzahl** des dekadischen Positionssystems **Zehn** ist. Wir fassen immer zehn Einheiten zu einer nächst höheren Einheit zusammen.

DEFINITION 1 (11.4.) — **Darstellung natürlicher Zahlen in einem m-adischen Positionssystem**

Es seien $k, m, n \in N$ und $m > 1$.
Dann nennt man
$n = n_k\, n_{k-1}\, n_{k-2} \ldots n_1\, n_0$
eine Darstellung der natürlichen Zahl n im **m-adischen Positionssystem** genau dann, wenn
$n = n_k \cdot m^k + n_{k-1} \cdot m^{k-1} + \cdots + n_1 \cdot m^1 + n_0 \cdot m^0$
mit $0 \leqq n_i < m$ für $i = 0, \ldots, k$ und $n_k > 0$, wenn $n > 0$.
Die n_i mit $i = 0, 1, \ldots, k$ heißen **m-adische Ziffern** oder **Grundziffern** des m-adischen Positionssystems, die Zahl m heißt **Grundzahl** des m-adischen Positionssystems.

BEISPIEL 2 (11.4.):

$$613_{(10)} = 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Die Grundzahl ist $m = 10$ — wir haben sie 613 als Index in Klammern angefügt —, und es gibt m verschiedene Grundziffern:

$$0, 1, 2, \ldots, 9\,, \quad \text{d. h., es gilt} \quad 0 \leqq n_i \leqq m - 1\,.$$

Wählen wir als Grundzahl $m = 7$ und als Grundziffern $0, 1, \ldots, 6$, dann ist

$$613_{(7)} = 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 304_{(10)}\,.$$

Für $m = 12$ mit den Grundziffern $0, 1, 2, \ldots, 9, z, e$ sind

$$613_{(12)} = 6 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + 3 \cdot 12^0 = 879_{(10)}.$$

und

$$6z13_{(12)} = 6 \cdot 12^3 + z \cdot 12^2 + 1 \cdot 12^1 + 3 \cdot 12^0 = 11823_{(10)}.$$

SATZ 1 (11.4.) — **Darstellung natürlicher Zahlen in einem m-adischen Positionssystem**

Für jede natürliche Zahl n gibt es in jedem m-adischen Positionssystem genau eine Darstellung.

Wir wollen den *Beweis* nur für $m = 10$ *skizzieren.*

Nach dem „Satz über die Division mit Rest" läßt sich jede natürliche Zahl n darstellen in der Form

$$n = g_0 \cdot 10 + r_0 \text{ mit } g_0 \in N \text{ und } 0 \leqq r_0 < 10 \text{ (ohne Beweis).}$$

Fall 1: $g_0 < 10$

Die natürliche Zahl n besitzt die Darstellung $n = g_0 \cdot 10^1 + r_0 \cdot 10^0$ mit $g_0 \cdot 10$ Vielfaches von Zehn. Das Verfahren ist beendet.

BEISPIEL 3 (11.4.):

$$n = 63 = 6 \cdot 10 + 3$$

Fall 2: $g_0 \geqq 10$

Die natürliche Zahl g_0 läßt sich darstellen in der Form

$$g_0 = g_1 \cdot 10 + r_1 \text{ mit } g_1 \in N;\ g_1 < g_0 < n;\ 0 \leqq r_1 < 10.$$

BEISPIEL 4 (11.4.):

$$\begin{aligned} n = 6354 &= 635 \cdot 10 + 4 & \qquad 635 &= 63 \cdot 10 + 5 \\ &= g_0 \quad \cdot 10 + r_0 & g_0 &= g_1 \cdot 10 + r_1 \end{aligned}$$

Es gilt: $63 < 635 < 6354 = n$.

Da $g_1 \geqq 10$ ist, setzen wir dieses Verfahren fort, bis wir zu einem $g_i < 10$ gelangen. Das muß einmal der Fall sein, da die Folge der $g_0, g_1, g_2, \ldots$ abnimmt, alle g_i natürliche Zahlen sind und da $n > g_0 > g_1 > \cdots > g_i$ ist.

Wir stellen daher auch noch g_1 dar.

$$g_1 = 63 = 6 \cdot 10 + 3 = g_2 \cdot 10 + r_2$$

Das Verfahren ist beendet (↗ Fall 1).

Wir setzen die g_i in die Darstellung von g_{i-1} ein.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} n = 6354 &= 635 \cdot 10 + 4 \\ &= (63 \cdot 10 + 5) \cdot 10 + 4 \\ &= [(6 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 5)] \cdot 10 + 4 \\ &= 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

In allgemeiner Darstellung:

$$\begin{aligned} n &= g_0 \cdot 10 + r_0 \\ &= (g_1 \cdot 10 + r_1) \cdot 10 + r_0 \\ &= [(g_2 \cdot 10 + r_2) \cdot 10 + r_1] \cdot 10 + r_0 \\ &= g_2 \cdot 10^3 + r_2 \cdot 10^2 + r_1 \cdot 10^1 + r_0 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

Wir haben für n eine **Darstellung als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen** erhalten und nehmen zur Kenntnis, daß diese Darstellung auch **eindeutig** ist.

In der Datenverarbeitung hat das **Dualsystem** oder **Binärsystem** Bedeutung (duo: zwei; bis: zweimal — lat.). Es hat nur zwei Grundziffern 0 und 1, da $m = 2$ ist.

Bei den elektronischen Datenverarbeitungsgeräten gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Schaltzustände:

Kontakt geschlossen (Strom fließt);

Kontakt offen (Strom fließt nicht).

Diesen beiden Zuständen entsprechen die beiden Grundziffern des Dualsystems 1 und 0. Will man nun Zahlen, die im Dezimalsystem dargestellt sind, mit einem solchen Gerät verarbeiten, dann überträgt man sie vorher in das Dualsystem. Es scheint eine Vereinfachung zu sein, wenn wir nur zwei Grundziffern verwenden.

Jedoch ergibt sich dabei der Nachteil, daß die Darstellung natürlicher Zahlen mit Hilfe der beiden Grundziffern 0 und 1 sehr lang werden kann — im Durchschnitt etwa dreimal so lang wie im Dezimalsystem.

BEISPIEL 5 (11.4.):
Wir wollen die im Dezimalsystem dargestellte natürliche Zahl $n = 135$ im Dualsystem darstellen.
Die höchste Potenz von $m = 2$, für die $2^k \leqq 135$ gilt, ist $2^7 = 128$.
Wir dividieren mit Rest die Zahl n durch 2^7 und erhalten $135 = 1 \cdot 2^7 + 7$. Nun dividieren wir auf die gleiche Art den Rest 7 durch die höchste Potenz von 2, für die $2^k \leqq 7$ gilt. Wir erhalten $7 = 1 \cdot 2^2 + 3$ und weiter $3 = 1 \cdot 2^1 + 1$ und $1 = 1 \cdot 2^0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} 135_{(10)} &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 10000111_{(2)}. \end{aligned}$$

11.5 Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl

Wir können die Menge der natürlichen Zahlen (N) in die Menge der Punkte eines Strahls (P) abbilden.

Dazu bezeichnen wir den Anfangspunkt des Strahls mit P_0, tragen von dort aus eine Strecke laufend ab und erhalten Punkte, die wir mit

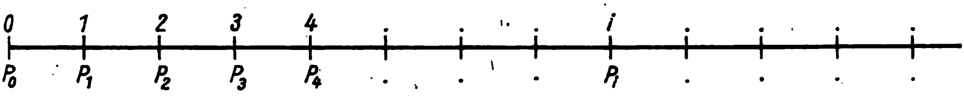
$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$$

bezeichnen.
Die Zahl Null bilden wir auf P_0 ab, die Zahl Eins auf $P_1 = E$ usw.
Wir erhalten einen sogenannten **Zahlenstrahl.**

In der Menge N ist eine irreflexible Ordnungsrelation R_1 erklärt (R_1 ist die $<$-Relation).
In der Menge der Punkte P_i auf dem Zahlenstrahl (M) mit $i = 0, 1, 2, \ldots$ können wir eine **Ordnungsrelation Liegt-links-von** erklären, die wir mit R_2 bezeichnen wollen.

Wir entnehmen der Anschauung (↗ Bild 247/1), daß gilt:

$$P_2 \, R_2 \, P_3 \quad (P_2 \text{ liegt links von } P_3)\,.$$



247/1

Sind nun $m, n \in N$ und ist $m < n$, so gilt für die ihnen zugeordneten Punkte: P_m liegt links von P_n.
Mit anderen Worten:
Die Ordnung in N und die Ordnung in M entsprechen einander.
Die **Menge N** mit der in ihr erklärten $<$-Relation **und** die **Menge M** mit der in ihr erklärten Liegt-links-von-Relation sind **isomorph bezüglich der in ihnen erklärten Ordnungsrelation:**

$$[N; R_1] \cong [M; R_2]\,.$$

Ordnen wir den Punkten P_i die Strecken $\overline{P_0P_i}$ zu, dann können wir auf dem Zahlenstrahl z. B. eine Streckenaddition einführen und die Addition natürlicher Zahlen auf dem Zahlenstrahl durch das Aneinanderlegen entsprechender Strecken veranschaulichen.

Zusammenfassung

Wir haben die natürlichen Zahlen **genetisch und axiomatisch definiert.**
Beim *genetischen* Aufbau von N haben wir im Bereich der Mengen eine **Äquivalenzrelation** (Gleichmächtigkeit) erklärt und Klassen erhalten, die wir **Kardinalzahlen** nennen. Kardinalzahlen (Klassen) gleichmächtiger *endlicher* Mengen nennen wir **natürliche Zahlen.** Im Bereich der natürlichen Zahlen haben wir eine **Ordnungsrelation** erklärt und die mit P I bis P V bezeichneten Sätze bewiesen.
Die Sätze P I bis P V werden beim *axiomatischen* **Aufbau** von N als **Axiomensystem** an die Spitze gestellt. Die Menge der natürlichen Zahlen ist *ein* Modell für dieses Axiomensystem.
Wir haben in N algebraische Operationen — die **vier** sogenannten **Grundrechenoperationen** — *genetisch* mit Hilfe von Mengen und *induktiv* mit Hilfe von Rekursionsformeln (nur Addition und Multiplikation) erklärt und **Rechengesetze** bewiesen.
Subtraktion und Division sind allerdings nur mit gewissen Einschränkungen ausführbar.

11.6. Kontrollfragen

1. Beschreiben Sie den Abstraktionsprozeß, der zum Begriff der natürlichen Zahlen führt!
2. Zeigen Sie, daß alle durch drei teilbaren natürlichen Zahlen das PEANOsche Axiomensystem erfüllen!
3. Definieren Sie die Addition natürlicher Zahlen als Operation im Bereich der endlichen Kardinalzahlen (↗ Definition 3 (11.3.))!
4. Beweisen Sie Satz 15 (11.3.) und Hilfssatz H_1 zu Satz 16 (11.3.)!
5. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen Subtraktion und Division in N ausführbar sind!
6. Beschreiben Sie den mathematischen Sachverhalt, der dem „Rechnen auf dem Zahlenstrahl“ zugrunde liegt!
7. Stellen Sie eine Multiplikationstabelle für ein 5-adisches Positionssystem auf!

12. Die gebrochenen Zahlen

Im Teil C 11. wurde dargelegt, wie die natürlichen Zahlen entstanden sind, wie man sie definiert und wie man mit ihnen rechnen kann.
Es ist also als bekannt vorauszusetzen, daß die Operationen **Addition und Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen uneingeschränkt und eindeutig ausführbar** sind.
Es ist weiter bekannt, daß eine gleiche Aussage für die Operationen Subtraktion und Division nicht zutrifft. Für diese beiden Operationen konnte nur gesagt werden: Wenn die Subtraktion bzw. Division im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar ist, dann ist sie eindeutig ausführbar. Es wurden darüber hinaus Bedingungen dafür angegeben, daß die Subtraktion bzw. die Division mit natürlichen Zahlen ausführbar ist.

Nun gibt es zahlreiche Aufgaben der Praxis, die es erforderlich machen, diese einschränkenden Bedingungen für beide Operationen zu beseitigen.

BEISPIEL:
a) *Eine Prämie von 130 M soll zu gleichen Teilen an vier Personen verteilt werden. Wieviel Mark erhält jede dieser Personen?*
b) *An einem bestimmten Tag um 18^h betrug die Temperatur 4 °C. Am folgenden Tag um 6^h war es um 7 grd kälter. Welche Temperatur wurde gemessen?*

Diese Aufgabenstellungen führen zu den Gleichungen

$$130 : 4 = x \quad \text{bzw.} \quad 4 - 7 = y\,.$$

Beide Gleichungen sind im Bereich N nicht lösbar.

Um Gleichungen wie im obenstehenden Beispiel lösen zu können, ist es erforderlich, neue Zahlen einzuführen.
Wir gehen dabei schrittweise vor, d. h., wir fordern jeweils die Ausführbarkeit genau einer dieser beiden Operationen ohne Einschränkung.
Demzufolge gibt es zwei Möglichkeiten für eine **Erweiterung des Bereichs der natürlichen Zahlen.**

(1) Neben Addition und Multiplikation wird auch die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Subtraktion gefordert.
Man erhält den Bereich der **ganzen Zahlen** (G).

(2) Neben Addition und Multiplikation wird auch die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division (mit Ausnahme der Division durch 0; ↗ Definition 8 (12.3.)) gefordert.
Man erhält den Bereich der **gebrochenen Zahlen** (R^*).

Fordert man darüber hinaus die uneingeschränkte Ausführbarkeit aller vier Grundoperationen, so gelangt man in beiden Fällen zum Bereich der **rationalen Zahlen** (R).

Grundsätzlich ergeben sich also folgende möglichen Wege zur **Konstruktion des Bereiches der rationalen Zahlen** (R).

N (Addition, Multiplikation)

G (Addition, Multiplikation, Subtraktion) R^* (Addition, Multiplikation, Division)

R (Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division)

Sowohl die ganzen Zahlen als auch die gebrochenen Zahlen als auch die rationalen Zahlen sind aus unmittelbaren Bedürfnissen der menschlichen Gesellschaft entstanden (z. B. Wasserstandsangaben, Zeitberechnungen). Aufgabe der Mathematik ist es, eine theoretische Fassung des durch Erfahrung gewonnenen und gefestigten Wissens auf der Grundlage der der Mathematik eigenen Verfahren zu geben. Damit erfolgt eine Absicherung der Ergebnisse. Außerdem wird die Möglichkeit geschaffen, auf diesen Ergebnissen später aufzubauen. Die ganzen, die gebrochenen und die rationalen Zahlen werden nicht „aus dem Nichts geschaffen", sondern mit Hilfe natürlicher Zahlen. Man benutzt dabei die für diese geltenden Gesetze.

Im folgenden wird für den weiteren Aufbau der Zahlenbereiche der Weg

$$N - R^* - R$$

beschritten, in Analogie zum Vorgehen in der Schule, in der die Schüler in dieser Reihenfolge mit den verschiedenen Zahlenbereichen vertraut gemacht werden.

12.1. Aufbau der Menge der gebrochenen Zahlen (R^*)

DEFINITION 1 (12.1.) — **Quotientengleichheit**
Es seien $[a; b] \in N \times (N \setminus \{0\})$ und $[c; d] \in N \times (N \setminus \{0\})$.
Dann nennen wir die geordneten Paare $[a; b]$ und $[c; d]$ **quotientengleich** genau dann, wenn
$a \cdot d = c \cdot b$.
Symbolisiert: $[a; b] =_Q [c; d] =_{\text{Def}} a \cdot d = c \cdot b$ mit $b, d \neq 0$

BEISPIEL 1 (12.1.):

$[4; 5] =_Q [12; 15]$, denn $4 \cdot 15 = 12 \cdot 5$
$[0; 6] =_Q [0; 1]$, denn $0 \cdot 1 = 0 \cdot 6$
$[3; 3] \neq_Q [3; 4]$, denn $3 \cdot 4 \neq 3 \cdot 3$

SATZ 1 (12.1.)
Die in Definition 1 (12.1.) definierte **Quotientengleichheit ist eine Äquivalenzrelation.**

Beweis:
Zu beweisen ist:
(1) Die Relation ist *reflexiv*,
d. h., für alle geordneten Paare $[a; b]$ muß gelten:
$$[a; b] =_Q [a; b].$$
(2) Die Relation ist *symmetrisch*,
d. h., für alle geordneten Paare $[a; b]$, $[c; d]$ muß gelten:
$$[a; b] =_Q [c; d] \rightarrow [c; d] =_Q [a; b].$$
(3) Die Relation ist *transitiv*,
d. h., für alle geordneten Paare $[a; b]$, $[c; d]$, $[e; f]$ muß gelten:
$$[a; b] =_Q [c; d] \wedge [c; d] =_Q [e; f] \rightarrow [a; b] =_Q [e; f].$$
Man beweist nun die *für alle* geordneten Paare natürlicher Zahlen angegebenen Aussagen, indem man sie für *beliebige* geordnete Paare natürlicher Zahlen beweist. Es ist nur notwendig zu beachten, daß keinerlei Einschränkungen gemacht werden, die dazu führen, daß die als „beliebig" betrachteten Paare irgendwelche speziellen Eigenschaften aufweisen (etwa Paare gerader natürlicher Zahlen). Solche Einschränkungen sind beim Beweis einer Universalaussage nicht zugelassen. In diesem Sinne verfahren wir auch bei weiteren Beweisen solcher Art, ohne dann in jedem Falle anzugeben, daß es sich um **beliebige** Vertreter handelt.

Es seien also $[a; b]$, $[c; d]$, $[e; f]$ beliebig gewählte geordnete Paare natürlicher Zahlen, wobei b, d, f ungleich 0 sind.

Dann ist
(1) wahr, denn $ab = ab$ (↗ Definition 1 (12.1.)).
(2) wahr, denn nach Definition 1 (12.1.) folgt für die Prämisse der Implikation $ad = cb$ und für die Konklusion $cb = ad$. Wir wissen, daß die Gleichheit natürlicher Zahlen symmetrisch ist.
(3) wahr. Wir gehen auch hier mit Hilfe der Definition 1 (12.1.) auf natürliche Zahlen zurück.

Es ergibt sich
$$\begin{array}{ll} \text{I} & ad = cb \\ \underline{\text{II}} & \underline{cf = ed} \end{array} \qquad \text{(nach Definition 1 (12.1.) für die Prämisse)}$$
Wir multiplizieren in Gleichung I beide Seiten mit ef (↗ Satz 24 (11.3.)).
$$adef = cbef$$
$$afed = becf \qquad \text{(nach Satz 10 (11.3.))}$$
Wir substituieren mit Hilfe von Gleichung II.
$$afed = beed$$
Also:
$$af = be \qquad \text{(nach Satz 24 (11.3.))}$$
$$af = eb \qquad \text{(nach Satz 10 (11.3.))}$$
$$[a; b] =_Q [e; f] \qquad \text{(nach Definition 1 (12.1.))}$$

Wir gehen davon aus, daß die Prämisse wahr ist. Dann läßt sich mit Hilfe der im Bereich N geltenden Rechengesetze die Konklusion herleiten. Also gilt auch die

Konklusion und damit ist nach dem Schluß auf eine Implikation auch die behauptete Implikation wahr. (1), (2), (3) gelten für *beliebige* geordnete Paare, also gelten (1), (2), (3) für *alle* geordneten Paare.

Bemerkung:
Beim Beweis des Satzes 1 (12.1.) wurde an Stelle der Schreibweise „$a \cdot b$" für das Produkt der natürlichen Zahlen a und b die Schreibweise „$a\,b$" verwendet. Wir vereinbaren, von dieser Stelle an für die Multiplikation in N ständig so zu verfahren, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind (für „$7 \cdot 8$" kann man selbstverständlich nicht „78" schreiben).

Aus Satz 2 (10.4.) wissen wir, daß jede in einer Menge M erklärte Äquivalenzrelation eine Klasseneinteilung von M definiert, d. h. eine Einteilung der Elemente von M in paarweise disjunkte, nichtleere Teilmengen.
Im Satz 1 (12.1.) wurde die Quotientengleichheit als eine Äquivalenzrelation charakterisiert. Das bedeutet, daß sie die Menge aller geordneten Paare natürlicher Zahlen (die zweite Zahl in diesen Paaren muß verschieden von Null sein) in Klassen quotientengleicher geordneter Paare einteilt.

DEFINITION 2 (12.1.) — **Gebrochene Zahlen**
Die Klassen quotientengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen, deren zweites Element ungleich Null ist, nennen wir **gebrochene Zahlen.** Den Bereich aller dieser Klassen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{R^*}$.

BEISPIEL 2 (12.1.):

$$\begin{aligned}
z_1 &= \{[2;4],\ [1;2],\ [8;16],\ [5;10],\ \ldots\}\\
z_2 &= \{[0;1],\ [0;3],\ [0;7],\ [0;176],\ \ldots\}\\
z_3 &= \{[9;6],\ [3;2],\ [6;4],\ [15;10],\ \ldots\}\\
z_4 &= \{[3;3],\ [7;7],\ [1;1],\ [10;10],\ \ldots\}
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Jedes der geordneten Paare, das Element einer gebrochenen Zahl ist, wird auch als **Bruch** bezeichnet. Die Paare, die Elemente ein und derselben Klasse sind, gehen durch Erweitern oder Kürzen auseinander hervor (in dem Sinne, wie in der Schule Brüche erweitert oder gekürzt werden).

Um mit den in Definition 2 (12.1.) definierten gebrochenen Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$ ohne großen Aufwand rechnen bzw. sie vergleichen zu können, ist es zweckmäßig, für jede dieser Zahlen eine Kurzbezeichnung einzuführen. Dabei benutzen wir die bereits bekannten Ziffern für natürliche Zahlen.

DEFINITION 3 (12.1.) — **Zahlzeichen für gebrochene Zahlen**
Es sei $[a;b] \in N \times (N \setminus \{0\})$ ein beliebiger Repräsentant von $z \in R^*$. Genau dann bezeichnen wir z mit dem **Symbol** $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ und schreiben „$z = \frac{a}{b}$".

Bemerkung:
Zur Bezeichnung einer gebrochenen Zahl z benutzen wir also irgendeinen ihrer Vertreter.

BEISPIEL 3 (12.1.):
Wir betrachten die gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 im Beispiel 2 (12.1.). Nach Definition 3 (12.1.) ergeben sich folgende Bezeichnungen für diese Zahlen.

$$z_1: \frac{2}{4} \text{ oder } \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{8}{16} \text{ oder } \ldots$$

$$z_2: \frac{0}{1} \text{ oder } \frac{0}{3} \text{ oder } \frac{0}{7} \text{ oder } \ldots$$

$$z_3: \frac{9}{6} \text{ oder } \frac{3}{2} \text{ oder } \frac{6}{4} \text{ oder } \ldots$$

$$z_4: \frac{3}{3} \text{ oder } \frac{7}{7} \text{ oder } \frac{1}{1} \text{ oder } \ldots$$

Man könnte es als störend empfinden, daß es zur Bezeichnung von je einer gebrochenen Zahl so viele (unendlich viele) Symbole gibt. Immerhin weicht das von der Eindeutigkeit der Bezeichnung natürlicher Zahlen ab. Mit der Bezeichnungsvielfalt für gebrochene Zahlen müssen wir uns aber abfinden. Wir können nur zusätzlich *vereinbaren*, genau einer der vielen Möglichkeiten den Vorrang zu geben.
Dabei sollte allerdings beachtet werden, daß die Vielfalt der Bezeichnungsweisen günstig für das Rechnen ist, da man mit gebrochenen Zahlen „repräsentantenweise" rechnet (↗ Teil C 12.3.). Eine Einigung auf eine einzige Bezeichnung für z ist für die Abbildung von z auf einen Punkt des Zahlenstrahls (↗ Teil C 12.4.) zweckmäßig.
Wir vereinbaren:

(1) Wenn $z \in R^*$, $[a; b] \in z$ und $a = 0$, so schreiben wir für z das Zeichen „0".
Beachten Sie! „0" ist hier Zeichen einer gebrochenen Zahl, obwohl wir dieses Symbol bereits für die Bezeichnung einer natürlichen Zahl benutzt haben.

(2) Wenn $z \in R^*$, $[a; b] \in z$ und $a = b$, so bevorzugen wir für z die Schreibweise „$\frac{1}{1}$".

(3) Wenn $z \in R^*$ und $z \neq 0$ und $z \neq \frac{1}{1}$, so bevorzugen wir genau die Schreibweise „$\frac{a}{b}$", für die $a - b$ bzw. $b - a$ am kleinsten für alle Repräsentanten $[a; b]$ dieser Zahl z ist, je nachdem, ob $a > b$ bzw. $b > a$.

BEISPIEL 4 (12.1.):
Für $z_1 = \{[2; 4], [1; 2], [8; 16], [5; 10], \ldots\}$ bevorzugen wir die Schreibweise „$z_1 = \frac{1}{2}$".
Für $z_2 = \{[0; 1], [0; 3], [0; 7], [0; 176], \ldots\}$ bevorzugen wir die Schreibweise „$z_2 = 0$".
Für $z_3 = \{[9; 6], [3; 2], [6; 4], [15; 10], \ldots\}$ bevorzugen wir die Schreibweise „$z_3 = \frac{3}{2}$".
Für $z_4 = \{[3; 3], [7; 7], [1; 1], [10; 10], \ldots\}$ bevorzugen wir die Schreibweise „$z_4 = \frac{1}{1}$".

Bemerkung zu (3):
Wir finden die vereinbarte Bezeichnung $\frac{a}{b}$ für z, indem wir in einem beliebigen Repräsentanten $[m; n]$ von z die Zahlen m und n durch den größten gemeinsamen Teiler von m und n dividieren. Es gibt genau einen solchen Repräsentanten. Es soll hier nicht näher erörtert werden, warum dieses Verfahren immer dazu führt, den Repräsentanten $[a; b]$ zu finden, für den $a - b$ bzw. $b - a$ kleiner als die entsprechende Differenz

für alle anderen Repräsentanten von z ist. Dieses Verfahren ist unter dem Namen **Kürzen** bekannt. Zur Bezeichnung einer gebrochenen Zahl z verwenden wir also häufig den am weitesten gekürzten Bruch, der Repräsentant von z ist.

BEISPIEL 5 (12.1.):

a) $z_3 = \{[9; 6], [3; 2], [6; 4], [15; 10], \ldots\}$
Wir betrachten einen beliebigen Repräsentanten, etwa [15, 10].
ggT (15; 10) = 5
$15 : 5 = 3; \; 10 : 5 = 2$ Also: $z_3 = \frac{3}{2}$

b) $z_1 = \{[2; 4], [1; 2], [8; 16], [5; 10], \ldots\}$
Wir betrachten einen beliebigen Repräsentanten, etwa [8; 16].
ggT (8, 16) = 8
$8 : 8 = 1; \; 16 : 8 = 2$ Also $z_1 = \frac{1}{2}$

Bei unserer Vereinbarung handelt es sich nur darum, eine von vielen möglichen Schreibweisen zu *bevorzugen*. Andere Schreibweisen entsprechend Definition 3 (12.1.) sind also ebenfalls zugelassen.

12.2. Ordnung in R^*

Wir befassen uns zunächst mit der **Gleichheit gebrochener Zahlen.**
Es ist bekannt, daß gebrochene Zahlen Klassen sind, wobei die in Definition 1 (12.1.) definierte Quotientengleichheit die die Klasseneinteilung bestimmende Äquivalenzrelation ist. Nach dem Hauptsatz über Äquivalenzrelationen weiß man, daß zwei Äquivalenzklassen genau dann gleich sind, wenn sie wenigstens einen gemeinsamen Repräsentanten haben.

SATZ 1 (12.2.)
Zwei gebrochene Zahlen z_1, z_2 **sind einander gleich** ($z_1 = z_2$) genau dann, wenn es einen Repräsentanten $[a; b]$ von z_1 und einen Repräsentanten $[c; d]$ von z_2 gibt, für die $[a; b] =_Q [c; d]$ gilt.

DEFINITION 1 (12.2.) — **Kleiner-Relation für gebrochene Zahlen**

Es seien $z_1, z_2 \in R^*$.
Es sei ferner $[a; b]$ ein beliebiger Repräsentant von z_1, $[c; d]$ ein beliebiger Repräsentant von z_2.
Dann nennt man z_1 **kleiner als** z_2 ($z_1 \underset{R^*}{<} z_2$) genau dann, wenn $a d < c b$.

Bemerkungen:

(1) Zu Definition 1 (12.2.) wäre es eigentlich erforderlich, einen Satz zu formulieren, der die Repräsentantenunabhängigkeit der dort definierten Relation beinhaltet. Wir verzichten darauf, nehmen aber zur Kenntnis, daß diese Repräsentantenunabhängigkeit tatsächlich bewiesen werden kann. Bei weiteren nachfolgenden Definitionen und Sätzen müßte dann ebenso verfahren werden. Wir gehen darauf an den entsprechenden Stellen ebenfalls nicht näher ein.

(2) Für $\underset{R^*}{>}$ lesen wir „ist kleiner als". Der Index R^* ist angegeben, um diese Kleiner-Relation von der früher behandelten Kleiner-Relation für natürliche Zahlen abzugrenzen.

BEISPIEL 1 (12.2.):

Die gebrochenen Zahlen $z_1 = \frac{5}{4}$; $z_2 = \frac{5}{6}$; $z_3 = \frac{4}{5}$ sind miteinander zu vergleichen.

Wir vergleichen z_1 mit z_2 .
Es gilt: $z_2 \underset{R^*}{<} z_1$, denn $5 \cdot 4 < 5 \cdot 6$.

Wir vergleichen z_3 mit z_1 und z_3 mit z_2.
Es gilt: $z_3 \underset{R^*}{<} z_1$, denn $4 \cdot 4 < 5 \cdot 5$;

$z_3 \underset{R^*}{<} z_2$, denn $4 \cdot 6 < 5 \cdot 5$.

Zusammenfassend ergibt sich also: $z_3 \underset{R^*}{<} z_2 \underset{R^*}{<} z_1$.

Für eine solche Zusammenfassung wie im Beispiel 1 (12.2.) verwendeten wir bereits folgende Erkenntnis.

SATZ 2 (12.2.)
Die in Definition 1 (12.2.) erklärte **„Kleiner-Relation“** ist eine **irreflexive Ordnungsrelation.**

Beweis:
Es muß nachgewiesen werden, daß die *Kleiner-Relation* für gebrochene Zahlen *irreflexiv*, *transitiv* und *konnex* ist.

(1) *Irreflexivität:* $\sim \exists\, z\, (z \in R^* \wedge z \underset{R^*}{<} z)$

Es sei $[a; b]$ Repräsentant von $z \in R^*$.
Dann wäre $z \underset{R^*}{<} z$ genau dann, wenn $a\,b < a\,b$ (nach Definition 1 (12.2.)).
Nach Definition 3 (11.1.) ist aber $a\,b < a\,b$ eine unerfüllbare Aussageform.

(2) *Transitivität:*

$$\forall z_1\, \forall z_2\, \forall z_3\, (z_1, z_2, z_3 \in R^* \wedge z_1 \underset{R^*}{<} z_2 \wedge z_2 \underset{R^*}{<} z_3 \rightarrow z_1 \underset{R^*}{<} z_3)$$

Es seien $z_1, z_2, z_3 \in R^*$
und $[a; b]$ Repräsentant von z_1;
$[c; d]$ Repräsentant von z_2;
$[e; f]$ Repräsentant von z_3.

Dann ist die Prämisse der Implikation genau dann erfüllt, wenn $a\,d < c\,b$ und $c\,f < d\,e$ (↗ Definition 1 (12.2.)).
Es sei nun $ad < cb$ (I)
und $c\,f < d\,e$ (II).

Wir multiplizieren in (I) beide Seiten mit $e\,f$ (↗ Satz 24 (11.3.)).

$a\,d\,e\,f < c\,b\,e\,f$	
$a\,f\,e\,d < b\,e\,c\,f$	(nach Satz 10 (11.3.))
$a\,f\,e\,d < b\,e\,d\,e$	(Substitution aus (II) und nach Definition 11 (11.3.))
$a\,f\,e\,d < b\,e\,e\,d$	(nach Satz 10 (11.3.))
$a\,f < b\,e$	(nach Satz 24 (11.3.))
$a\,f < e\,b$	(nach Satz 10 (11.3.))

Also gilt: $z_1 \underset{R^*}{<} z_3$ (nach Definition 1 (12.2.)).

(3) *Konnexität:*

$$\forall z_1 \ \forall z_2 (z_1, z_2 \in R^* \wedge z_1 \underset{R^*}{<} z_2 \vee z_1 = z_2 \vee z_2 \underset{R^*}{<} z_1)$$

Es seien $z_1, z_2 \in R^*$
und $[a; b]$ Repräsentant von z_1;
$[c; d]$ Repräsentant von z_2.
Dann ist $z_1 \underset{R^*}{<} z_2$ genau dann, wenn $a\,d < c\,b$ (nach Definition 1 (12.2.));
$z_1 = z_2$ genau dann, wenn $a\,d = c\,b$ (nach Satz 1 (12.2.) und Definition 1 (12.1.));
$z_2 \underset{R^*}{<} z_1$ genau dann, wenn $c\,b < a\,d$ (nach Definition 1 (12.2.)).

Nach Satz 8 (11.3.) sind $a\,d$, $c\,b$ natürliche Zahlen. Die Kleiner-Relation in N ist konnex (↗ Definition 6 (10.2.) und Verschärfung nach Definition 11 (11.3.)).
Damit ist der Satz 2 (12.2.) bewiesen.

Die als irreflexive Ordnungsrelation charakterisierte Kleiner-Relation ermöglicht es, eine **Ordnung innerhalb der Menge der gebrochenen Zahlen** anzugeben.
Wir erhalten die geordnete Menge

$$[R^*; \underset{R^*}{<}],$$

also eine Menge, in der alle gebrochenen Zahlen in einer durch die Kleiner-Relation bestimmten Reihenfolge auftreten.
Diese **Menge** ist **unendlich.** In ihr existiert für kein Element ein Nachfolger im Sinne der durch die Kleiner-Relation angegebenen Ordnung.

SATZ 3 (12.2.)
Die **Menge der gebrochenen Zahlen** ist **dicht,** d. h., zwischen je zwei voneinander verschiedenen gebrochenen Zahlen z_1, z_2 liegt (mindestens) eine gebrochene Zahl z_3.

Beweis:
Es seien $[a; b]$ Repräsentant von z_1, $[c; d]$ Repräsentant von z_2 und z_1, z_2 gebrochene Zahlen mit $z_1 \underset{R^*}{<} z_2$.
Dann gilt $a\,d < c\,b$ nach Definition 1 (12.2.).
Es sei nun z_3 die Klasse aller Paare aus $N \times (N \setminus \{0\})$, die mit $[ad + cb; 2\,b\,d]$ quotientengleich sind.
Wir zeigen: $z_1 \underset{R^*}{<} z_3 \underset{R^*}{<} z_2$.
„$z_1 \underset{R^*}{<} z_3 \underset{R^*}{<} z_2$" ist eine **Konjunktion.**
Wir schließen auf diese Konjunktion, indem wir nacheinander zeigen:

(1) $z_1 \underset{R^*}{<} z_3$; (2) $z_3 \underset{R^*}{<} z_2$.

Zu (1):
Es ist $z_1 \underset{R^*}{<} z_3$, denn

	$a\,d < b\,c$	(nach Definition 1 (12.2.));
	$a\,b\,d < b\,b\,c$	(nach Satz 24 (11.3.));
	$2\,a\,b\,d < a\,b\,d + b\,b\,c$	(nach Satz 19 (11.3.));
	$a \cdot 2\,b\,d < (a\,d + c\,b) \cdot b$	(nach Satz 10 (11.3.) und Satz 11 (11.3.)),
also	$z_1 \underset{R^*}{<} z_3$	(nach Definition 1 (12.2.))

Zu (2):
Es ist auch $z_3 \underset{R^*}{<} z_2$, denn

$$a\,d < b\,c \quad \text{(nach Definition 1 (12.2.))};$$
$$a\,d\,d < b\,c\,d \quad \text{(nach Satz 24 (11.3.))};$$
$$a\,d\,d + b\,c\,d < 2\,b\,c\,d \quad \text{(nach Satz 19 (11.3.))};$$
$$(a\,d + b\,c)\,d < c \cdot 2\,b\,d \quad \text{(nach Satz 10 (11.3.) und Satz 11 (11.3.))},$$

also

$$z_3 \underset{R^*}{<} z_2 \quad \text{(nach Definition 1 (12.2.))}.$$

Wir haben damit gezeigt, daß es eine Zahl $z_3 \in R^*$ gibt, die **zwischen** z_1 und z_2 **liegt.** Diese Zahl z_3 hat das geordnete Paar $[a\,d + b\,c;\ 2\,b\,d]$ als Repräsentanten.

Diese Zahl z_3 ist das sogenannte **arithmetische Mittel** von z_1 und z_2, deshalb besitzt sie auch einen Repräsentanten der Form $[a\,d + b\,c;\ 2\,b\,d]$.
Bekanntlich bildet man das arithmetische Mittel zweier Zahlen, indem man beide Zahlen addiert und die erhaltene Summe durch 2 dividiert. Wir haben zwar bisher nicht über die Addition bzw. Division im Bereich der gebrochenen Zahlen gesprochen, gehen aber in diesem Zusammenhang davon aus, daß die entsprechenden Verfahren von der Schule her bekannt sind und hier nur die Darstellung „$[a\,d + b\,c;\ 2\,b\,d]$" an Stelle von „$\frac{a\,d + b\,c}{2\,b\,d}$" erscheint.
Addition und Division im Bereich der gebrochenen Zahlen werden ausführlich im Teil C 12.3. behandelt.

Im folgenden betrachten wir eine **echte Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen** und bezeichnen diese mit R_1^*;
also $R_1^* \subset R^*$.

R_1^* enthalte genau alle gebrochenen Zahlen $z = \frac{a}{1}\ (a \in N)$. Damit ist R_1^* sicher echte Teilmenge von R^*, denn es gibt gebrochene Zahlen, die nicht Element von R_1^* sind, z. B. $z' = \frac{7}{2}$.
Die Menge R_1^* ordnen wir durch die in Definition 1 (12.2.) erklärte Kleiner-Relation.

$$[R_1^*;\ \underset{R^*}{<}] = \left[\left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right\};\ \underset{R^*}{<}\right]$$

SATZ 4 (12.2.)
Die Menge der gebrochenen Zahlen mit dem Nenner 1 (R_1^*) ist **isomorph** zur Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der in beiden Mengen erklärten Kleiner-Relation.
$[R_1^*;\ \underset{R^*}{<}] \cong [N;\ <]$

Beweis:
Der Nachweis der Isomorphie wird erbracht, wenn folgendes gezeigt wird:
(1) Es existiert eine eineindeutige Abbildung von R_1^* auf N, d. h., R_1^* und N sind *gleichmächtig*.
(2) Es besteht bei dieser Abbildung *Relationstreue* bezüglich der in beiden Mengen erklärten Ordnungsrelation.

Zu (1): Es sei f diejenige Abbildung von R_1^* auf N, die jedem Element $\frac{a}{1} \in R_1^*$ das Element $a \in N$ zuordnet, d. h., es sei $f\left(\frac{a}{1}\right) =_{\text{Def}} a$.

Dann läßt sich sofort zeigen, daß f eine eineindeutige Abbildung ist.

Zu (2): Es ist zu zeigen:

Wenn $\frac{a}{1} \underset{R^*}{<} \frac{b}{1}$, so $f\left(\frac{a}{1}\right) < f\left(\frac{b}{1}\right)$.

Es sei nun $\frac{a}{1} \underset{R^*}{<} \frac{b}{1}$.

Dann ist nach Definition 1 (12.2.) $a < b$.

Wegen $f\left(\frac{a}{1}\right) = a$ und $f\left(\frac{b}{1}\right) = b$ gilt dann aber auch

$$f\left(\frac{a}{1}\right) < f\left(\frac{b}{1}\right).$$

Die Isomorphie der Menge derjenigen gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, zur Menge der natürlichen Zahlen bezüglich der in beiden Mengen erklärten Kleiner-Relation bedeutet, daß sich diese Mengen hinsichtlich dieser Relationen analog verhalten. Das heißt: Zu jeder Aussage H über natürliche Zahlen, in der die Kleiner-Relation als einzige Relation vorkommt und sonst keine Operation, gibt es eine entsprechende Aussage H′ über gebrochene Zahlen. Dabei gilt: H ist wahr genau dann, wenn H′ wahr ist.

In diesem Zusammenhang sprechen wir in der Mathematik vom sogenannten **Permanenzprinzip (permanere: fortdauern** – lat.). Im Teil C 12.3. wird zusätzlich festgestellt, daß analoge Aussagen, wie sie hier zur Kleiner-Relation in den Bereichen N und R^* gemacht werden, auch auf die Rechenoperationen in N und R^* zutreffen.

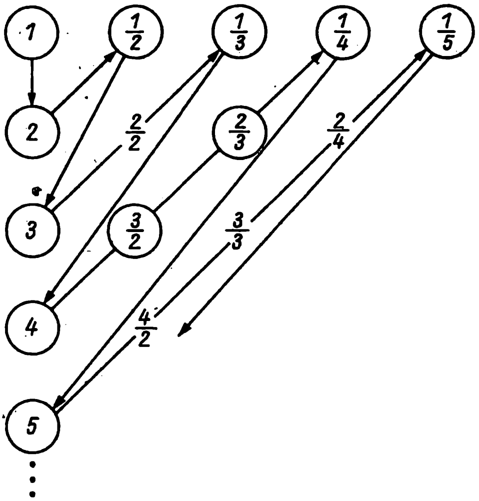
Aus der Isomorphie von R_1^* und N bezüglich der Kleiner-Relation und der oben gemachten Bemerkungen darf nicht der Eindruck entstehen, daß man die gebrochenen Zahlen, die sich durch Brüche mit dem Nenner 1 darstellen lassen, mit den ihnen zugeordneten natürlichen Zahlen gleichsetzen kann.
Es besteht nach wie vor ein wesentlicher Unterschied zwischen ihnen, der sich aus der Definition dieser Zahlen ergibt, wenn auch wegen der Isomorphie für die gebrochene Zahl $\frac{1}{1}$ die Schreibweise „1“, für $\frac{2}{1}$ die Schreibweise „2“, ... der Einfachheit halber gebraucht wird. Auch wir werden uns in Zukunft dieser vereinfachten Schreibweise bedienen.

Die Isomorphie der beiden betrachteten Mengen hinsichtlich der Kleiner-Relation kann uns noch zu einer weiteren Vereinfachung dienen.
Wir werden in Zukunft nicht mehr unterschiedliche Symbole für die beiden Kleiner-Relationen verwenden. Statt „$z_1 \underset{R^*}{<} z_2$“ schreiben wir in Zukunft auch „$z_1 < z_2$“.

Aus der Isomorphie von R_1^* und N bezüglich der Kleiner-Relation könnte weiter der Eindruck entstehen, daß es „mehr“ gebrochene Zahlen als natürliche Zahlen gibt. Immerhin galt ja $R_1^* \subset R^*$, und daraus könnte man folgern, daß R^* genau so viele Elemente „mehr“ als N enthält, wie in der Differenzmenge $R^* \setminus R_1^*$ enthalten sind.

Nun sind aber N, R_1^* und R^* und auch $R^* \setminus R_1^*$ unendliche Mengen. Von „mehr" Elementen im Sinne einer Anzahl kann also nicht die Rede sein. Wir können nur von der **Mächtigkeit** dieser unendlichen Mengen ausgehen.

Wir verwenden eine andere Abbildung als die, die wir benutzt hatten, um die Gleichmächtigkeit von R_1^* und N festzustellen.
Zu diesem Zwecke ordnen wir zunächst die Menge aller Brüche $x = \frac{n}{m} > 0$ nach dem im Bild 259/1 dargestellten System.



259/1

Aus dieser geordneten Menge aller Brüche wählen wir je einen Repräsentanten für jede gebrochene Zahl aus, indem wir stets den in der angegebenen Reihenfolge zuerst auftretenden Bruch verwenden und alle darauf folgenden quotientengleichen Brüche streichen. Diesen so ausgewählten Repräsentanten ersetzen wir dann durch die von ihm vertretene gebrochene Zahl. Wir erhalten also eine geordnete Menge; vgl. die eingekreisten Ziffern in Bild 259/1.
Diese geordnete Menge bilden wir auf die ebenfalls geordnete Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null ab. Die Ordnung in N soll durch die in N erklärte Kleiner-Relation bestimmt sein.
Eine solche Abbildung konstruieren wir als eineindeutige Abbildung von $[R^*\setminus\{0\}; \rightarrow]$ auf $[N\setminus\{0\}; <]$ wie folgt.

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
[R^*\setminus\{0\} : \rightarrow] & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{3} & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & 5 & \ldots \\
 & | & | & | & | & | & | & | & | & | & | & \\
[N\setminus\{0\} : <] & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots
\end{array}$$

Mit Hilfe dieser Überlegungen wird Satz 5 (12.2.) begründet.

SATZ 5 (12.2.)
Die Menge der gebrochenen Zahlen ist **gleichmächtig** zur Menge der natürlichen Zahlen: $R^* \sim N$.

Folgerung aus Satz 5 (12.2.):
Die Menge der gebrochenen Zahlen ist **abzählbar** (↗ Definition 1 (9.8.)).

Folgerung aus Satz 4 (12.2.):
Die Menge der gebrochenen Zahlen, die durch Brüche mit dem Nenner 1 dargestellt sind, ist **abzählbar** (↗ Definition 1 (9.8.)).

Folgerung:
Es gibt weitere **abzählbare Teilmengen** von R^*.

Aus den Überlegungen zum Begriff der Abzählbarkeit kann und muß man den Schluß ziehen, daß der Satz „Ein echter Teil ist immer kleiner als das Ganze" auf den Bereich des Unendlichen nicht anwendbar ist, wenn man davon ausgeht, daß „kleiner" im Sinne einer geringeren Anzahl von Elementen verstanden wird. In diesem Zusammenhang wird auch verständlich, warum man definiert, daß eine Menge genau dann endlich heißen soll, wenn sie zu keiner ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist.

12.3. Operationen in R^*

DEFINITION 1 (12.3.) — **Summe gebrochener Zahlen**
Es seien z_1 und z_2 gebrochene Zahlen, $[a; b]$ ein Repräsentant von z_1 und $[c; d]$ ein Repräsentant von z_2. Dann nennen wir $z_1 +_{R^*} z_2$ die **Summe** von z_1 und z_2 genau dann, wenn $[ad + bc; bd]$ ein Repräsentant von $z_1 +_{R^*} z_2$ ist.

Bemerkungen:
Definition 1 (12.3.) entspricht genau dem in der Schule behandelten Verfahren der Addition von gebrochenen Zahlen:

$$\frac{a}{b} +_{R^*} \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

die Addition erfolgt repräsentantenweise. Man beachte auch hier wieder, daß das Additionszeichen „$+_{R^*}$" mit einem Index versehen ist, um es vom Additionszeichen in N zu unterscheiden. In gleicher Weise sind wir anfangs bei der Kleiner-Relation verfahren.

SATZ 1 (12.3.) — **Summe gebrochener Zahlen**
Die in Definition 1 (12.3.) definierte **Summe existiert** und ist **eindeutig bestimmt**.

Beweis:
Wir müssen zeigen, daß zu beliebigen gebrochenen Zahlen z_1, z_2 immer eine Zahl $z_3 \in R^*$ *existiert* und daß es zu vorgegebenen $z_1, z_2 \in R^*$ nur dieses eine $z_3 \in R^*$ gibt, so daß

$$z_1 +_{R^*} z_2 = z_3.$$

(1) *Existenz von z_3:*
Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,

$[a; b]$ Repräsentant von z_1 und
$[c; d]$ Repräsentant von z_2.

Dann ist nach Definition 1 (12.3.)

$[ad + cb; bd]$ Repräsentant von $z_3 = z_1 +_{R^*} z_2$.

Nun gilt: $a d + c b \in N$ (nach den Sätzen 1 (11.3.) und 7 (11.3.)) und wegen der Voraussetzung $b, d \neq 0$ (↗ Definition 2 (12.1.))

$$[a d + c b; b d] \in N \times (N \setminus \{0\}) \quad (\nearrow \text{ Satz 25 (11.3.)}).$$

Damit erfüllt das geordnete Paar $[a d + c b; b d]$ alle Bedingungen eines Repräsentanten einer gebrochenen Zahl. Also existiert zu beliebig vorgegebenen $z_1, z_2 \in R^*$ ein $z_3 \in R^*$ mit

$$z_1 +_{R^*} z_2 = z_3,$$

denn es gibt mindestens einen Repräsentanten von z_3.

(2) *Eindeutigkeit von z_3:*

Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,

$[a; b]$ und $[a'; b']$ Repräsentanten von z_1 und
$[c; d]$ und $[c'; d']$ Repräsentanten von z_2.

Nach Definition 1 (12.3.) ist dann

$[a d + c b; b d]$ Repräsentant von $z_1 +_{R^*} z_2$ und
$[a'd' + c'b', b'd']$ Repräsentant von $z_1 +_{R^*} z_2$.

Zu zeigen ist nun, daß

$[a d + c b; b d]$ und $[a'd' + c'b'; b'd']$

Repräsentanten ein und derselben gebrochenen Zahl sind.
Das ist nach Definition 2 (12.1.) genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} [a d + c b; b d] &=_Q [a'd' + c'b'; b'd'], \text{ d. h.} & \\ (a d + c b)\, b'd' &= (a'd' + c'b')\, b d & \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \\ a d b'd' + c b b'd' &= a'd' b d + c'b' b d & \text{(nach Satz 11 (11.3.))} \\ (*) \quad a b'd d' + c d'b b' &= a'b d d' + c'd b b' & \text{(nach Satz 10 (11.3.))} \end{aligned}$$

Nun gilt nach Voraussetzung und Definition 2 (12.1.):

$$\begin{aligned} [a; b] &=_Q [a'; b'] \\ [c; d] &=_Q [c'; d'] \\ \hline a b' &= a'b \\ c d' &= c'd \quad \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \end{aligned}$$

Daraus folgt nach Satz 24 (11.3.) durch Multiplikation mit $d d'$ bzw. $b b'$:

$$\begin{aligned} a b'd d' &= a'b d d' \\ c d'b b' &= c'd b b' \end{aligned}$$

Durch Addition ergibt sich

$$a b'd d' + c d'b b' = a'b d d' + c'd b b', \quad (\nearrow (*)).$$ q. e. d.

DEFINITION 2 (12.3.) — **Addition in R^***
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R^* \times R^*$ in R^* **Addition in R^*** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[z_1; z_2]$ gebrochener Zahlen z_1 und z_2 ihre Summe zuordnet.

BEISPIEL 1 (12.3.):

$[15; 10]$ ist Repräsentant von $\frac{3}{2} \in R^*$.

$[4; 5]$ ist Repräsentant von $\frac{4}{5} \in R^*$. (↗ Definition 3 (12.1.))

Wir ermitteln die Summe von $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{5}$ nach Definition 1 (12.3.) mit Hilfe dieser Repräsentanten.

Dann gilt: $[15 \cdot 5 + 4 \cdot 10; 10 \cdot 5] = [75 + 40; 50] = [115; 50]$
ist Repräsentant von z_3.

Nach Definition 3 (12.1.) gilt dann: $z_3 = \frac{115}{50}$.

Verwenden wir noch die an Definition 3 (12.1.) anschließende Vereinbarung (3), so ergibt sich:

$$z_3 = \frac{23}{10}.$$

Also:

$$\frac{3}{2} +_{R^*} \frac{4}{5} = \frac{23}{10}$$

SATZ 2 (12.3.) — Kommutativgesetz der Addition in R^*
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2 gilt:
$z_1 +_{R^*} z_2 = z_2 +_{R^*} z_1$.

Beweis:
Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von z_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von z_2.

Dann ist nach Definition 1 (12.3.)
$[ad + cb; bd]$ Repräsentant von $z_1 +_{R^*} z_2$ und
$[cb + ad; db]$ Repräsentant von $z_2 +_{R^*} z_1$.

Nun ist aber
$[ad + cb; bd] = [cb + ad; db]$ (nach den Sätzen 4 (11.3.) und 10 (11.3.)).

Also: $z_1 +_{R^*} z_2 = z_2 +_{R^*} z_1$ (nach Satz 1 (12.2.)) q. e. d.

SATZ 3 (12.3.) — Assoziativgesetz der Addition in R^*
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt:
$(z_1 +_{R^*} z_2) +_{R^*} z_3 = z_1 +_{R^*} (z_2 +_{R^*} z_3)$.

Der *Beweis* wird in analoger Weise zum Beweis des Satzes 2 (12.3.) geführt.

DEFINITION 3 (12.3.) — Differenz gebrochener Zahlen
z_3 nennen wir die **Differenz** zweier gebrochener Zahlen z_1 und z_2 genau dann, wenn
$z_1 = z_2 +_{R^*} z_3$.
Wir schreiben dann auch: $z_3 = z_1 -_{R^*} z_2$.

Man beachte:
Der Begriff der Differenz wird mit Hilfe der bereits definierten Addition erklärt. Es geht darum, zu einer vorgegebenen Summe zweier Summanden einen Summanden zu ermitteln, wenn der andere Summand ebenfalls vorgegeben ist.

Im folgenden sollen zwei Beispiele ausführlich behandelt werden, die bewußt machen sollen, daß mit Hilfe der Definition 3 (12.3.) tatsächlich die Ergebnisse ermittelt werden, die denen entsprechen, die durch das Anwenden der in der Schule behandelten Regeln für das Subtrahieren von gebrochenen Zahlen gewonnen werden. Analogien in den Verfahrensweisen sollten gesucht werden.

BEISPIEL 2 (12.3.):
Gesucht ist die Differenz der gebrochenen Zahlen

$$z_1 = \frac{5}{6} \quad \textit{und} \quad z_2 = \frac{3}{4}.$$

$$z_3 = \frac{5}{6} -_{R^*} \frac{3}{4}$$

Diese Differenz berechnen wir nach Definition 3 (12.3.), indem wir auf die Addition gebrochener Zahlen zurückgehen.

$$\frac{5}{6} = \frac{3}{4} +_{R^*} z_3$$

Wir betrachten Repräsentanten.

$[5; 6]$ ist Repräsentant von $\frac{5}{6}$,

$[3; 4]$ ist Repräsentant von $\frac{3}{4}$ (↗ Definition 3 (12.1.)),

$[a; b]$ sei Repräsentant von z_3.

Dann muß gelten: $[5; 6] =_Q [3\,b + a \cdot 4; 4\,b]$ (nach Definition 1 (12.3.)).

Also gilt:

$5 \cdot 4\,b$	$= (3\,b + 4\,a) \cdot 6$	(nach Definition 3 (12.1.))
$20\,b$	$= 18\,b + 24\,a$	(nach Satz 11 (11.3.))
$2\,b$	$= 24\,a$	(nach Satz 19 (11.3.))
b	$= 12\,a$	(nach Satz 24 (11.3.))

Jedes Paar $[a; b]$, das die letzte Gleichung erfüllt, ist ein Repräsentant von z_3.
Es sei $a = 1$ und damit $b = 12$.

Dann ist $[1; 12]$ Repräsentant von z_3 und damit $z_3 = \frac{1}{12}$ nach Definition 3 (12.1.).

Also: $\frac{5}{6} -_{R^*} \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$

BEISPIEL 3 (12.3.):
Es sei $z_1 = \frac{3}{5}$ und $z_2 = \frac{9}{10}$.
Zu ermitteln ist $z_3 = z_1 -_{R^*} z_2$.
Wir gehen wie folgt vor.

$[3; 5]$ ist Repräsentant von $\frac{3}{5}$,

$[9; 10]$ ist Repräsentant von $\frac{9}{10}$ (nach Definition 3 (12.1.)),

$[a; b] \in N \times (N \setminus \{0\})$ sei Repräsentant von z_3.

Es muß gelten: $[3; 5] =_Q [9\,b + a \cdot 10; 10\,b]$ (nach Definition 1 (12.3.) und 3 (12.3.)).

$3 \cdot 10\,b$	$= (9\,b + a \cdot 10) \cdot 5$	(nach Definition 1 (12.1.))
$30\,b$	$= 45\,b + 50\,a$	(nach Satz 11 (11.3.))
0	$= 15\,b + 50\,a$	(nach Satz 19 (11.3.))

Die letzte Gleichung ist mit $a \in N$ und $b \in N \setminus \{0\}$ nicht erfüllbar. Daraus folgt, daß mit den bisher behandelten Mitteln und Methoden die Aufgabe $\frac{3}{5} -_{R^*} \frac{9}{10}$ nicht lösbar ist.

SATZ 4 (12.3.) — **Differenz gebrochener Zahlen**
Die in Definition 3 (12.3.) definierte **Differenz** $z_1 -_{R^*} z_2$ **existiert** und ist **eindeutig bestimmt** genau dann, wenn $z_1 \geqq z_2$.

Bemerkung:
Im Beispiel 2 (12.3) konnten wir die gesuchte Differenz in R^* ermitteln. Im Beispiel 3 (12.3.) wird jedoch sichtbar, daß eine solche *Differenz* in R^* nicht in jedem Falle *existiert.*
Wir stellen ohne Beweis fest, daß die Differenz $z_1 -_{R^*} z_2$ genau dann existiert, wenn $z_1 \geqq z_2$.
Die *Eindeutigkeit der Differenz* im Falle ihrer Existenz soll ebenfalls nicht bewiesen werden. Ein solcher Beweis kann geführt werden, indem man die Unabhängigkeit der Differenz von der Auswahl der Repräsentanten für Minuend und Subtrahend zeigt.

DEFINITION 4 (12.3.) — **Subtraktion in R^***
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R^* \times R^*$ in R^* **Subtraktion in R^*** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[z_1; z_2]$ zweier gebrochener Zahlen z_1 und z_2 mit $z_1 \geqq z_2$ ihre Differenz $z_1 -_{R^*} z_2$ zuordnet.

Ausgehend von den Definitionen 3 (12.3.) und 4 (12.3.) bezeichnen wir die **Subtraktion auch als Umkehroperation zur Addition** und drücken diese Tatsache durch die Gleichung

$$(z_1 +_{R^*} z_2) -_{R^*} z_2 = z_1$$

aus. Die Allgemeingültigkeit dieser Aussageform folgt unmittelbar aus der Definition der Subtraktion.

DEFINITION 5 (12.3.) — **Produkt gebrochener Zahlen**
Es seien z_1 und z_2 gebrochene Zahlen, $[a; b]$ ein Repräsentant von z_1 und $[c; d]$ ein Repräsentant von z_2 mit $b, d \neq 0$.
Dann nennen wir $z_1 \cdot_{R^*} z_2$ das **Produkt** von z_1 und z_2 genau dann, wenn $[a c; b d]$ ein Repräsentant von $z_1 \cdot_{R^*} z_2$ ist.

Bemerkung:
In der Forderung „$[a\,c; b\,d]$ ist Repräsentant von z_3" findet man die von der Schule her bekannte Regel wieder, daß man gebrochene Zahlen miteinander multipliziert, indem man jeweils Zähler und Nenner der darstellenden Brüche multipliziert.

SATZ 5 (12.3.) — **Produkt gebrochener Zahlen**
Das in Definition 5 (12.3.) definierte **Produkt existiert** und ist **eindeutig bestimmt.**

Beweis:
(1) *Existenz des Produktes:*
Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,
$[a; b]$ Repräsentant von z_1,
$[c; d]$ Repräsentant von z_2.

Dann ist nach Definition 5 (12.3.) $[ac; bd]$ Repräsentant von $z_3 = z_1 \cdot_{R^*} z_2$.

Nun gilt: $a \in N$; $c \in N$ (nach Voraussetzung)
$ac \in N$ (nach Satz 7 (11.3.))
$b \in N \setminus \{0\}$; $d \in N \setminus \{0\}$ (nach Voraussetzung)
$bd \in N \setminus \{0\}$ (nach Satz 7 (11.3.) und Satz 25 (11.3.))

Damit erfüllt das geordnete Paar $[ac; bd]$ alle Bedingungen, die an einen Repräsentanten gebrochener Zahlen gestellt werden (↗ Definition 2 (12.1.)).
Zu beliebig vorgegebenen $z_1, z_2 \in R^*$ existiert also ein $z_3 = z_1 \cdot_{R^*} z_2$ mit $z_3 \in R^*$, denn es gibt (mindestens) einen Repräsentanten von z_3.

(2) *Eindeutigkeit des Produktes:*
Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,
$[a; b]$ und $[a'; b']$ Repräsentanten von z_1,
$[c; d]$ und $[c'; d']$ Repräsentanten von z_2.

Nach Definition 5 (12.3.) ist dann $[ac; bd]$ Repräsentant von $z_1 \cdot_{R^*} z_2$ und $[a'c'; b'd']$ Repräsentant von $z_1 \cdot_{R^*} z_2$.
Wir haben zu zeigen, daß $[ac; bd] =_Q [a'c'; b'd']$ gilt, d. h., daß beide geordneten Paare Repräsentanten ein und derselben gebrochenen Zahl sind (↗ Definition 2 (12.1.)).

$[ac; bd] =_Q [a'c'; b'd']$, d. h.
$acb'd' = a'c'bd$ (nach Definition 1 (12.1.))
$ab'cd' = a'bc'd$ (*) (nach Satz 10 (11.3.))

Nun gilt:

$$\begin{array}{l} [a; b] =_Q [a'; b'] \\ [c; d] =_Q [c'; d'] \\ \hline \end{array}$$
(nach Voraussetzung und Definition 2 (12.1.))

$ab' = a'b$
$cd' = c'd$ (nach Definition 1 (12.1.))

Wir multiplizieren die linken bzw. rechten Seiten dieser beiden Gleichungen (↗ Satz 20 (11.3.)) und erhalten
$ab'cd' = a'bc'd$ (↗ (*)).

DEFINITION 6 (12.3.) — **Multiplikation in R^***
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R^* \times R^*$ in R^* **Multiplikation in R^*** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[z_1; z_2]$ zweier gebrochener Zahlen z_1 und z_2 ihr Produkt $z_1 \cdot_{R^*} z_2$ zuordnet.

BEISPIEL 4 (12.3.):
Zu berechnen ist $z_3 = \frac{4}{5} \cdot_{R^*} \frac{15}{14}$.

$[4; 5]$ ist Repräsentant von $\frac{4}{5} \in R^*$.

$[15; 14]$ ist Repräsentant von $\frac{15}{14} \in R^*$ (↗ Definition 3 (12.1.)).

Wir berechnen z_3, indem wir laut Definition 6 (12.3.) einen Repräsentanten ermitteln.

$[4 \cdot 15; 5 \cdot 14] = [60; 70]$ ist ein Repräsentant von z_3.

Nach Definition 3 (12.1.) ist dann $z_3 = \frac{6}{7}$; $z_3 \in R^*$.

Also: $\frac{4}{5} \cdot_{R^*} \frac{15}{14} = \frac{6}{7}$

SATZ 6 (12.3.) — **Kommutativgesetz der Multiplikation in R^***
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2 gilt:
$z_1 \cdot_{R^*} z_2 = z_2 \cdot_{R^*} z_1$.

Beweis:
Es seien z_1, z_2 gebrochene Zahlen,
$[a; b]$ Repräsentant von z_1,
$[c; d]$ Repräsentant von z_2.
Dann ist $[a c; b d]$ Repräsentant von $z_1 \cdot_{R^*} z_2$ und
$[c a; d b]$ Repräsentant von $z_2 \cdot_{R^*} z_1$
(nach Definition 6 (12.3.)).
Weiter gilt $[a c; b d] =_Q [c a; d b]$, denn
$a c d b = c a b d$ (nach Definition 1 (12.1.))
$a c d b = a c d b$ (nach Satz 10 (11.3.))
Also gilt: $z_1 \cdot_{R^*} z_2 = z_2 \cdot_{R^*} z_1$ (nach Satz 1 (12.2.)).

SATZ 7 (12.3.) — **Assoziativgesetz der Multiplikation in R^***
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt:
$z_1 \cdot_{R^*} (z_2 \cdot_{R^*} z_3) = (z_1 \cdot_{R^*} z_2) \cdot_{R^*} z_3$.

Ein *Beweis* des Satzes 7 (12.3.) kann wie der Beweis zu Satz 6 (12.3.) mit Hilfe von Repräsentanten für z_1, z_2, z_3 geführt werden. Auf eine ausführliche Darstellung verzichten wir.

SATZ 8 (12.3.) — **Distributivgesetz in R^***
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt:
$z_1 \cdot_{R^*} (z_2 +_{R^*} z_3) = z_1 \cdot_{R^*} z_2 +_{R^*} z_1 \cdot_{R^*} z_3$.

Beweis:
(↗ Beweis zu Satz 7 (12.3.))
Es läßt sich nicht nur die im Satz 8 (12.3.) ausgesprochene **linksseitige Distributivität**, sondern auch die **rechtsseitige Distributivität**

$$(z_2 +_{R^*} z_3) \cdot_{R^*} z_1 = z_2 \cdot_{R^*} z_1 +_{R^*} z_3 \cdot_{R^*} z_1$$

beweisen. Davon ausgehend unterlassen wir eine Unterscheidung beider Formen und sprechen nur vom **Distributivgesetz.**

DEFINITION 7 (12.3.) — **Quotient gebrochener Zahlen**
z_3 nennen wir den **Quotienten** zweier gebrochener Zahlen z_1 und z_2 ($z_2 \neq 0$) genau dann, wenn $z_1 = z_2 \cdot_{R^*} z_3$.
Wir schreiben auch: $z_3 = z_1 :_{R^*} z_2$.

Bemerkung:
Der Quotient wird also wie die Differenz mit Hilfe einer in R^* bereits bekannten Operation, in diesem Falle mit Hilfe der Multiplikation, definiert. Es geht darum, zu einem vorgegebenen Produkt zweier Zahlen einen Faktor zu ermitteln, wenn der andere Faktor ebenfalls vorgegeben ist.

SATZ 9 (12.3.) — Quotient gebrochener Zahlen
Der in Definition 7 (12.3.) definierte **Quotient** $z_1 :_{R^*} z_2$ $(z_2 \neq 0)$ **existiert und ist eindeutig bestimmt.**

Satz 9 (12.3.) ist insofern wichtig, als insbesondere die Existenz des Quotienten gebrochener Zahlen (mit der Einschränkung, daß der Divisor verschieden von Null sein muß) behauptet wird. Diese Tatsache war das Motiv, das uns veranlaßte, die Menge der gebrochenen Zahlen zu konstruieren. (Im vorher behandelten Bereich N trifft eine analoge Behauptung nicht zu.)

Beweis des Satzes 9 (12.3.):

(1) *Existenz des Quotienten:*
Es seien z_1 und z_2 beliebige gebrochene Zahlen $(z_2 \neq 0)$.
Behauptet wird:

$$\exists\, z_3 \,(z_3 \in R^* \wedge z_1 = z_2 \cdot_{R^*} z_3) \quad (\nearrow \text{Definition 7 (12.3.)}).$$

Nun seien $[a; b]$ Repräsentant von z_1,
$[c; d]$ Repräsentant von z_2.
Nach Definition 7 (12.3.) entspricht dann unsere Behauptung der Aussageform:
Es gibt ein Paar $[e; f]$ mit $e \in N, f \in N \setminus \{0\}$ und $[a; b] =_Q [c\,e; d\,f]$.
Nun sei $e = a\,d, f = c\,b$.
Dann gilt $[e; f] =_Q [a\,d; c\,b]$

$$\begin{array}{ll} e\,c\,b = a\,d\,f & \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \\ a\,d\,f = c\,e\,b & \text{(nach Satz 10 (11.3.))} \\ [a; b] =_Q [c\,e; d\,f] & \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \end{array}$$

Damit ist die Existenz eines solchen geforderten Paares $[e; f]$ — nämlich $[e; f] =_Q [a\,d; c\,b]$ — gezeigt.
Die Konstruktion $e = a\,d, f = c\,b$ entspricht der aus der Schule bekannten Regel $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{c\,b}$.

(2) Auf den Nachweis der *Eindeutigkeit des Quotienten*, der sich ausgehend von der Auswahl je zweier Repräsentanten für z_1, z_2 $(z_2 \neq 0)$ führen läßt, verzichten wir.

DEFINITION 8 (12.3.) — Division in R^*
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R^* \times (R^* \setminus \{0\})$ in R^* **Division in R^*** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[z_1; z_2]$ zweier gebrochener Zahlen z_1 und z_2 $(z_2 \neq 0)$ ihren Quotienten $z_1 :_{R^*} z_2$ zuordnet.

Die **Division** bezeichnen wir auch als **Umkehroperation zur Multiplikation** ($\nearrow$ Definition 7 (12.3.)). Diese Tatsache drücken wir durch die Gleichung

$$(z_1 :_{R^*} z_2) \cdot_{R^*} z_2 = z_1$$

aus. Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt unmittelbar aus der Definition 7 (12.3.)).

BEISPIEL 5 (12.3.):

Gesucht ist der Quotient der gebrochenen Zahlen $\frac{9}{5}$ und $\frac{21}{10}$.

$$\frac{9}{5} :_{R^*} \frac{21}{10} = z_3$$

Diesen Quotienten berechnen wir nach Definition 7 (12.3.), indem wir auf die Multiplikation gebrochener Zahlen zurückgehen.

$$\frac{9}{5} = \frac{21}{10} \cdot_{R^*} z_3$$

Nun ist $[9; 5]$ Repräsentant von $\frac{9}{5}$,

$[21; 10]$ Repräsentant von $\frac{21}{10}$ (nach Definition 3 (12.1.)).

$[a; b]$ sei ein beliebiger Repräsentant von z_3.

Dann muß gelten:

$$\begin{aligned} [9; 5] &=_Q [21\,a; 10\,b] && \text{(nach Definition 5 (12.3.))} \\ 9 \cdot 10\,b &= 21\,a \cdot 5 && \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \\ 90\,b &= 105\,a && \text{(nach Satz 6 (11.3.))} \\ 90\,b &= a \cdot 105 && \text{(nach Satz 10 (11.3.))} \\ [90; 105] &=_Q [a; b] && \text{(nach Definition 1 (12.1.))} \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

Wenn $[a; b]$ ein Repräsentant von z_3 ist, so ist auch $[90; 105]$ ein Repräsentant von z_3, also: $z_3 = \frac{90}{105} = \frac{6}{7}$.

Es gilt also: $\frac{9}{5} :_{R^*} \frac{21}{10} = \frac{6}{7}$.

Dieses Verfahren stimmt mit dem aus der Schule bekannten Verfahren überein, daß man zwei gebrochene Zahlen dividiert, indem man den Dividenden mit dem Reziproken des Divisors multipliziert. In diesem Falle also:

$$\frac{9}{5} : \frac{21}{10} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{9}{5} \cdot \frac{10}{21} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{90}{105} = \frac{a}{b}$$

Nachdem im Teil C 12.3. bisher die **vier Grundrechenoperationen für gebrochene Zahlen definiert** und wichtige **Sätze über diese Operationen formuliert** wurden, sollen noch einige Bemerkungen zur verwendeten **Symbolik** gemacht werden.

Im Teil C 12.3. wird grundstäzlich zwischen der Addition in N (Zeichen $+$) und der Addition in R^* (Zeichen $+_{R^*}$) unterschieden. Analog trifft das auch auf die anderen Operationen zu. Nun konnten wir zeigen, daß in R^* für die Grundrechenoperationen die gleichen Rechengesetze wie für die entsprechenden Operationen in N (Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) gelten.

In Analogie zu den Schlußfolgerungen aus Satz 4 (12.2.) wenden wir das **Permanenzprinzip** bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division an.

Wir stellen die **Isomorphie** von N und $R_1^* \subset R^*$ ($\nearrow$ Satz 4 (12.2.)) bezüglich der behandelten vier Grundrechenoperationen fest.

SATZ 10 (12.3.)

R_1^* und N sind isomorph ($R_1^* \cong N$) bezüglich der in beiden Bereichen erklärten Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

Beweis:
Die Gleichmächtigkeit der Mengen R_1^* und N wurde bereits im Zusammenhang mit Satz 4 (12.2.) nachgewiesen. Wir haben nur noch zu zeigen, daß die dort verwendete eineindeutige Abbildung auch operationstreu ist.

Zur *Addition:*

Wir ermitteln $\frac{a}{1} +_{R^*} \frac{b}{1} = z$ entsprechend Definition 1 (12.3.) mit Hilfe von Repräsentanten $[a; 1]$ bzw. $[b; 1]$.
Dann gilt: $[a \cdot 1 + b \cdot 1; 1 \cdot 1] = [a + b; 1]$ ist Repräsentant von z.
Nach Definition 3 (12.1.) ist dann

$$z = \frac{a + b}{1}.$$

Entsprechend der im Satz 4 (12.2.) verwendeten Abbildungsvorschrift f ist $\frac{a}{1}$ auf a, $\frac{b}{1}$ auf b, $\frac{a+b}{1}$ auf $a + b$ abzubilden.
Nun ist aber $f(a) + f(b) = f(a + b)$.
Also gilt:
Aus $\frac{a}{1} +_{R^*} \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$ folgt

$$f\left(\frac{a}{1}\right) + f\left(\frac{b}{1}\right) = f\left(\frac{a+b}{1}\right).$$

Die verwendete Abbildung ist operationstreu bezüglich der Addition. q. e. d.
Für die anderen Operationen gilt das analog.

Damit steht fest, daß es einen echten Teilbereich R_1^* von R^* gibt, der isomorph zur Menge N bezüglich der Kleiner-Relation und der vier Grundrechenoperationen, die in beiden Mengen erklärt sind, ist.

$$[N, +, \cdot, -, :, <] \cong [R_1^*, +_{R^*}, \cdot_{R^*}, -_{R^*}, :_{R^*}, <_{R^*}]$$

Auf Grund der Isomorphie brauchen wir nicht mehr streng zwischen natürlichen Zahlen und Zahlen aus R_1^* zu unterscheiden, da für beide Zahlenarten die gleichen Rechengesetze gelten.
Der Einfachheit halber verwenden wir deshalb in Zukunft beim Rechnen mit gebrochenen Zahlen (wie wir das auch schon früher in der Schule getan haben) die gleichen Zeichen wie beim Rechnen in N.
Wir schreiben: $z_1 + z_2$ an Stelle von $z_1 +_{R^*} z_2$,
$z_1 \cdot z_2$ oder auch kurz $z_1 z_2$ an Stelle von $z_1 \cdot_{R^*} z_2$,
$z_1 - z_2$ an Stelle von $z_1 -_{R^*} z_2$,
$z_1 : z_2$ an Stelle von $z_1 :_{R^*} z_2$.

Wir wenden uns nochmals der Ordnung in R^* zu. In Definition 1 (12.2.) ist festgelegt, wann eine gebrochene Zahl z_1 kleiner als eine gebrochene Zahl z_2 sein soll. Nachdem wir definiert haben, wie mit gebrochenen Zahlen gerechnet werden kann, sind wir in der Lage, diese Kleiner-Relation auch anders zu definieren.

DEFINITION 9 (12.3.) — **Kleiner-Relation in R^***
($\nearrow$ Definition 1 (12.2.))
Es seien $z_1, z_2 \in R^*$.
Dann nennen wir $z_1 < z_2$ genau dann, wenn es ein $z_3 \in R^* \setminus \{0\}$ gibt, so daß $z_1 + z_3 = z_2$.

Für $z_1 < z_2$ kann man auch $z_2 > z_1$ schreiben und sagen: „z_2 ist größer als z_1".

Es müßte nachgewiesen werden, daß die Definition 9 (12.3.) der Definition 1 (12.2.) äquivalent ist. Wir stellen diese Tatsache nur fest, verzichten aber auf nähere Ausführungen.

Auf der Grundlage der Definition 9 (12.3.) befassen wir uns nunmehr mit den sogenannten **Monotoniegesetzen** im Bereich der gebrochenen Zahlen.

SATZ 11 (12.3.) — **Monotonie der Addition in R^* bezüglich der Kleiner-Relation**
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt:
Aus $z_1 < z_2$ folgt $z_1 + z_3 < z_2 + z_3$.

Voraussetzung: $z_1, z_2, z_3 \in R^*$, $\quad z_1 < z_2$
Behauptung: $z_1 + z_3 < z_2 + z_3$
Beweis:

$$z_1 < z_2 \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

Dann gibt es ein $z_4 \in R^* \setminus \{0\}$ mit

$$z_1 + z_4 = z_2 \quad \text{(nach Definition 1 (12.2.))}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_4) + z_3 &= z_1 + (z_4 + z_3) && \text{(nach Satz 3 (12.3.))}\\ &= z_1 + (z_3 + z_4) && \text{(nach Satz 2 (12.3.))}\\ (z_1 + z_4) + z_3 &= (z_1 + z_3) + z_4 && \text{(nach Satz 3 (12.3.))}\end{aligned}$$

Wegen $\quad z_1 + z_4 = z_2$

erhalten wir:

$$z_2 + z_3 = (z_1 + z_3) + z_4$$

und damit

$$z_2 + z_3 > z_1 + z_3 \quad \text{(nach Definition 1 (12.2.))}.$$

Also: $\quad z_1 + z_3 < z_2 + z_3$

Wir wollen noch ohne Beweis vermerken, daß die Addition in R^* auch bezüglich der Gleichheits-Relation monoton ist.

SATZ 12 (12.3.) — **Monotonie der Multiplikation in R^* bezüglich der Kleiner-Relation**
Für alle gebrochenen Zahlen z_1, z_2, z_3 gilt:
1) Aus $z_1 < z_2$ und $z_3 \neq 0$ folgt $z_1 z_3 < z_2 z_3$;
2) Aus $z_1 < z_2$ und $z_3 = 0$ folgt $z_1 z_3 = z_2 z_3$.

Fall 1)
Voraussetzung: $z_1, z_2 \in R^*$; $\quad z_3 \in R^* \setminus \{0\}$ und $z_1 < z_2$
Behauptung: $z_1 z_3 < z_2 z_3$
Beweis:

$$z_1 < z_2 \qquad \text{(nach Voraussetzung)}$$

Dann gibt es ein $z_4 \in R^* \setminus \{0\}$,
so daß $z_1 + z_4 = z_2$. (nach Definition 1 (12.2.))
Daraus folgt: $(z_1 + z_4)\, z_3 = z_1 z_3 + z_4 z_3$. (nach Satz 8 (12.3.))
Also: $\quad z_2 z_3 = z_1 z_3 + z_4 z_3$ (wegen $z_1 + z_4 = z_2$)

Ferner gilt: $z_4 z_3 \neq 0$. (wegen $z_4, z_3 \in R^* \setminus \{0\}$ und nach Voraussetzung)

Das heißt: $z_2 z_3 > z_1 z_3$. (nach Definition 9 (12.3.))

Also: $z_1 z_3 < z_2 z_3$ q.e.d.

Fall 2)

Voraussetzung: $z_1, z_2 \in R^*$, $z_3 = 0 \in R^*$ und $z_1 < z_2$

Behauptung: $z_1 z_3 = z_2 z_3$

Beweis:

Wie beim Beweis zu Fall 1) finden wir die Beziehung

$$z_2 z_3 = z_1 z_3 + z_4 z_3 \quad \text{mit} \quad z_4 \in R^* \setminus \{0\}.$$

Nun ist $z_4 z_3 = 0$ (wegen $z_3 = 0$).

Also: $z_2 z_3 = z_1 z_3$ q. e. d.

Wir wollen noch ohne Beweis vermerken, daß die Multiplikation in R^* auch bezüglich der Gleichheits-Relation monoton ist.

12.4. Gebrochene Zahlen und Zahlenstrahl

Im Teil C 11.5. wurden die natürlichen Zahlen in die Menge der Punkte eines Zahlenstrahls abgebildet. Wir erhielten durch diese eindeutige Abbildung eine **Folge von diskreten Bildpunkten** auf dem Zahlenstrahl.

In gleicher Weise verfahren wir mit R^*.

Zu diesem Zweck gehen wir vom Satz 1 (12.4.) aus.

SATZ 1 (12.4.)
Es sei R^* die Menge der gebrochenen Zahlen und OA^+ die Menge aller Punkte eines Strahls mit dem Anfangspunkt O, der durch einen beliebigen Punkt $A \neq O$ verläuft.
Dann gibt es eine eineindeutige Abbildung von R^* in OA^+.

Es gibt mehrere eineindeutige Abbildungen von R^* in OA^+.

Wir konstruieren eine dieser Abbildungen folgendermaßen und nennen sie **Zahlenstrahl**.

(1) $z = 0$, die kleinste gebrochene Zahl, ordnen wir genau dem **Anfangspunkt** O von OA^+ zu.

(2) $z = 1$ ordnen wir genau dem Punkt A, $A \neq O$, von OA^+ zu. Wir sagen dann, die Strecke $\overline{OA}$ habe die **Länge 1**.

(3) Ist z eine beliebige gebrochene Zahl und $[a; b]$ ein Repräsentant von z, so finden wir den Punkt P_z des Strahls OA^+, dem die Zahl z zugeordnet werden soll, auf folgende Weise.
Wir unterteilen die **Einheitsstrecke** $\overline{OA}$ in b gleiche Teile und tragen eine dieser Teilstrecken von O ausgehend a-mal ab. Dem so gefundenen **Endpunkt**

ordnen wir die gebrochene Zahl z zu. Die **Repräsentantenunabhängigkeit** dieser Zuordnung ist nachweisbar.

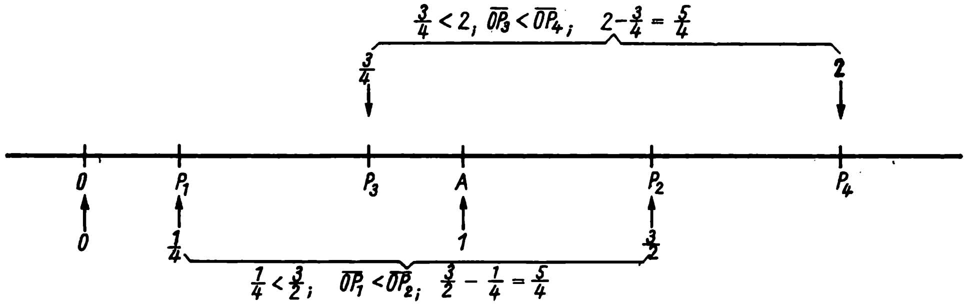
Man kann ebenfalls feststellen, daß im Falle $z_1 < z_2$ der Punkt P_{z_1} vor dem Punkt P_{z_2} auf dem Zahlenstrahl liegt, daß also $\overline{OP_{z_1}}$ kürzer als $\overline{OP_{z_2}}$ ist.

Weiter gilt dann:

Wenn $z_1 < z_2$, $z_3 < z_4$, aber $z_2 - z_1 = z_4 - z_3$,
dann ist z_1 genau einem Punkt P_1 von OA^+,
z_2 genau einem Punkt P_2 von OA^+,
z_3 genau einem Punkt P_3 von OA^+,
z_4 genau einem Punkt P_4 von OA^+
zugeordnet, so daß

$$\overline{P_1P_2} \cong \overline{P_3P_4}.$$

Bild 272/1 veranschaulicht diese Konstruktion.



272/1

Nach Satz 3 (12.2.) ist die Menge der gebrochenen Zahlen dicht, d. h., zwischen je zwei dieser Zahlen gibt es (mindestens) eine dritte Zahl.

Es gibt jedoch Punkte des Strahls OA^+, die keiner gebrochenen Zahl zugeordnet sind, so daß wir zwar von einer Abbildung von R^* *in* die Menge aller Punkte eines Strahles OA^+ sprechen können, nicht aber von einer Abbildung *auf* diese Menge (↗ Satz 1 (12.4.)).

12.5. Darstellung gebrochener Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem

In Definition 3 (12.1.) sind **Zahlzeichen für gebrochene Zahlen** eingeführt worden, die sich aus den von den natürlichen Zahlen her bekannten **Grundziffern 0, 1, 2, 3, . . . , 9** und einem **Bruchstrich** zusammensetzen.

Mit Hilfe der genannten Grundziffern ist es möglich, jede natürliche Zahl darzustellen, wobei ein dekadisches Stellenwertsystem benutzt wird (↗ Teil C 11.4.).

Jede Grundziffer hat einen **Zahlenwert** und einen **Stellenwert**. Für die Stellenwerte verwendet man Potenzen von 10 mit natürlichen Exponenten.

Es sollte versucht werden, eine analoge Schreibweise auch für gebrochene Zahlen einzuführen.

Der Leser betrachte unsere Ausführungen dazu nur unter dem Gesichtspunkt, daß eine solche Schreibweise für gebrochene Zahlen angegeben werden soll. Die

Darstellung der damit im Zusammenhang stehenden Probleme ist recht vielschichtig und kann in diesem Rahmen keineswegs auch nur annähernd vollständig gegeben werden. Das betrifft z. B. solche Fragen, die mit dem Operieren im Bereich der gebrochenen Zahlen zusammenhängen (*Beispiel: Wie multipliziert man* $0{,}\overline{4}$ *und* $0{,}3\overline{76}$*?*). Der Leser sei darauf verwiesen, daß in jedem Falle richtig vorgegangen wird, wenn eine Umwandlung von dieser Schreibweise in die in Definition 3 (12.1.) erklärte Schreibweise vorgenommen wird und dann entsprechend den Rechenregeln für gebrochene Zahlen (↗ Teil C 12.3.) vorgegangen wird. Ein „Runden" sollte nur dann vorgenommen werden, wenn das für den vorgegebenen Anwendungsbereich einer Aufgabenstellung statthaft und sinnvoll ist. Auf das „Runden" und die zugehörigen „Rundungsregeln" soll hier nicht eingegangen werden.

Wir versuchen also, eine **dezimale Schreibweise für gebrochene Zahlen** zu erklären.

BEISPIEL 1 (12.5.):

$$z = \frac{4613}{212}$$

Wir erinnern uns der Vereinbarung, alle gebrochenen Zahlen, die sich in der Form $z = \frac{a}{1}$ $(a \in N)$ darstellen lassen, genauso wie die ihnen entsprechenden natürlichen Zahlen zu bezeichnen (↗ Satz 4 (12.2.); Folgerungen).
Das bedeutet

$$\frac{4613}{212} = \frac{21 \cdot 212 + 161}{212} = \frac{21 \cdot 212}{212} + \frac{161}{212} \quad \text{(nach Definition 1 (12.3.))}$$

$$= \frac{21}{1} + \frac{161}{212} \quad \text{(nach Vereinbarungen zu Definition 3 (12.1.))}$$

$$= 21 + \frac{161}{212} \quad \text{(nach Vereinbarungen zu Definition 3 (12.1.))}$$

$$= 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + \frac{161}{212}$$

Es bleibt nach der letzten Umwandlung im Beispiel 1 (12.5.) ein Summand, der sich nicht in die dezimale Schreibweise einordnet. Da wir jede gebrochene Zahl, die nicht von vornherein den Nenner 1 hat und die nicht von vornherein einen Repräsentanten $[a; b]$ mit $a < b$ besitzt, in eine Summe dieser Art zerlegen können, ist es im folgenden nur noch notwendig, Betrachtungen über die Darstellung solcher gebrochener Zahlen mit einem Repräsentanten $[a; b]$, wobei $a < b$, in dezimaler Schreibweise anzustellen.

Wir gehen davon aus, daß alle gebrochenen Zahlen $z = \frac{a}{b}$ diese Bedingung genau dann erfüllen, wenn $0 < \frac{a}{b} < 1$.

Daraus folgt, daß es notwendig ist, kleinere Zehnerpotenzen als $10^0 = 1$ zu betrachten, um solche gebrochenen Zahlen in dezimaler Schreibweise angeben zu können.

12.5.

Wir legen fest:

$0{,}1$ als Schreibweise für $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$;

$0{,}01$ als Schreibweise für $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$;

$0{,}001$ als Schreibweise für $\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$; ...

Brüche der Form $\frac{1}{10^n}$, $n \in N \setminus \{0\}$, nennen wir **Zehnerbrüche.**

Es bleibt nur noch zu untersuchen, ob es für jede beliebige gebrochene Zahl $z = \frac{a}{b}$ mit $a < b$ stets einen Repräsentanten gibt, dessen Nenner ein Zehnerbruch in diesem Sinne ist.

SATZ 1 (12.5.)
Es sei $z \in R^*$ und $[a; b]$ ein beliebiger Repräsentant dieser Zahl z.
Dann gibt es einen Repräsentanten $[c; d]$ von z mit $d = 10^n$, $n \in N$, genau dann, wenn
$b = 2^p \cdot 5^q$ mit $p, q \in N$.

Auf einen *Beweis* des Satzes 1 (12.5.) verzichten wir.

BEISPIEL 2 (12.5.):

$$z_1 = \frac{1}{2}$$

$[1; 2]$ ist dann ein Repräsentant von z_1, wobei $2 = 2^1 \cdot 5^0$.
Nach Satz 1 (12.5.) gibt es also einen Repräsentanten von z_1, dessen Nenner eine Zehnerpotenz mit natürlichem Exponenten ist.

$$[c; d] = [5; 10] \quad \text{oder} \quad [c'; d'] = [50; 100] \quad \text{oder} \ldots$$

Also: $z_1 = \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = \cdots$

Wir schreiben: $z_1 = 5 \cdot \frac{1}{10}$ oder kürzer $z_1 = 0{,}5; \ldots$

$z_1 = 50 \cdot \frac{1}{10^2}$ oder kürzer $z_2 = 0{,}50; \ldots$

BEISPIEL 3 (12.5.):

$$z_2 = \frac{57}{200}$$

$[57; 200]$ ist Repräsentant von z_2, wobei $200 = 2^3 \cdot 5^2$.
Deshalb existiert ein Repräsentant von z_2, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist.

$$[c; d] = [285; 1000] \quad \text{oder} \quad [c'; d'] = [2850; 10000] \quad \text{oder} \ldots$$

Also: $z_2 = \frac{57}{200} = \frac{285}{1000} = \frac{2850}{10000} = \cdots$

Wir schreiben: $z_2 = 285 \cdot \frac{1}{10^3} = 2850 \cdot \frac{1}{10^4} = \cdots$

oder: $z_2 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3}$

Kurzform: $z_2 = 0{,}285$

BEISPIEL 4 (12.5.)

$$z_3 = \frac{31}{140}.$$

[31; 140] ist Repräsentant von z_3, wobei $140 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 7$.
Deshalb existiert nach Satz 1 (12.5.) *kein* Repräsentant von z_3, dessen Nenner eine Zehnerpotenz ist.
Nach unseren bisherigen Feststellungen kann damit noch keine Darstellung von $z_3 = \frac{31}{140}$ in dezimaler Schreibweise angegeben werden.
Für eine derartige gebrochene Zahl gehen wir wie folgt vor.

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{31}{140} &= \frac{2 \cdot 14}{140} + \frac{3}{140} &&= \frac{2 \cdot 14}{140} + \frac{30}{1400} \\ &= \frac{2 \cdot 14}{140} + \frac{2 \cdot 14}{1400} + \frac{2}{1400} &&= \frac{2 \cdot 14}{140} + \frac{2 \cdot 14}{1400} + \frac{20}{14000} \\ &= \frac{2 \cdot 14}{140} + \frac{2 \cdot 14}{1400} + \frac{1 \cdot 14}{14000} + \frac{6}{14000} = \cdots \end{aligned}$$

Also: $z_3 = \frac{31}{140} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$

$z_3 = 0{,}221\ldots$

Bei einer Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man

$$z_3 = 0{,}221428\,571428571\ldots$$

Dabei ist festzustellen, daß sich die Ziffernfolge 142857 von einer bestimmten Stelle an wiederholt.
Wir schreiben kürzer: $z_3 = 0{,}22\overline{142857}$ und lesen dafür:
„0 Komma 2-2-(1-4-2-8-5-7)-periodisch".

Aus Satz 1 (12.5.) wissen wir, daß diese Entwicklung für die gebrochene Zahl $\frac{31}{140}$ im Beispiel 4 (12.5.) nicht endlich sein kann, es gibt keine Darstellung von z_3 durch genau einen Zehnerbruch. z_3 kann also nur durch eine **unendliche Entwicklung** dargestellt werden. Diese ist periodisch im oben beschriebenen Sinn.
Das muß für jede derartige gebrochene Zahl so sein, denn wenn wir eine Zerlegung der betrachteten gebrochenen Zahl in eine Summe zweier gebrochener Zahlen so vornehmen, daß einer der beiden Summanden stets ein Zehnerbruch ist, so müssen wir im Zähler dieses Summanden ein Produkt bilden, dessen einer Faktor m (im Beispiel 4 (12.5.) ist $m = 14$) stets ein 10^n-ter Teil des Nenners ist. Der andere Faktor muß dann kleiner als m sein, für ihn gibt es nur endlich viele, höchstens $m - 1$ Möglichkeiten. Spätestens vom $(m - 1)$-ten Schritt des Verfahrens an muß sich also eine Wiederholung der Produktdarstellung im Zähler ergeben, die dann eine periodische Weiterentwicklung bedingt.

Es sei dazu vermerkt, daß das in der Schule behandelte Verfahren der schriftlichen Division auf dieser Entwicklung beruht. Das bedeutet, daß wir auch mit Hilfe dieses

Algorithmus zu einem analogen Ergebnis gelangen können. Das geht sogar wesentlich schneller: Man muß dabei nur beachten, daß man nicht ohne weiteres sagen darf, daß man die *natürlichen Zahlen* 31 und 140 dividiert und dann die obenstehende *gebrochene Zahl* in dezimaler Schreibweise erhält.

Wir betrachten nochmals Beispiel 1 (12.5.).

$$z = \frac{4613}{212} = 21 + \frac{161}{212}$$

Dabei ist $212 = 2^2 \cdot 5^0 \cdot 53$.

Eine Darstellung in dezimaler Schreibweise gelingt wegen des Faktors 53 nur durch Angabe einer Periode (↗ Satz 1 (12.5.)).

$$z = 21 + 0{,}75\overline{9433962264150} = 21{,}75\overline{9433962264150}$$

$21{,}75\overline{9433962264150}$ nennen wir den **Dezimalbruch** für $z = \dfrac{4613}{212}$.

DEFINITION 1 (12.5.) – **Dezimalbruch**
Eine gebrochene Zahl, die in dezimaler Schreibweise angegeben ist, nennen wir einen **Dezimalbruch**.

Wir behandeln nunmehr das **Umwandeln von Dezimalbrüchen in gebrochene Zahlen.**

Für den *Fall endlicher Dezimalbrüche* ist das einfach.

BEISPIEL 5 (12.5.):

$$z = 3{,}75 = 3 + 0{,}75$$

Wir betrachten 0,75. Nach den Darlegungen im Beispiel 3 (12.5.) ist

$$0{,}75 = 7 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{75}{100}.$$

Also: $$3 + 0{,}75 = \frac{300 + 75}{100} = \frac{375}{100}$$

Für den *Fall unendlicher* (*periodischer*) *Dezimalbrüche* ist das im Beispiel 6 (12.5.) dargestellte Verfahren möglich.

BEISPIEL 6 (12.5.):

$$\begin{array}{lrl}
 & z &= 0{,}7\overline{12} \\
\text{(I)} & z &= 0{,}7\overline{12} = 0{,}7\,12\,12\ldots \\
\text{(II)} & 100\,z &= 71{,}2\overline{12} = 71{,}2\,12\,12\ldots \\
\text{(II)}-\text{(I)} & 99\,z &= 70{,}5 \\
 & 990\,z &= 705 \\
 & z &= \dfrac{705}{990} = \dfrac{47}{63}
\end{array}$$

Die Berechtigung eines solchen Verfahrens müßte eigentlich nachgewiesen werden. Es müßte dabei vor allem gezeigt werden, wie man mit Dezimalbrüchen, insbesondere mit den periodischen, rechnen kann. Wir verzichten auf solche Darlegungen.

Im Beispiel 6 (12.5.) wird in Gleichung (I) auf beiden Seiten wegen der zweistelligen Periode mit 100 multipliziert. Allgemein gilt, daß man bei einer n-stelligen Periode mit 10^n multiplizieren muß.

Abschließende Bemerkungen

Mit den Ausführungen zum Bereich der gebrochenen Zahlen haben wir wesentliche Eigenschaften dieses Zahlenbereichs kennengelernt. Es wurde erläutert, weshalb diese Zahlen notwendig sind, wie sie definiert werden und wie man mit ihnen rechnen kann.
Vieles von den hier behandelten Sachverhalten war uns bereits bekannt. Dieses Wissen sollte geordnet und gefestigt werden. Wir haben die Eigenschaften der gebrochenen Zahlen und die Operationen mit diesen Zahlen aus den entsprechenden Betrachtungen über natürliche Zahlen hergeleitet. Der Bereich der gebrochenen Zahlen baut sich also auf dem Bereich der natürlichen Zahlen auf. Der Bereich der gebrochenen Zahlen stellt eine Erweiterung des Bereiches der natürlichen Zahlen auf höherer Stufe dar und schließt auf dieser höheren Stufe die natürlichen Zahlen mit ein. Alle in der Praxis auftretenden numerischen Probleme können mit den gebrochenen Zahlen noch nicht bewältigt werden. Deshalb ist es erforderlich, diesen Prozeß der schrittweisen Erweiterung der Zahlenbereiche fortzusetzen.

12.6. Kontrollfragen

1. Geben Sie zu den folgenden Klassen quotientengleicher geordneter Paare natürlicher Zahlen je zwei weitere Repräsentanten an!
   $z_1 = \{[2; 4], [1; 2], [8; 16], [5; 10], \ldots\}$
   $z_2 = \{[0; 1], [0; 3], [0; 7], [0; 176], \ldots\}$
   $z_3 = \{[9; 6], [3; 2], [6; 4], [15; 10], \ldots\}$
   $z_4 = \{[3; 3], [7; 7], [1; 1], [10; 10], \ldots\}$
2. Kann das geordnete Paar [0; 0] Repräsentant von z_2 oder von z_4 (↗ Frage 1.) sein?
   Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie je drei Repräsentanten für die gebrochenen Zahlen $z_5 = \frac{3}{8}$ und $z_6 = \frac{9}{2}$ an!
4. Geben Sie im folgenden jeweils mindestens eine gebrochene Zahl an, die zwischen den Zahlen des betreffenden Paares liegt!
   a) $z_7 = \frac{5}{4}$ und $z_8 = \frac{6}{5}$ c) $z_8 = \frac{6}{5}$ und $z_{11} = \frac{4}{5}$
   b) $z_9 = \frac{8}{9}$ und $z_{10} = \frac{9}{10}$ d) $z_{12} = \frac{9}{8}$ und $z_{13} = \frac{10}{9}$
5. Berechnen Sie mit Hilfe von Repräsentanten die Summe, die Differenz (wenn möglich!), das Produkt, den Quotienten von z_7 und z_8, z_9 und z_{10}, z_8 und z_{11}, z_{12} und z_{13} (↗ Frage 4.)!
6. Begründen Sie mit Hilfe der Definitionen 3 (12.3.) und 9 (12.3.), warum $z_7 > z_8$, $z_8 > z_{11}$, $z_3 > z_1$ (↗ Fragen 1. und 4.)!
7. Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit folgender Aussageformen in R^*!
   $a + 0 = a$ $\quad a \cdot 0 = 0$ $\quad a : a = 1\ (a \neq 0)$
   $a - 0 = a$ $\quad a \cdot 1 = a$ $\quad 0 : a = 0\ (a \neq 0)$
   $a - a = 0$ $\quad a : 1 = a$
8. Beweisen Sie
   das Assoziativgesetz der Addition in R^*,
   das Assoziativgesetz der Multiplikation in R^*,
   das Distributivgesetz in R^*!

13. Die rationalen Zahlen

Um die uneingeschränkte Ausführbarkeit der Division zu erreichen, haben wir im Teil C 12. eine Erweiterung des Zahlenbereiches N zum Zahlenbereich R^* vorgenommen.
Wie schon früher ausgeführt, ist es zur Lösung vieler in der Praxis auftretender quantitativer Probleme notwendig, auch uneingeschränkt **subtrahieren** zu können.
Da in den bisher behandelten Bereichen N und R^* die Forderung nach uneingeschränkter Ausführbarkeit der Subtraktion nicht erfüllt werden konnte, ist eine erneute Erweiterung des Zahlenbereichs R^* erforderlich.
Wir konstruieren „neue Zahlen“ und gehen dabei von geordneten Paaren gebrochener Zahlen aus. Diese „neuen Zahlen“ nennen wir **rationale Zahlen.**
Die dazu folgenden Ausführungen sind bewußt so dargestellt, daß Analogiebetrachtungen zur Konstruktion des Bereiches R^* jederzeit angestellt werden können.

13.1. Aufbau der Menge der rationalen Zahlen ($\boldsymbol{R}$)

DEFINITION 1 (13.1.) — **Differenzengleichheit**
Es seien $[a; b] \in R^* \times R^*$, $[c; d] \in R^* \times R^*$.
Dann nennen wir die geordneten Paare $[a; b]$, $[c; d]$ **differenzengleich** genau dann, wenn
$a + d = c + b$.

Symbolisiert: $[a; b] =_D [c; d]$ genau dann,
wenn $a + d = c + b$

BEISPIEL 1 (13.1.):

$$\left[\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right] =_D \left[\frac{4}{5};\frac{19}{20}\right], \quad \text{denn} \quad \frac{3}{5}+\frac{19}{20}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}$$

$$\left[0;\frac{2}{3}\right] =_D \left[\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right], \quad \text{denn} \quad 0+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$$

$$\left[5;\frac{7}{2}\right] =_D \left[3;\frac{3}{2}\right], \quad \text{denn} \quad 5+\frac{3}{2}=3+\frac{7}{2}$$

$$\left[\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right] \neq_D \left[\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right], \quad \text{denn} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

SATZ 1 (13.1.)
Die **Differenzengleichheit** ist eine **Äquivalenzrelation.**

Beweis:

(1) *Reflexivität:*
$[a; b] =_D [a; b]$
Diese Aussageform ist allgemeingültig wegen $a + b = a + b$ (↗ Definition 1 (13.1.) und Satz 1 (12.2.)).

(2) *Symmetrie:*
Wenn $[a; b] =_D [c; d]$, so $[c; d] =_D [a; b]$
Diese Aussageform ist allgemeingültig, denn nach Definition 1 (13.1.) folgt für die Prämisse der Implikation $a + d = c + b$ und für die Konklusion $c + b = a + d$. Wir wissen, daß die Gleichheit gebrochener Zahlen symmetrisch ist.

(3) *Transitivität:*
Wenn $[a; b] =_D [c; d]$ und $[c; d] =_D [e; f]$, so $[a; b] =_D [e; f]$
Auch diese Aussageform ist allgemeingültig. Wir gehen auf gebrochene Zahlen zurück. Es ergibt sich nach Definition 1 (13.1.):

$$a + d = c + b$$
und $\quad c + f = e + d\quad$ für die Prämisse der Implikation.

$(a + d) + (c + f) = (c + b) + (e + d)$ (nach Satz 11 (12.3.))
$(a + f) + (c + d) = (e + b) + (c + d)$ (nach Satz 2 (12.3.) und 3 (12.3.))
$a + f = e + b$ (nach Satz 11 (12.3.))
Also: $[a; b] =_D [e; f]$ (nach Definition 1 (13.1.))

Nach dem Schluß auf eine Implikation ist damit die Transitivität der Relation „Differenzengleichheit" bewiesen.

Wie bekannt ist, bewirkt jede **Äquivalenzrelation** in einer Menge eine **Klasseneinteilung** dieser Menge. Die als **Differenzengleichheit** gekennzeichnete Äquivalenzrelation bewirkt eine Klasseneinteilung in der Menge aller geordneten Paare gebrochener Zahlen.

DEFINITION 2 (13.1.) — **Rationale Zahlen**
Jede Klasse differenzengleicher geordneter Paare gebrochener Zahlen nennen wir eine **rationale Zahl.**
Die Menge aller dieser Klassen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{R}$.

BEISPIEL 2 (13.1.):

$$r_1 = \left\{ \left[\frac{11}{15}; \frac{2}{5}\right], \left[\frac{13}{12}; \frac{3}{4}\right], \left[1; \frac{2}{3}\right], \left[\frac{7}{3}; 2\right], \ldots \right\}$$

$$r_2 = \left\{ \left[\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right], \left[4; 4\right], \left[\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right], \left[\frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right], \ldots \right\}$$

$$r_3 = \left\{ \left[\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right], \left[3; \frac{9}{2}\right], \left[\frac{7}{2}; 5\right], \ldots \right\}$$

Der Leser überzeuge sich selbst, daß es sich bei r_1, r_2, r_3 im Beispiel 2 (13.1.) um Klassen differenzengleicher geordneter Paare handelt.

DEFINITION 3 (13.1.) — **Positive und negative rationale Zahlen, die rationale Zahl Null**

Es sei $[a; b] \in R^* \times R^*$ ein beliebiger Repräsentant von $r \in R$.
Dann nennen wir
(1) r eine **positive rationale Zahl** genau dann, wenn $a > b$;
(2) r eine **negative rationale Zahl** genau dann, wenn $a < b$;
(3) $r = 0$ **(Null)** genau dann, wenn $a = b$.

Man beachte, daß im Bereich R das Zeichen „0" nicht ein und dasselbe wie in den Bereichen R^* bzw. N bedeutet.
„0" ist hier das Zeichen für die *rationale Zahl* Null.

Neben „0" als Zeichen für die rationale Zahl „Null" müssen wir nun noch **Zeichen für positive bzw. negative rationale Zahlen** einführen. Dabei überlegen wir uns, daß jede positive rationale Zahl einen Repräsentanten der Form $[z; 0]$ besitzt, jede negative rationale Zahl einen Repräsentanten $[0; z]$.

Begründung:
Es sei $[a; b]$ ein beliebiger Repräsentant von r und $a > b$ (r sei also positiv). Dann ist auch $[z; 0] = [a - b; 0]$ Repräsentant von r, denn $[a; b] =_D [a - b; 0]$ wegen $a + 0 = a - b + b$ nach Definition 1 (13.1.).
Es sei $[a; b]$ ein beliebiger Repräsentant von r und $a < b$ (r sei also negativ). Dann ist auch $[0; z] = [0; b - a]$ Repräsentant von r, denn $[a; b] =_D [0; b - a]$ wegen $a + b - a = 0 + b$ nach Definition 1 (13.1.).
Ausgehend von diesen Überlegungen definieren wir nun wie folgt.

DEFINITION 4 (13.1.) — **Zahlzeichen für rationale Zahlen**

Es sei r eine positive rationale Zahl und $[z; 0]$ ein Repräsentant von r.
Dann bezeichnen wir r durch das **Symbol „$+z$"** (plus z).
Es sei r eine negative rationale Zahl und $[0; z]$ ein Repräsentant von r.
Dann bezeichnen wir r durch das **Symbol „$-z$"** (minus z).

Entsprechend unseren Vorüberlegungen zu Definition 4 (13.1.) finden wir z, indem wir von einem beliebigen Repräsentanten $[a; b]$ von r ausgehend die Differenz $a - b$ (für positive rationale Zahlen) bzw. $b - a$ (für negative rationale Zahlen) berechnen.

BEISPIEL 3 (13.1.):
Wir verwenden die rationalen Zahlen aus Beispiel 2 (13.1.).

$$\left[\frac{11}{15}; \frac{2}{5}\right] \text{ ist Repräsentant von } r_1.$$

$$\frac{11}{15} > \frac{2}{5}$$

Also ist

$$\left[\frac{11}{15} - \frac{2}{5}; 0\right] = \left[\frac{1}{3}; 0\right] \text{ Repräsentant von } r_1.$$

Deshalb schreiben wir: $r_1 = +\frac{1}{3}$.

$$\left[\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \text{ ist Repräsentant von } r_2.$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Also schreiben wir: $r_2 = 0$.

$$\left[\frac{7}{2}; 5\right] \text{ ist Repräsentant von } r_3.$$

$$\frac{7}{2} < 5$$

Also ist

$$\left[0; 5 - \frac{7}{2}\right] = \left[0; \frac{3}{2}\right] \text{ Repräsentant von } r_3.$$

Deshalb schreiben wir: $r_3 = -\frac{3}{2}$.

13.2. Ordnung in R

Wir befassen uns mit der **Gleichheit rationaler Zahlen.**

Nach Definition 2 (13.1.) sind rationale Zahlen Klassen, wobei die in Definition 1 (13.1.) erklärte Differenzengleichheit die die Klasseneinteilung bestimmende Äquivalenzrelation ist.
Damit ergibt sich aus dem Hauptsatz über Äquivalenzrelationen (↗ Satz 2 (10.4.)) der Satz 1 (13.2.).

SATZ 1 (13.2.)
Zwei rationale Zahlen r_1, r_2 sind einander gleich ($r_1 = r_2$) genau dann, wenn es einen Repräsentanten $[a; b]$ von r_1 und einen Repräsentanten $[c; d]$ von r_2 gibt, für die $[a; b] =_D [c; d]$ gilt.

DEFINITION 1 (13.2.) — **Kleiner-Relation in R**
Es seien $r_1, r_2 \in R$; $n, m \in R^* \setminus \{0\}$.
Dann nennen wir $r_1 \underset{R}{<} r_2$ genau dann, wenn

(1) $r_1 = +n$ und $r_2 = +m$ und $n < m$ oder
(2) $r_1 = 0$ und $r_2 = +m$ oder
(3) $r_1 = -n$ und $r_2 = 0$ oder
(4) $r_1 = -n$ und $r_2 = -m$ und $n > m$ oder
(5) $r_1 = -n$ und $r_2 = +m$.

Bemerkung:
Das Zeichen „$\underset{R}{<}$" wird gelesen „ist kleiner als" (entsprechend „$\underset{R}{>}$" „ist größer als").
Durch den Index R nehmen wir eine Abgrenzung gegenüber dem Zeichen „$<$" („$>$") vor, das die Kleiner-Relationen in R^* bzw. in N bezeichnet. Das ist notwendig, da die hier definierte Kleiner-Relation nicht ohne weiteres mit der Kleiner-Relation z. B. für gebrochene Zahlen identifiziert werden kann (↗ Definition 1 (12.2.)).

SATZ 2 (13.2.)
Die in Definition 1 (13.2.) erklärte Relation ist eine **irreflexive Ordnungsrelation.**

Ein *Beweis* des Satzes 2 (13.2.) soll hier nicht angegeben werden.

Es müßte nachgewiesen werden, daß die Kleiner-Relation für rationale Zahlen *irreflexiv*, *transitiv* und *konnex* ist.
Die Wahrheit dieser Aussagen ergibt sich aus Definition 1 (13.2.). Es sind dabei entsprechend Definition 1 (13.2.) Fallunterscheidungen vorzunehmen.

Durch die als irreflexive Ordnungsrelation charakterisierte Kleiner-Relation wird eine **Ordnung in der Menge der rationalen Zahlen** angegeben. Man erhält die geordnete Menge $[R; \underset{R}{<}]$.
Für diese geordnete Menge gilt der Satz 3 (13.2.).

SATZ 3 (13.2.)
Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht.

Beweis:
Es seien $r_1, r_2 \in R$; $[a; b]$ ein Repräsentant von r_1;
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2;
$r_1 \underset{R}{<} r_2$.

Für die weiteren Betrachtungen sind entsprechend Definition 1 (13.2.) Fallunterscheidungen erforderlich. Wir numerieren diese Fälle wie in Definition 1 (13.2.).

(1) r_1 und r_2 seien positiv.
Dann ist $a > b$ und $c > d$ nach Definition 3 (13.1.).
Wegen $r_1 \underset{R}{<} r_2$ muß dann gelten:
$a - b < c - d$ nach den Definitionen 1 (13.2.) und 3 (13.1.).

Es sei nun r_3 die Klasse aller Paare, die mit $\left[\frac{a+c}{2}; \frac{b+d}{2}\right]$ differenzengleich sind. r_3 ist also das arithmetische Mittel von r_1 und r_2 (↗ Teil 13.3.).
Wir zeigen:

$$r_1 \underset{R}{<} r_3 \underset{R}{<} r_2, \quad \text{also} \quad r_1 \underset{R}{<} r_3 \quad \text{und} \quad r_3 \underset{R}{<} r_2.$$

Es ist $r_1 \underset{R}{<} r_3$, denn $a - b < c - d$. (nach Voraussetzung)

$2a - 2b < c - d + (a - b)$ (nach Satz 11 (12.3.))

$2(a - b) < a + c - b - d$ (nach Satz 8 (12.3.))

$a - b < \frac{a + c - b - d}{2}$ (nach Satz 12 (12.3.))

$a - b < \frac{a + c}{2} - \frac{b + d}{2}$ (nach Definition 4 (12.3.))

Wir zeigen weiter, daß auch $r_3 \underset{R}{<} r_2$ ist.

$a - b < c - d$ (nach Voraussetzung)

$a - b + (c - d) < 2c - 2d$ (nach Satz 11 (12.3.))

$a + c - b - d < 2(c - d)$ (nach Satz 8 (12.3.))

$\frac{a + c - b - d}{2} < c - d$ (nach Satz 12 (12.3.))

$\frac{a + c}{2} - \frac{b + d}{2} < c - d$ (nach Definition 4 (12.3.))

Für Fall (1) ist also gezeigt, daß es eine Zahl $r_3 \in R$ gibt, die zwischen r_1 und r_2 liegt. Diese Zahl r_3 hat dann das geordnete Paar $\left[\frac{a+c}{2}; \frac{b+d}{2}\right]$ als Repräsentanten.

Die Fälle (2) bis (5) lassen sich analog beweisen. Eine ausführliche Darstellung sei dem Leser selbst überlassen.

Wir betrachten nunmehr das Problem der möglichen **Einordnung des Bereichs der gebrochenen Zahlen in den Bereich der rationalen Zahlen.**

SATZ 4 (13.2.)

Es sei R_1 die Menge, die alle nicht negativen rationalen Zahlen enthält; $R_1 \subset R$.
Dann ist R_1 isomorph R^* bezüglich der in beiden Mengen definierten Kleiner-Relation.

Beweis:
Zum Beweis des Satzes 4 (13.2.) ist

(1) die *Existenz* einer eineindeutigen Abbildung von R_1 auf R^*,
(2) die *Relationstreue* dieser Abbildung bezüglich der in beiden Mengen erklärten Kleiner-Relation

zu zeigen.

Zu (1): Es sei f diejenige Abbildung von R_1 auf R^*, die jedem Element $+z \in R_1$ das Element $z \in R^*$ zuordnet, d. h., es sei $f(+z) =_{\text{Def}} z$.
Dann ist f eine eineindeutige Abbildung.

Zu (2): Es ist zu zeigen:
Wenn $+z_1 \underset{R}{<} +z_2$, so ist $f(+z_1) < f(+z_2)$.

Es sei nun $+z_1 \underset{R}{<} +z_2$.

Dann ist $z_1 < z_2$ nach Definition 1 (13.2.) (1).

Wegen $f(+z_1) = z_1$ und $f(+z_2) = z_2$ gilt dann aber auch

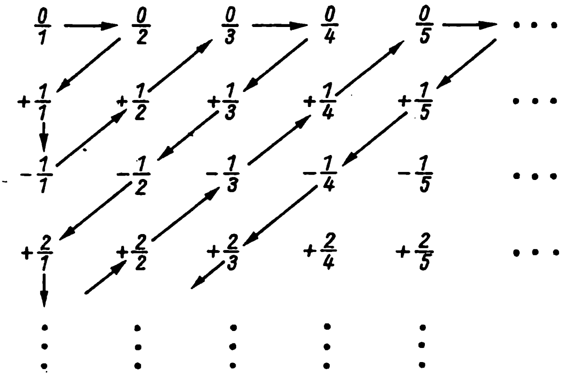
$f(+z_1) < f(+z_2)$.

Die Isomorphie der genannten Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen zur Menge der gebrochenen Zahlen bezüglich der in beiden Mengen erklärten Kleiner-Relation berechtigt zu der Feststellung, daß sich beide Mengen hinsichtlich dieser Relationen analog verhalten.
Das heißt: Zu jeder Aussage H über gebrochene Zahlen, in der die Kleiner-Relation als einzige Relation vorkommt und sonst keine Operation, gibt es eine entsprechende Aussage H′ über rationale Zahlen.
Dabei gilt:
H ist wahr genau dann, wenn H′ wahr ist.

Wir nutzen diese Erkenntnis zu einer **Vereinfachung der Symbolik.**
In Zukunft unterscheiden wir nicht mehr zwischen „$\underset{R}{<}$" für die Kleiner-Relation in R und „$\underset{R^*}{<}$" bzw. „$<$" für die Kleiner-Relation in R^*. Wir verwenden in jedem Falle das Zeichen „$<$".
Wie schon für den Bereich der gebrochenen Zahlen wollen wir auch für den Bereich der rationalen Zahlen den Satz 5 (13.2.) beweisen.

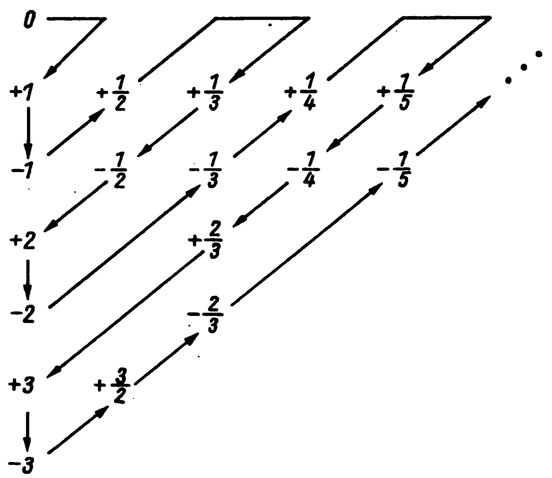
SATZ 5 (13.2.)
Die Menge der rationalen Zahlen (R) ist **abzählbar.**

Beweis:
Wir zeigen die Gleichmächtigkeit von R und N.
Dazu konstruieren wir eine eineindeutige Abbildung von R auf N.
Wir ordnen zunächst die Menge aller Repräsentanten aller rationalen Zahlen nach dem im Bild 284/1 dargestellten Prinzip.



284/1

Aus dieser geordneten Menge wählen wir je einen Repräsentanten für jede rationale Zahl aus, indem wir immer genau den in der angegebenen Reihenfolge zuerst auftretenden Repräsentanten einer rationalen Zahl verwenden und alle weiteren differenzengleichen Repräsentanten streichen. Diese so ausgewählten Repräsentanten ersetzen wir durch die zugehörige rationale Zahl. Damit erhalten wir die im Bild 285/1 dargestellte Menge der rationalen Zahlen.



285/1

Die so geordnete Menge der rationalen Zahlen bilden wir analog zur Darstellung auf Seite 259 auf die Menge der natürlichen Zahlen ab, die wir zu diesem Zwecke durch die in N erklärte Kleiner-Relation ordnen.

Also: $0 \leftrightarrow 0;\ +1 \leftrightarrow 1;\ -1 \leftrightarrow 2;\ +\frac{1}{2} \leftrightarrow 3;\ +\frac{1}{3} \leftrightarrow 4;$

$-\frac{1}{2} \leftrightarrow 5;\ +2 \leftrightarrow 6;\ -2 \leftrightarrow 7;\ -\frac{1}{3} \leftrightarrow 8;\ +\frac{1}{4} \leftrightarrow 9;$

$+\frac{1}{5} \leftrightarrow 10; \ldots$

Damit ist die Abbildung eineindeutig und erfaßt alle Elemente von R und von N.

13.3. Operationen in *R*

DEFINITION 1 (13.3.) — **Summe rationaler Zahlen**
Es seien r_1 und r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von r_1 und
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.
Dann nennen wir $r_1 +_R r_2$ die Summe von r_1 und r_2 genau dann, wenn
$[a + c; b + d]$ ein Repräsentant von $r_1 +_R r_2$ ist.

Bemerkungen:
Das für die Summe rationaler Zahlen verwendete Zeichen „$+_R$" soll diese von der Summe natürlicher Zahlen bzw. gebrochener Zahlen (Zeichen „$+$" bzw. „$+_{R^*}$") unterscheiden. Denn es kann nicht von vornherein angenommen werden, daß z. B. die Summe gebrochener Zahlen mit der Summe rationaler Zahlen (im Sinne des Permanenzprinzips) übereinstimmt.

SATZ 1 (13.3.) — **Summe rationaler Zahlen**
Die in Definition 1 (13.3.) definierte Summe existiert und ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

(1) *Existenz der Summe*

Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.
Dann ist

$$[a + c; b + d] \in R^* \times R^*$$

wegen

$$a + c \in R^* \qquad \text{und} \qquad b + d \in R^* .$$

Die zu $[a + c; b + d]$ gehörende Klasse ist dann nach Definition 1 (13.3.) Summe von r_1 und r_2.
Es existiert also zu beliebig vorgegebenen $r_1, r_2 \in R$ ein $r_3 \in R$ mit

$$r_1 +_R r_2 = r_3 .$$

(2) *Eindeutigkeit der Summe*

Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ und $[a'; b']$ Repräsentanten von r_1,
$[c; d]$ und $[c'; d']$ Repräsentanten von r_2.
Nach Definition 1 (13.3.) sind dann $[a + c; b + d]$ und $[a' + c'; b' + d']$ Repräsentanten von $r_1 +_R r_2$.
Zu zeigen ist, daß $[a + c; b + d]$ und $[a' + c'; b' + d']$ Repräsentanten aus ein und derselben Klasse, also ein und derselben rationalen Zahl sind. Das ist nach Definition 2 (13.1.) genau dann der Fall, wenn

$$[a + c; b + d] =_D [a' + c'; b' + d'] ,$$

d. h.: $a + c + b' + d' = a' + c' + b + d$ (nach Definition 1 (13.1.))
$a + b' + c + d' = a' + b + c' + d)$ (*) (nach Satz 2 (12.3.))

Nun gilt nach Voraussetzung und Definition 2 (13.1.):

$$\begin{array}{lcl} [a; b] & =_D & [a'; b'] \\ \underline{[c; d]} & \underline{=_D} & \underline{[c'; d']} \\ a + b' & = & a' + b \\ c + d' & = & c' + d \end{array}$$

Durch Addition ergibt sich

$$a + b' + c + d' = a' + b + c' + d \text{ (nach Definition 1 (13.1.)) } (\nearrow (*)),$$

q. e. d.

DEFINITION 2 (13.3.) — Addition in R
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R \times R$ in R **Addition in R** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[r_1; r_2]$ zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 ihre Summe $r_1 +_R r_2$ zuordnet.

BEISPIEL 1 (13.3.):
Zu ermitteln ist die Summe der beiden rationalen Zahlen $-\frac{1}{6}$ und $+\frac{1}{4}$.

$$\left(-\frac{1}{6}\right) +_R \left(+\frac{1}{4}\right) = r_3$$

$\left[0; \frac{1}{6}\right]$ ist Repräsentant von $-\frac{1}{6}$.

$\left[\frac{1}{4}; 0\right]$ ist Repräsentant von $+\frac{1}{4}$.

Wir ermitteln die Summe von $-\frac{1}{6}$ und $+\frac{1}{4}$ mit Hilfe dieser Repräsentanten nach Definition 1 (13.3.).

Dann gilt: $\left[0+\frac{1}{4}\,;\frac{1}{6}+0\right]=\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{6}\right]=_D\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\,;0\right]=\left[\frac{1}{12}\,;0\right]$ ist Repräsentant von r_3.

Nach Definition 4 (13.1.) ist dann $r_3 = +\frac{1}{12}$.

Also gilt: $\left(-\frac{1}{6}\right) +_R \left(+\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{12}$.

SATZ 2 (13.3.) — Kommutativgesetz der Addition in R
Für alle rationalen Zahlen r_1, r_2 gilt:
$r_1 +_R r_2 = r_2 +_R r_1$.

Beweis:
Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.
Dann ist nach Definition 1 (13.3.) $[a + c; b + d]$ ein Repräsentant von $r_1 +_R r_2$ und $[c + a; d + b]$ ein Repräsentant von $r_2 +_R r_1$.
Nun gilt aber:

$$[a + c; b + d] = [c + a; d + b] \text{ (nach Satz 2 (12.3.))}.$$

Also ist $r_1 +_R r_2 = r_2 +_R r_1$.

SATZ 3 (13.3.) — Assoziativgesetz der Addition in R
Für alle rationalen Zahlen r_1, r_2, r_3 gilt:
$r_1 +_R (r_2 +_R r_3) = (r_1 +_R r_2) +_R r_3$.

Den *Beweis* des Satzes 3 (13.3.) führe der Leser selber.

DEFINITION 3 (13.3.) — Differenz rationaler Zahlen
r_3 nennen wir die **Differenz** zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 genau dann, wenn
$r_1 = r_2 +_R r_3$.
Wir schreiben dann auch:
$r_3 = r_1 -_R r_2$.

Bemerkung:
Wie im Bereich der gebrochenen Zahlen definieren wir also auch hier die Differenz rationaler Zahlen mit Hilfe der für den Bereich R bereits definierten Addition. Es geht darum, zu einer vorgegebenem Summe zweier Summanden (r_1) einen Summanden (r_3) zu ermitteln, wenn der andere Summand (r_2) ebenfalls vorgegeben ist.

SATZ 4 (13.3.) — Differenz rationaler Zahlen
Die in Definition 3 (13.3.) definierte Differenz existiert und ist eindeutig bestimmt.

Im Satz 4 (13.3.) interessiert in erster Linie die Behauptung der **uneingeschränkten Bestimmbarkeit**, der **Existenz der Differenz rationaler Zahlen.** Wir hatten ja gerade diesen Sachverhalt als Motiv für die Notwendigkeit der Konstruktion des Bereiches der rationalen Zahlen angegeben.

Wir beweisen also die *Existenz* von $r_1 -_R r_2$ zu vorgegebenen $r_1, r_2 \in R$.

Beweis:

Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen.

Behauptet wird:

$$\exists\, r_3(r_3 \in R \wedge r_1 = r_2 +_R r_3) \quad (\nearrow \text{Definition 3 (13.3.)}).$$

Nun seien $[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2,
$[e; f]$ ein Repräsentant von r_3.

Nach Definition 3 (13.3.) entspricht dann unsere Behauptung der folgenden Aussage.

Es gibt ein Paar

$$[e; f] \quad \text{mit} \quad e, f \in R^* \quad \text{und} \quad [a; b] =_D [c + e; d + f].$$

Wir gehen von einer Konstruktion aus.

Es sei $e = a + d$, $f = b + c$.

Dann gilt: $[e; f] =_D [a + d; b + c]$,

das heißt:

$$\begin{aligned}
e + (b + c) &= (a + d) + f && \text{(nach Definition 1 (13.1.))}\\
(b + c) + e &= (a + d) + f && \text{(nach Satz 2 (12.3.))}\\
b + (c + e) &= a + (d + f) && \text{(nach Satz 3 (12.3.))}\\
(c + e) + b &= a + (d + f) && \text{(nach Satz 2 (12.3.))}\\
[c + e; d + f] &=_D [a; b] && \text{(nach Definition 1 (13.1.))}
\end{aligned}$$

Damit ist die *Existenz* eines solchen geforderten Paares $[e; f]$ — nämlich $[e; f] =_D [a + d; b + c]$ — gezeigt.

Also ist r_3 eine rationale Zahl, q. e. d.

Um den Beweis des Satzes 4 (13.3.) vollständig zu führen, müßte noch die *eindeutige Bestimmtheit* der Differenz nachgewiesen werden. Darauf verzichten wir.

DEFINITION 4 (13.3.) — **Subtraktion in *R***

Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R \times R$ in R **Subtraktion in *R*** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[r_1, r_2]$ zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 ihre Differenz $r_1 -_R r_2$ zuordnet.

Damit wird auch die **Subtraktion rationaler Zahlen als Umkehroperation zur Addition rationaler Zahlen** definiert, wie das auch bei der Subtraktion in den Bereichen N und R^* geschah.

BEISPIEL 2 (13.3.):

Wir wollen berechnen:

$$r_3 = \left(+\frac{3}{5}\right) -_R \left(-\frac{1}{4}\right).$$

Diese Differenz berechnen wir nach Definition 3 (13.3.), indem wir auf die Addition rationaler Zahlen zurückgehen:

$$\left(+\frac{3}{5}\right) = \left(+\frac{1}{4}\right) +_R r_3.$$

$\left[\frac{3}{5}; 0\right]$ ist Repräsentant von $+\frac{3}{5}$,

$\left[0; \frac{1}{4}\right]$ ist Repräsentant von $-\frac{1}{4}$ (↗ Definition 4 (13.1.)).
$[a; b]$ sei ein beliebiger Repräsentant von r_3.
Dann muß gelten:

$$\left[\frac{3}{5}; 0\right] =_D \left[0 + a; \frac{1}{4} + b\right] \qquad \text{(nach Definition 1 (13.3.) und Satz 1 (13.2.))}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + b = a + 0 + 0 \qquad \text{(nach Definition 1 (13.1.) und Satz 2 (12.3.))}$$

$$\frac{17}{20} + b = a + 0$$

$$\left[\frac{17}{20}; 0\right] =_D [a; b] \qquad \text{(nach Definition 1 (13.1.))}$$

Damit ist $\left[\frac{17}{20}; 0\right]$ nach Definition 2 (13.1.) und Voraussetzung ein Repräsentant von r_3.

Nach Definition 4 (13.1.) ist dann $r_3 = +\frac{17}{20}$.

Also gilt: $\left(+\frac{3}{5}\right) -_R \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{17}{20}$.

DEFINITION 5 (13.3.) — **Produkt rationaler Zahlen**
Es seien r_1 und r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.
Dann nennen wir $r_1 \cdot_R r_2$ das **Produkt** von r_1 und r_2 genau dann, wenn $[a\,c + b\,d; a\,d + c\,b]$ ein Repräsentant von $r_1 \cdot_R r_2$ ist.

SATZ 5 (13.3.) — **Produkt rationaler Zahlen**
Das in Definition 5 (13.3.) definierte **Produkt existiert** und ist **eindeutig bestimmt**.

Beweis:

(1) *Existenz des Produktes*
Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.
Dann ist nach Definition 5 (13.3.) $[a\,c + b\,d; a\,d + c\,b]$ ein Repräsentant von $r_1 \cdot_R r_2$. Nach Satz 5 (12.3.) und Satz 1 (12.3) ist $[a\,c + b\,d; a\,d + c\,b] \in R^* \times R^*$.
Daraus folgt nach Definition 2 (13.1.), daß $r_1 \cdot_R r_2 \in R$.

(2) *Eindeutigkeit des Produktes*
Es seien r_1, r_2 rationale Zahlen,
$[a; b]$ und $[a'; b']$ Repräsentanten von r_1,
$[c; d]$ und $[c'; d']$ Repräsentanten von r_2.
Dann muß gelten:

$$\begin{array}{ll} [a; b] =_D [a'; b'] & \\ [c; d] =_D [c'; d'] & \text{(nach Definition 2 (13.1.))} \\ \hline a + b' = a' + b \quad \text{(I)} & \\ c + d' = c' + d \quad \text{(II)} & \text{(nach Definition 1 (13.1.))} \end{array}$$

Wir zeigen, daß
$$[a\,c + b\,d;\; a\,d + c\,b] =_D [a'\,c' + b'\,d';\; a'\,d' + c'\,b'],$$
d. h., daß wir unabhängig von den Repräsentanten der Zahlen r_1 bzw. r_2 ein und dieselbe rationale Zahl r_3 als Produkt von r_1 und r_2 erhalten. Wenn nämlich diese Differenzengleichheit gilt, so sind nach Definition 2 (13.1.) beide geordnete Paare Repräsentanten von r_3.
Genau dann, wenn gelten soll:
$$[a\,c + b\,d;\; a\,d + c\,b] =_D [a'\,c' + b'\,d';\; a'\,d' + c'\,b'],$$
muß gelten:
$$a\,c + b\,d + a'\,d' + c'\,b' = a'\,c' + b'\,d' + a\,d + c\,b \quad (*)$$
(nach Definition 1 (13.1.)).
Es bleibt nachzuweisen, daß diese Aussageform allgemeingültig ist. Durch weitere Umwandlungen in äquivalente Aussageformen vergewissern wir uns davon. Wir addieren auf beiden Seiten der Gleichung aus Zweckmäßigkeitsgründen $a'\,c + b\,c' + b'\,c + a\,c'$. Dazu sind wir entsprechend unserer Feststellung über die Monotonie der Addition bezüglich der Gleichheitsrelation in R^* berechtigt.
Also:
$$a\,c + b\,d + a'\,d' + c'\,b' + a'\,c + b\,c' + b'\,c + a\,c'$$
$$= a'\,c' + b'\,d' + a\,d + c\,b + a'\,c + b\,c' + b'\,c + a\,c'$$
$$a\,(c + c') + b'\,(c + c') + b\,d + a'\,d' + a'\,c + b\,c'$$
$$= a'\,(c + c') + b\,(c + c') + b'\,c + a\,c' + a\,d + b'\,d'$$
(nach den Sätzen 2 (12.3.), 6 (12.3.), 8 (12.3.))
$$(a + b')\,(c + c') + b\,d + a'\,d' + a'\,c + b\,c'$$
$$= (a' + b)\,(c + c') + b'\,c + a\,c' + a\,d + b'\,d'$$
(nach Satz 8 (12.3.))
$$(a + b')\,(c + c') + b\,d + a'\,d' + a'\,c + b\,c'$$
$$= (a + b')\,(c + c') + b'\,c + a\,c' + a\,d + b'\,d'$$
(nach (I))
$$b\,d + a'\,d' + a'\,c + b\,c' = b'\,c + a\,c' + a\,d + b'\,d'$$
(nach Satz 11 (12.3.))
$$a'\,(d' + c) + b\,(d + c') = b'\,(c + d') + a\,(c' + d)$$
(nach Satz 2 (12.3) und Satz 8 (12.3.))
$$a'\,(d' + c) + b\,(d' + c) = b'\,(c + d') + a\,(c + d')$$
(nach (II))
$$(a' + b)\,(d' + c) = (b' + a)\,(c + d')$$
(nach Satz 8 (12.3.))
$$(a' + b)\,(d' + c) = (a' + b)\,(d' + c)$$
(nach (I), (II) und Satz 2 (12.3.))

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Aussageform (*) nachgewiesen, denn die durch die Umformungen erhaltene letzte Gleichung besitzt diese Eigenschaft auf Grund der Reflexivität der Gleichheit gebrochener Zahlen.

DEFINITION 6 (13.3.) — **Multiplikation in R**
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R \times R$ in R **Multiplikation in R** genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[r_1; r_2]$ zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 ihr Produkt $r_1 \cdot_R r_2$ zuordnet.

BEISPIEL 3 (13.3.):

Zu ermitteln ist das Produkt der beiden rationalen Zahlen $+\frac{5}{3}$ und $-\frac{6}{25}$.

$$\left(+\frac{5}{3}\right)\cdot_R\left(-\frac{6}{25}\right)=r_3$$

$\left[\frac{5}{3}; 0\right]$ ist ein Repräsentant von $+\frac{5}{3}$,

$\left[0; \frac{6}{25}\right]$ ist ein Repräsentant von $-\frac{6}{25}$ (↗ Definition 4 (13.1.)).

Wir ermitteln das Produkt von $+\frac{5}{3}$ und $-\frac{6}{25}$ nach Definition 5 (13.3.) mit Hilfe von Repräsentanten.

Dann gilt:

$$\left[\frac{5}{3}\cdot 0+0\cdot\frac{6}{25}; \frac{5}{3}\cdot\frac{6}{25}+0\cdot 0\right]=\left[0; \frac{2}{5}\right]$$

ist ein Repräsentant von r_3.

Nach Definition 4 (13.1.) ist dann $r_3 = -\frac{2}{5}$.

Also gilt: $\left(+\frac{5}{3}\right)\cdot_R\left(-\frac{6}{25}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)$.

SATZ 6 (13.3.) — **Kommutativgesetz der Multiplikation in *R***

Für alle rationalen Zahlen r_1, r_2 gilt:

$r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1$.

Beweis:

Wir betrachten rationale Zahlen r_1, r_2.

Es sei $[a; b]$ ein Repräsentant von r_1,
$[c; d]$ ein Repräsentant von r_2.

Dann ist $[a c + b d; a d + c b]$ Repräsentant von $r_1 \cdot_R r_2$;
$[c a + d b; d a + b c]$ Repräsentant von $r_2 \cdot_R r_1$ (nach Definition 5 (13.3.)).

Nun gilt: $[a c + b d; a d + c b] = [c a + d b; d a + b c]$ (nach Satz 6 (12.3.)).

Also gilt: $r_1 \cdot_R r_2 = r_2 \cdot_R r_1$ (nach Satz 1 (13.2.)).

SATZ 7 (13.3.) — **Assoziativgesetz der Multiplikation in *R***

Für alle $r_1, r_2, r_3 \in R$ gilt:

$r_1 \cdot_R (r_2 \cdot_R r_3) = (r_1 \cdot_R r_2) \cdot_R r_3$.

Den *Beweis* des Satzes 7 (13.3.) führe der Leser selber.

SATZ 8 (13.3.) — **Distributivgesetz in *R***

Für alle $r_1, r_2, r_3 \in R$ gilt:

$r_1 \cdot_R (r_2 +_R r_3) = r_1 \cdot_R r_2 +_R r_1 \cdot_R r_3$.

Den *Beweis* des Satzes 8 (13.3.) führe der Leser selber.

Bemerkung:
Es läßt sich auch hier nicht nur die im Satz 8 (13.3.) ausgesprochene *linksseitige Distributivität*, sondern auch die *rechtsseitige Distributivität* beweisen. Davon ausgehend unterlassen wir eine Unterscheidung beider Formen und sprechen nur vom **Distributivgesetz.**

DEFINITION 7 (13.3.) — **Quotient rationaler Zahlen**
r_3 nennen wir den **Quotienten** zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 $(r_2 \neq 0)$ genau dann, wenn
$r_1 = r_2 \cdot_R r_3$.
Wir schreiben auch: $r_3 = r_1 :_R r_2$.

Der Quotient wird also mit Hilfe einer in R bereits bekannten Operation, in diesem Falle mit Hilfe der Multiplikation, definiert. Es geht darum, zu einem vorgegebenen Produkt zweier Zahlen einen Faktor zu ermitteln, wenn der andere Faktor ebenfalls vorgegeben ist.

SATZ 9 (13.3.) — **Quotient rationaler Zahlen**
Der in Definition 7 (13.3.) definierte **Quotient** $r_1 :_R r_2$ $(r_2 \neq 0)$ **existiert** und ist **eindeutig bestimmt.**

Auf einen *Beweis* des Satzes 9 (13.3.) verzichten wir.

DEFINITION 8 (13.3.) — **Division in** $\boldsymbol{R}$
Wir nennen die eindeutige Abbildung von $R \times (R \setminus \{0\})$ in R **Division in** $\boldsymbol{R}$ genau dann, wenn sie jedem geordneten Paar $[r_1; r_2]$ zweier rationaler Zahlen r_1 und r_2 $(r_2 \neq 0)$ ihren Quotienten $r_1 :_R r_2$ zuordnet.

Die **Division** bezeichnet man auch als **Umkehroperation zur Multiplikation** (↗ Definition 7 (13.3.)). Diese Tatsache drückt man durch die Gleichung

$$(r_1 :_R r_2) \cdot_R r_2 = r_1$$

aus, deren Richtigkeit unmittelbar aus Definition 7 (13.3.) folgt.

BEISPIEL 4 (13.3.):

Gesucht ist der Quotient der rationalen Zahlen $\left(-\frac{3}{4}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) :_R \left(-\frac{1}{2}\right) = r_3$$

Diesen Quotienten berechnen wir nach Definition 7 (13.3.), indem wir auf die Multiplikation rationaler Zahlen zurückgehen.

$$\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot_R r_3$$

Wir betrachten Repräsentanten.

$\left[0; \frac{3}{4}\right]$ ist ein Repräsentant von $-\frac{3}{4}$,

$\left[0; \frac{1}{2}\right]$ ist ein Repräsentant von $-\frac{1}{2}$ (nach Definition 4 (13.1.)).

$[a; b]$ sei ein beliebiger Repräsentant von r_3.

$$\left[0; \frac{3}{4}\right] =_D \left[0 \cdot a + \frac{1}{2} b; 0 \cdot b + a \cdot \frac{1}{2}\right] \quad \text{(nach Definition 5 (13.3.))}$$

$$0 + 0 + \frac{1}{2} a = 0 + \frac{1}{2} b + \frac{3}{4} \quad \text{(nach Definition 1 (13.1.))}$$

$$a = b + \frac{3}{2} \quad \text{(nach Satz 11 (12.3.))}$$

$$a + 0 = \frac{3}{2} + b \quad \text{(nach Satz 12 (12.3.))}$$

$$[a; b] =_D \left[\frac{3}{2}; 0\right] \quad \text{(nach Definition 1 (13.1.))}$$

Neben $[a; b]$ ist also auch $\left[\frac{3}{2}; 0\right]$ Repräsentant von r_3.

Nach Definition 4 (13.1.) ist dann $r_3 = +\frac{3}{2}$.

Also: $\left(-\frac{3}{4}\right) :_R \left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{3}{2}$.

Wir haben festgestellt, daß im Bereich der rationalen Zahlen alle vier Grundoperationen uneingeschränkt (Ausnahme: Division durch Null) ausführbar sind und daß die Lösungen entsprechender Aufgaben eindeutig bestimmt sind. Die rationalen Zahlen leisten also mehr als die natürlichen bzw. gebrochenen Zahlen.
Alle bisherigen Feststellungen zu den Operationen im Bereich der rationalen Zahlen sind geeignet, Analogiebetrachtungen zu Feststellungen über die Rechenoperationen im Bereich der gebrochenen Zahlen bzw. der natürlichen Zahlen anzustellen. Auf der Grundlage der bisherigen Betrachtungen zu den rationalen Zahlen ist es möglich, die Isomorphie einer echten Teilmenge der Menge der rationalen Zahlen (↗ Satz 4 (13.2.)) zur Menge der gebrochenen Zahlen bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division nachzuweisen. Auf Grund dieser Isomorphie brauchen wir nicht mehr streng zwischen gebrochenen Zahlen und nicht negativen rationalen Zahlen zu unterscheiden, da für beide Zahlenarten die gleichen Rechengesetze gelten.
Mit anderen Worten: Die rationalen Zahlen verhalten sich bezüglich der Grundrechenoperationen analog zu den gebrochenen Zahlen. In Anwendung des früher schon erwähnten Permanenzprinzips können wir für die folgenden Betrachtungen vereinbaren, auf eine Unterscheidung der Additionszeichen für die Addition gebrochener Zahlen bzw. für die Addition rationaler Zahlen zu verzichten. Analog gilt das auch für die anderen Grundrechenoperationen.
Wir verwenden also die Zeichen „+“, „−“, „·“, „:“ auch für die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division rationaler Zahlen.

DEFINITION 9 (13.3.) — **Betrag einer rationalen Zahl**
Es sei $r \in R$, $[a; b]$ ein beliebiger Repräsentant von r.
Der Betrag $|r|$ wird wie folgt definiert.

(1) $|r| = +(a - b)$ für $a > b$
(2) $|r| = 0$ für $a = b$
(3) $|r| = +(b - a)$ für $a < b$

Wir wenden uns nunmehr nochmals der **Ordnung in R** zu.

In Definition 1 (13.2.) ist festgelegt, wann eine rationale Zahl r_1 kleiner als eine rationale Zahl r_2 ($r_1 < r_2$) sein soll. Nachdem wir definiert haben, wie mit rationalen Zahlen gerechnet werden kann, sind wir in der Lage, diese **Kleiner-Relation** auch wie folgt zu definieren.

DEFINITION 10 (13.3.) — **Kleiner-Relation in R**
(↗ Definition 1 (13.2.))
Es seien $r_1, r_2 \in R$.
Dann nennen wir $\boldsymbol{r_1 < r_2}$ genau dann, wenn es eine positive rationale Zahl r_3 gibt, so daß $r_1 + r_3 = r_2$.
Dann nennen wir $\boldsymbol{r_1 > r_2}$ genau dann, wenn es eine negative rationale Zahl r_3 gibt, so daß $r_1 + r_3 = r_2$.

Es sei vermerkt, daß wir auf einen Nachweis darüber verzichten, daß die Definition 10 (13.3.) der Kleiner-Relation äquivalent zu der Definition 1 (13.2.) ist.

Wir formulieren im folgenden einige Sätze (ohne Beweise), die **Aussagen über die Vorzeichen von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten** machen.

SATZ 10 (13.3.)
Für alle $r_1, r_2 \in R$ gilt:
(1) $\boldsymbol{r_1 + r_2 > 0}$ genau dann, wenn gilt:
  a) r_1 ist positiv und r_2 ist positiv; oder
  b) r_1 ist positiv und $r_2 = 0$; oder
  c) r_1 ist positiv und r_2 ist negativ und $|r_2| < |r_1|$.
(2) $\boldsymbol{r_1 + r_2 = 0}$ genau dann, wenn gilt:
  a) $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$; oder
  b) r_1 ist positiv und r_2 ist negativ und $|r_1| = |r_2|$.
(3) $\boldsymbol{r_1 + r_2 < 0}$ genau dann, wenn gilt:
  a) r_1 ist negativ und r_2 ist negativ; oder
  b) r_1 ist negativ und $r_2 = 0$; oder
  c) r_1 ist negativ und r_2 ist positiv und $|r_2| < |r_1|$.

Weitere Fallunterscheidungen sind im Satz 10 (13.3.) wegen der nachgewiesenen Kommutativität der Addition in R nicht erforderlich.

SATZ 11 (13.3.)
Für alle $r_1, r_2 \in R$ gilt:
(1) $\boldsymbol{r_1 - r_2 > 0}$ genau dann, wenn $r_1 > r_2$;
(2) $\boldsymbol{r_1 - r_2 = 0}$ genau dann, wenn $r_1 = r_2$;
(3) $\boldsymbol{r_1 - r_2 < 0}$ genau dann, wenn $r_1 < r_2$.

SATZ 12 (13.3.)
Für alle $r_1, r_2 \in R$ gilt:
(1) $\boldsymbol{r_1 \cdot r_2 > 0}$ genau dann, wenn gilt:
  a) r_1 ist positiv und r_2 ist positiv; oder
  b) r_1 ist negativ und r_2 ist negativ.
(2) $\boldsymbol{r_1 \cdot r_2 = 0}$ genau dann, wenn gilt:
  $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$.
(3) $\boldsymbol{r_1 \cdot r_2 < 0}$ genau dann, wenn gilt:
  r_1 ist positiv und r_2 ist negativ.

Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation in R sind weitere Fallunterscheidungen im Satz 12 (13.3.) nicht erforderlich.

SATZ 13 (13.3.)
Für alle $r_1 \in R$, $r_2 \in R \setminus \{0\}$ gilt:
(1) $\boldsymbol{r_1 : r_2 > 0}$ genau dann, wenn gilt:
a) r_1 ist positiv und r_2 ist positiv; oder
b) r_1 ist negativ und r_2 ist negativ.
(2) $\boldsymbol{r_1 : r_2 = 0}$ genau dann, wenn gilt:
$r_1 = 0$.
(3) $\boldsymbol{r_1 : r_2 < 0}$ genau dann, wenn gilt:
a) r_1 ist positiv und r_2 ist negativ; oder
b) r_1 ist negativ und r_2 ist positiv.

Auf der Grundlage der Definition 10 (13.3.) befassen wir uns im folgenden mit den sogenannten **Monotoniegesetzen im Bereich der rationalen Zahlen.**

SATZ 14 (13.3.) — **Monotonie der Addition in R bezüglich der Kleiner-Relation**
Für alle rationalen Zahlen r_1, r_2, r_3 gilt:
Aus $r_1 < r_2$ folgt $r_1 + r_3 < r_2 + r_3$.

Voraussetzung: $r_1, r_2, r_3 \in R$, $r_1 < r_2$
Behauptung: $r_1 + r_3 < r_2 + r_3$
Beweis:

$r_1 < r_2$ (nach Voraussetzung)

Dann gibt es nach Definition 10 (13.3.) ein positives $r_4 \in R$ mit $r_1 + r_4 = r_2$. Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(r_1 + r_4) + r_3 &= r_1 + (r_4 + r_3) && \text{(nach Satz 3 (13.3.))}\\
&= r_1 + (r_3 + r_4) && \text{(nach Satz 2 (13.3.))}\\
&= (r_1 + r_3) + r_4 && \text{(nach Satz 3 (13.3.))}
\end{aligned}
$$

Wegen $r_1 + r_4 = r_2$ erhalten wir

$$r_2 + r_3 = (r_1 + r_3) + r_4$$

und damit

$r_2 + r_3 > r_1 + r_3$. (nach Definition 10 (13.3.) und wegen r_4 ist positiv)

Das ist aber gleichbedeutend mit

$r_1 + r_3 < r_2 + r_3$. q. e. d.

SATZ 15 (13.3.) — **Monotonie der Multiplikation in R bezüglich der Kleiner-Relation**
Für alle rationalen Zahlen r_1, r_2, r_3 gilt:
(1) Aus $r_1 < r_2$ und $r_3 > 0$ folgt
$r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_3$;
(2) Aus $r_1 < r_2$ und $r_3 = 0$ folgt
$r_1 \cdot r_3 = r_2 \cdot r_3$;
(3) Aus $r_1 < r_2$ und $r_3 < 0$ folgt
$r_1 \cdot r_3 > r_2 \cdot r_3$.

Wir betrachten beliebige rationale Zahlen und nehmen Fallunterscheidungen vor.

Fall (1)

Voraussetzung: $r_1, r_2, r_3 \in R$, $r_3 > 0$ und $r_1 < r_2$

Behauptung: $r_1 r_3 < r_2 r_3$

Beweis:

$r_1 < r_2$ (nach Voraussetzung)

Dann gibt es nach Definition 10 (13.3.) eine positive rationale Zahl r_4, so daß

$$r_1 + r_4 = r_2 .$$

Hieraus ergibt sich:

$$(r_1 + r_4)\, r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_4 \cdot r_3 . \qquad \text{(nach Satz 8 (13.3.))}$$

Wegen $r_1 + r_4 = r_2$ erhalten wir:

$$r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot r_3 + r_4 \cdot r_3 .$$

Weiter kann gesagt werden, daß das Produkt $r_4 \cdot r_3$ positiv ist; denn es gilt:

r_4 ist positiv und r_3 ist positiv (nach Voraussetzung)

und damit $r_4 \cdot r_3$ positiv, (nach Satz 11 (13.3.))

d. h.: $r_2 \cdot r_3 > r_1 \cdot r_3$. (nach Definition 10 (13.3.))

Das ist aber gleichbedeutend mit

$$r_1 \cdot r_3 < r_2 \cdot r_3 . \qquad \text{q. e. d.}$$

Die übrigen Fälle beweise der Leser selber.

Wir wollen noch ohne Beweis vermerken, daß die Addition in R und die Multiplikation in R auch bezüglich der Gleichheits-Relation monoton sind, wobei in diesem Falle für die Multiplikation eine Fallunterscheidung wie in Satz 15 (13.3.) entfällt.

13.4. Rationale Zahlen und Zahlengerade

In Analogie zu den Betrachtungen im Teil C 12.4. formulieren wir Satz 1 (13.4.).

> SATZ 1 (13.4.)
> Es seien R die Menge der rationalen Zahlen und g die Menge aller Punkte einer Geraden.
> Dann gibt es (mindestens) eine eineindeutige Abbildung von R in g.

Wir konstruieren eine solche Abbildung wie folgt.

(1) $r = 0$ ordnen wir eindeutig einem beliebigen, aber festen Punkt O von g zu.

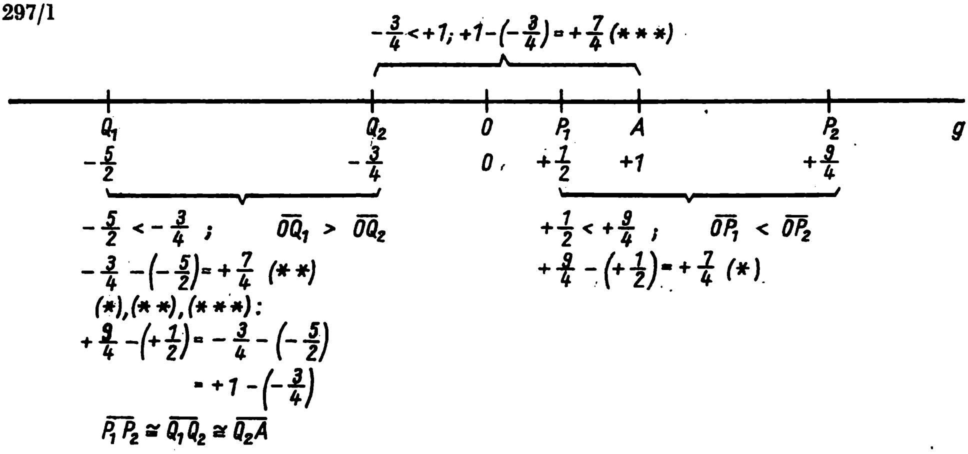
(2) $r = +1$ ordnen wir eindeutig einem beliebigen, aber festen Punkt A von g zu ($A \neq O$). Wir sagen dann, die Strecke $\overline{OA}$ habe die Länge 1.

(3) Die anderen positiven rationalen Zahlen ordnen wir den Punkten der Halbgeraden OA^+ in gleicher Weise zu, wie die gebrochenen Zahlen den Punkten des Zahlenstrahls (↗ Teil C 12.4.).
(OA^+ sei die Halbgerade von g, die in O beginnt und den Punkt A enthält.)

(4) Die negativen rationalen Zahlen ordnen wir den Punkten der Halbgeraden OA^- zu, indem wir die Einheitsstrecke und ihre Teilstrecken von O aus auf OA^- in entsprechender Weise abtragen.
(OA^- sei die Halbgerade von g, die in O beginnt und A nicht enthält.)

Es sei darauf verzichtet nachzuweisen, daß diese Konstruktion tatsächlich eine Abbildung ist, die den Forderungen im Satz 1 (13.4.) entspricht. Wir veranschaulichen die vorgenommene Konstruktion an den im Bild 297/1 dargestellten Beispielen.

297/1



DEFINITION 1 (13.4.) — Zahlengerade für rationale Zahlen

Es sei R die Menge der rationalen Zahlen, g die Menge der Punkte einer Geraden.
Dann nennen wir g eine **Zahlengerade für rationale Zahlen** genau dann, wenn den rationalen Zahlen Punkte dieser Geraden genau nach der zu Satz 1 (13.4.) konstruierten Vorschrift zugeordnet werden.

Es gibt Punkte der Zahlengeraden, denen *keine* rationale Zahl zugeordnet wird. Die beschriebene Abbildung ist somit eine Abbildung von R *in* die Menge aller Punkte der Zahlengeraden, nicht etwa eine Abbildung von R *auf* diese Menge.

13.5. Darstellung rationaler Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem

In Definition 4 (13.1.) ist als Schreibweise für rationale Zahlen festgelegt:

r ist positiv: $r = +z$
r ist negativ: $r = -z$

Dabei werden für z genau die Ziffern verwendet, die auch zum Bezeichnen gebrochener Zahlen dienen. Diese in Definition 4 (13.1.) gegebene Erklärung nutzen wir für die Darstellung rationaler Zahlen im dekadischen Stellenwertsystem.

BEISPIEL 1 (13.5.):

Entsprechend den Festlegungen im Teil C 12.5 schreiben wir:

$$r_1 = +\frac{1637}{9900} \quad \text{oder} \quad r_1 = +0{,}16\overline{53}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad r_2 = -0{,}5$$

13.6. Kontrollfragen

1. Geben Sie zu den folgenden Klassen differenzengleicher geordneter Paare gebrochener Zahlen (rationale Zahlen) je zwei weitere Repräsentanten an!

$$r_1 = \left\{\left[\frac{11}{15}; \frac{2}{5}\right], \left[\frac{13}{12}; \frac{3}{4}\right], \left[1; \frac{2}{3}\right], \left[\frac{7}{3}; 2\right], \ldots\right\}$$

$$r_2 = \left\{\left[\frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right], [4; 4], \left[\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right], \left[\frac{4}{7}; \frac{4}{7}\right], \ldots\right\}$$

$$r_3 = \left\{\left[\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right], \left[3; \frac{9}{2}\right], \left[\frac{7}{2}; 5\right], \ldots\right\}$$

2. Kann das geordnete Paar [0; 0] Repräsentant von r_2 sein? Begründen Sie Ihre Antwort!
3. Geben Sie je drei Repräsentanten für die rationalen Zahlen $r_4 = -\frac{3}{8}$ und $r_5 = +\frac{7}{6}$ an!
4. Es seien $r_6 = +\frac{9}{8}$, $r_7 = +\frac{5}{4}$, $r_8 = -r_7$, $r_9 = -r_6$.
   Geben Sie dann mindestens eine rationale Zahl an, die zwischen
   a) r_6 und r_7, b) r_6 und r_8, c) r_8 und r_9
   liegt!
5. Konstruieren Sie von Satz 4 (13.2.) ausgehend weitere mögliche eineindeutige Abbildungen von R auf N!
6. Vergleichen Sie die rationalen Zahlen r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 (↗ Fragen 1. und 3.) untereinander!
   a) Mit Hilfe der Definition 1 (13.2.)
   b) Mit Hilfe der Definition 6 (13.3.)
7. Berechnen Sie mit Hilfe von Repräsentanten die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten der Zahlen r_4 und r_5, r_6 und r_9, r_2 und r_3 (↗ Fragen 1., 3., 4.)!
8. Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der folgenden Aussageformen!

$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
$a - a = 0$	$a \cdot 1 = a$
$a - 0 = a$	$a : a = 1 \; (a \neq 0)$
$a + a = (+2) \cdot a$	$0 : a = 0 \; (a \neq 0)$
	$a : 1 = a$
	(in allen Fällen $a \in R$)

9. Beweisen Sie!
   a) Assoziativgesetz der Addition in R
   b) Assoziativgesetz der Multiplikation in R
   c) Distributivgesetz in R

14. Die reellen Zahlen

Mit Hilfe der natürlichen Zahlen haben wir die Menge der gebrochenen Zahlen (R^*) und dann die Menge der rationalen Zahlen (R) aufgebaut, weil Multiplikation und Addition in N nicht immer umkehrbar sind. Aber auch eine so einfach erscheinende Gleichung wie $x^2 - 2 = 0$ besitzt in keinem der in den Teilen C 11. bis C 13. behandelten Zahlenbereiche eine Lösung (↗ [16], Lehrbuch 9, S. 12). Auch gibt es für die Länge einer Diagonalen eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 keine rationale Maßzahl. Das entspricht der Tatsache, daß es zwar eine eineindeutige Abbildung der Menge der rationalen Zahlen in die Menge der Punkte einer Geraden gibt, daß aber diese Abbildung nicht alle Punkte der Geraden erfaßt. Es gibt Punkte auf der Geraden, denen keine rationale Zahl zugeordnet ist.
Daher bauen wir einen Zahlenbereich P auf, für den u. a. gelten soll:
Es gibt eine eineindeutige Abbildung *von* P *auf* die Menge der Punkte einer Geraden.

In diesem Zahlenbereich werden dann auch Gleichungen wie $x^2 - 2 = 0$ (und viele andere) Lösungen besitzen. Auch andere fachwissenschaftliche Fragen werden dann gelöst werden können.
Für die Konstruktion von P gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine ist im o. a. Lehrbuch, Teil A, abgehandelt.

14.1. Zahlenfolgen

Wir wollen die neuen Zahlen mit Hilfe von **Zahlenfolgen** aufbauen und benutzen dazu die bereits behandelten Begriffe „Menge“, „Abbildung“, „Natürliche Zahlen“ und „Rationale Zahlen“.
Dem Zweck dieses Buches angemessen, werden wir diesen neuen Bereich nicht bis in alle Einzelheiten behandeln.
Zunächst erklären wir den Begriff „Zahlenfolge“ in der Menge der rationalen Zahlen (R).

DEFINITION 1 (14.1.) — Folge von rationalen Zahlen
Eine eindeutige Abbildung (Funktion) der Menge der natürlichen Zahlen (N) in die Menge der rationalen Zahlen (R) heißt **Folge von rationalen Zahlen.**
Die **Glieder** einer solchen Folge bezeichnen wir mit a_n, die **Folge** selber mit $\{a_n\}$, n ist die **Nummer** oder der **Index** des Gliedes.

Im Beispiel 1 (14.1.) sind für einige Folgen einige Glieder und — soweit vorhanden — ein allgemeines Glied, das man auch **Bildungsvorschrift** nennt, angegeben.

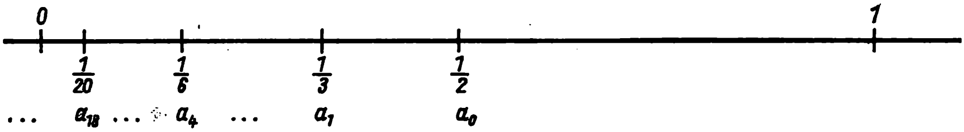
BEISPIEL 1 (14.1.):

a) $\{a_n\} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$
b) $\{a_n\} = \{7, 3, 4, 1, 0, 8, 12\}$
c) $\{a_n\} = \{2, 4, 6, \ldots, 2(n+1), \ldots\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$
d) $\{a_n\} = \{-6, -3, 0, 3, 6, \ldots, 3(n-2), \ldots\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$
e) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+2}, \ldots\right\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$
f) $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots\right\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$
g) $\{a_n\} = \{+1, -1, +1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Nach Definition 1 (14.1.) steht im Beispiel 1 (14.1.) b) keine Zahlenfolge, denn es handelt sich dort um eine Abbildung *aus* N ....
Für die Folge e) im Beispiel 1 (14.1.) ist eine Bildungsvorschrift — dargestellt durch das allgemeine Glied $a_n = \frac{1}{n+2}$ — angegeben. Mit Hilfe dieser Bildungsvorschrift können wir das einem bestimmten n zugeordnete Glied der Folge ermitteln. Wir erhalten alle Glieder der Folge, wenn wir alle für n angegebenen Werte der Reihe nach in die Bildungsvorschrift einsetzen.
Die Folge e) und die übrigen Folgen enthalten unendlich viele Glieder, es sind **unendliche Folgen.**

Die Folge c) im Beispiel 1 (14.1.) ist die im Mathematikunterricht der Unterstufe zu behandelnde **Zweierfolge.**

Man kann die **Glieder einer Folge in die Menge der Punkte einer Zahlengeraden abbilden.** Für die Folge e) im Beispiel 1 (14.1.) ist das im Bild 300/1 dargestellt.



300/1

DEFINITION 2 (14.1.) — Monotonie
Wir nennen eine Folge $\{a_n\}$ **streng monoton wachsend (fallend)** genau dann, wenn für jedes n gilt:
$a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

Wir überprüfen im Beispiel 2 (14.1.) die Monotonie der Folgen a), c), e) und g) aus dem Beispiel 1 (14.1.) mit Hilfe des allgemeinen Gliedes.

BEISPIEL 2 (14.1.):

Zu a): Für alle n gilt:
$a_n < a_{n+1}$, denn es gilt für jedes n:
$n < n + 1$ (wachsend).

Zu c): Für alle n gilt:
$a_n < a_{n+1}$, denn $2(n + 1) < 2[(n + 1) + 1]$ ist für alle n richtig (wachsend).

Zu e): Für alle n gilt:
$a_n > a_{n+1}$, denn es gilt für alle n:
$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{(n+1)+2}$ bzw. $n + 3 > n + 2$ (fallend).

Zu g): Diese Folge ist weder wachsend noch fallend, sie ist **alternierend**.

Wir erkennen aus der Darstellung der streng monoton fallenden Folge e) im Beispiel 1 (14.1.) auf einer Zahlengeraden, daß die den einzelnen Gliedern entsprechenden Punkte jeweils „links“ von dem Punkt liegen, der dem vorhergehenden Glied entspricht.

DEFINITION 3 (14.1.) — **Schranke**
Wir nennen eine Folge $\{a_n\}$ **nach unten (oben) beschränkt** genau dann, wenn es eine Zahl $S_1(S_2)$ gibt, so daß stets $S_1 \leqq a_n$ $(S_2 \geqq a_n)$ ist.
S_1 nennen wir eine **untere Schranke**, S_2 eine **obere Schranke** der Folge.
Wir nennen eine Folge **beschränkt** genau dann, wenn es eine Zahl S gibt, so daß stets $|a_n| \leqq S$ ist, anderenfalls nennen wir die Folge **unbeschränkt**.

BEISPIEL 3 (14.1.):
Die im Beispiel 1 (14.1.) dargestellte Folge

a) ist nach unten beschränkt ($S_1 \leqq 0$);
b) ist nach unten und nach oben beschränkt ($S_1 \leqq 0$; $S_2 \geqq 12$);
c) ist nach unten und nach oben beschränkt ($S_1 \leqq -1$; $S_2 \geqq +1$).

Augenscheinlich sind solche Schranken nicht eindeutig bestimmt. In der Folge b) im Beispiel 1 (14.1.) ist sicher auch $S_2' = 20$ eine obere Schranke.

Wenn eine Folge rationaler Zahlen $\{a_n\}$ nach unten (oben) beschränkt ist, dann *kann* es eine **größte untere (kleinste obere) Schranke** geben, die wieder eine **rationale Zahl** ist, es *muß* sie aber *nicht* geben.

In der Folge e) im Beispiel 1 (14.1.) sind alle $S \geqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, 7, 200 \text{ u. a.}\right)$ obere Schranken, und $S = \frac{1}{2}$ ist die kleinste obere Schranke

Uns interessieren besonders solche Folgen, deren Glieder **sich** mit wachsendem n immer mehr einer bestimmten Zahl **nähern.**
Die **Folgen** e) und f) im Beispiel 1 (14.1.) nähern sich augenscheinlich mit wachsendem n der Zahl Null.

DEFINITION 4 (14.1.) — **Nullfolgen**
Wir nennen eine Folge $\{a_n\}$ **Nullfolge** genau dann, wenn sich nach Vorgabe einer beliebigen rationalen Zahl $\varepsilon > 0$ immer eine natürliche Zahl N angeben läßt, so daß $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N$ (ε: Epsilon — griech.).

BEISPIEL 4 (14.1.):
Es sei für die Folge e) im Beispiel 1 (14.1.) $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vorgegeben.

Dann muß von einer bestimmten Stelle N an $\left|\frac{1}{n+2}\right| < \frac{1}{100}$ oder $100 < n + 2$ sein. Diese Bedingung ist für alle $n \geqq N = 99$ erfüllt. Bereits für $n = 99$ ist tatsächlich $\left|\frac{1}{99+2}\right| < \frac{1}{100}$, und alle $n > 99$ erfüllen ebenfalls die Bedingung $\left|\frac{1}{n+2}\right| < \frac{1}{100}$.

Die Gesamtheit der Glieder der Folge e) von der Nummer $N = 99$ an wollen wir ein **Endstück der Folge** nennen. Augenscheinlich gibt es in Abhängigkeit von ε verschiedene Endstücke.

BEISPIEL 5 (14.1.):

a) $\{a_n\} = \left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{3}{10}, \ldots, \frac{21}{37}, \ldots, \frac{199}{304}, \ldots\right\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

b) $\{a_n\} = \left\{\frac{2n+5}{3n-2}\right\} = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{7}{1}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{25}{28}, \ldots, \frac{2005}{2998}, \ldots\right\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Beide Folgen nähern sich augenscheinlich mit wachsendem n derselben Zahl $\frac{2}{3}$, also nicht der Zahl Null, sie sind daher keine Nullfolgen. Obgleich die jeweiligen Glieder beider Folgen voneinander verschieden sind, steckt in den Folgen doch etwas Gemeinsames, nämlich die Zahl $\frac{2}{3}$, der sich die Glieder beider Folgen nähern.
Wir bilden eine neue Folge c) aus der Folge b), indem wir von jedem Glied der Folge $\frac{2}{3}$ subtrahieren.

c) $\left\{\frac{2n+5}{3n-2} - \frac{2}{3}\right\} = \left\{\frac{19}{9n-6}\right\} = \left\{\frac{19}{-6}, \frac{19}{3}, \frac{19}{12}, \ldots, \frac{19}{894}, \ldots, \frac{19}{8994}, \ldots\right\}$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Die Zähler bleiben konstant, die Nenner der einzelnen Glieder wachsen „über alle Maßen", die Glieder der neuen Folge nähern sich mit wachsendem n der Zahl Null. Es handelt sich also bei der neuen Folge um eine Nullfolge, wie man leicht nachprüfen kann.

DEFINITION 5 (14.1.) — **Konvergenz einer Zahlenfolge**

Wir nennen eine Folge $\{a_n\}$ **konvergent** genau dann, wenn es eine rationale Zahl g gibt, so daß $\{|a_n - g|\}$ eine Nullfolge ist.
Man sagt dann: $\{a_n\}$ **konvergiert** für n gegen unendlich gegen den Wert g.
Die Zahl g nennen wir **Grenzwert** oder **Limes der Folge** und schreiben
$$g = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} .$$
(Gelesen: g ist der Limes von a_n für n gegen unendlich (limes: Grenze — lat.))
Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.

BEISPIEL 6 (14.1.):
Nach Definition 5 (14.1.) ist in der Folge a) im Beispiel 5 (14.1.)
$$g = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2n-1}{3n+4}\right\} = \frac{2}{3} .$$
Den gleichen Grenzwert besitzt auch die Folge b), obgleich sich deren Glieder von denen der Folge a) unterscheiden.

Die Schreibweise „$n \to \infty$" soll nicht bedeuten, daß n etwa gleich einer „Zahl Unendlich" wird — eine solche Zahl ist nicht definiert —, sondern nur, daß n die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft.

Wir haben bisher nichts darüber gesagt, ob es für jede Folge (rationaler Zahlen) stets einen Grenzwert gibt und — falls er existiert — wie man ihn berechnen kann.
Oft ist die Berechnung einer genügend großen Anzahl von Gliedern einer Folge zur Ermittlung (Vermutung) eines eventuellen Grenzwertes mit viel Aufwand verbunden, wovon man sich im Beispiel 7 (14.1.) leicht überzeugen kann.
Wir geben einige Sätze (ohne Beweise) an, die das Berechnen eines Grenzwertes erleichtern. Dabei setzen wir voraus, daß *alle* in den Gleichungen auftretenden *Grenzwerte existieren.*

SATZ 1 (14.1.)
Für alle $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\{a_n + b_n\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} + \lim_{n\to\infty}\{b_n\} .$$

SATZ 2 (14.1.)
Für alle $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\{a_n \cdot b_n\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} \cdot \lim_{n\to\infty}\{b_n\} .$$

SATZ 3 (14.1.)
Für alle $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ mit $b_n \neq 0$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty}\{a_n : b_n\} = \lim_{n\to\infty}\{a_n\} : \lim_{n\to\infty}\{b_n\} ,$$
falls $\lim_{n\to\infty}\{b_n\} \neq 0$.

In Worten heißt zum Beispiel Satz 1 (14.1.) — Existenz der Grenzwerte vorausgesetzt —:

Der Grenzwert einer Summe ist gleich der Summe der Grenzwerte.

BEISPIEL 7 (14.1.):

$$\{a_n\} = \left\{\frac{224\,n^5 - 70\,n + 1}{336\,n^5 + 84\,n^3 - 1}\right\} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir wenden die Sätze 1 (14.1.), 2 (14.1.) und 3 (14.1.) auf die Folge an, kürzen aber vorher mit der höchsten gemeinsamen Potenz von n, also mit n^5, und erhalten:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{224\,n^5 - 70\,n + 1}{336\,n^5 + 84\,n^3 - 1}\right\} = \left\{\frac{224 - \frac{70}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{336 + \frac{84}{n^2} - \frac{1}{n^5}}\right\}.$$

Dann ist — falls der Zähler konvergiert und der Grenzwert des Nenners ungleich Null ist —

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \lim_{n\to\infty} \left\{224 - \frac{70}{n^4} + \frac{1}{n^5}\right\} : \lim_{n\to\infty} \left\{336 + \frac{84}{n^2} - \frac{1}{n^5}\right\}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \{224\} - \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{70}{n^4}\right\} + \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^5}\right\}\right) :$$

$$: \left(\lim_{n\to\infty} \{336\} + \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{84}{n^2}\right\} - \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n^5}\right\}\right).$$

In der Folge $\left\{\frac{70}{n^4}\right\}$ wird n^4 mit wachsendem n immer größer, folglich wird

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{70}{n^4}\right\} = 0\,.$$

Entsprechende Überlegungen liefern

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n\} = \frac{224 - 0 + 0}{336 + 0 - 0} = \frac{224}{336} = \frac{2}{3}.$$

Wir haben im Beispiel 7 (14.1.) drei verschiedene Folgen gefunden, die ein und denselben Grenzwert besitzen, und können leicht feststellen, daß auf die entsprechenden Folgen $\{|a_n - g|\}$ die Definition 4 (14.1.) zutrifft, daß sie also Nullfolgen und damit nach Definition 5 (14.1.) konvergent sind. Für die Folge im Beispiel 7 (14.1.) wurde das gezeigt.

Betrachten wir die Folgen in den Beispielen 5 (14.1.) und 7 (14.1.), dann können wir erkennen, daß mit wachsendem n die Abstände zwischen den Folgengliedern immer kleiner werden.
Dieser Sachverhalt, den wir im Satz 4 (14.1.) noch präziser formulieren, ist ein **notwendiges Kriterium** für die Konvergenz von rationalen Zahlenfolgen. Es bedeutet: Liegt dieser Sachverhalt *nicht* vor, dann ist die Folge auch *nicht* konvergent.

SATZ 4 (14.1.) — **Konvergenz einer Zahlenfolge** (ohne Beweis)

Wenn eine Folge $\{a_n\}$ **konvergent** ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ — N ist abhängig von ε — so, daß für alle $n \geqq N(\varepsilon)$ und alle $m \geqq N(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Bemerkung:
Unter den im Satz 4 (14.1.) angegebenen Bedingungen ist eine Folge stets konvergent, allerdings muß ihr Grenzwert nicht rational sein.

BEISPIEL 8 (14.1.):
Wir wollen für die Nullfolge f) im Beispiel 1 (14.1.) überprüfen, ob Satz 4 (14.1.) erfüllt ist.
Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wir wählen dann die natürliche Zahl N so, daß sie größer als die rationale Zahl $\frac{2}{\varepsilon}$ ist. (Das ist stets möglich.)
Es gilt für $n \geqq N$ und $m \geqq N$:

$$\left|\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^m}\right| \leqq \left|\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^m}\right| \leqq \frac{1}{10^N} + \frac{1}{10^N} = \frac{2}{10^N}.$$

(Für $n \geqq N$ wird $\frac{1}{10^n} \leqq \frac{1}{10^N}$; entsprechendes gilt für m.)

Ferner gilt:

$$\frac{2}{10^N} < \frac{2}{N}, \qquad \text{da } 10^N > N \text{ für alle } N.$$

Da wir $N > \frac{2}{\varepsilon}$ gewählt hatten, gilt außerdem:

$$\frac{2}{N} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

also wird unter den genannten Voraussetzungen

$$\left|\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^m}\right| < \varepsilon.$$

q. e. d.

Auf jeden Fall haben konvergente (rationale) Zahlenfolgen notwendigerweise die im Satz 4 (14.1.) angegebene Eigenschaft.

Aber der Satz 4 (14.1.) ist in R nicht umkehrbar, denn es gibt Folgen, die von einem gewissen $N(\varepsilon)$ an die Bedingung $|a_n - a_m| < \varepsilon$ erfüllen, aber in R keinen Grenzwert besitzen.

Für beide Arten von Folgen wollen wir einen neuen Begriff einführen.

DEFINITION 6 (14.1.) — **Fundamentalfolge**
Wir nennen eine Folge $\{a_n\}$ **Fundamentalfolge** genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \in R$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N$ und alle $m \geqq N$.

Wir wollen nun eine **Fundamentalfolge** (aus rationalen Zahlen) **konstruieren, die keinen (rationalen) Grenzwert besitzt.**

Dazu benutzen wir die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ (↗ 299).
Es ist bekannt, daß es keine rationale Zahl x gibt, die diese Gleichung erfüllt.
Wir können aber eine Folge von Dezimalzahlen konstruieren, für deren Glieder a_n gilt: $a_n^2 < x^2 = 2$ und
a_n^2 nähert sich mit wachsendem n immer mehr x^2.

Wir stellen zunächst alle einstelligen, dann alle zwei-, drei-stelligen Dezimalzahlen usw. zusammen, die die Bedingung $a_n^2 < 2$ erfüllen.

Es gilt:

$$
\begin{array}{llll|lll}
1{,}0^2 & = 1{,}0 & < 2\,, & & & & \\
1{,}1^2 & = 1{,}21 & < 2\,, & & & & \\
1{,}2^2 & = 1{,}44 & < 2\,, & & & & \\
1{,}3^2 & = 1{,}69 & < 2\,, & & & & \\
1{,}4^2 & = 1{,}96 & < 2\,, & & 1{,}5^2 & = 2{,}25 & \not< 2 \\
1{,}41^2 & = 1{,}9881 & < 2\,, & & 1{,}42^2 & = 2{,}0164 & \not< 2 \\
1{,}411^2 & = 1{,}990921 & < 2\,, & & & & \\
1{,}412^2 & = 1{,}992334 & < 2\,, & & & & \\
1{,}413^2 & = 1{,}996569 & < 2\,, & & & & \\
1{,}414^2 & = 1{,}999396 & < 2\,, & & 1{,}415^2 & = 2{,}003225 & \not< 2 \\
1{,}4141^2 & = 1{,}99967881 & < 2\,, & & & & \\
1{,}4142^2 & = 1{,}99982024 & < 2\,, & & 1{,}4143^2 & = 2{,}00024449 & \not< 2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Wir erhalten die Folge $\{a_n\}$ aus rationalen Zahlen.

$$\{a_n\} = \{1; 1{,}1; 1{,}2; 1{,}3; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}412; \ldots; 1{,}4141; \ldots\}$$

mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

Es handelt sich um eine streng monoton wachsende Folge, denn wir können zeigen, daß für jedes n gilt: $a_n < a_{n+1}$.

Wir wollen für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ überprüfen, ob die Bedingung für eine Fundamentalfolge nach Definition 6 (14.1.) erfüllt ist.

Für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ muß es also eine natürliche Zahl N geben, so daß $|a_n - a_m| < \frac{1}{100}$ für alle $n \geqq N$ und alle $m \geqq N$ ist.

$N = 5$ genügt der Forderung, denn $a_5 = 1{,}41$, und alle folgenden Glieder müssen in der zweiten Dezimalstelle ebenfalls die Ziffer Eins besitzen, da schon $1{,}42^2 \not< 2$ ist. Alle a_n und alle a_m können nur mit der Ziffernfolge 1,41 ... beginnen, ihre Differenz liegt daher frühestens in der dritten Dezimalstelle.

Diese Überlegungen können wir verallgemeinern, wollen aber darauf verzichten und nur feststellen, daß hier eine Fundamentalfolge vorliegt, die jedoch keinen Grenzwert in R besitzt.

14.2. Aufbau der Menge der reellen Zahlen (P)

Es gibt im Bereich der rationalen Zahlen Fundamentalfolgen, die einen Grenzwert besitzen und solche, für die das nicht zutrifft. Das ist unbefriedigend, denn die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ können wir uns aus dem Sachverhalt erwachsen denken, daß ein Einheitsquadrat eine eindeutig bestimmte Diagonale besitzt, deren Länge wir eine Maßzahl zuordnen möchten.

Daher erklären wir einen neuen **Zahlenbereich, in dem jede Fundamentalfolge einen Grenzwert besitzen soll und in dem dann auch die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ Lösungen besitzt.** Er soll außerdem **die Menge der rationalen Zahlen (R) als Teilmenge enthalten.**

Zunächst stellen wir (ohne Beweis) fest, daß **Fundamentalfolgen höchstens einen Grenzwert in R** besitzen.

Jetzt wollen wir alle diejenigen Fundamentalfolgen als **äquivalent** ansehen, die die Definition 1 (14.2.) erfüllen.

DEFINITION 1 (14.2.) — **Grenzwertgleichheit von Fundamentalfolgen**

Wir nennen die Fundamentalfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ **grenzwertgleich** $\left(\underset{G}{=}\right)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon \in R$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß
$|a_n - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N$.

Wir könnten zeigen, daß die Folgen im Beispiel 5 (14.1.) die Bedingung von Definition 1 (14.2.) erfüllen.

Diese **Grenzwertgleichheit** ist eine **Äquivalenzrelation** (ohne Beweis). Sie bewirkt daher eine Einteilung der betrachteten Fundamentalfolgen in **Äquivalenzklassen nach der Grenzwertgleichheit.** Dabei wollen wir beachten, daß in Definition 1 (14.2.) der Nachweis der Existenz eines Grenzwertes nicht gefordert ist.

DEFINITION 2 (14.2.) — **Reelle Zahlen (P)**

Jede Äquivalenzklasse nach der Grenzwertgleichheit von Fundamentalfolgen rationaler Zahlen nennen wir eine **reelle Zahl.**

Damit ist **jede Fundamentalfolge ein Repräsentant einer reellen Zahl.**

Für $x^2 - 2 = 0$ könnten wir noch eine Folge $\{b_n\}$ konstruieren, deren Glieder b_n die Bedingung $b_n^2 > x^2 = 2$ erfüllen, und könnten zeigen, daß $\{b_n\}$ und $\{a_n\}$ der Definition 1 (14.2.) genügen.
Es handelt sich daher um grenzwertgleiche Fundamentalfolgen. Die Klasse, der sie angehören, ist eine reelle Zahl x nach Definition 2 (14.2.). Diese Zahl x nennen wir „$\sqrt{2}$".
Die aus der Logarithmenrechnung bekannte Basis „e" der natürlichen Logarithmen ist die Klasse aller zur Folge $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ äquivalenten Fundamentalfolgen:

$e = 2{,}7182818\ldots$ ist eine reelle — keine rationale — Zahl.

Reelle Zahlen kann man durch endliche oder unendliche Dezimalzahlen darstellen.
Außerdem kann man zu zwei beliebigen reellen Zahlen immer noch mindestens eine reelle Zahl — also unendlich viele reelle Zahlen — finden, die zwischen den beiden vorgegebenen reellen Zahlen liegt.

In der Menge der reellen Zahlen (P) ist die Klasse aller Nullfolgen das **Nullelement** und die Klasse aller Fundamentalfolgen mit dem rationalen Grenzwert $g = 1$ das **Einselement.**
Wenn die Glieder einer Fundamentalfolge von einer gewissen Nummer an alle größer als Null sind, dann nennen wir die **Folge positiv** und die Klasse, der sie angehört, eine **positive reelle Zahl.**

In der Menge P sind alle vorher behandelten Zahlenbereiche „aufbewahrt". Wir könnten zum Beispiel die natürlichen Zahlen durch Fundamentalfolgen mit einem Grenzwert, der eine natürliche Zahl ist, darstellen.

Auf Isomorphiebetrachtungen wollen wir hier nicht eingehen.

Summe, Produkt und Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen erklärt man — bei diesem Aufbau von P — **mit Hilfe von Fundamentalfolgen.**
Wir wollen das dazu notwendige Vorgehen an der Gewinnung der **Summe zweier reeller Zahlen** erläutern.

BEISPIEL 1 (14.2.)
Wir vereinfachen und nehmen $a = +\frac{1}{2}$ und $b = +\frac{2}{3}$ an.
Wir wollen $a + b = x$ mit Hilfe von Fundamentalfolgen berechnen und suchen dazu für a bzw. b Fundamentalfolgen als Repräsentanten.
Geeignet sind

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{2n-1}\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{1000}{1999}, \ldots\right\} \text{ für } a \text{ und}$$

$$\{b_n\} = \left\{\frac{2n}{3n+1}\right\} = \left\{\frac{2}{4}, \frac{4}{7}, \frac{6}{10}, \ldots, \frac{2000}{3001}, \ldots\right\} \text{ für } b \text{ mit}$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir bilden

$$\begin{aligned}\{a_n\} + \{b_n\} &= \{a_n + b_n\} \\ &= \left\{\frac{n}{2n-1} + \frac{2n}{3n+1}\right\} = \left\{\frac{7n^2 - n}{6n^2 - n - 1}\right\} \\ &= \left\{\frac{6}{4}, \frac{26}{21}, \frac{60}{50}, \ldots, \frac{6999000}{5998999}, \ldots\right\}\end{aligned}$$

Augenscheinlich nähern sich die Glieder dieser Folge dem Grenzwert $g = \frac{7}{6}$, was sich leicht auch rechnerisch überprüfen läßt.
Mit Hilfe des Rechnens mit gebrochenen Zahlen (es handelt sich bei unserem vereinfachten Beispiel um eine rational-reelle Zahl) können wir ebenfalls finden:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

Weitere Kenntnisse kann der interessierte Leser in der angegebenen Literatur erwerben.

Wir wollen noch feststellen,
daß die bisher behandelten **Rechengesetze** in entsprechender Form **auch in P** gelten,
daß sie mit Hilfe von Fundamentalfolgen als Repräsentanten reeller Zahlen bewiesen werden können,
daß für jede reelle Zahl $a \geqq 0$, $n \in N$, eine reelle Zahl $b \geqq 0$ existiert, für die $b^n = a$ mit $b = \sqrt[n]{a}$ gilt (**Radizieren**; z. B.: $a = 2$, $n = 2$, $b = \sqrt{2}$), und
daß für jede reelle Zahl $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, eine reelle Zahl x existiert, für die $b = a^x$ mit $x = \log_a b$ gilt (**Logarithmieren**; z. B.: $a = 2$, $b = 8$, $x = 3$).
In P sind zum Beispiel noch nicht lösbar:

$$b = \sqrt[2]{-2} \quad \text{bzw.} \quad x = \log_2(-8).$$

Eine **Division durch Null** ist auch **in P nicht erklärt.** Außerdem gibt es eine eineindeutige Abbildung von P auf die Menge aller Punkte einer Geraden. Wir erhalten eine reelle Zahlengerade, und es ist damit gesichert, daß man bei Konstruktionen in der Geometrie dem Schnittpunkt zweier Geraden genau eine (reelle) Zahl zuordnen kann. Man sagt, **Die Menge der reellen Zahlen ist vollständig,**

d. h.: **Jede Fundamentalfolge reeller Zahlen besitzt genau einen Grenzwert.**

Wir wollen die Frage nach der **Mächtigkeit der Menge** P beantworten.

Die Mengen N, R^* und R haben die Mächtigkeit „abzählbar unendlich". Wir können Anordnungen für R^* und R angeben, die ein Durchnumerieren mit natürlichen Zahlen ermöglichen.
Um die Mächtigkeit von P zu untersuchen, betrachten wir das Intervall $0 < x < 1$. Wir stellen dazu diese reellen Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche dar und nehmen an, daß wir alle erfassen können, daß diese Menge also auch abzählbar-unendlich sei.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\ x_2 &= 0,\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\ x_3 &= 0,\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die a_{ik} sollen jeweils eine der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ darstellen.

Nun wählen wir aus x_1 die erste, aus x_2 die zweite, ..., aus x_n die n-te Ziffer usw. hinter dem Komma und stellen sie zusammen zu

$$x = 0,\, a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn} \ldots$$

In dieser Darstellung ersetzen wir a_{11} durch $b_1 \neq a_{11}$, a_{22} durch $b_2 \neq a_{22}, \ldots, a_{nn}$ durch $b_n \neq a_{nn}$ usw, wobei jedes b_p ungleich Null und ungleich Neun für alle $p = 1, 2, 3, \ldots$ sein soll.
Es stehen uns immerhin noch 7 Ziffern zur Verfügung.
Die neue Zahl b **stellt sich dann als** $b = 0,\, b_1\, b_2 \ldots b_n \ldots$ **dar und unterscheidet** sich von x_1 durch die Ziffer an der ersten Stelle hinter dem Komma, von x_2 durch die Ziffer an der zweiten Stelle hinter dem Komma usw.
Mit anderen Worten:
b unterscheidet sich von jedem der x_n mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ an mindestens einer Stelle, kommt also unter den x_n nicht vor.
Wir haben aber angenommen, daß mit den x_n alle Zahlen in dem Intervall erfaßt seien, daß diese Menge abzählbar sei. Unser Ergebnis ist ein Widerspruch zur Annahme, folglich ist die Menge der reellen Zahlen im Intervall $0 < x < 1$ **überabzählbar** und damit erst recht die Menge aller reellen Zahlen.
Man sagt:
Die Menge P hat die **Mächtigkeit des Kontinuums** (continuum: Stetiges, lückenlos Zusammenhängendes — lat.).

Zusammenfassung

Für die Definition der Zahlenbereiche N, R^*, R und P verwenden wir Mengen und teilen sie mit Hilfe einer Äquivalenzrelation in disjunkte Teilmengen (Klassen) auf.
Für diese Klassen definieren wir Operationen mit Hilfe von Repräsentanten dieser Klassen und beweisen Gesetzmäßigkeiten repräsentantenweise.
Für N verwenden wir **endliche Mengen** und die Äquivalenzrelation **Gleichmächtigkeit.**
Für R^* verwenden wir **geordnete Paare natürlicher Zahlen** und die Äquivalenzrelation **Quotientengleichheit.**
Für R verwenden wir **geordnete Paare gebrochener Zahlen** und die Äquivalenzrelation **Differenzengleichheit.**
Für P verwenden wir **Fundamentalfolgen rationaler Zahlen** und die Äquivalenzrelation **Grenzwertgleichheit.**

Mit Hilfe der natürlichen Zahlen und der Äquivalenzrelation „Differenzengleichheit" hätten wir auch zunächst die Menge der ganzen Zahlen (G) und daraus — mit Hilfe der Quotientengleichheit — den Bereich der rationalen Zahlen aufbauen können.
Wenn wir den Aufbau der Zahlenbereiche mit Mengen 1. Stufe beginnen, dann ist eine natürliche Zahl eine Menge 2. Stufe, eine gebrochene Zahl eine Menge 5. Stufe und die Menge der reellen Zahlen eine Menge 13. Stufe. Und dabei ist der Aufbau der Zahlenbereiche hier noch nicht am Ende.
Zahlen sind also Gebilde einer sehr hohen Abstraktionsstufe. Wir können aber mit ihrer Hilfe gewisse Seiten der objektiven Realität gut erfassen und zu unseren Gunsten verändern.

Aufbau der Zahlenbereiche

***P* — Reelle Zahlen**

Grenzwertgleichheit
von Fundamentalfolgen
rationaler Zahlen

***R* — Rationale Zahlen**

Quotientengleichheit
geordneter Paare
aus ganzen Zahlen

Differenzengleichheit
geordneter Paare
aus gebrochenen Zahlen

***G* — Ganze Zahlen**

***R** — Gebrochene Zahlen**

Differenzengleichheit
geordneter Paare
aus natürlichen Zahlen

Quotientengleichheit
geordneter Paare
aus natürlichen Zahlen

***N* — Natürliche Zahlen**

Gleichmächtigkeit
endlicher Mengen

Mengen

Im Teil C haben wir die Mengen N, R^*, R und P kennengelernt.
In ihnen gilt nicht nur die Elementbeziehung — z. B. $3 \in N$ —, sondern es sind in diesen Mengen auch algebraische Operationen erklärt — z. B. die Multiplikation in R —, die gewissen Gesetzen genügen.

Eine Menge, in der eine **Relation** oder **Operation** 0 **erklärt ist, nennen wir geregelt** oder auch **strukturiert** und schreiben $[M; 0]$ — zum Beispiel bedeutet $[P; +]$ die Menge der reellen Zahlen (P) mit der in ihr erklärten Addition. Wir sprechen in einem solchen Falle von **algebraischen Strukturen** und erkennen, daß die verschiedenen Zahlenbereiche algebraische Strukturen sind. In allen vier behandelten Zahlenbereichen ist zum Beispiel die Addition eindeutig, kommutativ und assoziativ.

Mengen, in denen eine als Addition geschriebene Operation erklärt ist, die diese drei angegebenen Eigenschaften besitzt, bezeichnen wir als **Halbmodul**.

DEFINITION 1 (14.3.) — **Halbmodul**
Eine nichtleere Menge M heißt **Halbmodul** genau dann, wenn in ihr eine Operation, die wir Addition nennen und mit „+" bezeichnen wollen, erklärt ist, die folgenden Axiomen genügt:

A I: Die Addition ordnet je zwei Elementen $a, b \in M$ genau ein Element $c \in M$ zu, d. h.:
Für alle $a, b \in M$ gibt es ein $c \in M$, so daß gilt:
$a + b = c$.

A II: Die Addition ist assoziativ, d. h.:
Für alle $a, b, c \in M$ gilt:
$(a + b) + c = a + (b + c)$.

A IV: Die Addition ist kommutativ, d. h.:
Für alle $a, b \in M$ gilt:
$a + b = b + a$.

Die Menge M heißt **regulärer Halbmodul**, wenn außerdem gilt:

A III*: Für beliebige $a, x_1, x_2 \in M$ gilt:
Wenn $a + x_1 = a + x_2$, so $x_1 = x_2$.

BEISPIEL 1 (14.3.):

a) Alle behandelten Zahlenbereiche sind reguläre Halbmoduln, denn sie erfüllen mit der in ihr erklärten Addition die angegebenen Axiome.
b) Im Mathematikunterricht der Klasse 4 (↗ [16], Lehrbuch 4, S. 181 ff.) wird die Menge der Verschiebungen (S) behandelt. Wie man leicht feststellt, erfüllt sie die in Definition 1 (14.3.) angegebenen Axiome, ist also auch ein regulärer Halbmodul, wenn man das Nacheinanderausführen der Verschiebungen als Addition bezeichnet.

Die Bedeutung der Axiome A I, A II und A IV ist sofort klar. A III* bedeutet: Wenn die Addition umkehrbar ist, dann ist sie auch eindeutig umkehrbar.

Soll in einem System $[M; +]$ auch die Umkehrung der Addition (stets) möglich sein, dann muß es die Eigenschaften eines **Moduls** besitzen.

DEFINITION 5 (14.3.) — **Gruppe**
Eine nichtleere Menge M heißt **Gruppe** genau dann, wenn in ihr eine Operation, die wir Multiplikation nennen und mit „·" bezeichnen wollen, erklärt ist, die folgenden Bedingungen genügt:
$[M; \cdot]$ ist Halbgruppe;
M III: Für alle $a, b \in M$ gibt es (mindestens) ein $x \in M$ und (mindestens) ein $y \in M$, so daß $a \cdot x = b$ bzw. $y \cdot a = b$ (mit $a \neq 0$) stets lösbar ist.

Eine Gruppe muß also die Axiome M I, M II, M III erfüllen.

BEISPIEL 5 (14.3.):
$[N \setminus \{0\}; \cdot]$ erfüllt die Gruppeneigenschaften nicht, wohl aber $[R \setminus \{0\}; \cdot]$ und auch $[P \setminus \{0\}; \cdot]$.

DEFINITION 6 (14.3.) — **Ring**
Ein Halbring (↗ Definition 4 (14.3.)) heißt **Ring**, wenn er bezüglich der Addition ein Modul ist, also auch A III erfüllt.

Für einen Ring gelten demnach:
A I, A II, A III, A IV, M I, M II, D.

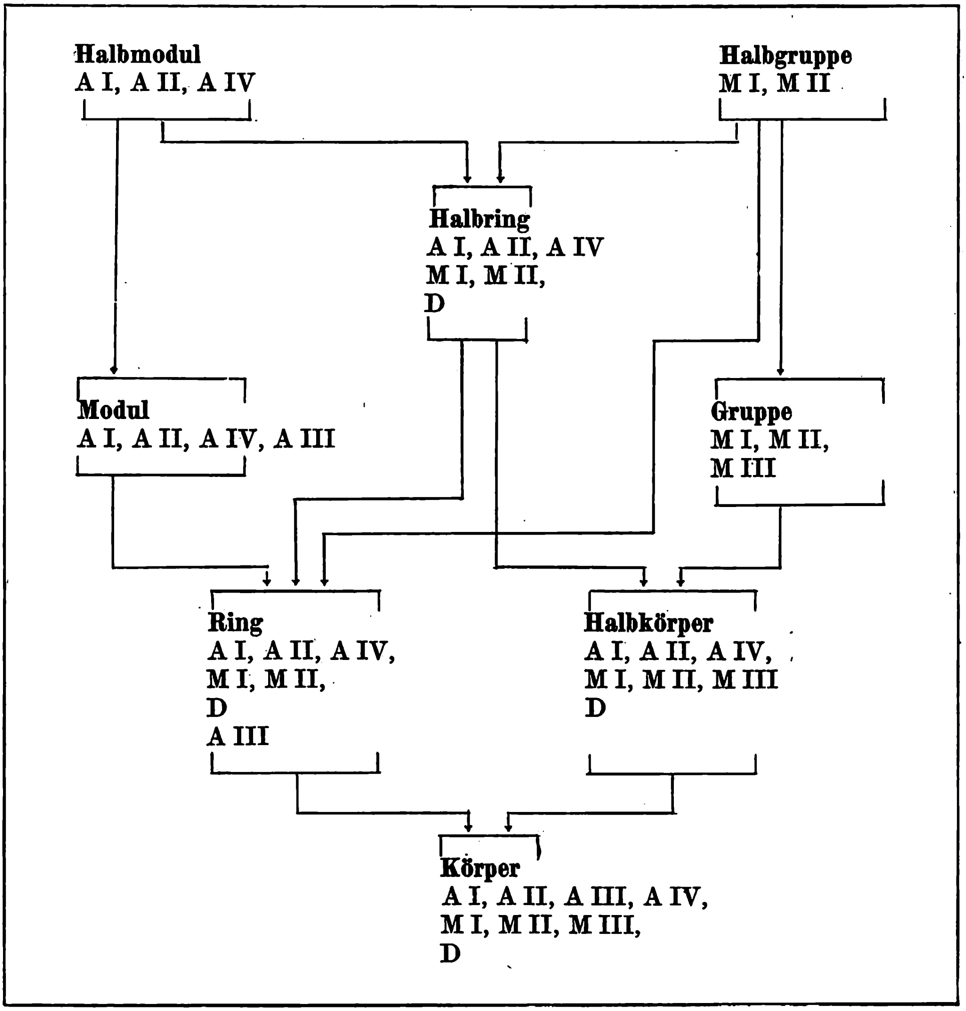
Wir stellen hier keine weiteren Überlegungen zu den Struktureigenschaften von Zahlenbereichen an, sondern überlassen diese dem Leser zur Übung.

Wir definieren noch einige Strukturen. Dabei gehen wir nicht auf spezielle Strukturen oder auf Unterstrukturen ein.

DEFINITION 7 (14.3.) — **Halbkörper**
Ein Halbring heißt **Halbkörper** genau dann, wenn er bezüglich der Multiplikation auch M III erfüllt.

DEFINITION 8 (14.3.) — **Körper**
Ein Ring bzw. ein Halbkörper heißt **Körper** genau dann, wenn er auch M III bzw. A III erfüllt.

Übersicht über einige Strukturen



Literaturverzeichnis

[1] ASSER: Einführung in die höhere Mathematik, Lehrbriefe. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1955.

[2] ASSER: Einführung in die mathematische Logik. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1965.

[3] Autorenkollektiv: Einführung in die Algebra, Arithmetik und Zahlentheorie, Lehrbriefe. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam, 1965.

[4] Autorenkollektiv: Probleme des Mathematikunterrichts. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965.

[5] BREHMER/APELT: Einführung in die Analysis, Lehrbriefe. Herausgeber: Pädagogische Hochschule Potsdam.

[6] ENGELS: Anti-Dühring, Marx-Engels-Werke Band 20 Dietz Verlag, Berlin 1962.

[7] GÖRKE: Mengen–Relationen–Funktionen. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1965.

[8] HASSE: Grundbegriffe der Mengenlehre. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966.

[9] HEITSCH: Zu Problemen der logischen Antinomien. Deutsche Zeitschrift für Philosophie, Jahrgang 1969.

[10] KLAUA: Allgemeine Mengenlehre Akademie-Verlag, Berlin 1964.

[11] KLAUS: Moderne Logik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964.

[12] KLAUS/BUHR: Philosophisches Wörterbuch. VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1969.

[13] KÖNIG: Mathematische Sätze und ihre Umkehrungen. In: Mathematik in der Schule, Jahrgang 1968, Heft 12, Seite 891.

[14] LENIN: Aus dem Philosophischen Nachlaß. Dietz Verlag, Berlin 1961.

[15] LINDNER: Grundbegriffe der Mengenlehre und Aussagenlogik. Stuttgart 1966.

[16] Autorenkollektiv: Mathematik. Lehrbücher für die Klassen 1 bis 10. Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1968 bis 1971.

[17] LUGOWSKI/WEINERT: Grundzüge der Algebra.
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1957.

[18] NESCHKOWSKI: Probleme des Unendlichen.
Vieweg-Verlag, Braunschweig 1967.

[19] SCHOLZ/HASENJÄGER: Grundzüge der mathematischen Logik.
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961.

[20] SEGETH: Elementare Logik.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966.

[21] STARKE/TÜRKE: Fachtheoretische Grundlagen des Geometrieunterrichts und methodische Hinweise zur Unterrichtsgestaltung.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1971.

[22] TARSKI: Einführung in die mathematische Logik.
Verlag Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1966.

[23] VARGA: Mathematische Logik für Anfänger — Aussagenlogik.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1970.

[24] VARGA: Mathematische Logik für Anfänger — Prädikatenlogik.
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin 1972.

[25] ASSER: Grundbegriffe der Mathematik, Band 1.
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.

Sachverzeichnis

Abbild 12
Abbildung 156
— aus ... auf ... 158
— aus ... in ... 156, 161
— aus ... in sich 157
—sbegriff 156
—svorschrift 165
— von ... auf ... 158
— von ... in ... 158
Eindeutige — 160
Eineindeutige — 161
Identische — 164
Inverse — 163
Nacheindeutige — 160
Umkehr— 163
Verkettung von —en 173
Voreindeutige — 160
ABEL
—sche Halbgruppe 312
Abgeschlossenheit 226, 231
Ableitung 84
Abstraktionsprozeß 199
Abtrennungsregel 80
Verallgemeinerte — 83
Addition
— in N 225, 284
— in R 286
— in R^* 261
—ssystem 244
Assoziativität der — 148, 226, 235, 287
Kommutativität der — 227, 236, 262, 287
Monotonie der — 239, 270, 295
Umkehrung der — 229, 240
Ähnlichkeit 203, 224
Allgemeingültig 27, 28
—er Ausdruck 79
Alternative 44, 148, 166
Schluß auf eine — 85
Schluß aus einer — 85
Analogie 200
—schluß 200
Annahme 96, 98
Widerspruch zur — 98
Antinomie 129
BURALI-FORTIsche — 129
Erste CANTORsche — 129
RUSSELLsche — 106, 129
Äquivalenz 49, 59, 166
—klasse 196, 224
—relation 178, 195, 224
Hauptsatz für —relationen 196
Prädikatenlogische — 66, 68, 69
Schluß auf eine — 87
Schluß aus einer — 87
Semantische — 56
Argument 37, 162
Arithmetisches Mittel 257
Assoziativität 57
— der Addition 226, 235, 287
— der Multiplikation 231, 241, 266, 291
Aufhebungsregel 80
Ausdruck 53
Äquivalenter — 59
Allgemeingültiger — 67, 79
Aussagenlogischer — 53
Prädikatenlogischer— 64

Aussage 25
  All— 26, 65
  —form 27, 28
  —nfunktion 36, 165
  —nkalkül 53
  —nlogik 76
  —nlogische Identität 55, 58
  —nlogische Kontradiktion 55
  —nlogische Neutralität 54
  —nlogische Operation 52
  —nlogischer Ausdruck 53
  —nlogischer Schluß 76
  —nlogisches Gesetz 76
  —nlogisches Schließen 75
  —nvariable 27, 30
  —nverbindung 35
  Eindeutigkeits— 99
  Einzel— 26, 64
  Existential— 26, 65
  Existenz— 99
  Extensionale —nfunktion 37
  Folgerungs— 73
  Implikation von —formen 72
  Klassische —nfunktionen 37
  Negierte — 99
  Partikuläre — 65
  Umformen von —formen 30
  Universal— 26, 65
Axiom 16, 224
  Auswahl— 1. Stufe 110, 130
  —atische Mengenlehre 103
  — der vollständigen Induktion 220
  —ensystem 130
  Definition durch —e 18, 223
  Extensionalitäts— 115, 116, 130
  Mengenbildungs— 106, 130
  PEANOsches —ensystem 219, 223
  Unendlichkeits— 108, 130, 179

Bedingung
  Hinreichende — 73, 126
  Notwendige — 73, 126
Begriff 15, 199
  Abbildungs— 156
  —sbestimmung 16
  —sgewinnung 111
  —sverschiebung 138
  Folgerungs— 71
  Gleichheit von —en 119
  Grund— 16, 104
  Identität von —en 119
  Inhalt des —es 16
  Interferierende —e 138
  Isomorphie— 201, 202
  Konträre —e 141
  Koordinierte —e 141
  Mengen— 103, 104
  Relations— 182
  Subordination von —en 128
  Umfang des —es 16
Behauptung 90, 98
  Induktions— 222
  Negation der — 96, 98
BERNSTEIN 217
  Satz von — 217
Bestimmbarkeit 287
Bestimmtheit 235, 240
Betrag 298
Beweis 71, 75, 84
  — durch Verifikation 96
  —methode 71
  —verfahren 89
  Direkter — 90
  Eindeutigkeits— 226
  Existenz— 89, 225
  Indirekter — 41, 85, 89, 98
  Induktiver — 221
Beziehung
  Art-Gattung-— 110
  Aus-folgt-— 73, 121
  Element— 104
Bild 157
  — der Funktion 168
  Folge von diskreten —punkten 271
  Ur— 157
Bildungsvorschrift 300
Bruch 252
  —strich 272
  Dezimal— 276
  Zehner— 274

CANTOR 102, 103
  —sche Mengendefinition 103

DEDEKIND
  Endlichkeitsdefinition von — 179
  Rechtfertigungssatz von — 234
Definition 16, 18
  — durch Axiome 18, 223
  —sbereich 24, 162, 186
  Endlichkeits— 179, 221

Explizite — 17
Genetische — 18
Implizite — 18
Induktive — 18
Real— 17
Rekursive — 18
Sach— 17
DE MORGANsche Regeln 60
Dichtheit **256**, **282**
Differenz
—engleichheit **278**
— gebrochener Zahlen **262**, **264**
— natürlicher Zahlen **228**
— rationaler Zahlen **287**
— von Mengen **142**, 145
Disjunkt 136, 138
Disjunktion **45**, 217
Diskrete Bildpunkte 271
Diskrete Punkte 112
Diskrete Punktmenge 112
Distributivität **241**, **266**, **291**
Beiderseitige — **58**, 148
Linksseitige — 232, 266
Rechtsseitige — 58, 148, **232**, 241
Divergenz **308**
Dividend **282**
Division
— durch Null 308
— in N **233**, **234**, **243**
— in R **292**
— in R^* **267**
Divisor **282**
Dreiermenge 108, 218
Durchschnitt **134**, 137, 145, 148
— von Relationen 185

Eigenschaft 105
— geordneter Paare 184
Eindeutigkeit 38, **160**
—saussage 99
—sbeweis 226
Ein— **161**
Nach— **160**
Umkehrbare — **161**
Vor— 160
Einer 245
—menge 108, 218
Einheitsstrecke 272
Einsetzungsregel **60**
Element
Eins— 307
—beziehung 104
— des geordneten Paares **158**
—fremd 136
Neutrales — 234
Null— **307**
Reguläre —e **210**
Reproduzierendes — **234**
Entscheidbarkeit 104
Erfüllbarkeit **27**, 28, **54**
Erfüllung
—sgrundmenge 27
—smenge 27
Ersetzbarkeitstheorem **60**
LEIBNIZsches — 116
Existentialoperator 66
Existenz
—aussage 99
—beweis 89, **226**
—quantor 66
Extensionalität
—saxiom 115, 116

Faktor **229**
Falsch 25
FERMAT 180
Folge
Divergenz einer Zahlen— **303**
Endstück der — 302
Endliche — **167**
— von diskreten Bildpunkten 271
Fundamental— **305**
Glied der — 167, **300**
Grenzwertgleichheit von Fundamental—n **307**
Konvergenz einer Zahlen— **303**, **304**
Null— **302**
Positive — 307
Unendliche — **167**, 180, 300
Zahlen— **167**
Zweier— 300
Folgerung **73**
—saussage **73**
—sbegriff 71
Schluß— 76
Funktion **162**
Äq-— 166
Aussagen— 36, 165
Bild der — **168**
Et-— 166
Extensionale Aussagen— 37
—sbereich **162**
—sgleichung 165
—swert **162**
Graph der — **168**
Inverse — **164**
Klassische Aussagen — **37**
Leere — **175**

Lineare — 171
Logische — 52
Non- — 166
N-stellige — 165
Operationen mit —en 170
Quadratische — 173
Reellwertige — 170
Seq- — 166
Umkehr— 164, 170
Vel- — 166
Verkettung von —en 173
Wahrheits— 88, 166
Funktor 39

Gauss 222
Gegensatz 41, 48
Generalisator 66
Generalisierung 65
Gleichheit 116, 187
Anzahl— 120
Differenzen— 278
— der Vorgänger 220
— gebrochener Zahlen 254
— geordneter Mengen 208
— geordneter Paare 158
— natürlicher Zahlen 287
— rationaler Zahlen 282
— von Begriffen 119
— von Mengen 117
Grenzwert— von Fundamentalfolgen 307
Quotienten— 250
Rest— 198
Struktur— 202
Umfangs— 115
Gleichmächtigkeit 120, 177, 224
— von Mengen 120, 259
Gleichung 31
Funktions— 165
Un— 31
Glied
— der Folge 167, 300
— des geordneten Paares 158
Graph
— der Funktion 168
— des Kreuzproduktes 154
Größter gemeinsamer Teiler 206, 207, 208
Grundbereich 23, 104
Gruppe 314, 315
Abelsche Halb— 312
Halb— 312, 315
Reguläre Halb— 312

Hintereinanderausführung 174

Identität 28, 43, 109, 116
Aussagenlogische — 55, 58
Extensionale — 119
— von Begriffen 119
Intensionale — 119
Prädikatenlogische — 67
Implikation 46, 166
— von Aussageformen 72
Materiale — 47
Schluß auf eine — 86
Schluß aus einer — 86
Index 300
Individuenbereich 104
Individuenkonstante 65
Individuenvariable 64
Individuum 64
Induktion
Axiom der vollständigen — 220
—sanfang 221, 222
—sbehauptung 222
—sbeweis 221
—sschritt 222
—svoraussetzung 222
Inklusion 121
— von Mengen 121, 126, 127, 193
Intervall 112, 169
Isomorphie 201, 202, 257, 268

Kante
Gerichtete — 190
Kategorie 17
Klasse 14, 34
Abstraktions— 215
Äquivalenz— 196, 224
—neinteilung 178, 215
— höherer Stufe 15
— von Individuen 14
— von Klassen 15
Rest— 199
Teil— 34
Kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches 206, 207, 208
Kommutativität 57, 148
— der Addition 227, 236, 262, 287
— der Multiplikation 232, 242, 266, 291
Komplement
—ärmenge 132, 133, 134
— einer Menge 132
— einer Teilmenge 132
Konjunktion 42, 148, 165
Schluß auf eine — 85
Schluß aus einer — 85

Konklusion 76
Konnexität 188
Konstante 28
Individuen— 65
Prädikaten— 65
Kontinuum 181
—shypothese 181
—smächtigkeit 181, 309
—sproblem 181
Kontradiktion 28, 43, 109, 141
Aussagenlogische — 55
Kontraposition 48
—ssätze 59
Konvergenz 303, 304
Konversion 48
Körper 314, 315
Halb— 314, 315
KURATOWSKI 152

LEIBNIZ
—sches Ersetzbarkeitstheorem 116
Liegt links von 247
Liegt zwischen 256, 257
Limes 303
Linearität 188
Logarithmieren 308
Logik 11
Aussagen— 76
Prädikaten— 64
Prädikaten— 1. Stufe 67
Zweiwertige — 11, 26
Logisch
—e Negation 41
—e Operation 35
—er Schluß 71
—er Widerspruch 43
—es Schließen 71
— gleichwertig 48
Lösung
—sgrundmenge 27
—smenge 27

Mächtigkeit 120
Kontinuums— 181, 309
— von Mengen 120, 178
Von höherer — 178, 181
Von niederer — 178, 181
Menge 102, 106, 310
Abzählbare — 180, 260, 284
Abzählbare Teil—n 260
Ähnliche —n 202, 203
All— 108
Auswahl— 110
Axiomatische —nlehre 103
CANTORsche —ndefinition 103
Differenz von —n 142, 145
Diskrete Punkt— 112
Dreier— 108, 218
Durchschnitts— 135, 137, 145
Echte Ober— 123
Ecgte Teil— 123
Einer— 108, 218
Endliche — 108, 179, 224
Erfüllungsgrund— 27
Erfüllungs— 27
Geordnete — 192, 202
Gleichheit geordneter —n 203
Gleichheit von —n 114, 116, 119
Gleichmächtigkeit von —n 120
Grund— 23
Inklusion von —n 121, 126, 127, 198
Kardinalzahl einer — 178, 215
Komplementär— 132, 133, 134
Komplement einer — 132
Komplement einer Teil— 132
Kreuz— 153
Leere — 107, 119, 134
Lösungsgrund— 27
Lösungs— 27
Mächtigkeit von —n 178
— aller geordneten Tripel 155
— 3. Stufe 107
— 1. Stufe 106, 119
—nbegriff 104
—nbildung 103, 111
—nbildungsaxiom 106
—nfamilie 107
—noperation 131, 136, 139, 143
—nprodukt 184
—nsystem 107, 224
— nullter Stufe 107
—nvergleich 115, 116, 117
— 2. Stufe 107
Null— 107
Ober— 121
Ordnung in einer — 254, 281, 294
Potenz— 128, 190
Produkt— 184
System von Teil—n 198
Teil— 121, 122, 257
Teil—nrelation 196
Überabzählbare — 180
Unendliche — 108, 179

Unter —	121
Vereinigungs —	138, 141, 145
Vollständige —	308
Wohlgeordnete endliche —	224
Zweier —	108, 218
Metasprache	12
Metatheorie	12
Minuend	228
Modul	312, 315
Halb —	311, 315
Regulärer Halb —	311
Modus ponens	80
Modus tollens.	80
Monotonie	300
Beiderseitige —	209
Linksseitige —	209
— der Addition	239, 270, 295
— der Multiplikation	242, 270, 295
— der Subtraktion	239
— einer Folge	300
Rechtsseitige —	209
Multiplikation	206
Assoziativität der —	231, 241, 266, 291
Kommutativität der —	232, 242, 266, 291
Monotonie der —	242, 270, 295
— in N	206, 230, 240
— in R	290
— in R^*	265
Umkehrung der —	243, 267
Nachbereich	157
— der Relation	186
Nachfolger	217, 219
—relation	185
Nachglied	47
Negat	40
Negation	41, 166
Dialektische —	41
Logische —	41
— der Behauptung	96, 98
Schluß auf eine —	85
Schluß aus einer —	85
Neutralität	28, 109
Aussagenlogische —	54
N-Tupel	155
Null	
Division durch —	308
—element	307
—folge	302
Rationale Zahl —	280
Nummer	300
Objekt	12
—sprache	12
Operation	166
Algebraische —	207, 224
Aussagenlogische —	52
Assoziative —	208
Binäre —	205
Distributive —en	209
Kommutative —	208
Logische —	41
Mengen —	131, 136, 139
—en mit Funktionen	170
— in einer Menge	205, 206
—smerkmal	208
—streue	201
—szeichen	23
Monotone —en	209
Prädikatenlogische —	65
Rechen —	131, 224
Rechen — 1. Stufe	229
Rechen — 2. Stufe	229
Reguläre —en	210
Umkehr —en	211, 264, 267, 288
Unbeschränkt ausführbare —	207
Vollständige —	207
Operator	65
All —	66
Existential —	66
Ordnung	189
Gegen —srelation	202
Irreflexive Halb —srelation	192, 198
Irreflexive —srelation	191, 239, 255, 282
Irreflexive Wohl —srelation	192
Natürliche An —	219
— in einer Menge	254, 281, 294
—srelation	189, 193, 247
—stypus	205
—szahl	205
Reflexive Halb —srelation	192
Reflexive —srelation	192, 194, 237
Reflexive Wohl —srelation	192
Teilmengen —	257
Wohl —	192
Wohl —srelation	217
Paar	
Eigenschaft geordneter —e	184
Geordnetes —	152
—bildung	156
Partikularisator	66

Partikularisierung 65
PEANO 219
—sches Axiomen-
system 219, 228
Permanenzprinzip 258, 268
Permutation 164, 173
Pfeil 156, 190
—diagramm 158
Potenz
—ieren in N 206
—menge 128, 190
Prädikat 64
—enkonstante 65
—enlogik 64
—enlogik 1. Stufe 67
—enlogische Äqui-
valenz 68
—enlogische Identität 67
—enlogische Opera-
tionen 65
—enlogischer Ausdruck 64
—enlogisches Schlie-
ßen 87
Prämisse 58, 76
Produkt
Kreuz— 158
Mengen— 184
— gebrochener Zahlen 264
—menge 184
— natürlicher Zahlen 229, 230
— rationaler Zahlen 289
Punkt
Anfangs— 271
Diskrete —menge 112
End— 271
Folge von diskreten
Bild—en 271

Quadrieren 207
Quantifikation 29
Quantifikator 65
Quantifizierung 65
Quantor 65
All— 66
Existenz— 66
Quotient
—engleichheit 250
— gebrochener Zahlen 266, 267
— natürlicher Zahlen 232, 233
— rationaler Zahlen 290

Radizieren
— in N 206
— in P 308
Reflexivität 116, 178, 187
Ir— 187
Regularität 210
Beiderseitige — 210
Linksseitige — 210
Rechtsseitige — 210
Rekursionsformel 234
Relation 114, 178, 182,
184
Äquivalenz— 178, 195, 224
Definitionsbereich
der — 186
Durchschnitt von —en 185
Gegenordnungs— 202
Hauptsatz für Äqui-
valenz—en 196
Identische — 186
Inverse — 186
Irreflexive Halb-
ordnungs— 192
Irreflexive Ordnungs— 191, 239, 255,
282
Irreflexive Wohl-
ordnungs— 192
Kleiner-— 239, 254, 269,
282
Kleiner-gleich-— 216, 287
Kongruenz— 198
Leere — 186
Nachbereich der — 186
Nachfolger— 185
N-stellige — 186
Null— 186
Ordnungs— 189, 193, 247
Reflexive Halb-
ordnungs— 192
Reflexive Ordnungs- 192 194, 287
Reflexive Wohl-
ordnungs— 192
—sbegriff 182
—streue 202
—szeichen 23
Teilmengen— 193
Vereinigung von —en 185
Vorbereich der — 186
Wertebereich der — 186
Wohlordnungs— 217
Repräsentant 196, 307
—ensystem 199
—enunabhängigkeit 217, 272
Ring 314, 315
Halb— 313, 315
Kommutativer Halb— 313
Kommutativer regulä-
rer Halb— 313
Regulärer Halb— 313
RUSSELL 129
Endlichkeitsdefinition
von — 179, 221
—sche Antinomie 106, 129

Satz 92
Rechtfertigungs — für induktive Beweise 221
Rechtfertigungs — von DEDEKIND 234
— vom ausgeschlossenen Dritten 25, 45, 67
— vom ausgeschlossenen Widerspruch 25, 43
— von BERNSTEIN 217
Umkehrung eines —es 93, 99
Schließen 75
Aussagenlogisches — 76
Logisches — 71
Prädikatenlogisches — 87
Schluß
Analogie — 200
Aussagenlogischer — 76
Gültige —regel 77
Ketten — 82
Logischer — 71
Richtiger — 77
— auf eine Alternative 85
— auf eine Äquivalenz 87
— auf eine Implikation 86
— auf eine Konjunktion 85
— auf eine Negation 85
— auf „es gibt ein" 89
— auf „für jedes" 89
— aus einer Alternative 85
— aus einer Äquivalenz 87
— aus einer Implikation 86
— aus einer Konjunktion 85
— aus einer Negation 85
— aus „es gibt ein" 89
— aus „für jedes" 89
—figur 77
—folgerung 76
—regel 76, 84, 88
Zwingender — 77
Schranke 301
Größte untere — 301
Kleinste obere — 301
Obere — 301
Untere — 301
Struktur 315
Algebraische —en 311, 315
Subordination 128
Substitution 59
Subtrahend 228
Subtraktion 206
— in N 228, 240
— in R 288
— in R^* 264
Summand 225
Summe 225
— der natürlichen Zahlen 222, 225
— gebrochener Zahlen 260
— rationaler Zahlen 285
Syllogismus 89
Symbol 252, 280
Symmetrie 116, 178, 187
Anti — 188
A — 188
System
Additions — 244
Axiomen — 130
Binär — 246
Dekadisches Positions- 245
Dual — 246
M-adisches Positions — 244, 245
Mengen — 224
Positions — 245
Repräsentanten — 199
Stellenwert — 245, 297
— von Teilmengen 198

Term 22
Umformen von —en 30
Wert des —s 24
Theorie 12
Meta — 12
Transitivität 82, 116, 178, 187
Regel der — der Implikation 82
Trichotomie 192, 217, 239
Tripel
Geordnetes — 155
Menge aller geordneten — 155

Überlagerung 138
Umformung 59
Umkehrung 93, 99, 229, 243
Unterordnung 128
Unverträglichkeit 46

Variable 28
Abhängige — 165
Aussagen — 27, 30
Freie — 27, 65
Gebundene — 29, 67
Individuen — 64
Unabhängige — 164
—nbelegung 23
—neinsetzung 23
—ninterpretation 23

Venndiagramm 112
Verallgemeinerung 89
Vergleichbarkeit 190
Vereinigung 138, 141, 145, 148
— von Relationen 185
Verifikation 96
Verkettung 174
— von Abbildungen 173
— von Funktionen 173
Verneinung 35, 40
Doppelte — 41, 59
Vertreter 196
Vollständigkeit 308
Voraussetzung 76, 90, 98
Induktions— 222
Widerspruch zur — 96, 98
Vorbereich 157
— der Relation 186
Vorderglied 47
Vorgänger
Gleichheit der — 220

Wahr 25
Wahrsheitsfunktion 38, 166
Wahrheitswert 26
—tabelle 54
Wert
Funktions— 162
Grenz— 308
Grenz—gleichheit von Fundamentalfolgen 307
Stellen— 245, 272
Stellen—system 245, 297
—ebereich 162, 186
—verlaufsgleichheit 48, 56
Zahlen— 272
Widerlegung 71
Widerspruch
Dialektischer — 43
Logischer — 43
Satz vom ausgeschlossenen — 43
— durch Verneinung 43
— zur Annahme 98
— zur Voraussetzung 96, 98

Zahl
Betrag einer rationalen — 295
Dezimale Schreibweise für gebrochene —en 273
Differenz gebrochener —en 262
Differenz natürlicher —en 228
Differenz rationaler —en 287
Divergenz einer —enfolge 308
Endliche Kardinal— 216, 224
Endliche Ordinal— 224
Endliche reelle —enfolge 167
Ganze — 250, 310
Gebrochene — 252, 256, 310
Gerade natürliche — 110
Gleichheit gebrochener —en 254
Gleichheit natürlicher —en 287
Gleichheit rationaler —en 282
Grund— 245
Kardinal— 215
Kardinal— einer Menge 178, 215
Konvergenz einer —enfolge 308, 304
Natürliche — 223, 224, 248, 310
Natürliche — Null 218, 219, 220
Negative rationale — 280
Ordinal— 205
Positive rationale — 280
Positive reelle — 307
Produkt gebrochener —en 264
Produkt natürlicher —en 229, 230
Produkt rationaler —en 289
Produkt reeller —en 308
Quotient gebrochener —en 266
Quotient natürlicher —en 232, 233
Quotient rationaler —en 292
Rationale — 250, 279, 310
Rationale — Null 280
Reelle — 307, 310
Repräsentant einer reellen — 307
Summe gebrochener —en 260
Summe natürlicher —en 222, 225
Summe rationaler —en 285
Summe reeller —en 308
Unendliche reelle —enfolge 167

—enbereich	249
—enfolge	167, 300
—engerade	297
—enstrahl	247, 271
—enwert	272
—zeichen	252, 280
Zeichen	12, 244
Grund—	53
Operations—	23
Relations—	23
Technisches —	23
Vor—	294, 295
Zahl—	252, 280
—reihe	52
Zerlegung	198
Ziffer	22, 244
Arabische —	244
Grund—	244, 245, 272
M-adische —	245
Zirkelfehlerprinzip	130
Zuordnung	156
—svorschrift	156, 165
Zweiwertigkeit	25
Prinzip der —	25, 46