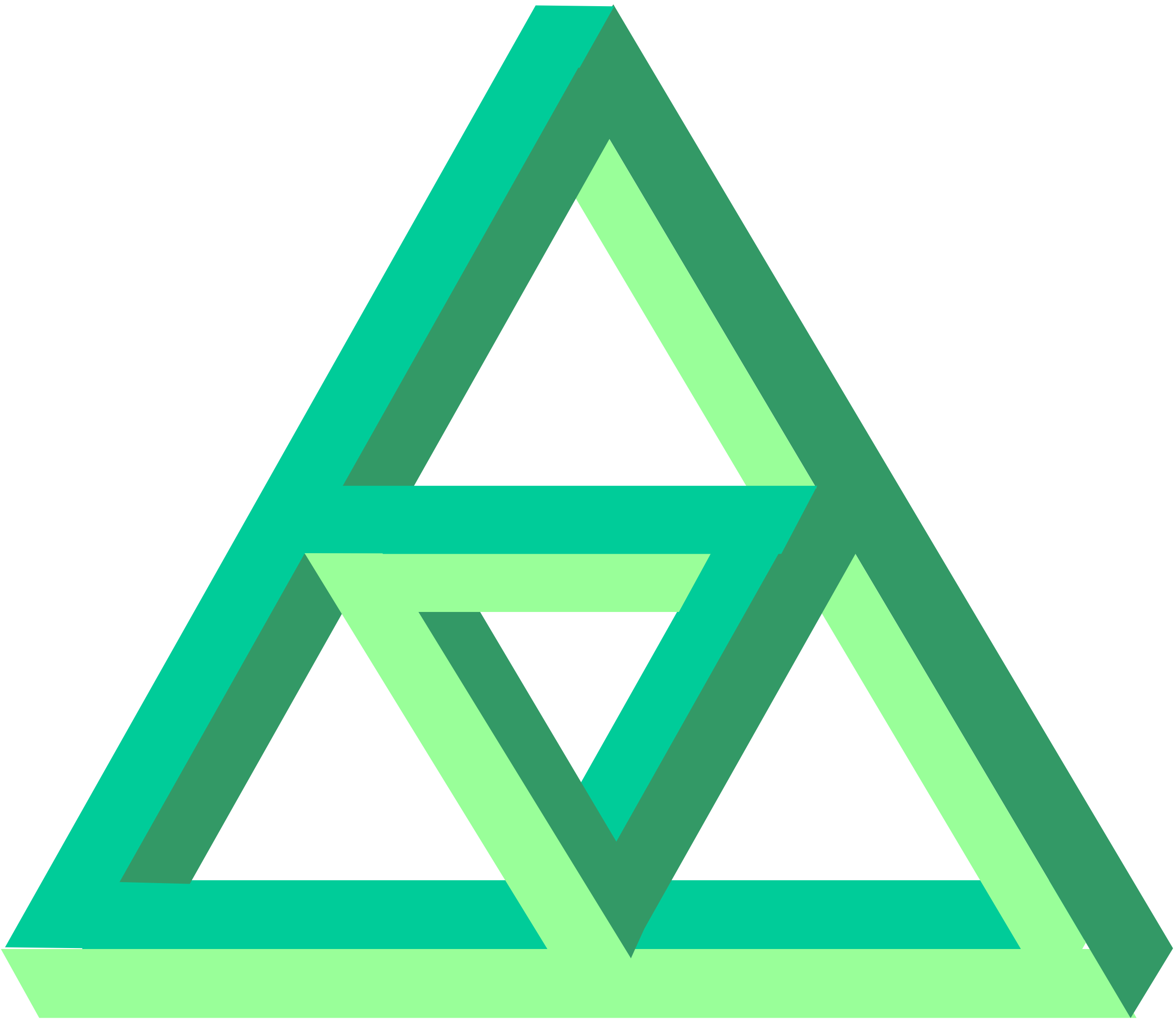
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 2 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 9 / 2020 19. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 2

Aufgabe 2-1[1]. Es sollen Dreiecke mit zufällig ausgewählten Seitenlängen konstruiert werden. Mit einem Spielwürfel werden die Seitenlängen ermittelt, wobei die jeweils geworfene Augenzahl die Länge einer Seite in cm angibt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus drei nacheinander gewürfelten Zahlen a, b und c ein Dreieck mit den Seitenlängen a cm, b cm und c cm konstruiert werden kann.

Lösungshinweis: Es gibt genau 6 Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichseitigen Dreiecks zu würfeln: (1, 1, 1), ..., (6, 6, 6).

Es gibt unter Beachtung der Dreiecksungleichung genau folgende Möglichkeiten, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln:

für die Basislänge 1 sind alle Seitenlängen von 2, 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 2 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 3 sind alle Seitenlängen von 2, 4, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 4 sind alle Seitenlängen von 3, 5, 6 möglich,
für die Basislänge 5 sind alle Seitenlängen von 3, 4, 6 möglich,
für die Basislänge 6 sind alle Seitenlängen von 4, 5 möglich.

Insgesamt sind es 5 + 4 + 4 + 3 +3 + 2 = 21 Kombinationen. Für ein Tripel (a, b, b) mit $a \neq b$ gibt es aber drei verschiedene Wurffolgen, sodass es insgesamt $3 \cdot 21 = 63$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines gleichschenkligen (aber nicht gleichseitigen) Dreiecks zu würfeln.

Es bleiben noch die Möglichkeiten, bei denen die Seitenlängen paarweise verschieden sind. Dazu betrachte man zunächst die Tripel, bei denen die Zahlen der Größe nach aufsteigend angeordnet sind. Unter Beachtung der Dreiecksungleichung sind es 7 Tripel:

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6) und (4, 5, 6).

Für jedes der Tripel (a, b, c) gibt es aber 6 verschiedene Wurffolgen, sodass es $6 \cdot 7 = 42$ Möglichkeiten gibt, die Seitenlängen eines solchen Dreiecks zu würfeln.

Insgesamt liefern 6 + 63 + 42 = 111 Wurffolgen die Seitenlängen eines Dreiecks. Da es $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ verschiedene Wurffolgen gibt, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Erwürfeln der Seitenlängen eines Dreiecks

$$\frac{111}{216} = \frac{37}{72} \approx 51{,}4\% . \qquad \square$$

[1] Diese Aufgabe wurde in der 1. Stufe der 53. MO in Klassenstufe 9/10 gestellt: MO531016

Hinweis: Anstatt alle zulässigen Wurffolgen zu suchen, können natürlich auch die Wurffolgen angegeben werden, bei denen aus den entsprechenden Seitenlängen kein Dreieck gebildet werden kann, weil die Dreiecksungleichung nicht gilt. Auch hierbei bietet sich die Fallunterscheidung wie oben an, um die Vielfachheit der Zahlenkombinationen systematisch zu erfassen.

Alle 6 regelmäßigen Dreiecke sind konstruierbar.
Es gibt 9 Zahlenkombinationen, aus denen (wegen Verletzung der Dreiecksungleichung) kein Dreieck konstruiert werden kann:

(1, 1, 2), ..., (1,1,6), (2, 2, 4), ..., (2, 2, 6), (3, 3, 6)

Da jede dieser Kombination in 3 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $9 \cdot 3 = 27$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

Es gibt 13 Zahlenkombinationen aus paarweise verschiedenen Zahlen, aus deren Zahlen kein Dreieck mit den entsprechenden Seitenlängen konstruiert werden können:

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6),
(1, 4, 5), (1, 4, 6), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 3, 6), (2, 4, 6)

Da jede dieser Kombination in 6 verschiedenen Reihenfolgen auftreten kann, sind somit aus den Zahlen von $13 \cdot 6 = 78$ Kombinationen keine Dreiecke konstruierbar.

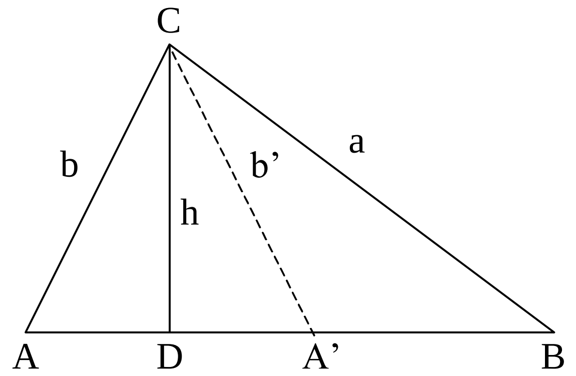
Insgesamt gibt es also $27 + 78 = 105$ Kombinationen mit dieser Eigenschaft, also

$$\frac{105}{216} = \frac{35}{72} \approx 48{,}6\% \,.$$

aller möglichen Kombinationen beim Würfeln mit 3 Würfel.

Aufgabe 2-2. Die Zahlen 12, 13 und 15 sind – in irgendeiner Reihenfolge – Maßzahlen zweier Seiten und der Höhe über der dritten Seite eines Dreiecks. Man ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Es sei *ABC* ein geeignetes Dreieck und die Seiten *a* und *b* sowie die Höhe *h* von *C* auf *AB* haben die genannten Maßzahlen. Da sowohl im rechtwinkligen Teildreieck *ADC* als auch im rechtwinkligen Teildreieck *DBC* jeweils *h* eine Kathete ist, muss *h* in beiden Fällen kleiner sein als die zugehörigen Hypotenusen *b* bzw. *a*.



Folglich gilt für die Maßzahl der Höhe $h = 12$.

Sei nun o.B.d.A. $b = 13$. Dann gilt wegen des Satzes des Phytagoras im Dreieck ADC für die Länge $\overline{AD} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ und im Dreieck DCB für die Länge $\overline{DB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Also lautet die Maßzahl der dritten Seite für das Dreieck ABC (mit Höhe h innerhalb des Dreiecks) 9 + 5 = 14 und für das Dreieck $A'BC$ (mit Höhe h außerhalb der Dreiecksfläche) 9 – 5 = 4. Damit gilt für die Maßzahl des gesuchten Flächeninhalts

$$A_{ABC} = \frac{12 \cdot 14}{2} = 84 \quad \text{bzw.} \quad A_{A'BC} = \frac{12 \cdot 4}{2} = 24. \qquad \square$$

Aufgabe 2-3[2]. Es sei $s = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Man berechne s^2 und s^3 und gebe für s einen rationalen Wert an!

(*Hinweis:* Die Wurzelwerte dürfen nicht durch Näherungswerte ersetzt werden.)

Lösungshinweise: Man setze $s = u + v$ mit $u = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}$ und $v = \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Wegen $14\sqrt{2} < 14 \cdot 1{,}42 < 20$ sind u und v positive Zahlen.

(*Hinweis:* Solche groben Abschätzungen sind zulässig, um ohne Taschenrechner die Ungleichungen zu bestätigen.) Dann gilt

$$u^3 + v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) + (20 - 14\sqrt{2}) = 40$$

und weiter nach der binomischen Formel

$$u^3 \cdot v^3 = (20 + 14\sqrt{2}) \cdot (20 - 14\sqrt{2}) = 20^2 - (14\sqrt{2})^2 = 8.$$

Also gilt $u \cdot v = 2$.Weiterhin gilt stets

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

Setzt man nun die ermittelten Werte ein, so findet man die kubische Gleichung

$$s^3 - 6s - 40 = 0.$$

Eine Lösung $s_1 = 4$ findet man durch Probieren. Somit lässt sich die Gleichung durch Abspalten des Linearfaktors $(s - 4)$ umformen zu

$$s^3 - 6s - 40 = (s - 4) \cdot (s^2 + 4s + 10).$$

Wegen $s^2 + 4s + 10 = (s + 2)^2 + 6 \geq 6 > 0$ ist erkennbar, dass es keine weiteren reellwertigen Lösungen geben kann. Der gesuchte rationale Wert für s beträgt somit 4, die Potenzen entsprechend $s^2 = 16$ und $s^3 = 64$. $\square$

[2] MO-Klassiker: MO011043 (1961/62)

Hinweis: Es ist erforderlich, nach allen Lösungen der kubischen Gleichung zu suchen. Es ist zwar offensichtlich, dass es nur einen Wert für s geben kann. Infolge der Umformungen könnten aber Scheinlösungen entstehen, die erst durch eine Probe (hier im Sinne von Abschätzungen) ausgeschlossen werden können. Da aber nur eine reellwertige Lösung existiert, ist diese auch (ohne Probe) die Lösung der Aufgabe.

Lösungsvariante: Aufgrund der speziellen Struktur der Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen kann man nach Werten für a und b suchen, für die gilt:

$$20 \pm 14\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^3.$$

Nach Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich findet man das Gleichungssystem:

$$a^3 + 6 \cdot a \cdot b^2 = 20$$

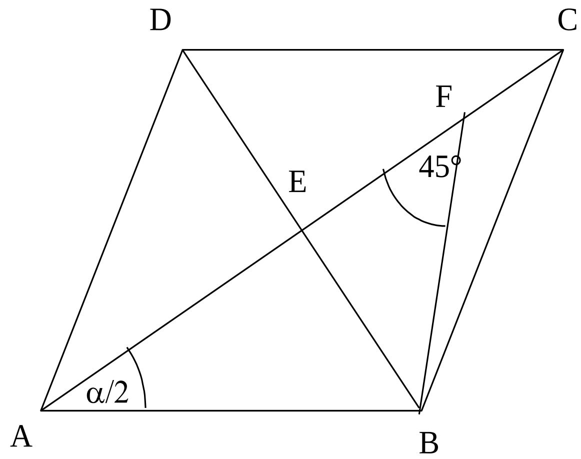
$$3 \cdot a^2 \cdot b + 2 \cdot b^3 = 14$$

Für die Lösungsfindung durch Probieren suche man zunächst positive ganzzahlige Werte für a und b. Wegen $2 \cdot b^3 \geq 16$ für $b \geq 2$ kann nur $b = 1$ gelten. In diesem Fall ist $a = 2$ zu erkennen. Also gilt

$$s = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{2}\right)^3}\,.$$

Da die Ausdrücke in den Klammern positiv sind, ergibt sich unmittelbar die Lösung $s = 4$.

Aufgabe 2-4[3]. Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α. Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$.



Lösungshinweise:
Analyse: Im Rhombus gilt für die Diagonalen stets:

- sie halbieren einander,
- sie stehen senkrecht aufeinander
- sie halbieren je zwei gegenüber liegende Innenwinkel.

Ist E der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $ABCD$, so gilt also

[3] MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)

Das Dreieck *ABE* ist also rechtwinklig und die Summe seiner Kathetenlängen ist gleich $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$. Ist *F* der Punkt auf dem von *A* ausgehenden Strahl durch *E* mit $\overline{AF}=\frac{1}{2}\cdot(e+f)$, so ist das Dreieck *BEF* ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse *BF*, da $\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{EB}\right|=\frac{1}{2}\cdot f$. Daher gilt $\angle EFB=45°$.

Konstruktion: Man konstruiert ein Dreieck *AFB* aus der Seite *AF* der Länge $\frac{1}{2}\cdot(e+f)$ und den Winkeln $\angle AFB=45°$ und $\angle BAF=\frac{1}{2}\cdot\alpha\,(<90°)$. Danach konstruiert man die Spiegelpunkte *D* von *B* an der Geraden g_{AF} und *C* von *A* an der Geraden g_{BD}.

Beweis: Jedes derart konstruierte Viereck *ABCD* ist ein Rhombus der verlangten Art, denn wegen der Konstruktion gilt

$$\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{AD}\right|,\quad \left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BC}\right| \text{ und } \left|\overline{BC}\right|=\left|\overline{CD}\right|.$$

Also ist *ABCD* ein Rhombus. Es sei weiterhin *E* der Fußpunkt des Lotes von *B* auf g_{AC}. Wegen $\angle BAF<90°$ liegt *E* auf *AF*. Wegen $\angle EFB=\angle AFB=45°$ ist auch $\angle EBF=45°$ und daher $\left|\overline{BE}\right|=\left|\overline{EF}\right|$. Da *E* der Diagonalenschnittpunkt im Rhombus *ABCD* ist und wegen

$$\frac{1}{2}\cdot(e+f)=\left|\overline{AF}\right|=\left|\overline{AE}\right|+\left|\overline{EF}\right|=\left|\overline{AE}\right|+\left|\overline{EB}\right|$$

ist $e+f$ die Summe der Diagonalenlängen in *ABCD*. Wegen

$$\angle BAD=\angle BAF+\angle FAD=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}=\alpha$$

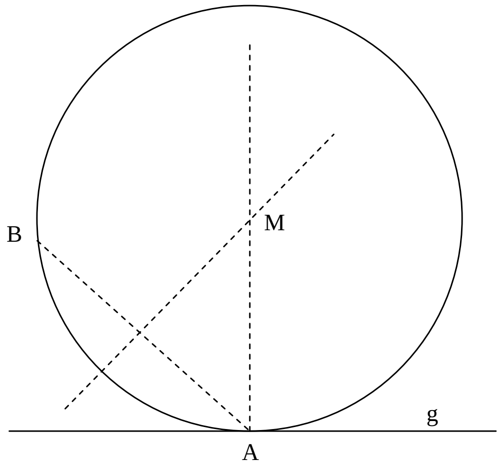
ist auch die Bedingung $\angle BAD=\alpha$ erfüllt.

Existenz und Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist für jeden positiven Wert von $e+f$ und für jede Winkelgröße $\alpha<180°$ stets auf genau eine Weise ausführbar. Für $\alpha\geq 180°$ ist die Konstruktion nicht ausführbar. Es gibt dann keinen Rhombus, der allen geforderten Bedingungen genügt. ❑

Aufgabe 2-5A. Von einem Kreis sind zwei Punkte *A* und *B* und eine Tangente *g* gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

(a) der Punkt *A* auf *g* liegt.
(b) die Gerade durch *A* und *B* parallel zu *g* ist.
(c) die Gerade durch *A* und *B* die Tangente *g* in einem Punkt *S* schneidet, der von *A* und *B* verschieden ist.

(*Hinweis:* Aus den Teilaufgaben (b) und (c) ist ersichtlich, dass A und B voneinander verschiedene Punkte sind, weil sonst keine Gerade definiert wäre. Es wäre aber besser gewesen, im Aufgabentext explizit von "zwei voneinander verschiedenen Punkten A und B" zu schreiben.)



Lösungshinweise
(a) *Analyse:* Liegt der Punkt A auf der Tangente g, so ist A der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente und der Mittelpunkt M liegt auf der Senkrechten in A zu g. Zudem befindet sich der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten der Sehne AB.

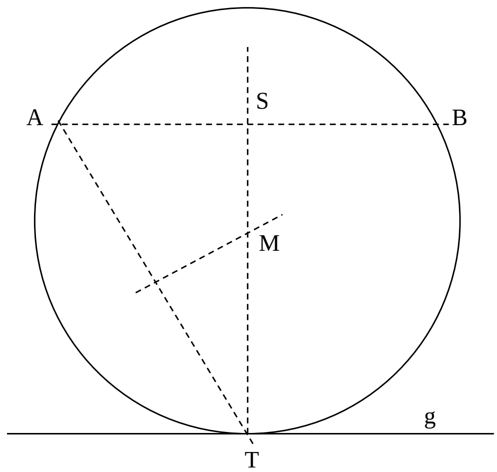
Konstruktionsbeschreibung:

- Man errichte in A die Senkrechte zu g.
- Man verbinde A und B und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte.
- Der Schnittpunkt M beider so konstruierten Geraden ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius $r = \overline{MA} = \overline{MB}$.

Existenz und Eindeutigkeit: Liegt der Punkt B nicht ebenfalls auf der Tangente, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar. Liegt dagegen der Punkt B auf der Tangente, hätte der Kreis zwei verschiedene Berührungspunkte mit dieser Tangente, d.h. in diesem Fall existiert kein Kreis, der die Aufgabenstellung erfüllt.

(b) *Analyse:* Ist die Gerade durch A und B parallel zur Tangente g, so liegt der Kreismittelpunkt M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, deren Schnittpunkt mit g der Punkt T sei. Da T ebenfalls ein Punkt auf der Kreisperipherie ist, liegt M auch auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AT}$.

Konstruktionsbeschreibung:

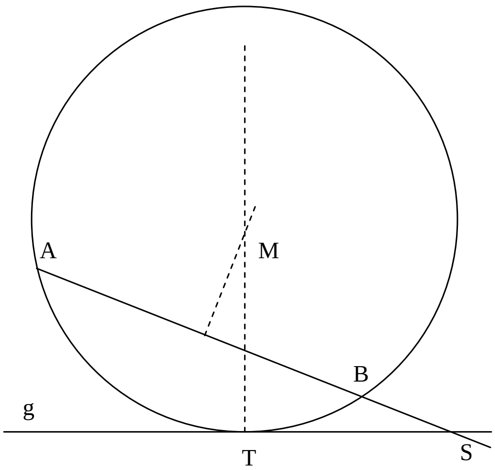


- Man verbinde A und B und errichte auf der Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Tangente sei T, ihr Fußpunkt sei S.
- Man verbinde A und T und errichte auf der Strecke $\overline{AT}$ die Mittelsenkrechte, deren Schnittpunkt mit der Geraden durch S und T sei M.
- Der Punkt M ist der gesuchte Kreismittelpunkt, sein Radius beträgt $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$.

-

Existenz und Eindeutigkeit: Da die Punkte *A* und *B* nicht auf der Tangente *g* liegen, ist der Mittelpunkt stets und eindeutig konstruierbar.

(c) *Analyse:* Angenommen, *T* sei der Berührungspunkt des Kreises mit der Tangente *g*. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz $\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$. Es genügt also, die Länge $\overline{ST}$ zu konstruieren (z.B. mit Hilfe des Höhensatzes in rechtwinkligen Dreiecken). Ist *T* bekannt, so ist der Kreismittelpunkt *M* der Schnittpunkt der Senkrechten zu *g* in *T* und der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.



Konstruktionsbeschreibung:

- In einer Hilfskonstruktion ist auf einer Geraden *h* ein Punkt *S’* zu markieren, auf der einen Seite von *S’* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SA}$ (man erhält den Punkt *A’*), auf der anderen Seite von *S’* auf *h* eine Strecke der Länge $\overline{SB}$ abzutragen (man erhält den Punkt *B’*). Um den Mittelpunkt *M’* der Strecke $\overline{A'B'}$ wird ein Kreis mit dem Radius $r' = \overline{M'A'} = \overline{M'B'}$ geschlagen (Thales-Kreis). Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *h* in *S’* mit der Kreislinie sei *T’*.
- Mit dem Radius $r^* = \overline{S'T'}$ wird auf der Tangente *g* um *S* ein Kreisbogen geschlagen, der *g* in *T* schneidet. Der Schnittpunkt der Senkrechten auf *g* in *T* und der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ ist der Schnittpunkt *M* des gesuchten Kreises.
- Der Radius des gesuchten Kreises ist $r = \overline{MT} = \overline{MA} = \overline{MB}$

Existenz und Eindeutigkeit: Liegen *A* und *B* auf verschiedenen Seiten von *g*, so existiert kein Kreis, der die Bedingungen erfüllt, da in diesem Fall die Tangente den Kreis schneiden würde.

Andernfalls ist die Konstruktion stets ausführbar, da die Punkte *A* und *B* wegen der Voraussetzungen nicht auf *g* liegen können. Der Kreisbogen um *S* schneidet *g* in *2* Punkten („links“ und „rechts“ von S). Daraus resultieren zwei voneinander verschiedene Lösungen der Aufgabe. Verläuft die Gerade durch A und B senkrecht zur Geraden g, so sind diese beiden Lösungen spiegelbildlich.

Beweis: Wie die Analyse zeigte, erfüllt der in (a) bis (c) gefundene Mittelpunkt die jeweiligen Bedingungen der Aufgabenstellungen. ❑

Aufgabe 2-5B.

(a) Unter 52 natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Summe oder deren Differenz durch 100 teilbar ist.
(b) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 7 sind 51 Punkte markiert. Es ist zu zeigen, dass es unter diesen Punkten stets drei gibt, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius 1 liegen.
(c) In einem regelmäßigen Neuneck sei jede Ecke entweder rot oder grün gefärbt. Je drei Ecken des Neunecks bestimmen ein Dreieck. Ein solches Dreieck heiße rot bzw. grün, wenn seine Ecken alle rot bzw. alle grün sind. Man beweise, dass es bei jeder derartigen Färbung des Neunecks mindestens zwei verschiedene kongruente Dreiecke gleicher Farbe gibt[4].

Lösungshinweise: Die Lösungen können mittels Schubfachprinzip gefunden werden.

(a) Man wähle 51 Schubfächer mit den Resten 0 bei Division durch 100, (Reste 1 oder 99) bei Division durch 100, (Reste 2 oder 98) bei Division durch 100 usw. bis Rest 50 bei Division durch 100. Sind 52 natürliche Zahlen gegeben, so werden mindestens 2 von diesen einem der Schubfächer zugeordnet. Haben beide den gleichen Rest, so ist deren Differenz durch 100 teilbar, haben sie dagegen einen unterschiedlichen Rest, so ist deren Summe durch 100 teilbar.

(b) Man zerlege das Quadrat in $5 \times 5 = 25$ kongruente Teilquadrate der Seitenlänge 1,4. Nach dem Schubfachprinzip befinden sich in mindestens einem dieser Teilquadrate mindestens 3 Punkte. Ein solches Teilquadrat hat eine Diagonale mit der Länge von $1{,}4 \cdot \sqrt{2} < 1{,}4 \cdot 1{,}42 = 1{,}988 < 2$. Folglich kann das Teilquadrat von einem Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt werden. Damit liegen auch die 3 Punkte im Innern dieses Kreises.

(c) Von den Ecken des regelmäßigen Neunecks haben bei Aufteilung auf zwei Farben nach dem Schubfachprinzip mindestens 5 dieselbe Farbe. Man betrachte 5 derartige Eckpunkte gleicher Farbe. Man kann mit diesen Ecken als Endpunkte $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Strecken bilden. Die Mittelsenkrechte zu jeder dieser 10 Strecken geht durch den Umkreismittelpunkt des Neunecks und durch eine weitere Ecke, weil das Neuneck regelmäßig und von ungerader Eckenzahl ist.

Nach dem Schubfachprinzip gehen also mindestens 2 der 10 Mittelsenkrechten durch den gleichen Eckpunkt. Die zugehörigen Endpunkte der Strecken (sie seien *A* und *B* bzw. *C* und *D*) bilden folglich die Ecken eines achsensymmetrischen Trapezes *ABCD* mit den parallelen Seiten *AB* und *CD*. Die beiden verschiedenen und gleichfarbigen Dreiecke *ABC* und *ABD* sind aufgrund

[4] Aufgabe 1 der 2. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 1993.

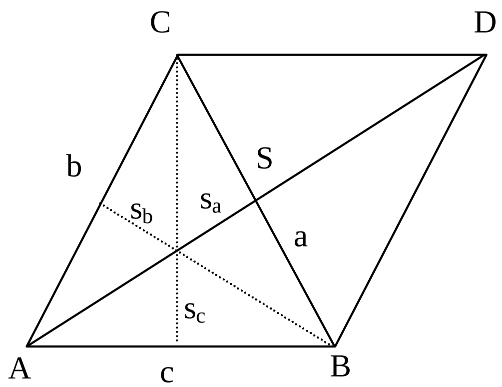
der Symmetrie des Trapezes kongruent. Damit ist die Behauptung bewiesen. (Es gibt sogar ein weiteres Paar von Dreiecken der geforderten Art, nämlich *ACD* und *BCD*.) ❑

Ergänzung zu (b): Es erscheint naheliegend, dass Quadrat zunächst in $7 \cdot 7 = 49$ Teilquadrate zu zerlegen. Jedes dieser Teilquadrate ist natürlich durch einen Kreis mit dem Radius 1 überdeckbar. Es müsste nun aber erst nachgewiesen werden, dass bei einer Überdeckung des Quadrates in jedem der verwendeten Kreise bereits mindestens 2 Punkte liegen. Für eine beliebige Lage der Punkte wird dies schwieriger sein als mit der oben dargestellten Anwendung des Schubfachprinzips.

Abstand eines Punktes zu den Dreieckseckpunkten

Zur 2. Mathematik-Olympiade 1962/63 wurde in der 4. Runde der Klassenstufe 10 folgende Aufgabe gestellt:

MO021045. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.



Lösungshinweise: Sind *A, B, C* die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen der Seiten *a, b, c* und Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen

$$s_a + s_b + s_c < a + b + c\,.$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, eine der drei Relationen zu beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.

Ist *D* der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch *C* mit der Parallelen zu g_{AC} durch *B* (der Punkt *D* existiert, weil die Seiten *c* und *b* nicht parallel sind), so ist das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm. Daher gilt $|BD| = |CA| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von *AD* als auch von *BC*. Folglich ist *AS* Seitenhalbierende von ΔABC und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|AD| = 2 \cdot |AS| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck ΔABD mit den Seitenlängen *c*, *b* und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. ❑

Ergänzung: Man findet in Formelsammlungen über Zusammenhänge in allgemeinen Dreiecken für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten *a*, *b*, *c* die Gleichung $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen, kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $\quad 64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $\quad 8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Man erkennt jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Geht man aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$|b - a| < c$$

$$b^2 - 2ab + a^2 < c^2$$

$$2 \cdot \left(b^2 + a^2\right) - c^2 < b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2$$

$$s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + b^2\right) - c^2} < \frac{a + b}{2}$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

In der 50. Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks *ABC* ist ein Punkt *D* beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ mit *x*, *y*, *z* und die Länge des Umfangs des Dreiecks *ABC* mit *u*. Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählt man für *D* den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$$\tfrac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) < u\,,$$

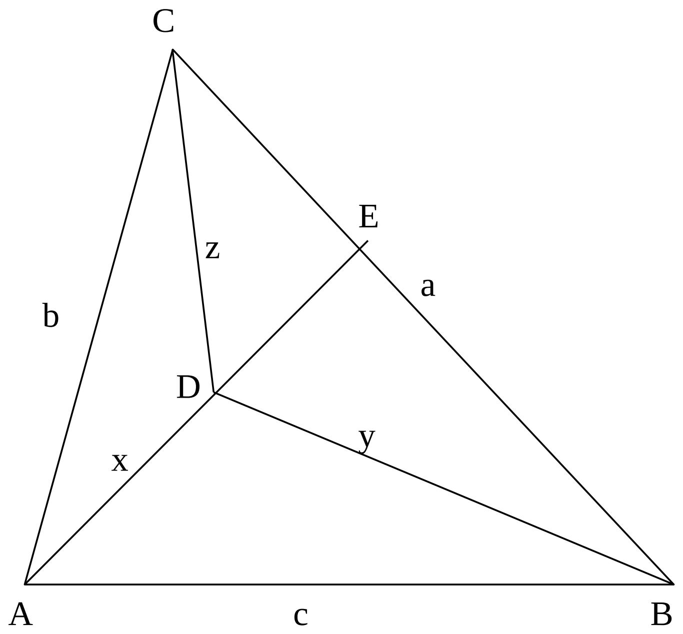
also $\quad s_a + s_b + s_c < \tfrac{3}{2}u\,.$

In Aufgabe MO021045 wurde aber ja bereits eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob die Ungleichung dieser MO-Aufgabe sehr grob ist.

Betrachtet man beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1, so beträgt die Abstandsumme zu den Eckpunkten für den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählt man dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachtet man jedoch ein gleichschenkliges Dreieck *ABC*, dessen Grundseite *AB* sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählt man als Punkt den Eckpunkt *C*, so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Man kann also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

Lösungshinweise: Es sei *D* ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit *x, y* und *z* bezeichnet.



Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

$$a < y + z$$
$$b < x + z$$
$$c < x + y$$

Zusammenfassend erhält man die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z\,.$$

Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichne man den Schnittpunkt der Geraden durch *A* und *D* mit der Seite *BC* mit *E*. Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck *AEC* folgt.

$$x + \left|\overline{DE}\right| < b + \left|\overline{CE}\right|$$

also $\quad x + \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{BE}\right| < b + \left|\overline{CE}\right| + \left|\overline{BE}\right| = b + a\,.$

Wegen $y < \left|\overline{DE}\right| + \left|\overline{BE}\right|$ aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck *BED* ergibt sich die Ungleichung $x + y < a + b$. Analog können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. ❑

Thema 1 – Funktionalgleichungen[5]

In der 1. Runde der diesjährigen Mathematik-Olympiade wurde folgende Aufgabe gestellt:

MO601016. Max hat eine Rechenvorschrift festgelegt, durch die je zwei rationalen Zahlen *x* und *y* eine rationale Zahl z zugeordnet wird. Er schreibt dafür *z* = *x#y*. (Die Zahl *z* wird also mit Hilfe einer Formel aus *x* und *y* berechnet.)

Anschließend stellt er fest, dass für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung

$$a + (b\#c) = (a\#b) + (a\#c) \qquad (1)$$

gilt.

a) Geben Sie eine Rechenvorschrift für *x#y* an, die nur die vier Grundrechenarten +, −, ·, : als Rechenarten verwendet, sodass (1) erfüllt ist.
   Zeigen Sie, dass die Gleichung (1) für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* durch diese Rechenvorschrift tatsächlich erfüllt wird.
b) Zeigen Sie: Wenn für beliebige rationale Zahlen *a, b, c* die Gleichung (1) gilt, dann gilt für die Rechenvorschrift von # die Formel aus a).

Statt des allgemeinen Symbols # hätte auch eine Funktion *f* verwendet werden können[6], die zwei rationalen Zahlen *x* und *y* einer rationalen Zahl *z* zuordnet. Dann sind alle Funktionen *f* mit $f(x,y) = z$ für rationale Zahlen *x, y, z* gesucht, die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$a + f(b,c) = f(a,b) + f(a,c).$$

Gibt es eine Lösungsstrategie für solche Aufgaben?

[5] Wir beginnen eine Themenreihe, die sich jeweils an aktuellen Aufgaben der Mathematik-Olympiade orientieren. Ziel wird es sein, mit ähnlichen Aufgabenstellungen die Nachbereitung des Wettbewerbs zu fördern und somit das Finden erfolgversprechender Lösungsstrategien zu trainieren.

[6] Mit der Umschreibung der Rechenvorschrift durch das Symbol # wird die Diskussion um mathematische Hintergründe zum Funktionsbegriff umgangen, der auch hier nicht dargestellt werden soll.

Als die bekannteste Gleichung dieser Art gilt die Cauchysche Funktionalgleichung, für die für alle rationalen Zahlen x und y gilt:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

Durch Einsetzen spezieller Argumente gelingt es, Eigenschaften der Funktion f zu finden, die schließlich zu Lösungen führen.

Setzt man in die Funktionalgleichung $x=y=0$, so folgt daraus, dass $f(0)=2\cdot f(0)$ gilt, also $f(0) = 0$.

Für $y=-x$ ergibt sich $f(x)=-f(-x)$ und wir sehen, dass alle Lösungen der Funktionalgleichung ungerade Funktionen sind.

Für $x = y$ ergibt sich $f(2\cdot x)=2\cdot f(x)$. Setzt man jetzt $y=2\cdot x$ so ergibt sich $f(3\cdot x)=f(2\cdot x)+f(x)=3\cdot f(x)$. Man vermutet schnell, dass wohl $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt und überprüft dies mit der Methode der vollständigen Induktion. Da wir wissen, dass die gesuchten Funktionen alle ungerade sind, kann man diese Beziehung auch auf alle ganzen Zahlen ausweiten. Damit wissen wir also, dass $f(z)=f(1)\cdot z$ für alle $z\in Z$. Es wäre schön, wenn man diese Beziehung auch auf noch größere Zahlenbereiche ausdehnen kann. Für rationale Zahlen $x=p/q$ mit $p,q\in Z, q\neq 0$ gilt, $q\cdot x=p\cdot 1$ und somit $f(q\cdot x)=f(p\cdot 1)$ oder nach Umformen $f(x)=f(1)\cdot x$ Setzt man $f(1) = c$ (c beliebig reell), so gilt für alle Lösungen der Funktionalgleichung für alle rationalen Zahlen x:

$$f(x)=c\cdot x$$

Eine Probe bestätigt, dass diese Funktion die geforderte Funktionalgleichung erfüllt :

$$f(x+y)=c\cdot(x+y)=c\cdot x+c\cdot y=f(x)+f(y).$$

Aufgabe. Man finde alle Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x und y definiert sind und folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x+y)+2\cdot f(x-y)+f(x)+2\cdot f(y)=4\cdot x+y.$$

Lösunghinweise: Zunächst setze man $x = y = 0$. Dann reduziert sich die gegebene Gleichung zu $6\cdot f(0)=0$, also $f(0) = 0$. Setzt man nun lediglich $y = 0$ und lässt x beliebig, so findet man $4\cdot f(x)=4\cdot x$, also $f(x) = x$ für alle reellen x. Die Probe bestätigt diese Funktion als Lösung. ❑

Erhält man durch spezielle Belegungen einen „Lösungskandidaten“, so ist eine Probe unbedingt notwendig, denn die Erfüllung der Funktionalgleichung muss für alle x und y gelten.

Aufgabe. Man finde alle Funktionen *f* mit

a) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2+y^2$
b) $f(x+y)+f(x-y)=x^2+2\cdot xy+y^2$

Lösungshinweise: Die Substitution $y = 0$ führt unmittelbar sowohl in Aufgabe (a) als auch in Aufgabe (b) für alle reellen Zahlen x zur Gleichung

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2}.$$

In Aufgabe (a) bestätigt die Probe die Richtigkeit. Dagegen erfüllt diese Funktion nicht die Bedingung (b), d.h. es gibt keine Lösung zu (b).

Natürlich führen solche einfachen Substitutionen nicht immer zum sofortigen Erfolg. Geringe Änderungen in der Funktionalgleichung können beträchtliche Wirkungen haben!

Aufgabe. Man finde alle Funktionen *f* mit

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)-2\cdot f(y)=y-2$$

Lösungshinweise: Setzt man $x = y = 0$, findet man $f(0) = 1$. Allerdings führt $y = 0$ und x beliebig ebenfalls „nur“ zu $f(0) = 1$. Versucht man dagegen $x = 0$ und y beliebig, so erhält man

$$-2\cdot f(-y)-f(y)=y-3.$$

Noch immer treten zwei verschiedene Argumente auf! Ersetzt man nun y durch $-y$ (da die Gleichung ja für alle Zahlen gelten muss), so führt dies zu

$$-2\cdot f(y)-f(-y)=-y-3.$$

Damit ist ein Gleichungssystem mit den zwei Variablen $f(y)$ und $f(-y)$ gegeben, deren Lösung $f(y) = y + 3$ lautet. (Probe!)

Versuchen wir nun die Substitutionsmethode bei der Gleichung (1)

$$a+f(b,c)=f(a,b)+f(a,c).$$

Aus $a = b = c = 0$ folgt $0 + f(0,0) = f(0,0) + f(0,0)$ und somit $f(0,0) = 0$.

Aus $a = b = c$, aber beliebig, folgt $a + f(a,a) = f(a,a) + f(a,a)$, also $f(a,a)=a$.

Aus $b = c$ finden wir für beliebiges a die Gleichung $a + f(b,b) = f(a,b) + f(a,b)$ und somit wegen $f(b,b) = b$ die Lösung

$$f(a,b)=\frac{a+b}{2}.$$

Es muss nun noch in einer Probe gezeigt werden, dass diese Funktion die Rechenvorschrift erfüllt:

$$a + f(b,c) = a + \frac{b+c}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} = f(a,b) + f(a,c).$$

Bekannte Sätze der Mathematik

Satz. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational [7].

Beweis: Man nehme an, $\sqrt{2}$ sei rational. Dann gibt es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Nach Quadrieren beider Seiten gilt $2 \cdot n^2 = m^2$. Jeder Faktor der Primfaktorenzerlegung von n^2 und von m^2 kommt in einer geraden Anzahl vor, also auch die Primzahl 2. Der Faktor 2 tritt aber im Widerspruch dazu auf der linken in ungerader Anzahl auf. Somit ist es nicht möglich, dass $\sqrt{2}$ rational ist, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational. ❑

Satz. Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier rationalen Zahlen ist stets rational.

Beweis: Sind r_1 und r_2 zwei rationale Zahlen, die sich als $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ bzw. $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit geeignet gewählten ganzen Zahlen m_1, m_2, n_1 und n_2 darstellen lassen, so gilt

$$r_1 \pm r_2 = \frac{m_1 \cdot n_2 \pm m_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}\ ,\ r_1 \cdot r_2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}\ ,\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot m_2}.$$

Die Zähler und Nenner der Ergebnisbrüche sind offensichtlich wieder ganze Zahlen. Damit sind die Ergebnisse selbst wieder rationale Zahlen ❑

Satz. Die Summe und das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets irrational.

Beweis: Es sei r eine rationale und t eine irrationale Zahl. Man nehme an, dass die Summe $s = r + t$ rational ist. Dann ist aber auch $s - r = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, s sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen.

[7] Eine reelle Zahl r heißt rational, wenn es zwei ganze Zahlen m und n mit $n > 0$ und $r = \frac{m}{n}$ gibt. Andernfalls heißt die Zahl irrational.

Man nehme an, dass das Produkt $p = r \cdot t$ rational ist. Dann ist aber auch $\frac{1}{r}$ und folglich $\frac{p}{r} = t$ rational im Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. die Annahme, p sei rational ist falsch. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Wird die Differenz als Summe mit einem negativen Summanden und der Quotient als Produkt mit dem Reziproken des Faktors interpretiert, ist der Nachweis auch für Differenz und Quotient erbracht.
Die Summe oder das Produkt zweier irrationaler Zahlen kann dagegen eine rationale Zahl ergeben, z.B.

$$\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$$
$$\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)=2$$

Satz. Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen existiert stets mindestens eine rationale und eine irrationale Zahl.

Beweis: Seien r_1 und r_2 rationale Zahlen mit $r_1 < r_2$, dann gilt für die rationale Zahl $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ die Ungleichung $r_1 < r < r_2$.

Die Zahl $t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$ ist nach obigen Aussagen irrational. Außerdem ist wegen $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ stets

$$r_1 < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = t$$

und

$$t = r_1 + (r_2 - r_1)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) < r_1 + (r_2 - r_1)\cdot 1 = r_2 .$$

Also gilt für die irrationale Zahl t die Ungleichung $r_1 < t < r_2$. ❑

Hinweis: Auch bei diesen anschaulich trivialen Aussagen kommt es darauf an, eine solche rationale bzw. irrationale Zahl so konkret anzugeben, dass deren Existenz offensichtlich werden.

Rationale Zahlen

Bei den folgenden Aufgabendiskussionen wird die Irrationalität der Wurzel $\sqrt{N}$ für jede positive ganzzahlige Nichtquadratzahl N als Verallgemeinerung von $\sqrt{2}$ als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe. Es ist zu zeigen, dass $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ irrational ist.

Lösungshinweise: Man nehme an, x sei rational, und versuche, die gegebene Gleichung solange umzuformen, bis nur noch ein Wurzelausdruck in einer

Gleichungsseite verbleibt und sonst nur Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten von rationalen Zahlen auftreten.

$$x-\sqrt{7}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}+7=2+2\cdot\sqrt{10}+5$$
$$x^2-2\cdot x\sqrt{7}=2\cdot\sqrt{10}$$
$$x^2\left(x^2-4\cdot x\sqrt{7}+28\right)=40$$
$$\sqrt{7}=-\frac{\frac{40}{x^2}-x^2-28}{4x}$$

Ist x rational, dann ist die rechte Seite der Gleichung ebenfalls rational im Widerspruch zur Irrationalität der Quadratwurzel der linken Seite. ❑

Die Suche nach vollständigen Quadraten kann bei der Vereinfachung von Wurzelausdrücken hilfreich sein:

Aufgabe. Man zeige die Gleichheit $\sqrt{3+\sqrt{8}}-\sqrt{3-\sqrt{8}}=2$.

Lösungshinweise: Selbstverständlich kann der Beweis nicht mittels Taschenrechner erbracht werden, denn die Gleichheit könnte aufgrund der endlich vielen Anzeigeziffern erzwungen sein! Wegen $\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ sind die Wurzeln alle definiert und die linke Seite ist positiv, sodass quadriert werden darf. Man erhält:

$$3+\sqrt{8}-2\cdot\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)}+3-\sqrt{8}=4$$
$$6-2\cdot\sqrt{3^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=4$$
❑

Die Richtigkeit der Behauptung folgt aber ebenso leicht aus der Beziehung

$$3\pm\sqrt{8}=2\pm2\cdot\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}\pm1\right)^2.$$

Während bei dieser Aufgabe der Vorteil des zweiten Lösungsweges nur gering erscheint, ist der Beweis der Gleichheit

$$\sqrt[3]{1620+12\sqrt{17457}}+\sqrt[3]{1620-12\sqrt{17457}}=18$$

ohne die Erkenntnis $1620\pm12\sqrt{17457}=\left(9\pm\sqrt{33}\right)^3$ wohl nur sehr aufwendig lösbar!

In Gleichungen mit Quadratwurzeln lassen sich im Allgemeinen durch wiederholtes Quadrieren die Anzahl der auftretenden Wurzeln reduzieren, sodass sich die Ausdrücke vereinfachen. Dagegen „verschwinden“

Kubikwurzeln wie in Aufgabe 2-3 nicht so einfach. Hierfür kann der Binomische Lehrsatz geschickt ausgenutzt werden, wie auch folgendes Beispiel demonstriert:

Aufgabe. Man beweise die Gleichheit $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

Nochmals der Hinweis: Die Berechnung der Wurzelausdrücke mittels Rechentechnik ist kein Beweis!

Lösungshinweise: Man setze den linken Ausdruck der Gleichung gleich a und versuche, durch Umformungen den Wert von a einfacher berechnen zu können.

$$\begin{aligned} a^3 &= \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3 \\ &= 5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}\cdot\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)-\left(5\sqrt{2}-7\right) \end{aligned}$$

Diese Umformung erfolgte nach dem binomischen Lehrsatz

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+3xy\cdot(x+y)+y^3$$

Die Differenz der Kubikwurzeln in der mittleren Klammer stimmt aber gerade mit a überein, sodass man die kubische Gleichung $a^3 = 14-3a$ erhält. Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = 2$. Da wegen

$$a^3+3a-14=(a-2)\cdot\left(a^2+a+7\right)$$

und $a^2+a+7=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+6\frac{3}{4}>0$ keine weiteren reellwertigen Lösungen existieren können, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Hinweis: Es gilt $5\sqrt{2}\pm 7=\left(\sqrt{2}\pm 1\right)^3$, woraus sich die Behauptung ohne Schwierigkeiten folgern lässt.

Algebraische und transzendente Zahlen

Für jede rationale Zahl $r=\frac{m}{n}$ (m, n ganzzahlig, $n > 0$) kann man ein Polynom

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n finden, sodass r eine Nullstelle von P ist (d.h. es gilt $P(r) = 0$). Dafür genügt bereits ein Polynom mit Grad 1 (lineare Funktion), denn $P(x)=n\cdot x-m$ erfüllt die Behauptung.

Verallgemeinernd heißt eine reelle Zahl z ***algebraisch***, wenn es ein Polynom $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass z Nullstelle von P

ist. So sind $\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ algebraisch, weil sie Lösungen der Gleichungen $x^2-2=0$ bzw. $x^4-4x^2+1=0$ sind. Ob algebraische Zahlen geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können, hängt jedoch davon ab, ob die Gleichung allein durch die vier Grundrechenarten und das Quadratwurzelziehen aufgelöst werden kann. Bekanntermaßen ist die algebraische Zahl $\sqrt[3]{2}$ (als Nullstelle des Polynoms $P(x)=x^3-2$) nicht auf diese Weise konstruierbar.

Reelle Zahlen, für die es kein solches Polynom gibt, heißen ***transzendent*** (quod algebrae vires transcendit – die Kräfte der Algebra übersteigend)[8]. Bereits LEONHARD EULER (1707 bis 1783) vermutete die Existenz transzendenter Zahlen, doch erst JOSEPH LIOUVILLE (1809 bis 1882) konnte dies nachweisen. Er bewies den Approximationssatz für algebraische Zahlen:

Satz. Ist γ eine algebraische Zahl und $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\cdot x^k$ ein Polynom vom Grade n mit ganzzahligen Koeffizienten, für das die Zahl γ eine Nullstelle ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen p und für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen q stets folgende Abschätzung:

$$\text{Wenn } \frac{1}{q}\ge\left|\gamma-\frac{p}{q}\right| \text{ ist, dann ist } \left|\gamma-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{q^{n+1}}.$$

Anschaulich bedeutet diese Aussage: Wenn man für die algebraische Zahl γ eine rationale Zahl mit hinreichend großem Nenner q als Näherung findet (erste Ungleichung), dann kann die rationale Zahl nicht beliebig nahe an γ kommen (zweite Ungleichung).

Als Anwendung des Approximationssatzes untersuche man die Zahl

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\ldots=0{,}11000100\ldots00100\ldots$$

Angenommen z sei algebraisch und das Polynom, das z als eine Nullstelle besitzt, sei vom Grad n. Man setze im obigen Approximationssatz $\frac{p}{q}=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{10^{k!}}=\frac{A}{10^{m!}}$ mit $m>n+1$ und A als Abkürzung des Zählers beim Zusammenfassen der m Brüche. Da es beim Addieren der Brüche im Zähler keinen Übertrag gibt, gilt $A<0{,}2$. Die Differenz zwischen z und $\frac{p}{q}$ ist kleiner als $\frac{1}{10^{m!}}$. Diese Differenz müsste nun aber größer als $\frac{1}{10^{m!\cdot(n+1)}}$ sein, um den

[8] vgl. Pfister, G.: Transzendente Zahlen. In. Wissenschaft und Fortschritt. Vol. 26 (1976), Heft 7, S. 304-308.

Approximationssatz zu erfüllen. Vergleicht man jedoch die Dezimalbruchentwicklung von z und $\frac{p}{q}$, so erkennt man, dass der Abstand beider Zahlen kleiner ist – somit kann z keine algebraische Zahl sein.

Dass π keine rationale Zahl ist, zeigte bereits 1761 JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728 bis 1777). Sein noch unvollständiger Beweis wurde von ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752 bis 1833) vervollständigt. Erst 1882 bewies FERDINAND LINDEMANN (1852 bis 1939), dass π nicht algebraisch, also transzendent ist. Damit war die Frage nach der Quadratur des Kreises endgültig beantwortet: Zu einem Kreis kann allein mit Zirkel und Lineal kein flächengleiches Quadrat konstruiert werden.

Bundeswettbewerb Mathematik 2021

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn; finanziell wird er gemeinsam vom Bundesministerium für Bildung und Forschung und dem Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft gefördert. Er steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen den Wettbewerb und befürworten die Teilnahme.

Unter **www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein mathematischer Schülerwettbewerb für alle an Mathematik Interessierten. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen muss man zur Teilnahme vor allem auch etwas Ausdauer mitbringen.
In den beiden Hausaufgabenrunden werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen jeweils in etwa zwei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.
In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen. In der dritten Runde, auch Kolloquium genannt, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp

einstündiges Fachgespräch mit einem Mathematiker bzw. einer Mathematikerin aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessieger ausgewählt. Daneben gestalten die Teilnehmenden ein Rahmenprogramm mit ganz unterschiedlichen Beiträgen.“

Die Teilnehmerzahlen[9] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1651 (im Jahr 2010/11).

Schuljahr	**Einsender 1. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Einsender aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2017/18	1370	467 (34,1%)	53 (3,9%)	27 (50,9%)
2018/19	1479	485 (32.8%)	46 (3.1%)	24 (52.2%)
2019/20	1178	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 liegt in Sachsen weit über dem Durchschnitt! Unter den 55 sächsischen Teilnehmern im Schuljahr 2019/20 wurden 12 erste, 2 zweiter und 6 dritte Preise vergeben – fast zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (36.4%, bundesweit 41.5%). Dazu kamen noch 12 Anerkennungsurkunden (21.8%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	**Teilnehmer 2. Runde**	**davon Kl. 9/10***	**Teilnehmer aus Sachsen***	**davon Kl. 9/10****
2017/18	255	76 (29,8%)	12 (4,7%)	3 (25,0%)
2018/19	265	69 (26.0%)	14 (5.3%)	6 (42.9%)
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2019/20 wurden 1 erster und 6 dritte Preise an sächsische Teilnehmer vergeben (also insgesamt 7 der 10 Starter!), darunter 3 Starter aus den Klassenstufen 9 und 10.

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2021 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe liegt als Kopie bei bzw. können Sie beim Fachlehrer für Mathematik oder unter **https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm** erhalten.

[9] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/statistiken veröffentlicht.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler. Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1). Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

Aufgaben Serie 4 (2020/21)

(Einsendungen bis 20. Februar 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de[10])

Aufgabe 4-1. Bestimmen Sie die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2. Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form 2p + 1, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

(5 Punkte)

Aufgabe 4-3. Bestimmen Sie alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgenden Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+y)-2\cdot f(x-y)+f(x)=6\cdot xy-y^2$$ (6 Punkte)

(*Hinweis*: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8 Punkte, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

[10] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit „Re: KZM Serie 4“ bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 4-5A

(a) Entscheiden Sie, ob die Zahl $x=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+.....+2020}}}$ rational oder irrational ist, und begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

(b) Für beliebige natürliche Zahlen x und y sei $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$. Zeigen Sie, dass es

- unendlich viele Paare $(x\,;\ y)$ gibt, so dass z rational ist.
- unendlich viele Paare $(x\,;\ y)$ gibt, so dass z irrational ist. (2 Punkte)

(c) Untersuchen Sie, ob es positive rationale Zahlen t gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen t gibt, geben Sie an, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen t gibt.

(4 Punkte)

Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da der französische Mathematiker PIERRE DE FERMAT (1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Zeigen Sie, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(2 Punkte)

(b) Beweisen Sie: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt. (2 Punkte)

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt? (4 Punkte)

Seminarhinweis

Im Dezember ist wegen der Corona-Beschränkungen kein KZM-Seminar möglich. Auch für März sind wir derzeit nicht zuversichtlich und bereiten deshalb kein KZM-Seminar vor.

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, /www-user.tu-chemnitz.de/~peju/Verein.html VR1380 am Amtsgericht Chemnitz