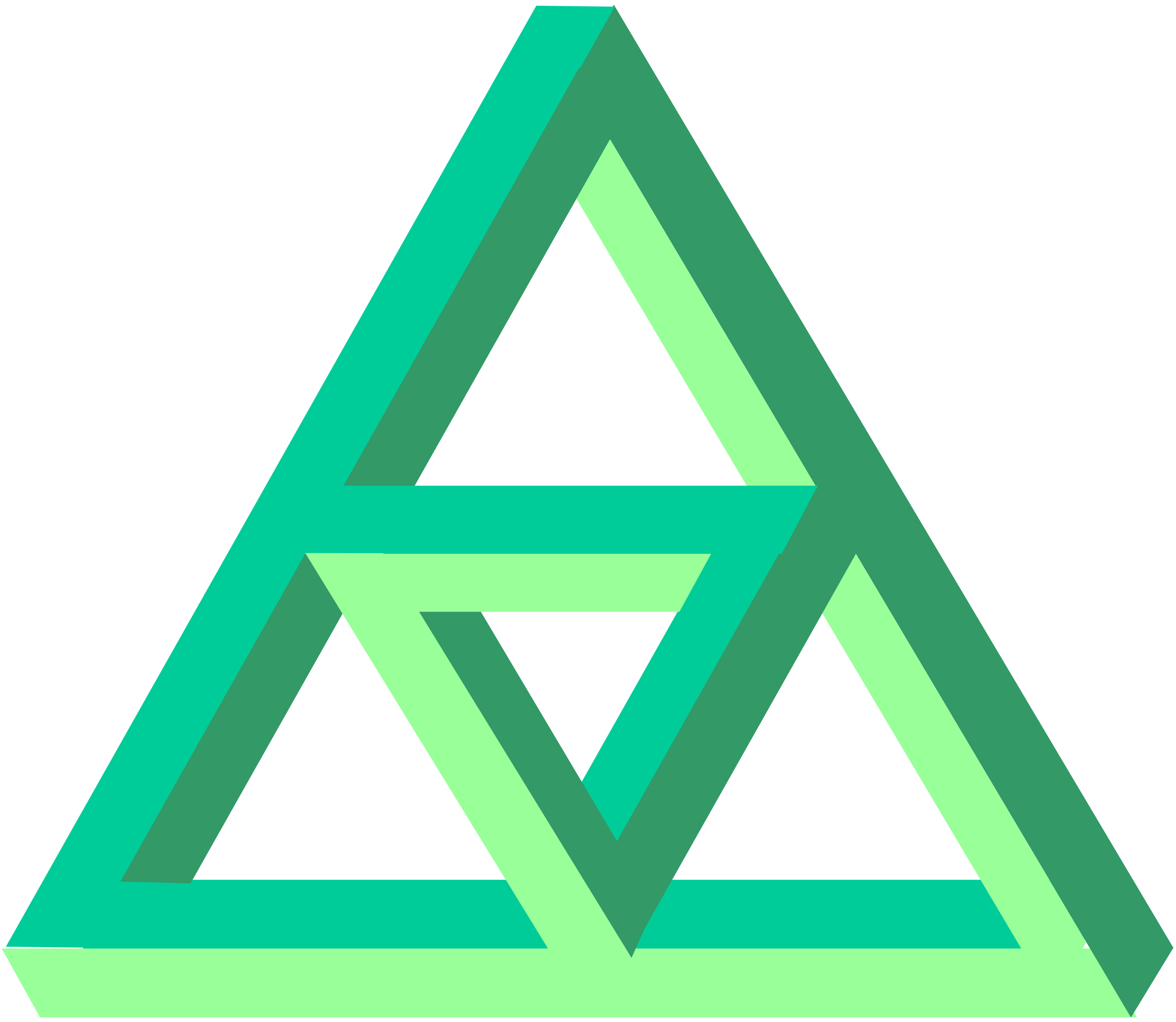
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 3 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 1 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 3

Aufgabe 3-1. Wie viele spitze Innenwinkel kann ein überschneidungsfreies ebenes 2021-Eck höchstens haben?

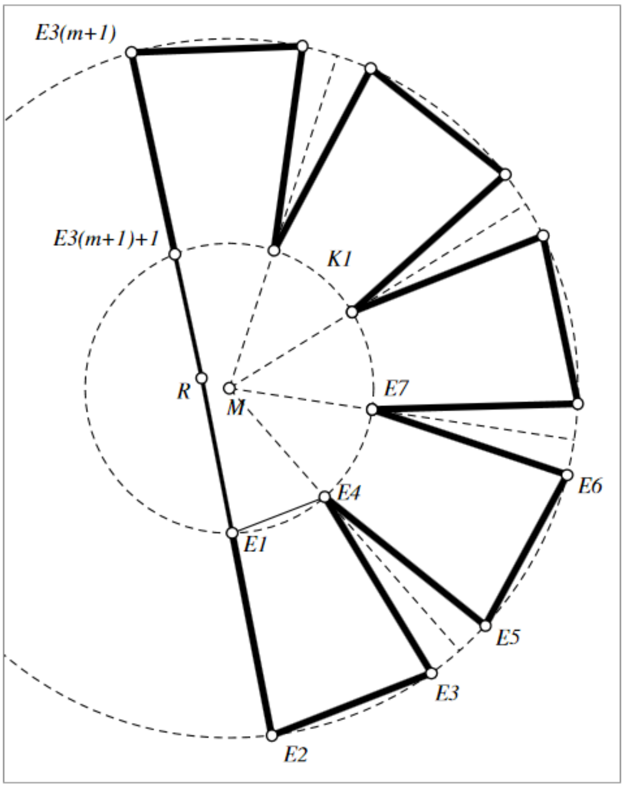
Lösungshinweise[1]*:* Bekanntlich hat ein n-Eck eine Innenwinkelsumme von $(n-2)\cdot 180°$. Wenn von den n Innenwinkeln s Innenwinkel spitz sind (d.h., wenn s Innenwinkel kleiner als 90° sind), dann können wir abschätzen:

$$
\begin{aligned}
& (n-2)\cdot 180° < s\cdot 90° + (n-s)\cdot 360° \\
\Leftrightarrow\quad & 2\cdot(n-2) < s + 4\cdot(n-s) \\
\Leftrightarrow\quad & s < \frac{2}{3}\cdot(n+2)
\end{aligned}
$$

Für $n = 2021$ ergibt sich also

$$s < \tfrac{2}{3}\cdot(2021+2) < 1348{,}7.$$

Somit gilt $s \leq 1348$.



Nun müssen wir zeigen, dass diese Schranke scharf ist, d.h., dass wir die Zahl nicht durch eine kleinere Zahl ersetzen können. Nebenstehende Abbildung zeigt ein Konstruktionsprinzip für ein geeignetes 2021-Eck. Gezeichnet ist es für ein 14-Eck mit den Ecken E_2, E_3, ... E_{15} (also $m = 4$)[2]. Die Punkte der Abbildung $E_{3(m+1)} = E_{15}$, $E_{3(m+1)+1} = E_{16}$, R, E_1 und E_2 liegen auf einer Geraden.

Wählen wir nun $m = 673$, so können wir uns die zugehörige Figur vorstellen. Für diese gilt dann (in Analogie zu $m = 4$): Von den $2021 = 3\cdot 673 + 2$ Innenwinkeln sind 673 Winkel überstumpf ($E4$, $E7$, ...) und $2\cdot 673 + 2 = 1348$ Winkel spitz.

❑

---

[1] Diese Aufgaben wurde im Bundeswettbewerb 2017 (1. Runde) gestellt. Die Lösungshinweise wurden aus https://www.mathe-wettbewerbe.de/bwm/aufgaben entnommen und insbesondere die Abbildung kopiert (dort findet man weitere Lösungsvarianten).

[2] Mit der Variablen m wurde der Beweis in der angegebenen Quelle allgemein geführt und insbesondere dabei für die Eckenzahl eine Fallunterscheidung $3m$, $3m+1$ und $3m+2$ geführt. Für ein 2021-Eck ist also der dritte Fall mit $m = 673$ (weil $2021 = 3\cdot 673 + 2$) zu betrachten. Die in der Abbildung scheinbar überflüssigen Punkte E_{16}, R, E_2 werden in den anderen zwei Fällen berücksichtigt.

Aufgabe 3-2. Gegeben seien 2020 paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, wobei das Produkt von irgend 13 dieser Zahlen stets größer als 1 ist. Kann dann das Produkt aller 2020 Zahlen kleiner als 1 sein?

Lösungshinweise[3]: Wir ordnen die 2020 Zahlen aufsteigend. Da das Produkt der ersten 13 Zahlen größer als 1 ist, muss die 13. Zahl größer als 1 sein. Wegen der Monotonie der Folge sind dann alle weiteren Zahlen ebenfalls größer als 1. Somit ist sowohl das Produkt P_1 der ersten 13 als auch das Produkt P_2 der Zahlen von der 14. bis zur 2020. Zahl größer als 1 und auch das Produkt $P_1 \cdot P_2$ aller 2020 Zahlen. ❑

Aufgabe 3-3. Eine Summe aus 335 paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen hat den Wert 100000.

a) Wie viele ungerade Summanden müssen in der Summe mindestens vorkommen?
b) Wie viele ungerade Summanden können es höchstens sein?

Lösungshinweise[4]: Aus der GAUßschen Summenformel lassen sich folgende Gleichungen ableiten[5]:

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + ... + n) = n \cdot (n + 1)$$
$$1 + 3 + 5 + ... (2n - 1) = (1 + 2 + 3 + ... + 2n) - (2 + 4 + ...+ 2n) = n^2$$

Zu a) Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach der obigen Formel $316 \cdot 317 = 100172 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 316 geraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + ... + 37 + 99 + 2 + 4 + ... + 2 \cdot 315 = 19^2 + 99 + 315 \cdot 316$$
$$361 + 99 + 99540 = 100000$$

Zu b) Die Summe der 317 kleinsten ungeraden Zahlen ist nach obiger Formel $317^2 = 100489 > 100000$. Daraus folgt, dass jede Summe mit 317 ungeraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 316 ungerade Zahlen vorkommen. Die geforderte Summe kann aber nicht genau 316 ungerade Summenden haben: Denn die Summe der 316 kleinsten ungeraden Zahlen hat schon den Wert $316^2 = 99856$, die Summe der restlichen Summanden, also der geraden Summanden, (dies sind $335 - 316 = 19$ Summanden) dürfte dann höchstens den Wert $100000 - 99856 = 144$ haben. Die kleinstmögliche Summe mit 19 geraden positiven Summanden hat aber schon den Wert $19 \cdot 20 = 380 > 144$.

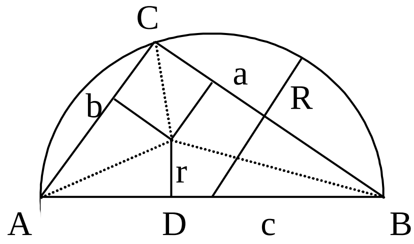
[3] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1991 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1988-1992. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1994, S. 91.3
[4] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 2015 (1. Runde) gestellt.
[5] Im BWM wird hierzu eine ausführlichere Herleitung erwartet.

Die geforderte Summe kann aber auch nicht 315 ungerade Summanden haben: In diesem Fall käme in der Gesamtsumme eine ungerade Anzahl von ungeraden Summanden vor, der Wert der Summe wäre also ungerade und könnte insbesondere nicht den Wert 100000 annehmen.

Es können also nicht mehr als 314 ungerade Summanden sein. Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 314 ungeraden Summanden, z.B.:

$$1 + 3 + 5 + \ldots (2 \cdot 314 - 1) + 2 + 4 + 6 + \ldots + 40 + 984 =$$
$$314^2 + 20 \cdot 21 + 984 = 98596 + 420 + 984 = 10000.$$ ❑

Aufgabe 3-4. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind Umkreis- und Inkreisradius gegeben. Man konstruiere das Dreieck mit Zirkel und Lineal, beschreibe die Konstruktion und begründe ihre Richtigkeit.



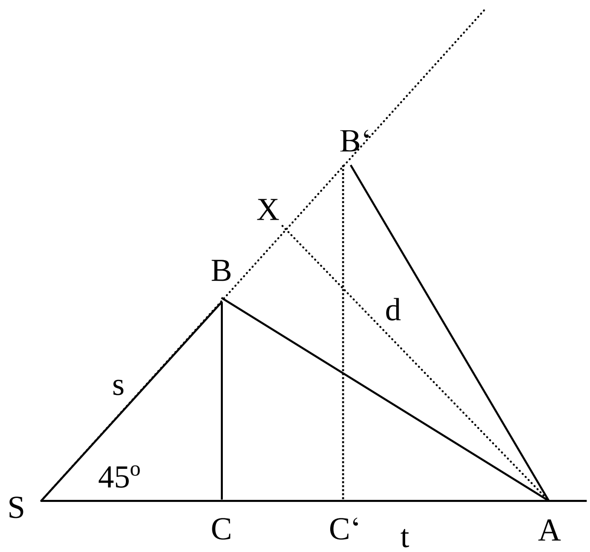
Lösungshinweise[6]*:* Die Bezeichnungen sind aus der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.

Analyse: Da der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks der Thaleskreis über der Hypotenuse c ist, gilt $R = \frac{c}{2}$.

Durch die Lote vom Inkreismittelpunkt auf die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks wird dessen Fläche in ein Quadrat und zwei Drachenvierecke zerlegt.

Wegen $(a-r)+(b-r) = 2 \cdot R$ findet man

(1) $a + b = 2 \cdot r + 2 \cdot R$.



Konstruktionsbeschreibung: (vgl. Abbildung) Man konstruiere (zum Beispiel über die Winkelhalbierende eines rechten Winkels) die Schenkel s und t eines Winkels der Größe 45° mit dem Scheitel S. Auf t trage man einen Punkt A mit $\overline{AS} = 2 \cdot (r + R)$ ein. Der Abstand $d = |\overline{AX}|$, den der Punkt A vom Schenkel s hat, beträgt $\sqrt{2} \cdot (r + R)$, denn als halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $\overline{AS}$ wissen wir

$$d \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot (r + R)$$

[6] Die Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1983 (1. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983-1987. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1988, S. 83.5 bzw. 83.9.

Der Kreis um *A* mit dem Radius 2*R* hat daher mit *s* einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der näher an *S* liegende Schnittpunkt bezeichnen wir mit *B*. Das Lot von *B* auf *t* schneidet *t* in einem Punkt, der *C* genannt wird. Den anderen Punkt nennen wir B‘. Das Lot von *B‘* auf *t* schneidet *t* in einem Punkt, der *C‘* genannt wird.

Behauptung: Das Dreieck *ABC* besitzt die geforderten Eigenschaften.

Beweis: Das so erhaltene Dreieck ist nach Konstruktion rechtwinklig. Sein Umkreis hat den Radius *R*. Weiterhin gilt:

$$a+b=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AC}+\overline{CS}=\overline{AS}=2\cdot\left(r+R\right).$$

Also hat der Inkreis vom Dreieck *ABC* den geforderten Radius. Das Dreieck besitzt somit die verlangten Eigenschaften.

Existenzbedingung: Wegen der Gleichheit von $a\cdot b$ und $c\cdot h$ (jeweils doppelter Flächeninhalt des Dreiecks) erhalten wir nach der binomischen Formel und nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(a+b\right)^2=c^2+2\cdot c\cdot h$$

Da sich *h* nach oben durch *R* abschätzen lässt, folgt wegen $c = 2 \cdot R$ hieraus:

$$\left(a+b\right)^2\leq 8\cdot R^2\text{, also } a+b\leq 2\sqrt{2}\cdot R.$$

Zusammen mit (1) erhalten wir hieraus als notwendige Bedingung für die Existenz des Dreiecks

$$r\leq\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot R$$

Da im Falle des gleichschenkligen Dreiecks Gleichheit vorliegt, ergibt sich, dass solche Dreiecke existieren und damit diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz des gesuchten Dreiecks ist. Eine untere Beschränkung für *r* gibt es nicht, da der Inkreismittelpunkt einen beliebig kleinen Abstand zur Grundseite haben kann.

Eindeutigkeit: Aus der Konstruktion ist (bei der Wahl des Punktes *B*) ersichtlich, dass zwei Dreiecke die Eigenschaften erfüllen. Wir überzeugen uns leicht, dass diese aber kongruent sind: Aus Symmetriegründen gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AB'}|$ und $\angle BAX = \angle XAB'$. Mit der Gleichheit dieser Winkel finden wir aber auch:

$$\angle C'B'A = 90° - \angle B'AC' = 45° - \angle XAB' = 45° - \angle BAX = \angle CAB$$

Also sind die rechtwinkligen Dreiecke *ABC* und *AB’C‘* kongruent. ❑

Weitere Lösungsansätze (Ausschnitte aus der Analyse):
(I) Die Länge des Abschnittes $\overline{AD}$ lässt sich über Flächenvergleiche in Abhängigkeit von *R* und *r* ermitteln

$$x_{1/2}=R\pm\sqrt{R^2-\left(r^2+2Rr\right)}.$$

Da diese Größe aus den gegebenen Stücken konstruiert werden kann, ist die weitere Konstruktion des gesuchten Dreiecks unkompliziert.

(II) Ist M_i der Inkreismittelpunkt, so beträgt der Winkel $\angle AM_iB$ 135°. Es genügt also über der Strecke $\overline{AB}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit den Basiswinkeln von 22,5° zu konstruieren. Der Umkreis um dieses Hilfsdreieck schneidet die im Abstand r zu $\overline{AB}$ Parallele im Inkreismittelpunkt.

(III) Nach dem Satz von EULER (siehe dieses Heft S. 21) können wir den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt berechnen: $d^2 = R\cdot\left(R-2r\right)$. Auf der Grundlage des Höhensatzes in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten R und $(R - 2r)$ lässt sich der Abstand d aus den gegebenen Stücken konstruieren. Damit finden wir den Inkreismittelpunkt auf der im Abstand r zu $\overline{AB}$ parallelen Geraden.

Aufgabe 3-5A. Man beweise die folgenden Aussagen.
(a) Die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlicher Zahlen ist stets durch 8 teilbar.

(b) Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

(c) Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Lösungshinweise:
(a) Es seien $z_x = 2x + 1$ und $z_y = 2y + 1$ zwei ungerade natürliche Zahlen (x, y nicht negative ganze Zahlen). Dann gilt

$$\left(2x+1\right)^2-\left(2y+1\right)^2=4\cdot\left(x^2+x\right)-4\cdot\left(y^2+y\right)$$

Ist x gerade, dann ist auch x^2 gerade und folglich auch die Summe $x^2 + x$. Ist x ungerade, dann ist auch x^2 ungerade und folglich ist die Summe $x^2 + x$ gerade. Also ist der Ausdruck $x^2 + x$ stets durch 2 teilbar und damit ist $4\cdot\left(x^2+x\right)$ durch 8 teilbar. Da dies auch für den zweiten Term gilt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man ermittle die Reste bei Division durch 8, die eine ungerade Zahl haben kann.

z	z^2
$8m+1$	$64m^2+16m+1=8(8m^2+2m)+1$
$8m+3$	$64m^2+48m+9=8(8m^2+6m+1)+1$
$8m+5$	$64m^2+80m+25=8(8m^2+10m+3)+1$
$8m+7$	$64m^2+112m+49=8(8m^2+14m+6)+1$

Somit lässt das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl bei Division durch 8 den Rest 1, woraus für die Differenz zweier solcher Quadratzahlen die Behauptung unmittelbar folgt. ❑

(b) Für jede ganze Zahl k gilt

$$(3k)^2 = 9 \cdot k^2$$
$$(3k+1)^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k) + 1$$
$$(3k+2)^2 = 3 \cdot (3k^2 + 2k + 1) + 1$$

Somit ist das Quadrat einer ganzen Zahl entweder durch 3 teilbar oder es lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

Angenommen, a sei nicht durch 3 teilbar. Dann lässt a^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit die Summe von $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, muss folglich b^2 den Rest 2 bei Division durch 3 lassen. Dies ist jedoch nach obiger Aussage nicht möglich. Folglich ist a durch 3 teilbar und deshalb ist auch b durch 3 teilbar. ❑

(c) Wenn die Summe der Zahlen durch 6 teilbar ist, dann ist diese Summe sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar.

Die Summe der Zahlen ist gerade, wenn entweder alle 3 Zahlen gerade sind oder wenn genau eine der Zahlen gerade und die beiden anderen ungerade sind. Die dritte Potenz einer Zahl ist genau dann gerade (bzw. ungerade), wenn die Zahl selbst gerade (bzw. ungerade) ist. Folglich überträgt sich die Geradzahligkeit der Summe der Zahlen auf die Summe der Kuben dieser Zahlen. Ist die Summe der 3 Zahlen a, b, c durch 2 teilbar, dann ist es auch die Summe der Kuben dieser Zahlen.

Ausgehend von der Umformung

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3 \cdot \left(a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2\right)$$

erkennt man: Ist die Summe der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar, dann ist es auch die Summe ihrer Kuben, da alle weiteren Summanden durch 3 teilbar sind. ❑

Lösungsvariante: Man untersuche für Kubikzahlen die Reste bei Division durch 6.

z	z^3
$6m + 0$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 0 + 3 \cdot 6m \cdot 0^2 + 0^3 = 6M + 0$
$6m + 1$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 1 + 3 \cdot 6m \cdot 1^2 + 1^3 = 6M + 1$
$6m + 2$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 2 + 3 \cdot 6m \cdot 2^2 + 2^3 = 6M + 6 + 2$
$6m + 3$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 3 + 3 \cdot 6m \cdot 3^2 + 3^3 = 6M + 24 + 3$
$6m + 4$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 4 + 3 \cdot 6m \cdot 4^2 + 4^3 = 6M + 60 + 4$
$6m + 5$	$6^3m^3 + 3 \cdot 6^2m^2 \cdot 5 + 3 \cdot 6m \cdot 5^2 + 5^3 = 6M + 120 + 5$

Dabei wurde der Term $6^2 m^3 + 3 \cdot 6m^2 \cdot k + 3 \cdot m \cdot k^2$ jeweils zu M zusammengefasst (k = 0, ..., 5). Also lässt die Kubikzahl bei Division durch 6 den gleichen Rest wie ihre Basiszahl. Daraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Aufgabe 3-5B. Es sind $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und $g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

„*S_n : Ist $\frac{a_n}{g_n}$ eine natürliche Zahl, so ist $x_1 = x_2 = ... = x_n$*“.

(a) Man zeige, dass S_3 im Allgemeinen falsch ist.

(b) Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $m > 1$, sodass für $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ und $x_1 = m$ das Verhältnis $\frac{a_4}{g_4}$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Man beweise, dass S_2 stets richtig ist.

Lösungshinweise[7]*:*

(a) Es genügt, für $n = 3$ ein konkretes Beispiel anzugeben, das die Behauptung widerlegt. Für $x_1 = 27$, $x_2 = 8$ und $x_3 = 1$ finden wir

- für das arithmetische Mittel $a_3 = \frac{27+8+1}{3} = \frac{36}{2} = 12$ und
- für das geometrische Mittel $g_3 = \sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$.

Folglich ist $\frac{a_3}{g_3} = \frac{12}{6} = 2$ eine ganze Zahl, jedoch gilt nicht die Gleichheit $x_1 = x_2 = x_3$. Also ist die Behauptung im Fall $n = 3$ im Allgemeinen falsch. ❑

(b) Setzt man $m = 81$, so ist der Quotient eine ganze Zahl, denn es gilt für $x_1 = 81$ und $x_2 = x_3 = x_4 = 1$

- für das arithmetische Mittel $a_4 = \frac{81+1+1+1}{4} = \frac{84}{4} = 21$ und
- für das geometrische Mittel $g_4 = \sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt[4]{3^4} = 3$,

also ist der Quotient $\frac{a_4}{g_4} = \frac{21}{3} = 7$ eine natürliche Zahl. ❑

[7] Diese Aufgabe wurde im Bundeswettbewerb Mathematik 1975 (2. Runde) gestellt. Vgl. K.R. Löffler (Hrsg..): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

Ergänzung: Setzen wir allgemein für eine natürliche Zahl m voraus, dass das Verhältnis aus arithmetischen und geometrischen Mittel, also $v = \frac{m+1+1+1}{4 \cdot \sqrt[4]{m \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}}$ eine ganze Zahl ist, so muss auch $\sqrt[4]{m}$ rational (und damit ganzzahlig) sein. Sei deshalb $m = y^4$ mit einer natürlichen Zahl y. Dann gilt:

$$v = \frac{y^4 + 3}{4y} = \frac{1}{4} \cdot \left(y^3 + \frac{3}{y} \right)$$

Weil v laut Voraussetzung eine ganze Zahl ist, ist der Zähler $y^4 + 3$ durch 4 teilbar. Damit der Klammerausdruck ganzzahlig wird, muss $y = 1$ oder $y = 3$ sein. Folglich ist $m = 81$ die einzige nichttriviale Lösung für diese Aufgabenstellung.

(c) Es sei $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v. Da a rational ist, ist folglich auch g rational und als Wurzel aus einem Produkt natürlicher Zahlen sogar ganzzahlig. Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2a \cdot x + g^2 = 0.$$

Die Diskriminante D dieser quadratischen Gleichung

$$D = a^2 - g^2 = (v \cdot g)^2 - g^2 = g^2 \cdot (v^2 - 1)$$

ist aber nur dann eine Quadratzahl, wenn der Klammerausdruck eine Quadratzahl ist. Dies kann aber nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, da für größere Werte von v der Abstand zweier Quadratzahlen größer als 1 ist. Folglich ist wegen $D = 0$ die Gleichheit $x_1 = x_2$ bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Auch ohne die etwas trickreiche Anwendung des Satzes von VIETa gelingt der Nachweis, wenn wir $x_2 = x_1 + 2 \cdot z$ mit einer geeignet gewählten Zahl z festlegen. Dann bedeutet die Aussage, dass aus einem ganzzahligen Quotienten aus arithmetrischen und geometrischen Mittel $z = 0$ folgt.

Ausgehend von $a = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $g = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ und $a = v \cdot g$ mit einer ganzen Zahl v folgt

$$x_1 + z = v \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_1 + 2z)}$$

also $$x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z + z^2 = v^2 \cdot (x_1^2 + 2 \cdot x_1 \cdot z)$$

Betrachten wir die letzte Gleichung als Funktion der Variablen z, so können wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nach z auflösen:

$$z^2 + 2 \cdot (1 - v^2) \cdot x_1 \cdot z + (1 - v^2) \cdot x_1^2 = 0$$

$$z_{1/2} = -(1 - v^2) \cdot x_1 \pm \sqrt{(1 - v^2)^2 \cdot x_1^2 - (1 - v^2) \cdot x_1^2}$$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen kann zu $x_1^2 \cdot v^2 \cdot (v^2 - 1)$ zusammengefasst werden. Wie oben bereits diskutiert, kann dies nur für $v = 1$ eine Quadratzahl sein, was aber $z = 0$ bedeutet.

Ergänzende Lösungsdiskussion

Zu Aufgabe 2-2: Während bei dieser Aufgabe zu untersuchen war, wie die gegebenen Längen bzgl. Dreiecksseiten und Höhe angeordnet sein können, genügt es bei der folgenden Aufgabe, eine geschickte Anordnung zu wählen (und zu zeigen, dass diese realisiert werden kann).

Aufgabe MO381041. Wir betrachten alle dreiseitigen Pyramiden mit den Kantenlängen (in cm) 3, 4, 5, 6, $3 \cdot \sqrt{5}$ und $2 \cdot \sqrt{13}$. Gibt es unter diesen Pyramiden eine Pyramide, deren Volumen gemessen in cm³ ganzzahlig ist?

Lösungshinweise: Da bei allgemeinen Pyramiden in der Grundfläche irrationale Werte auftreten können, liegt es nahe, eine Grundfläche zu finden, die einen ganzzahligen Flächeninhalt hat. Weil die drei Seitenlängen 3, 4 und 5 (wegen Umkehrung des Satzes des Pythagoras) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, erfüllt diese Anordnung die Ganzzahligkeit: Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt 6 cm².

Nun findet man mit gleicher Argumentation, dass die beiden Dreiecke mit den Seitenlängen 3, 6 und $3 \cdot \sqrt{5}$ bzw. 4, 6 und $2 \cdot \sqrt{13}$ ebenfalls rechtwinklige Dreiecke sind. Damit kann die Kante der Länge 6 gleichzeitig Höhe für die Pyramide sein. Das Volumen erweist sich mit 12 cm³ als ganzzahlig. ❑

Zur Aufgabe 2-3 sei nachgetragen, dass bei Gleichungen oder Ungleichungen mit Wurzelausdrücken in einem ersten Schritt der Definitionsbereich untersucht werden sollte. Die Äquivalenz von Umformungen ist dann stets anhand dieses Definitionsbereiches zu überprüfen.

Aufgabe. Man finde alle reellwertigen Zahlen x, für die die folgende Gleichung definiert und erfüllt ist:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2.$$

Lösungshinweise: Damit der erste Wurzelausdruck definiert ist, muss $x \geq -1$ gelten. Damit der zweite Wurzelausdruck definiert ist, muss $x \geq 2$ gelten. Somit umfasst der Definitionsbereich alle reellen Zahlen größer oder gleich 2.

Umformung der Gleichung und beidseitiges Quadrieren führt zu

$$x + 1 = 4 + 4 \cdot \sqrt{2x-4} + 2x - 4$$
$$-x + 1 = 4 \cdot \sqrt{2x-4}$$

Mit der Kenntnis $x \geq 2$ wird offensichtlich, dass die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen nichtnegativ ist. Es kann also keine Lösung in reellen Zahlen geben. ❑

Übersieht man jedoch an dieser Stelle diesen Aspekt, erscheint ein erneutes Quadrieren naheliegend (aber unzulässig, weil die linke Seite der Gleichung negativ, die rechte Seite dagegen positiv ist!):

$$x^2 - 2x + 1 = 32x - 64$$

Für die daraus resultierende quadratische Gleichung $x^2 - 34x + 65 = 0$ finden wir mit der bekannten Lösungsformel die Nullstellen $x_{1/2} = 17 \pm 4 \cdot \sqrt{14}$.

Die erste Lösung erfüllt offensichtlich die Bedingung $x \geq 2$. Für die zweite Lösung nutzt man $\sqrt{14} < 3{,}75$ (wegen $3{,}75^2 = 14{,}0625$, auch ohne Rechentechnik ermittelbar) und findet $17 - 4 \cdot \sqrt{14} > 17 - 4 \cdot 3{,}75 = 2$. Also liegt auch die zweite Lösung im Definitionsbereich. Auf die Probe wird verzichtet, weil diese mit den Doppelwurzel schwierig erscheint – Aufgabe gelöst?

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$, ohne die Wurzeln auszurechnen.

Lösungshinweise: Auch ohne den nachgestellten Hinweis ist die Verwendung von Rechentechnik nicht zulässig. Natürlich kann man zur Lösungsfindung die Werte ausrechnen und der Vergleich 0,1451 < 0,1813 spricht für die Richtigkeit der Ungleichung. Der Abstand ist so groß, dass er nicht allein aus Rundungsfehlern resultieren wird – aber genau das wäre zu beweisen! Und wie sehe es bei den folgenden Zahlen aus:

$$\sqrt[3]{1.000.001} - \sqrt[3]{1.000.000} < \sqrt[3]{1.000.000} - \sqrt[3]{999.999}\ ?$$

Es wird also ein „technikfreier“ Beweis gesucht. Potenzieren – so die Erfahrung – reduziert nicht die Anzahl der dritten Wurzeln. Wir führen einen indirekten Beweis:

Angenommen, es gelte $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \geq \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$. Potenzieren wir beide Seiten und fassen nach Ausmultiplizieren zusammen, erhalten wir

$$\sqrt[3]{48} - \sqrt[3]{36} < \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12}$$

bzw. nach Division durch $\sqrt[3]{12}$

$$\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Da $\sqrt[3]{2}$ aber größer als 1 ist, kann die rechte Seite weiter abgeschätzt werden und wir finden

$$\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

im Widerspruch zur Annahme, also war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. ❑

Thema 1 – Funktionalgleichungen (Teil II)[8]

Aufgabe MO201033. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und die folgenden Eigenschaften erfüllt:

Es ist $f(1)=1$. (1)
Für jedes $x\neq 0$ ist $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$. (2)
Für alle x_1, x_2 mit $x_1, x_2, x_1+x_2\neq 0$ gilt $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. (3)

Man beweise, dass für jede Funktion *f*, die diese Voraussetzungen erfüllt, $f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}$ gilt.

Lösungshinweise: Wenn wir den Funktionswert für $x=\frac{1}{7}$ kennen würden, könnten wir mit Voraussetzung (3) den Beweis vollenden. Mittels der Voraussetzung (2) kann dieser Funktionswert aber berechnet werden, wenn wir den Wert für $f(7)$ kennen. Den wiederum finden wir unter Anwendung von Voraussetzungen (1) und (3):

Aus (3) folgt für alle reellen Zahlen $x\neq 0$ und natürliche Zahlen $n>0$

$$f(n\cdot x)=n\cdot f(x). \qquad (4)$$

Den Nachweis dafür können wir mit der Methode der vollständigen Induktion führen.

Induktionsanfang: Die Gleichung (4) gilt in trivialer Weise für $n=1$

$$f(1\cdot x)=f(x)=1\cdot f(x),$$

aber auch für $n=2$

$$f(2\cdot x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2\cdot f(x)$$

Induktionsvoraussetzung: Die Gleichung (4) gilt für $n=k$.
Induktionsbehauptung: Die Gleichung (4) gelte auch für $n=k+1$.
Induktionsschritt: Es gilt

$$\begin{aligned}f\big((k+1)\cdot x\big)&=f(k\cdot x+x)=f(k\cdot x)+f(x)=k\cdot f(x)+f(x)\\&=(k+1)\cdot f(x)\end{aligned}$$

[8] Teil I in Heft 09/2020.

Induktionsschluss: Aus Induktionsanfang, -voraussetzung und -schritt folgt, dass die Gleichung (4) für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gilt.

Die Gleichung (4) muss natürlich zur Lösung der Aufgabe nicht so allgemein bewiesen werden. Es genügt durch mehrmalige Anwendung der Voraussetzung (3) die Gültigkeit für $n = 7$ nachzuweisen.

Nach dieser Vorbereitung lassen sich folgende Gleichungen bilden:

(1) $f(7) = f(7 \cdot 1) = 7 \cdot f(1) = 7$ wegen (1) und (4)
(2) $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot f(7) = \frac{1}{7}$ wegen (2) und (7)
(3) $f\left(\frac{5}{7}\right) = f\left(5 \cdot \frac{1}{7}\right) = 5 \cdot f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{5}{7}$ wegen (4) und (6). ❑

Der Beweis zur Gültigkeit der Gleichung (4) lässt vermuten, dass die Voraussetzung (3) einen sehr tiefgründigen Zusammenhang beschreibt. Sie ist als **CAUCHYsche Funktionalgleichung** bekannt: Für alle Funktionen, die für alle rationalen Zahlen x und y die Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ erfüllen, gilt für alle rationalen Zahlen r die Gleichung $f(r) = c \cdot r$ mit $c = f(1)$.

Lösungshinweise: Für den Beweis dieser Aussage setzen wir spezielle Argumente ein und finden auf diese Weise Eigenschaften der Funktion *f*, die schließlich zur Lösung führen.

Setzen wir zunächst in die Funktionalgleichung $x = y = 0$, so folgt daraus, dass $f(0) = 2 \cdot f(0)$ gilt, also finden wir $f(0) = 0$.

Für $y = -x$ ergibt sich $f(x-x) = f(0) = 0 = f(x) + f(-x)$, also $f(x) = -f(-x)$ und wir sehen, dass alle Lösungen der Funktionalgleichung ungerade Funktionen sind.

Mit Gleichung (4) gilt für natürliche Zahlen n die Gleichung $f(n \cdot 1) = n \cdot f(1)$. Da wir wissen, dass die gesuchten Funktionen ungerade Funktionen sind, können wir diese Beziehung auch auf alle ganzen Zahlen ausweiten. Damit wissen wir also, dass $f(z) = f(1) \cdot z$ für alle $z \in Z$. Es wäre schön, wenn wir diese Beziehung auch auf noch größere Zahlenbereiche ausdehnen können. Für rationale Zahlen $x = p/q$ mit $p, q \in Z, q \neq 0$ gilt $q \cdot x = p \cdot 1$ und somit $f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$ oder nach Umformen

$$q \cdot f(x) = p \cdot f(1), \text{ also } f(x) = f(1) \cdot x.$$

Setzen wir $f(1) = c$, so gilt für alle Lösungen der Funktionalgleichung für alle rationalen Zahlen r: $f(r) = c \cdot r$

Eine Probe bestätigt, dass diese Funktion die geforderte Funktionalgleichung erfüllt:

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) = c \cdot x + c \cdot y = f(x) + f(y).$$

Um die Lösung auf alle reellen Zahlen zu erweitern, bedarf es erstaunlicherweise weitere Voraussetzungen an die Funktionen *f*. Es erscheint anschaulich verständlich, dass monotone Funktionen *f*, die der CAUCHYschen Funktionalgleichung genügen, für alle reellen Zahlen der Form $f(x) = c \cdot x$ genügen.

Es genügt bereits, dass für die Funktionen gefordert wird, dass sie auf jedem Intervall es Definitionsbereiches beschränkt ist. Andererseits gibt es ohne einschränkende Bedingungen reellwertige Funktionen, die der CAUCHYschen Funktionalgleichung genügen, für rationale Argumente der linearen Funktion folgen, aber für irrationale Argumente in jedem Abschnitt des Definitionsbereiches unbeschränkt sind. So eine Funktion wie eine unendlich ausgedehnte Staubwolke ist nur noch schwer vorstellbar – aber es gibt sie tatsächlich.

Aufgabe MO271042. Es sei *f* eine Funktion, die für alle reellen Zahlen *x* definiert ist und für alle reellen Zahlen x_1 und x_2 die folgenden Gleichungen (1), (2) erfüllt:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1^3) + f(x_2^3) \qquad (1)$$
$$f(x_1 \cdot x_2) = x_1 \cdot f(x_2) + x_2 \cdot f(x_1) \qquad (2)$$

Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen der Funktionswert $f(2 + \sqrt{5})$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diesen Funktionswert!

Lösungshinweise: Zunächst folgt aus $x_1 = x_2 = 0$ wegen Voraussetzung (1) die Beziehung

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0^3) + f(0^3) = 2 \cdot f(0), \text{ also } f(0) = 0.$$

Weiter folgt aus $x_1 = x_2 = 1$ wegen Voraussetzung (2) die Beziehung

$$f(1) = 1 \cdot f(1^3) + 1 \cdot f(1^3) = 2 \cdot f(1), \text{ also } f(1) = 0.$$

Setzen wir $x_1 = x$ und $x_2 = 0$, so folgt aus Voraussetzung (1) auch

$$f(x + 0) = f(x^3) + f(0^3) = f(x^3) \qquad (3).$$

Damit reduziert sich die Voraussetzung (1) zu $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. Es erscheint nun einfach, auf die Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung zu verweisen und wegen $f(1) = 0$ zu schlussfolgern, es gelte $f(x) = 0$ für alle reellen *x*. Jedoch wird in der Aufgabenstellung keine Beschränkung an *f* gestellt. Es ist also nicht gesichert, wie der Funktionswert für das irrationale Argument $2 + \sqrt{5}$ zu berechnen ist. Aber natürlich dürfen wir $f(n) = 0$ für alle natürlichen Zahlen n feststellen.

Setzen wir $x_1 = x_2 = \sqrt{5}$ so erhalten wir wegen (2) und (3)

$$0 = f(5) = f\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \cdot f\left(\sqrt{5}\right), \text{ also } f\left(\sqrt{5}\right) = 0.$$

Nochmals Voraussetzung (1) anwendend finden wir abschließend

$$f\left(2 + \sqrt{5}\right) = f(2) + f\left(\sqrt{5}\right) = 0.$$ ❑

Während oben die CAUCHYsche Funktionalgleichung nur als Zwischenergebnis genutzt werden konnte, gibt es zahlreiche Aufgaben, die sich direkt auf diese grundlegende Gleichung beziehen.

Aufgabe. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen definiert sind und für die für alle reellen Zahlen *x* und *y* gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1 \text{ mit } f(0) = 1.$$

Lösungshinweise: Wir definieren eine Funktion g durch $g(x) = f(x) - 1$. Die Monotonie der Funktion f überträgt sich auf g. Außerdem gilt:

$$g(x+y) = f(x+y) - 1 = f(x) + f(y) - 1 - 1 = g(x) + g(y).$$

Damit erfüllt g die CAUCHYsche Funktionalgleichung und es gilt $g(x) = c \cdot x$ für alle reellen Zahlen x. Die daraus resultierende Funktion $f(x) = c \cdot x + 1$ erfüllt tatsächlich die Angaben der Aufgabenstellung:

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) + 1 = c \cdot x + 1 + c \cdot y + 1 - 1 = f(x) + f(y) - 1$$
$$\text{mit } f(0) = c \cdot 0 + 1 = 1 \quad \square$$

Aufgabe. Finden Sie alle monotonen reellwertigen Funktionen *f*, die für alle positiven reellen Zahlen definiert sind und für beliebige positive reelle Zahlen *x* und *y* die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Lösungshinweise: Gäbe es ein Argument $x \neq 0$ mit $f(x) = 0$, so wäre die Funktion *f* konstant 0, denn für jede reelle Zahl *y* gilt in diesem Fall

$$f(y) = f\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Wegen $f(x) = f\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}\right) = \left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 > 0$ können wir für alle positiven reellen Zahlen die Funktion g durch die Beziehung $g(z) = ln(f(e^z))$ definieren. Es gilt:

$$g(x+y) = ln\left(f(e^{x+y})\right) = ln\left(f(e^x \cdot e^y)\right) =$$
$$ln(f(e^x) \cdot f(e^y)) = ln(f(e^x)) + ln(f(e^y)) = g(x) + g(y)$$

Da sich die Monotonie von f auf g überträgt, gilt $g(x) = c \cdot x$ als Lösung der CAUCHYschen Funktionalgleichung und somit $ln(f(e^z)) = c \cdot z$, gleichbedeutend zu $f(e^z) = e^{cz}$ für alle positiven reellen Zahlen z. Setzen wir abschließend $x = e^z$, finden wir als Lösung die Funktion $f(x) = x^c$ mit einer festen Zahl c.

Probe: $f(x \cdot y) = (x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c = f(x) \cdot f(y)$ $\square$

Thema 2 – Ungleichungen mit vollständigen Quadraten

In der 2. Runde der 60. Mathematik-Olympiade (Schuljahr 2020/21) wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe MO601024.

(a) Ermitteln Sie alle Paare positiver Zahlen (x, y), für welche die folgende Gleichung gilt

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x + y.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle positiven Zahlen x und y die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} = x + y.$$

(c) Zeigens Sie die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x+y}\right)$$

für alle positiven Zahlen x und y.

Lösungshinweise: Zur Lösung der Aufgabe (a) erscheint es naheliegend, solange äquivalent umzuformen, bis die Gültigkeit der erhaltenen Gleichung erkennbar ist. Da die Summe der rechten Seite positiv ist, dürfen wir beide Seiten quadrieren und erhalten:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) = (x+y)^2.$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen führt zu

$x^2 \cdot y^2 - 2xy + 1 = 0$, gleichbedeutend zu $(xy-1)^2 = 0$.

Folglich ist die geforderte Gleichung genau dann erfüllt, wenn $y = \frac{1}{x}$ gilt. ❑

Für die Lösung von Aufgabe (b) erkennen wir, dass wir alle Gleichheitszeichen durch das Relationszeichen ≥ ersetzen können. Für die Beweisführung beginnen wir mit einer wahren Aussage: da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, gilt für alle positiven Zahlen

$$(xy-1)^2 \geq 0 \qquad (1)$$

also $x^2 \cdot y^2 - 2xy + 1 \geq 0 \qquad | + x^2 + 2xy + y^2$

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

Beide Seiten lassen sich als Produkte darstellen:

$$(x^2+1)\cdot(y^2+1) \geq (x+y)^2.$$

Beide Seiten der Ungleichung sind nichtnegativ. Somit dürfen wir weiter umformen und finden die Behauptung:

$$\sqrt{(x^2+1)\cdot(y^2+1)} \geq x+y.$$

Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) könnte man auch zusammenfassen zu „Zeigen Sie die Ungleichung ... Für welche Zahlen *x* und *y* gilt die Gleichheit?“. Die hier gewählte Formulierung hat den Vorteil, im einfacheren Teil (a) die Struktur der (Un-)Gleichung bereits untersuchen zu können, und dabei Fehler mit der Richtung der Relationszeichen zu vermeiden.

Kern der Lösung ist die grundlegende Aussage (1), dass vollständige Quadrate nichtnegativ sind. Die etwas überraschende Struktur der Ungleichung in Teilaufgabe (c) lässt vermuten, dass auch hierbei vollständige Quadrate für den Beweis verwendet werden können. Dafür multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit den positiven Faktoren $9\cdot x\cdot y\cdot(x+y)$ und erhalten

$$9\cdot y\cdot(x+y)+9\cdot x\cdot(x+y) > 4\cdot(2\cdot y\cdot(x+y)+3\cdot x\cdot y)$$

d.h. $9\cdot x^2+y^2-2\cdot x\cdot y > 0$

also $8\cdot x^2+(x-y)^2 > 0$ (2)

Die letzte Ungleichung ist als Summe vollständiger Quadrate nicht negativ und – da $x\neq 0$ – sogar positiv. Für die Beweisführung beginnen wir vorteilhafterweise mit Ungleichung (2) und formen um, bis wir die Behauptung finden. ❑

Der Nachweis von Ungleichungen mit Hilfe vollständiger Quadrate kann häufig in Wettbewerbsaufgaben angewandt werden.

Aufgabe MO381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets mindestens 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen *x*, *y* und *z* stets

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \geq 0. \tag{3}$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2+y^2+z^2-10\cdot(x+y+z)+3\cdot 25 \geq 0.$$

Setzt man nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt die Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Da für beliebige reelle Zahlen a und b stets die Ungleichung $(a + b)^2 \geq 2ab$ gilt, finden wir für x, y, z zunächst

$$2\cdot(x^2+y^2+z^2) \geq 2\cdot(xy+yz+xz) \tag{4}$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

$$(x^2+y^2+z^2)+2\cdot(xy+yz+xz) = 225 \tag{5}$$

Die Addition von (4) und (5) führt zur Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Die Gleichung (3) können wir formulieren, wenn wir ein Zahlentripel (x, y, z) erraten, für das das Gleichheitszeichen gilt. Dann können wir die Lösung aber auch so fortsetzen: Wir untersuchen solche Tripel, die von (5,5,5) variieren und schreiben dafür $(5 + a, 5 + b, 5 + c)$ mit Variablen a, b, c, für die laut Voraussetzung $a + b + c = 0$ gelten muss. Dann finden wir

$$(5 + a)^2 + (5 + b)^2 + (5 + c)^2 = 75 + 10 \cdot (a + b + c) + a^2 + b^2 + c^2$$

Wegen $(a + b + c) = 0$ und $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ folgt aus dieser Ungleichung unmittelbar die Behauptung. ❑

Aufgabe MO480923/MO481023.

(a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (a, b), für die die Ungleichung $a + b \geq a^2 + b^2 - 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (a, b) reeller Zahlen stets die Ungleichung $a + b \leq a^2 + b^2 + \frac{1}{2}$ gilt?

(c) Wann gilt in (b) das Gleichheitszeichen?

Lösungshinweise zu (b): Wir können das Zahlenpaar $a = b = \frac{1}{2}$ als Lösung für das Gleichheitszeichen in (b) erraten. Deshalb ist der Lösungsansatz

$$\left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \qquad (6)$$

eine erfolgsversprechende Ausgangsungleichung. Tatsächlich finden wir nach Ausmultiplizieren und Umordnen

$$a^2 - a + \tfrac{1}{4} + b^2 - b + \tfrac{1}{4} \geq 0 \qquad |+ a + b$$

also $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b.$ ❑

Lösungsvariante: Die Ungleichung (6) können wir auch durch Umformung der Behauptung in Teilaufgabe (b) erhalten:

$$\begin{aligned} a + b &\leq a^2 + b^2 + \tfrac{1}{2} \qquad |-a - b \\ 0 &\leq a^2 - a + \tfrac{1}{2} + b^2 - b + \tfrac{1}{2} \\ 0 &\leq \left(a - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

❑

Lösungsvariante: Haben wir mit $a = b = \frac{1}{2}$ eine spezielle Lösung gefunden, können wir jedes Lösungspaar auch in der Form $\left(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y\right)$ schreiben. Setzen wir diese in die Ungleichung der Behauptung ein, so erhalten wir:

$1 + x + y \leq 1 + x + x^2 + y + y^2$, also $0 \leq x^2 + y^2$.

Da die letzte Ungleichung für alle reellen Zahlen erfüllt ist, kann die Gültigkeit der Behauptung gezeigt werden, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = y = 0$ gilt. ❑

Aufgabe MO400942. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x, y) reeller Zahlen x, y, von denen das System der beiden Ungleichungen

$$x^2 \leq \frac{2000 \cdot y^2 + 2x - 1}{2001}, \; y^2 \leq \frac{2000 \cdot x^2 - 2y - 1}{2001}$$

erfüllt wird.

Lösungshinweise: Wenn (x, y) das System der Ungleichungen erfüllen, dann erfüllen (x, y) auch die Ungleichung, die durch Addition beider Ungleichungen und Multiplikation mit 2001 entsteht:

$$x^2 + y^2 \leq 2x - 2y - 2, \text{ also } (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 0.$$

Da die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind, gilt die letzte Ungleichung nur für $x = 1$ und $y = -1$. Die Probe $1 \leq \frac{2000 \cdot 1 + 2 - 1}{2001} = 2001$ bestätigt, dass die gegebenen Ungleichungen für diese (x, y) gelten. ❑

Die Eigenschaft der Quadrate von reellen Zahlen können wir auch zur Lösung von Gleichungen einsetzen.

Aufgabe MO411045. Ermitteln Sie alle rationalen Zahlen x, für die gilt:

$$4^x + 9^x + 16^x = 6^x + 8^x + 12^x.$$

Lösungshinweise: Mit der Idee von vollständigen Quadraten kommen wir auf folgenden Ansatz, indem wir die gegebene Gleichung geschickt umformen:

$$\begin{aligned}
&(2^x)^2 + (3^x)^2 + (4^x)^2 = 2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 4^x + 3^x \cdot 4^x \qquad |\cdot 2 \\
&2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{x^2} + 2^{x^2} - 2 \cdot 2^x 4^x + 4^{x^2} + 3^{x^2} - 2 \cdot 3^x 4^x + 4^{x^2} = 0 \\
&(2^x - 3^x)^2 + (2^x - 4^x)^2 + (3^x - 4^x)^2 = 0
\end{aligned}$$

Eine Summe von drei Quadraten reeller Zahlen kann nur dann gleich 0 sein, wenn jeder der Summanden gleich 0 ist. Also finden wir $2^x = 3^x = 4^x$. Dies ist jedoch nur für $x = 0$ möglich. Eine Probe bestätigt, dass $x = 0$ auch tatsächlich Lösung der gegebenen Gleichung ist. ❑

Aufgabe zum Jahreswechsel 2020/21[9]

Gibt man einen Zeitpunkt sekundengenau in der Form

$T_1T_2.M_1M_2.\; h_1h_2 : m_1m_2 : s_1s_2$ (Tag.Monat. Stunde:Minute:Sekunde)

[9] am 31.12.2020 per E-Mail versandt.

an, benötigt man genau 10 Ziffern (einschließlich eventuell auftretenden führenden Nullen). Der Jahreswechsel lädt nun gleichermaßen zu Rück- und Ausblick ein:

Wann war 2020 der letzte Zeitpunkt und wann wird 2021 der erste Zeitpunkt sein, bei denen in der Darstellung jede der Ziffern 0, ..., 9 genau einmal vorkommt? Wie viele solcher Zeitpunkte gibt es in einem Kalenderjahr überhaupt?

Man löse die Aufgabe ohne Verwendung von Rechentechnik, d.h. in der Lösungsdarstellung darf nicht auf Ergebnisse eines Rechenprogramms verwiesen werden.

Lösungsfindung: Wir ermitteln zunächst die Anzahl aller Zeitpunkte und führen folgende Fallunterscheidung durch. Dabei gilt einschränkend:

$M_1 \in \{0; 1\}$; $h_1 \in \{0; 1; 2\}$; $m_1, s_1 \in \{0 ; 1; 2; 3; 4; 5\}$;

(1) $T_1 = 0$. Dann muss $M_1 = 1$ und $h_1 = 2$ gelten. Nun gibt es keine zulässige Ziffer für M_2, d.h. in diesem Fall kann es keine Zeitpunkte geben, die sich mit zehn verschiedenen Ziffern darstellen lassen.

(2) $T_1 = 1$. Dann muss $M_1 = 0$, $h_1 = 2$ und $h_2 = 3$ gelten. Damit gibt es die zwei Möglichkeiten $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ bzw. umgekehrt $m_1 = 5$ und $s_1 = 4$. Auf den vier noch nicht besetzten Stellen können die verbleibenden Ziffern 6 bis 9 beliebig verteilt werden. Dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $2 \cdot 24 =$ **48 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(3) $T_1 = 2$ und $M_1 = 0$. Dann muss $h_1 = 1$ gelten. Nun gibt es sechs Möglichkeiten, m_1 und s_1 aus den verbleibenden zulässigen Ziffern 3 bis 5 auszuwählen. Hat man diese Auswahl getroffen, verbleiben 5 Ziffern zur Verteilung auf die noch fünf nicht besetzten Stellen. Jede Verteilung führt zu einer gültigen Darstellung, also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $6 \cdot 120 =$ **720 Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

(4) $T_1 = 2$ und $M_1 = 1$. Dann muss $h_1 = 0$ gelten. Damit lässt sich M_2 mit den verbleibenden Ziffern nicht belegen.

(5) $T_1 = 3$ und $T_2 = 0$. Daraus folgt zwingend $M_1M_2 = 12$, womit aber h_1 nicht mehr korrekt belegt werden kann.

(6) $T_1 = 3$ und $T_2 = 1$. Daraus folgt zwingend $M_1 = 0$ und $h_1 = 2$, womit aber h_2 nicht mehr korrekt belegt werden kann.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Somit gibt es 48 + 720 = **768 Zeitpunkte**, die mit zehn verschiedenen Ziffern dargestellt werden können.

Nun lässt sich der erste Zeitpunkt eines Jahres dieser Art leicht ermitteln. Im Fall (2) kann der kleinste Wert den Monat 04 anzeigen. Da im Fall (3) der Monat 03 möglich ist, gilt es zunächst diesen Ansatz zu verfolgen. Da die Ziffern 0 bis 3 bereits vergeben sind, muss $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ gewählt werden. Daraus folgt: Das erste Mal in einem Jahr werden am **26.03. 17:48:59** alle zehn Ziffern verwendet.

Nach der Falluntersuchung kann es keinen Zeitpunkt mit $M_1 = 1$ geben. Wir verfolgen deshalb den Ansatz $M_1M_2 = 09$. Als Tag kann nicht $T_1T_2 = 30$ gewählt werden, weil die Ziffer 0 bereits gesetzt wurde. Auch $T_1T_2 = 29$ kann nicht gewählt werden, weil die Ziffer 9 bereits gesetzt wurde. Der Versuch $T_1T_2 = 28$ kann schließlich zu einer Zeitangabe der geforderten Art ergänzt werden: **28.09. 17:66:43.**

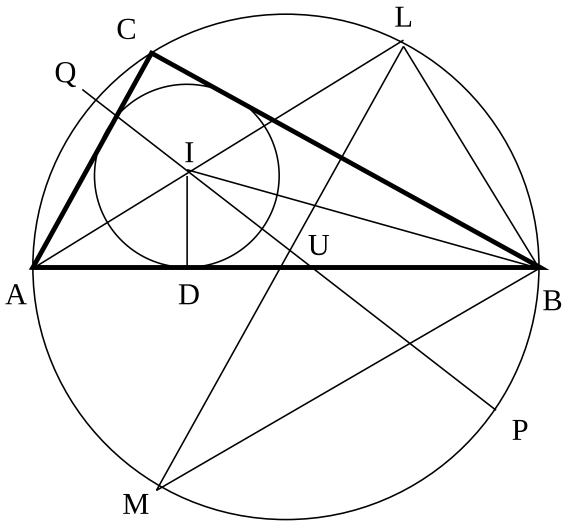
Bekannte Sätze der Mathematik

Südpolsatz. In einem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Winkelhalbierende durch die gegen-überliegende Ecke auf dem Umkreis[10].

Beweis: Man betrachte o.B.d.A. die Mittelsenkrechte m_c auf der Seite c und die Winkelhalbierende w_γ für den gegenüberliegenden Winkel ACB. S sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_c mit dem Umkreis, der nicht auf der gleichen Seite von AB liegt wie die Ecke C. Ist U der Umkreismittelpunkt, so ist über der Sehne AS der Peripheriewinkel $\angle ACS$ ist halb so groß wie der Zentriwinkel $\angle AUS$. Entsprechend ist der Winkel $\angle SCB$ halb so groß wie der Winkel $\angle SUB$. Da die Winkel $\angle AUS$ und $\angle SUB$ aus Symmetriegründen gleich groß sind, müssen auch die Winkel $\angle ACS$ und $\angle SCB$ gleich groß sein. Folglich liegt die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ auf CS, woraus die Behauptung des Satzes folgt. ❑

Satz von Euler. Sind R der Umkreisradius und r der Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt für den Abstand d zwischen den Mittelpunkten von Um- und Inkreis:

$$d^2 = R \cdot (r - 2r).$$



Beweis: Es seien U der Umkreismittelpunkt und I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Gerade AI schneidet als Winkelhalbierende nach dem Südpolsatz den Umkreis in einem Punkt L, der auch auf der zugehörigen Mittelsenkrechten der Seite BC liegt. Der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenk-rechten (UL) mit dem Umkreis sei M. Das Dreieck MBL ist rechtwinklig (Umkehrung des Satz von Thales).

[10] Der Schnittpunkt wird Südpol genannt.

Bezeichnet man den Fußpunkt des von I aus gefällten Lotes zu AB mit D, dann gilt $\overline{ID} = r$. Wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln sind die Dreiecke ADI und MBL zueinander ähnlich. Daher gilt:

$$\frac{\left|\overline{ID}\right|}{\left|\overline{LB}\right|} = \frac{\left|\overline{AI}\right|}{\left|\overline{ML}\right|}, \text{ d.h. } \quad \left|\overline{ML}\right| \cdot \left|\overline{ID}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$$

Damit ist gezeigt: $2Rr = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LB}\right|$. Verbindet man B mit I, so gilt nach dem Außenwinkelsatz für den Winkel $\angle BIL$ am Dreieck ABI:

$$\angle BIL = \tfrac{1}{2} \cdot \angle BAI + \tfrac{1}{2} \cdot \angle IBA$$

Da zudem $\angle ILB = \angle ACB$ (Peripheriewinkel über der Sehne AB) und $\angle LBC = \angle LAC$ (Peripheriewinkel über der Sehne CL) gilt, findet man

$$\angle BIL = \angle LBI .$$

Das Dreieck IBL ist also gleichschenklig, d.h. es gilt $\left|\overline{LI}\right| = \left|\overline{LB}\right|$.

Nun seien P und Q die Schnittpunkte der Geraden UI mit dem Umkreis. Anwendung des Sehnensatzes ergibt $\left|\overline{PI}\right| \cdot \left|\overline{QI}\right| = \left|\overline{AI}\right| \cdot \left|\overline{LI}\right|$. Die Streckenlängen auf der linken Seite lassen sich durch den Umkreisradius R und den Abstand d zwischen In- und Umkreismittelpunkt ausdrücken. Damit folgt:

$$(R+d) \cdot (R-d) = 2Rr$$

Durch einfaches Umformen erhält man die Gleichung aus der Behauptung. ❑

Aufgaben Serie 5 (2020/21)

Nicht vergessen: Am 8. März 2021 ist Einsendeschluss für die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik. Man findet die Aufgaben unter www.bundeswettbewerb-mathematik.de und natürlich beim Mathematik-Lehrer.

Nutzen Sie Ihre Chance und nehmen Sie am Bundeswettbewerb teil!

(Einsendungen bis 22. März 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [11])

[11] Die elektronische Zusendung wird nach Empfang mit „Re:“ bestätigt. Sollte diese Antwort innerhalb der folgenden Tage ausbleiben, empfiehlt es sich zur Vermeidung von Dateiverlusten nachzufragen.

Aufgabe 5-1.
In der Ebene seien $3n$ Punkte gegeben (n natürliche Zahl, $n > 1$), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt) n Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

(5 Punkte)

Aufgabe 5-2.
Man finde alle Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2$$

(5 Punkte)

Aufgabe 5-3. (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde*)
Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen. (6 Punkte)

Aufgabe 5-4. (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde*)
In einem Dreieck ABC sei $\angle ACB = 120°$, und die Innenwinkelhalbierenden durch A, B und C schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in A' bzw. B' bzw. C'. Wie groß ist der Winkel <A’C’B‘?

Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen. (6 Punkte)

* Für die Einsendungen dieser Aufgaben (5.3 und 5.4) können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb verwandt werden. Aus der Punktbewertung im Rahmen des KZM können keine Ansprüche für die Bewertung im Bundeswettbewerb abgeleitet werden. Bitte beachten: Bereits mit 3 richtig gelösten Aufgaben kann man einen Preis erreichen und Gruppenarbeit ist in Runde 1 ausdrücklich zugelassen!

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben.)

Aufgabe 5-5A.
(a) Man beweise die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ für alle natürlichen Zahlen n.

(2 Punkte)

(b) Man beweise die Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$ für $n > 1$.

(2 Punkte)

(c) Man finde eine natürliche Zahle n, für die mit üblicher Rundungsregel gilt:

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2021$ (4 Punkte)

Aufgabe 5-5B.

Ein n-Tupel von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ heißt *Pythagoreisches Zahlen-n-Tupel* (kurz *P-n-Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(2 Punkte)

(b) Man untersuche, ob ein P-102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen a_{101} und a_{102} existiert, dessen Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$ die ersten 100 natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 100 sind!

(2 Punkte)

(c) Gegeben sei ein P-n-Tupel $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ mit ungeradzahligem a_n (mit $1 < k < n$). Man gebe ein P-(n+1)-Tupel an, das ebenfalls mit $a_1, a_2, \dots, a_k$ beginnt?

(4 Punkte)

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz