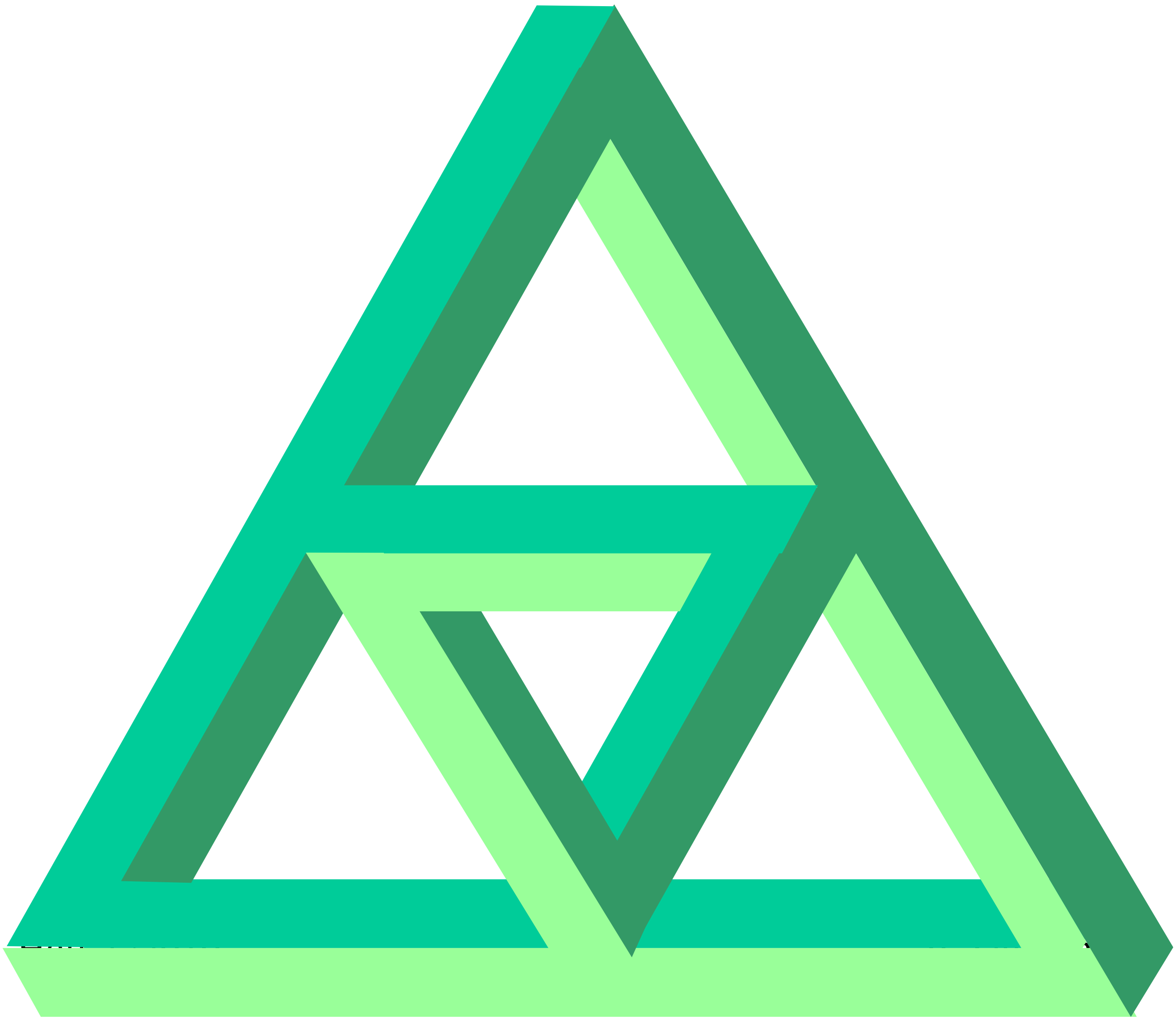
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 4 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 2 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 4

Aufgabe 4-1[1]. Man bestimme die größte einstellige Zahl, die alle diejenigen 180-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunzig zweistelligen Zahlen 10, 11, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Der größtmögliche in Frage kommende einstellige Teiler ist 9. Die Zahl 9 teilt aber tatsächlich jeder der möglichen 180-stelligen Zahlen, da deren Quersumme Q in folgender Weise ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} Q &= (1+0)+(1+1)+\ldots+(9+9) = 10\cdot(1+\ldots+9)+9\cdot(0+1+\ldots+9) \\ &= 10\cdot 45+9\cdot 45 = 855 \end{aligned}$$

Diese Quersumme ist durch 9 teilbar. Der gesucht größte gemeinsame einstellige Teiler ist also gleich 9. ❑

Aufgabe 4-2[2]. Zeigen Sie, dass es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt.

Lösungshinweise: Angenommen, es sei p eine Primzahl, für die $2p + 1$ eine Kubikzahl ist. Dann gibt es also eine natürliche Zahl z mit $z^3 = 2p + 1$. Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch z ungerade, kann also in der Form $z = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n dargestellt werden. Somit gilt

$$2p+1 = (2n+1)^3 = 8n^3+12n^2+6n+1$$

also

$$p = n\cdot(4n^2+6n+3)$$

Da p eine Primzahl ist und der Faktor in der Klammer eine natürliche Zahl größer als 2 ist, muss $n = 1$ gelten.

Für $n = 1$ ist $p = 13$ tatsächlich eine Primzahl und man findet wie gefordert mit $2p + 1 = 27$ eine Kubikzahl. Die einzige Primzahl p mit der geforderten Eigenschaft ist daher die Zahl 13. ❑

Hinweis: Dass z ungerade ist, muss nicht am Anfang untersucht werden. Man kann ebenso folgende Gleichungen betrachten.

$$2p+1 = n^3$$

also

$$p = \frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot(n^2+n+1)$$

Der letzte Klammerausdruck ist stets ungerade und größer als $n - 1$. Folglich kann p nur dann eine Primzahl sein, wenn $\frac{1}{2}\cdot(n-1) = 1$ gilt.

[1] Teil (a) der Aufgabe MO521041

[2] MO-Klassiker MO060931 (1966/67)

Aufgabe 4-3. Man bestimme alle diejenigen 8-stelligen Zahlen, in denen alle Ziffern von 1 bis 8 vorkommen und die folgende Bedingungen erfüllen: Die Zahlen aus den ersten zwei, drei, ..., acht Ziffern (von links aus gezählt) sind jeweils durch 2, 3, ..., 8 teilbar.

Lösungshinweise: Bezeichnet man die Ziffern von links nach rechts mit a_1, a_2, ..., a_8, so sieht man unmittelbar wegen der Teilbarkeit durch 5 oder durch eine gerade Zahl folgende Bedingungen:

(1) $a_5 = 5$; a_2, a_4, a_6, a_8 sind geradzahlig; a_1, a_3, a_7 sind ungeradzahlig.

Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die Zahl, bestehend aus den 3 Ziffern $a_6a_7a_8$ durch 8 teilbar sein. Da a_6 geradzahlig ist, muss sogar die zweistellige Zahl a_7a_8 durch 8 teilbar sein. Da keine Ziffer doppelt auftreten darf, findet man nur folgende Möglichkeiten:

(2) 216 - 416 - 432 - 472 - 632 - 672 - 816 - 832 - 872

Weiterhin muss die Zahl a_3a_4 durch 4 teilbar sein. Mit den Bedingungen (1) können das nur die Zahlen

(3) 12 - 16 - 32 - 36 - 72 - 76

sein. In jeder dieser Zahlen kommt entweder die 2 oder die 6 vor. Deshalb kann man in (2) jene 3 unterstrichenen Kombinationen streichen, in denen sowohl die 2 als auch die 6 vorkommen. Es bleiben also noch folgende Möglichkeiten, die Ziffern a_3, a_4 sowie a_6, a_7, a_8 anzuordnen, wobei Zahlendopplungen nicht auftreten dürfen:

Nr.	$a_6\ a_7\ a_8$	$a_3\ a_4$	$a_4+a_5+a_6$	restl. Ziffern		$a_1+a_2+a_3$	Bemerkung
1	416	32	11	entfällt			
2	416	72	11	entfällt			
3	432	16	15	7	8	16	entfällt
4	432	76	15	7	8	16	entfällt
5	472	16	15	3	8	12	möglich
6	472	36	15	1	8	12	entfällt
7	816	32	15	4	7	14	entfällt
8	816	72	15	3	4	14	entfällt
9	832	16	19	entfällt			
10	832	76	19	entfällt			
11	872	16	19	entfällt			
12	872	36	19	entfällt			

Da sowohl $a_1a_2a_3$ als auch $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ durch 3 teilbar sind, muss auch die Summe $a_4 + a_5 + a_6$ durch 3 teilbar sein. Dies erfüllen nur die Möglichkeiten Nr. 3 bis Nr. 8 der Tabelle. Ergänzt man die Tabelle mit den verbleibenden 2 Ziffern ($a_5 = 5$ ist ja fest) und berücksichtigt die Teilbarkeit der Zahl $a_4a_5a_6$ durch 3, so können nur noch die Zahlen 38165472 und 18365472 Lösung der Aufgabe sein. Von der zweiten Zahl sind die ersten 7 Ziffern als Zahl 1836547 nicht durch 7 teilbar. Deshalb entfällt diese Zahl als Lösung.

Eine Probe bestätigt, dass die Zahl 38165472 alle Bedingung erfüllt. ❑

Aufgabe 4-4[3]. Man finde alle Funktionen *f*, die für alle reellen Zahlen *x* und *y* folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+y) - 2 \cdot f(x-y) + f(x) = 6 \cdot xy - y^2$$

Lösungshinweise: Setzen wir $y = x$, so erhalten wir:

$$f(2 \cdot x) - 2 \cdot f(0) + f(x) = 5 \cdot x^2$$

Setzen wir nun $y = -x$, so finden wir

$$f(0) - 2 \cdot f(2 \cdot x) + f(x) = -7 \cdot x^2$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit 2 und addieren dazu die zweite Gleichung, so führt dies zu:

$$3 \cdot f(x) - 3 \cdot f(0) = 3 \cdot x^2$$

d.h.

$$f(x) = x^2 + c$$

mit einer beliebigen Konstanten $c = f(0)$. Wenn es eine Lösung der Funktionalgleichung gibt, muss sie diese Form haben. Eine Probe bestätigt f als Lösung:

$$(x+y)^2 + c - 2 \cdot (x-y)^2 - 2 \cdot c + x^2 + c =$$
$$x^2 + 2 \cdot xy + y^2 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot xy - 2 \cdot y^2 + x^2 = 6 \cdot xy - y^2$$

❑

Aufgabe 4-5A.

(a) Man entscheide, ob die Zahl $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{2020}}}}$ rational oder irrational ist[4].

(b) Für beliebige natürliche Zahlen *x* und *y* sei $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y}$. Man zeige, dass es

- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* rational ist.
- unendlich viele Paare (*x*; *y*) gibt, so dass *z* irrational ist[5].

---

[3] MO-Klassiker – MO051033 (1965/66)
[4] Nach Aufgabe MO291031
[5] Nach Aufgabe MO221042

(c) Man untersuche, ob es positive rationale Zahlen *t* gibt, für die $\sqrt{t+\sqrt{t}}$ rational ist. Wenn es solche Zahlen *t* gibt, entscheide man, ob es endlich viele oder unendlich viele solche Zahlen *t* gibt[6].

Lösungshinweise:
(a) Sind *x* eine rationale Zahl und *y* eine irrationale Zahl, so ist die Zahl $z = x + \sqrt{y}$ irrational. Wäre nämlich *z* rational, dann wäre auch $(z-x)^2$ rational im Widerspruch zu $(z-x)^2 = y$. Da nun 2019 rational und $\sqrt{2020} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101}$ irrational sind, ist deshalb $z_{2019} = 2019 + \sqrt{2020}$ irrational. Setzt man nun $z_k = k + \sqrt{z_{k+1}}$, so sind alle Zahlen z_k für $k = 1, \ldots, 2019$ irrational und insbesondere auch $x = \sqrt{z_1}$. ❑

Lösungsvariante: Durch fortgesetzte Umformungen der Art

$$x^2 - 1 = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{2020}}}$$

$$(x^2-1)^2 - 2 = \sqrt{3 + \sqrt{4 + \ldots + \sqrt{2020}}}$$

gelangt man zu einer Gleichung, auf deren rechten Seite $\sqrt{2020}$ steht. Wäre die Zahl *x* eine rationale Zahl, so wäre der Ausdruck auf der linken Seite ebenfalls rational, da hier nur die Operationen Subtrahieren und Quadrieren angewandt werden – im Widerspruch zur Irrationalität des Wurzelausdrucks auf der rechten Seite.

Hinweis: Es darf nicht umgeformt werden, bis kein Wurzelausdruck mehr enthalten ist. Dann führt die Annahme, *x* sei rational, nicht zum Widerspruch. Die Umformung erfolgt also nur so lange, bis die Irrationalität der rechten Seite leicht gezeigt werden kann.

Ergänzung: Im Aufgabentext fehlte leider ein Wurzelzeichen für die Zahl 2020, $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots\ldots + 2020}}}$. Unter Anwendung der Gaußschen Summenformel reduziert sich wegen

$$3 + 4 + \ldots + 2020 = (1 + 2 + 3 \ldots + 2020) - (1+2) = ½ \cdot 2020 \cdot 2021 - 3$$
$$= 2041210 - 3 = 2041207$$

die Aufgabe zu $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{2041207}}}$. Da $2041207 = 7 \cdot 17^2 \cdot 1009$ ebenfalls keine Quadratzahl ist, kann die obige Argumentation in gleicher Weise angewandt werden.

[6] Nach Aufgabe MO331042

(b) Es genügt, Paare der geforderten Art anzugeben. Setzt man $x = 9n^2$ und $y = 16n^2$, so gilt für alle natürlichen Zahlen n die Beziehung $x + y = 25n^2$. Dann sind alle Zahlen z mit

$$z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = 3n + 4n + 5n + 12n$$

rational.
Setzt man $x = y = n^2$, so gilt $z = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x+y} = 2n + n\sqrt{2}$. Wegen der Irrationalität von$\sqrt{2}$ ist somit für jede natürliche Zahl n ($n > 0$) die Zahl z irrational. ❑

Bemerkung: Da in der Aufgabenstellung die Zahl 0 nicht ausdrücklich ausgeschlossen wurde, vereinfacht sich die Argumentation für $x = 0$, indem für y im ersten Teil Quadratzahlen bzw. im zweiten Teil Nichtquadratzahlen einzusetzen sind.

(c) Es genügt auch hier, ein Beispiel anzugeben: $t = \frac{1}{(n^2-1)^2}$ ($n = 2, 3, \ldots$).
Es gilt tatsächlich für alle $n > 1$:

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{1}{(n^2-1)}} = \sqrt{\frac{1+(n^2-1)}{(n^2-1)^2}} = \frac{n}{(n^2-1)} \text{ ist rational.}$$

❑

Hinweis: Um solche geeigneten Zahlen t zu finden, versuche man den Wurzelausdruck zu analysieren. Man kann vermuten, dass es sicher günstig für die Zielstellung ist, wenn sich t als Quotient zweier Quadrate von natürlichen Zahlen darstellen lässt, also $t = \frac{p^2}{q^2}$, weil dann die innere Wurzel rational bleibt. Dieser Ansatz führt zum Wurzelausdruck:

$$\sqrt{\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{p(p+q)}{q^2}}.$$

Wenn nun p und q so gewählt werden können, dass $p(p + q)$ wieder eine Quadratzahl wird, so wäre die Aufgabe gelöst. Mit $p = 1$ und $q = n^2 - 1$ erhält man die oben angegebene Zahlenfolge.

Ergänzend sei nun gefragt, ob es auch unendlich viele rationale Zahlen t gibt, für die der Ausdruck $\sqrt{t + \sqrt{t}}$ irrational ist. Auch wenn dies „gefühlsmäßig“ sicherlich positiv zu beantworten ist, wird auch dafür als Beweis die Angabe geeigneter Beispiele erwartet. Betrachtet man die Zahlen $t = \frac{1}{n^4}$ ($n = 1, 2, \ldots$), so erkennt man aus

$$\sqrt{t + \sqrt{t}} = \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2},$$

dass der Zähler für jede natürliche Zahl $n > 0$ irrational und damit der gesamte Ausdruck ebenfalls irrational ist.

Die Aufgabe hat einen Vorgänger – **Aufgabe MO301043**: Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl m derart gibt, dass es zu jeder positiven Zahl k höchstens m natürliche Zahlen t gibt, mit denen die Zahl $\sqrt{t + k \cdot \sqrt{t}}$ rational ist.

Lösungshinweise: Auch hier genügt es, eine Folge von geeigneten Zahlen anzugeben.

$$k = 2^{2m+1}\ ;\ t_i = \left(2^{2m-i} - 2^i\right)^4 \quad i = 0, \dots, m+1$$

oder

$$k = (2^2 - 1)(3^2 - 1) \cdot \ldots \cdot ((m+1)^2 - 1)$$
$$t_1 = 0$$
$$t_i = \frac{k^2}{(i^2 - 1)^2} \quad i = 2, \dots, m+1$$

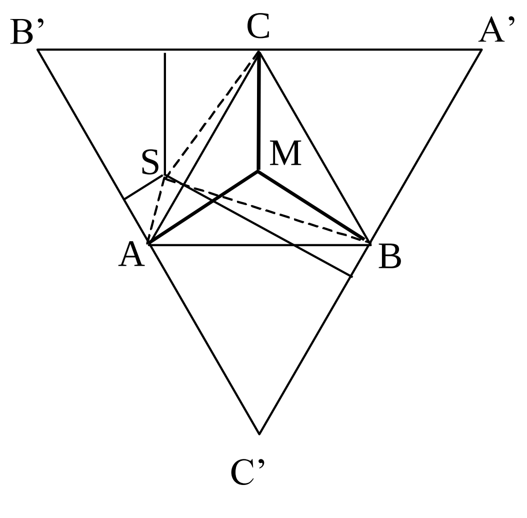
Aufgabe 4-5B. Gibt es für ein ebenes Vieleck einen Punkt der Ebene, sodass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu allen Eckpunkten des Vielecks minimal ist, so wird dieser Punkt FERMAT-Punkt genannt, da PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker, 1601 bis 1665) die Frage nach der Existenz eines solchen Punktes im Dreieck erstmalig gestellt hat.

(a) Man zeige, dass es im gleichseitigen Dreieck einen FERMAT-Punkt gibt.

(b) Man beweise: In einem konvexen Viereck ist der Schnittpunkt der Diagonalen der FERMAT-Punkt.

(c) Gibt es für jedes konkave Viereck (d.h. für ein Viereck mit einem Winkel größer als 180°) einen FERMAT-Punkt?

Lösungshinweise:



(a) Der Schnittpunkt M der Höhen ist im gleichseitigen Dreieck der FERMAT-Punkt. Betrachtet man das gleichseitige Dreieck $A'B'C'$, das aus ABC durch die Seitenparallelen durch die gegenüberliegenden Eckpunkte hervorgeht, so ist M auch der Höhenschnittpunkt von $A'B'C'$.

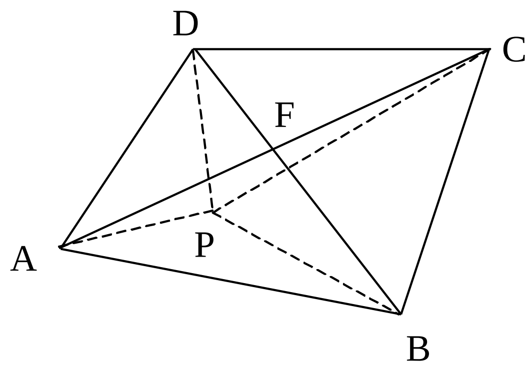
Im gleichseitigen Dreieck A’B’C’ ist nach dem Satz von VIVIANI[7] die Summe der Abstände eines inneren Punktes S zu den Seiten unabhängig von der Lage des Punktes konstant und gleich der Höhe des

[7] VINCENZO VIVIANI, italienischer Mathematiker, 1622–1703

Dreiecks *A'B'C'*. Der Beweis dieser Aussage ist einfach: Man betrachte die Dreiecke *A'B'S*, *B'C'S* und *A'C'S*. Die Summe der drei Flächeninhalte ist so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks *A'B'C'*. Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks als das halbe Produkt von Grundseite und Höhe berechnet und in den Teildreiecken die Grundseiten jeweils der Grundseite des Gesamtdreiecks entsprechen, folgt die Behauptung, dass die Summe der Höhen der Teildreiecke gleich der Höhe im Gesamtdreieck ist.

(Für *M* stimmt die gesuchte Summe mit der Summe der Abstände zu den Seiten überein.) Die Abstände von *S* zu den Eckpunkten *A*, *B* und *C* können aber nicht kleiner als die Abstände zu den Seiten sein. Liegt dagegen *S* außerhalb des Dreiecks *A'B'C'*, so ist die Summe der Abstände zu den Eckpunkten größer als die Dreieckshöhe und damit größer als die Summe von *M* aus.

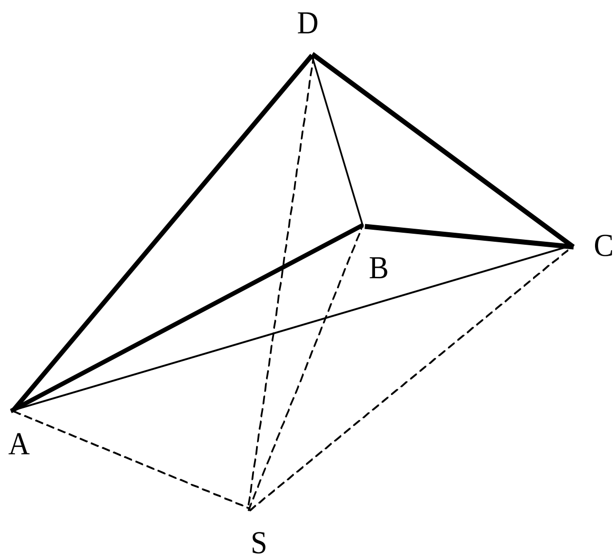
(b) Es sei *F* der Schnittpunkt der Diagonalen und *P* ein beliebiger anderer Punkt in der Ebene des Vierecks. Dann gilt wegen der Dreiecksungleichung in den Dreiecken *APC* bzw. *DPB*:



$$\left|\overline{AP}\right| + \left|\overline{CP}\right| \geq \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FC}\right|$$
$$\left|\overline{BP}\right| + \left|\overline{PD}\right| \geq \left|\overline{BD}\right| = \left|\overline{BF}\right| + \left|\overline{FD}\right|$$

Ist P nicht der Schnittpunkt der Diagonalen, so gilt wenigstens in einer der Ungleichungen die Ungleichheit. Damit ist die Summe der Abstände von *P* zu allen Eckpunkten stets größer als die Summe der Abstände des Diagonalenschnittpunktes zu allen Eckpunkten.

(c) Ist das Viereck konkav, d.h. an einem Eckpunkt (in der Skizze *B*) liegt ein überstumpfer Winkel an, so ist dieser Eckpunkt der FERMAT-Punkt. Es sei *S* ein beliebiger, von *B* verschiedener Punkt der Ebene.



Die drei Dreiecke *ASC*, *CSD* und *DAS* überdecken das Dreieck *ACD* und somit das konkave Viereck *ABCD*. Folglich liegt in mindestens einem dieser Teildreiecke (einschließlich der Dreieckseiten) der Punkt *B*. Es sei dies das Dreieck *SCD*. Dann liegt der Streckenzug *CBD* vollständig innerhalb des Dreiecks *SCD* und somit gilt:

$$\left|\overline{CS}\right| + \left|\overline{SD}\right| \geq \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BD}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $S = B$.)
Im Dreieck *ABS* gilt zudem wegen der Dreiecksungleichung:

$$\left|\overline{AS}\right| + \left|\overline{SB}\right| \geq \left|\overline{AB}\right|.$$

(Das Gleichheitszeichen gilt, falls *S* zwischen *AB* liegt.)
Folglich ist in jedem Fall die Summe der Abstände von *S* zu allen 4 Eckpunkten größer als die Summe der Abstände von *B* zu den Eckpunkten *A*, *C* und *D*. Der Punkt *B* ist somit der FERMAT-Punkt des konkaven Vierecks. ❑

Ergänzende Lösungshinweise

Die **Aufgabe MO521041** wurde mit Teil (b) fortgesetzt: Man bestimme den größten gemeinsamen Teiler aller diejenigen 178-stelligen natürlichen Zahlen teilt, die durch Aneinanderhängen der neunundachtzig zweistelligen Zahlen 11, 12, ..., 99 in beliebiger Reihenfolge entstehen.

Lösungshinweise: Wie aus Teil (a) folgt, beträgt die Quersumme 854 und ist somit nicht durch 3 teilbar. Wir nehmen an, es gibt einen gemeinsamen Teiler größer als 1. Ein solcher Teiler ist auch Teiler von 99, da er auch Teiler der Differenz der beiden ausgewählten Zahlen ...1211 und ...1112 ist (wobei ... eine beliebige, aber für beide Zahlen gleich Ziffernfolge ist). Somit könnte die Zahl 11 der größte gemeinsame Teiler sein.

Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. Die alternierende Quersumme *A* jeder der betrachteten Zahlen ist gleich

$$\begin{aligned} A &= (1-1) + (1-2) + \ldots + (9-9) = \\ &= 9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \ldots 10 \cdot 9 - 9 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 2 + 3 + \ldots + 9 = 44 \end{aligned}$$

Folglich ist der größte gemeinsame Teiler gleich 11. ❑

Die Aufgabe 4-5A1 findet in der **Aufgabe MO521142** eine Fortsetzung:

Die Zahlenfolge (a_n) sei durch $a_n = 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \ldots\ldots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}}}$

für alle positiven ganzen Zahlen *n* definiert. Man zeige, dass es dann eine positive reelle Zahl *C* gibt, mit der die Ungleichung $a_n < C$ für alle positiven ganzen Zahlen *n* erfüllt ist.

Lösungshinweise: Der gegebene Ausdruck für a_n wird schrittweise unter Ausnutzung der Monotonie der Wurzelfunktion abgeschätzt, beginnend mit der am Weitesten innenstehenden Wurzel.

Für jedes k > 0 gilt nämlich: $\sqrt{k+\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+2\sqrt{k}+1} = \sqrt{k}+1$.

Damit lässt sich a_n schrittweise zu $a_n < 1+\sqrt{2}+1$ vereinfachen. Also ist mit $C = 2+\sqrt{2} < 3{,}42$ eine Zahl mit der geforderten Eigenschaft gefunden. Die kleinste Schranke liegt bei 3,09....

zu Aufgabe 4-2. Für Aufgaben dieses Typs – insbesondere, wenn hierbei Primzahlen verwendet werden – sollte für einen ersten Lösungsansatz immer nach einer geeigneten Faktorisierung gesucht werden. Dies führte auch in anderen MO-Aufgaben zum Erfolg.

Aufgabe MO481032. (a) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche 2^n+1 eine Quadratzahl ist!

Lösungshinweise: Leicht findet man, dass $n = 3$ zu einer Quadratzahl führt. Für die allgemeine Lösung schreibe man die Aufgabe zunächst um, indem eine natürliche Zahl *m* verwendet wird:

$$2^n+1 = m^2$$
also $$2^n = m^2-1 = (m-1)\cdot(m+1).$$

Da auf der linken Seite dieser Gleichung eine Zweierpotenz steht, müssen auch beide Faktoren der rechten Seite jeweils eine Zweierpotenz sein. Also gibt es Zahlen $a < b$ mit $2^a = m - 1$ und $2^b = m + 1$. Das bedeutet:

$$2^b - 2^a = 2^a\cdot(2^{b-a}-1) = 2.$$

Diese Gleichung kann aber nur für $a = 1$ erfüllt werden, woraus $m = 3$ folgt. ❑

(b) Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen *n*, für welche 2^n+1 eine Kubikzahl oder eine noch höhere Potenz einer ganzen Zahl ist!

(*Hinweis:* Es ist nachzuweisen, dass es keine solche Zahl *n* gibt.)

Aufgabe MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(p\,;z)$ aus einer Primzahl *p* und einer positiven ganzen Zahl *z*, für welche die Beziehung $z^2 = 25p+9$ gilt.

Lösungshinweise: Anhand von Beispielen wird man wohl kaum die Lösungsmenge erschließen können. Naheliegend ist wiederum eine Faktorisierung:

$$25p = z^2-9 = (z-3)\cdot(z+3)\,.$$

Der Term 25p lässt sich auf sechs verschiedene Arten in zwei Faktoren zerlegen:

z – 3	z + 3	(z + 3) – (z – 3) = 6	p	z
1	25p	25p – 1	nicht ganzzahlig	
25p	1	1 – 25p	nicht ganzzahlig	
25	p	P - 25	31	28
p	25	25 – p	19	22
5	5p	5p – 5	nicht ganzzahlig	
5p	5	5 – 5p	nicht ganzzahlig	

Folglich können nur die Paare (19 ; 22) und (31 ; 28) Lösungen sein, was durch Proben bestätigt wird. ❑

Aufgabe MO501035. Man bestimme alle Paare (p ; q) von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Schreibt man den Term als $(p-1)(p+1) - 3q$, so wird ersichtlich, dass für $p \neq 3$ dieser Term stets durch 3 teilbar ist (weil p – 1, p und p + 1 drei aufeinander folgende natürliche Zahlen sind). Wenn der Term also eine Primzahl ist, kann dieser ebenfalls nur 3 sein.

Aus $p^2 - 3q - 1 = 3$ folgt $3q = p^2 - 4 = (p-2)(p+2)$.

Hieraus kann nun gefunden werden, dass $p - 2 = 3$ und $p + 2 = q$ gelten muss (wie?), so dass (5 ; 7) ein Lösungspaar ist. Dies wird durch die Probe bestätigt, denn $5^2 - 21 - 1 = 3$.

Nun muss noch der Fall $p = 3$ untersucht werden. Hieraus ergibt sich als eine weitere Lösung das Paar (3 ; 2) mit $3^2 - 6 - 1 = 2$. ❑

Aufgabe MO501044. Bestimmen Sie sämtliche Paare (n ; t) ganzer Zahlen, für die $n^2 = 2^t + 5$gilt!

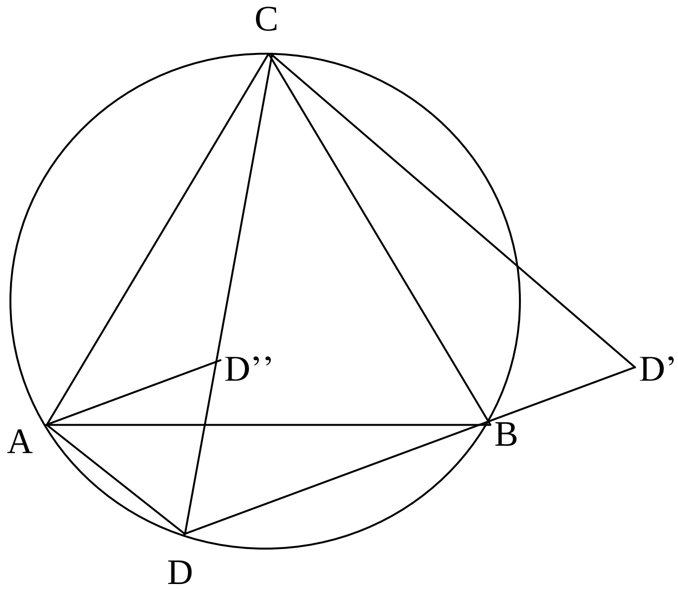
Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren für t = 0, 1, 2 findet man das Paar (3 ; 2) als Lösung, denn es gilt $3^2 = 2^2 + 5 = 9$. Weiteres Probieren lässt die Vermutung zu, dass es keine weiteren Lösungspaare gibt, was natürlich zu beweisen ist. Obwohl die Zahl 5 nicht zur Faktorisierung „einlädt“, ist der Lösungsansatz dennoch erfolgreich:

$$2^t + 4 = (n-1)(n+1).$$

Für $t > 2$ ist n offenbar ungerade. Damit sind beide Faktoren der rechten Seite durch 2 und einer sogar durch 4 teilbar. Das Produkt ist also immer durch 8 teilbar. Jedoch ist für $t > 2$ die linke Seite stets durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es keine weiteren Lösungspaare für $t > 2$ geben kann. ❑

Aufgaben über Summen geometrischer Abstände

Aufgabe. Es sei *ABC* ein gleichseitiges Dreieck und *D* ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis dieses Dreiecks, der auf dem Bogenstück zwischen *A* und *B* liegt. Dann gilt für die Streckenlängen: $\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{DB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$.



Beweisskizze: (*Variante 1*) Satz von PTOLEMÄUS[8]: Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten des Sehnenvierecks *ADCB* ist gleich dem Produkt der Diagonalen, also

$$\left|\overline{AD}\right| \cdot \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{DB}\right| \cdot \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{CD}\right| \cdot \left|\overline{AB}\right|.$$

Da aber *CB* = *AC* = *AB* gilt, kann die Gleichung vereinfacht werden und man erhält die Behauptung.

(*Variante 2*, Hilfspunkt *D*') Es werde *DB* über *B* hinaus verlängert und es gelte $\left|\overline{BD'}\right| = \left|\overline{AD}\right|$. Dann ist das Dreieck *CAD* kongruent zum Dreieck *CBD*', da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, wobei der Winkel $\angle CBD'$ als Nebenwinkel zum Winkel $\angle DBC$ gleich groß zum Winkel $\angle CAD$ als gegenüberliegender Winkel zum Winkel $\angle DBC$ im Sehnenviereck *ADBC* ist. Dann gilt aber auch die Winkelgleichheit $\angle D'CB = \angle DCA$ und somit $\angle D'CD = \angle BCA = 60°$ sowie als Peripheriewinkel über der Sehne *CB* auch $\angle CDB = \angle CAB = 60°$.

Damit ist das Dreieck *DD'C* ebenfalls gleichseitig und es gilt wie behauptet

$$\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DD'}\right| = \left|\overline{DB}\right| + \left|\overline{BD'}\right| = \left|\overline{DB}\right| + \left|\overline{AD}\right| .$$

(*Variante 3*, Hilfspunkt *D*'') Es sei *D*'' auf der Strecke *CD*, so dass der Winkel $\angle D''AD = 60°$ sei. Da wegen der Peripheriewinkel über der Sehne *AC* auch der Winkel $\angle ADC = 60°$ gilt, ist das Dreieck *ADD''* gleichseitig und es gilt

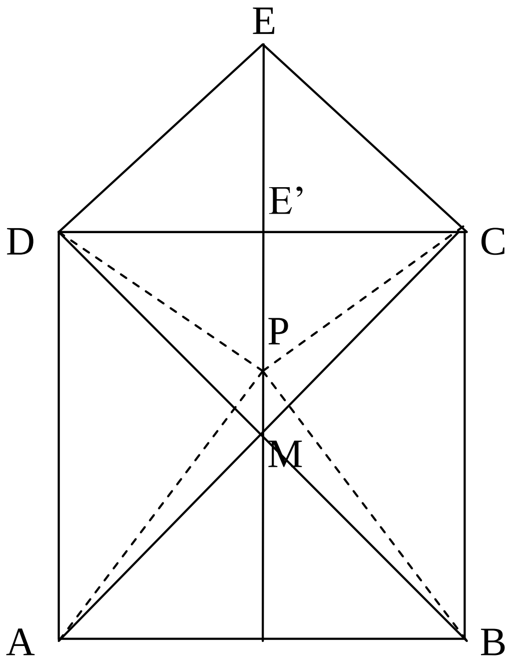
$$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AD''}\right| = \left|\overline{DD''}\right|.$$

Außerdem sind die Dreiecke *AD''C* und *ADB* kongruent (da sie in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen). Damit gilt aber:

$$\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{DD''}\right| + \left|\overline{D''C}\right| = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{DB}\right|. \qquad \square$$

[8] KLAUDIUS VON ALEXANDRA PTOLEMÄUS (griechischer Mathematiker und Astronom; etwa 85 bis 165)

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge *a* und mit einem auf *CD* aufgesetzten Dreieck *CDE*. Man bestimme die Lage des Punktes *P*, für den die Summe der Abstände zu den 5 Eckpunkten dieser Figur minimal wird.



Beweisskizze: Aus Symmetriegründen liegt der Punkt *P* auf der Verbindung des Mittelpunktes *M* des Quadrates *ABCD* und *E*. Sei der Abstand des gesuchten Punkte *P* zum *M* gleich *x*. Es genügt zunächst, die Summe *S*(*x*) der Abstände von *P* zu den Quadratecken und dem Schnittpunkt *E*' von *ME* mit *CD* zu ermitteln. Dafür gilt:

$$S(x) = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} + \left(\frac{a}{2} - x\right)$$

Man findet ein Minimum für *S*(*x*) bei $x \approx 0{,}3122 \cdot a$. Da der Punkt *P* im Innern des Quadrates liegt, ist *P* auch der FERMAT-Punkt des Fünfecks *ABCDE*. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCD* eine gerade dreiseitige Pyramide mit der gleichseitigen Grundfläche *ABC* (Seitenlänge *a*) und der Spitze *D* (Höhe *h*). Man finde den Punkt *F*, so dass die Summe der Abstände von *F* zu den Eckpunkten minimal wird.

Beweisskizze: Wieder aus Symmetriegründen liegt der gesuchte Punkt *F* auf der Höhe der Pyramide. Es sei sein Abstand zur Grundfläche *x*. Da die Höhe auf dem Schnittpunkt der Höhen der Grundfläche steht, gilt für die Summe der Abstände *S*(*x*):

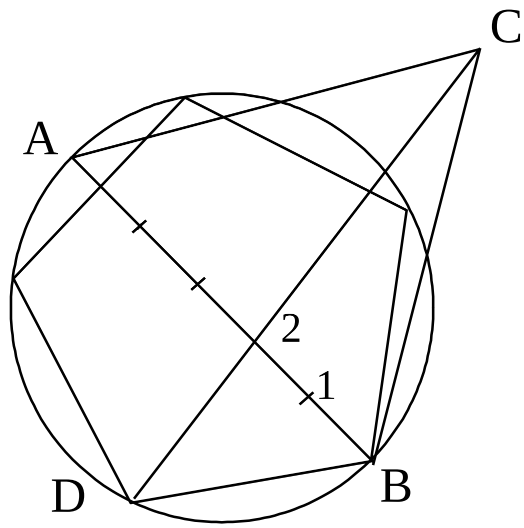
$$S(x) = 3\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + x^2} + (h - x).$$

Man findet das Minimum für *S*(*x*) bei $x = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$. Damit *F* der FERMAT-Punkt ist, darf *h* nicht kleiner als *x* sein, andernfalls ist *D* der FERMAT-Punkt.

Näherungskonstruktionen für reguläre n-Ecke

Im Jahre 1790 erschien in Göttingen ein Buch von JOHANN NIKOLAUS MÜLLER (1754 – 1797) mit dem Titel „Anweisungen zur Geometrie für Anfänger“[9]. Darin beschreibt der Privatlehrer an der Universität Göttingen im 35. Kapitel ein Verfahren, mit dem man näherungsweise einem Kreis regelmäßige *n*-Ecke beliebiger Seitenzahl einbeschreiben kann:

„*Theilet den Durchmesser AB desselben bey den Puncten 1, 2, ..., n-1 in n gleiche Theile. Nehmet den ganzen Durchmesser AB mit dem Zirkel ab und machet aus seinen Endpuncten, A und B, aufwärts zween Bogen, die sich im Punct C schneiden. Von den Puncten, A und B, ziehet nach dem Durchschnittspunct C, die geraden Linien AC und BC; so entstehet das gleichseitige Dreyeck ABC. Aus seiner Spitze C und durch den Theilungspunct 2 ziehet die gerade Linie CD, die dem Kreis in dem Punct D begegnet. Aus dem Endpunct B ziehet hierauf nach dem Punct D, die gerade Linie BD, welche sich sicher in dem Kreis n-mal herumtragen lässt. Unterlasset ihr nicht sie wirklich n-mal herumzutragen und die Puncte mit geraden Linien zusammenzuziehen, so habt ihr das reguläre n-Eck im Kreise gezeichnet.*“



Die Skizze erläutert die Konstruktionsbeschreibung für das im Kreis einbeschriebene reguläre Fünfeck. Beim Ausprobieren der Methode stellt man fest, dass dieses Verfahren für *n* = 3, 4, 6 das exakte *n*-Eck liefert. Um die Genauigkeit des Verfahrens für andere *n* zu untersuchen, beschreibe man die Abhängigkeit der Seitenlänge $\overline{BD}$ vom Radius $r = \overline{AB}$.

Erstaunlich, dass mit diesem einfachen Verfahren der relative Fehler für $n < 11$ unter 1% bleibt. Für das 17-Eck errechnet sich ein relativer Fehler der konstruierten zur exakten Seitenlänge von weniger als 3%. Man kann zeigen, dass sich für wachsendes *n* der relative Fehler 10% nur geringfügig übersteigt.

[9] http://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18

Thema 3 – Lineare Gleichungssysteme

Angeregt durch die folgende Aufgabe des 59. MO-Jahrgangs wollen wir über lineare Gleichungssysteme diskutieren:

Aufgabe MO590934. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$ax + 9y = 5$$
$$x + ay = 1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Für welche Werte für a hat das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$? Geben Sie in diesen Fällen die Lösung in Abhängigkeit von a an.
(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Vorbemerkung: Ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme der Form

(I) $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1$
(II) $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2$

besteht bekanntlich darin, eine Variable zu eliminieren[10]. Dazu multiplizieren wir zum Beispiel die erste Gleichung mit a_2 und die zweite Gleichung mit $-a_1$. Nach Addition der beiden resultierenden Gleichungen erhalten wir

(III) $(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) \cdot y = a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2$

Ist der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) von Null verschieden, gibt es eine eindeutige Lösung für y:

(IV) $y = \frac{a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}$

Setzen wir diese in die Gleichung (I) ein, finden wir für $a_1 \neq 0$ eine eindeutige Lösung für x:

(V) $x = \frac{c_1 - b_1 \cdot y}{a_1}$

Ist dagegen der erste Faktor der linken Seite der Gleichung (III) gleich Null, kann es keine Lösung für $a_2 \cdot c_1 \neq a_1 \cdot c_2$ geben bzw. sind für $a_2 \cdot c_1 = a_1 \cdot c_2$ alle reellen Zahlen y Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Aufgrund der Vorbemerkung ist der Ausdruck $1 \cdot 9 - a \cdot a = 9 - a^2$ hinsichtlich seiner Nullstellen zu untersuchen. Da genau eine Lösung gesucht wird, muss a verschieden von 3 und -3 sein. Dann können wir die Lösungen gemäß (III) und (IV) unmittelbar angeben:

[10] Sonderfälle, bei denen Koeffizienten von x oder y gleich Null sind, wollen wir hier nicht diskutieren.

$$y = \frac{1 \cdot 5 - a \cdot 1}{1 \cdot 9 - a \cdot a} = \frac{5-a}{9-a^2} \qquad \text{und} \qquad x = \frac{5 - 9 \cdot \left(\frac{5-a}{9-a^2}\right)}{a} = \frac{5 \cdot (9-a^2) - 9 \cdot (5-a)}{a \cdot (9-a^2)} = \frac{9 - 5 \cdot a}{9-a^2}\,.$$

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Aus der zweiten gegebenen Gleichung erhalten wir für $y \neq 0$ die Gleichung $a = \frac{1-x}{y}$. Wir erkennen, dass es für $y \neq 0$ nur genau eine Lösung für a gibt. Ist dagegen $y = 0$, erhalten wir aus der zweiten Gleichung $x = 1$ und somit aus der ersten Gleichung den eindeutigen Wert $a = 5$. Also ist die Frage zu verneinen: Es gibt kein Wertepaar $(x; y)$, dass für mehrere Zahlen a Lösung des Gleichungssystems ist.

Lösungsvariante: In den offiziellen Lösungshinweisen zur Aufgabe wird eine allgemeinere Lösungsstrategie vorgeschlagen. Mit der Vermutung, dass die Frage aus Aufgabenteil zu verneinen ist, nehmen wir an, es gäbe mindestens zwei verschiedenen Zahlen a_1 und a_2, für die das Gleichungssystem eine Lösung $(x_0; y)$ hat. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$a_1 \cdot x + 9 \cdot y = 5 = a_2 \cdot x + 9 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot x = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung finden wir

$$x + a_1 \cdot y = 1 = x + a_2 \cdot y, \text{ also } (a_1 - a_2) \cdot y = 0.$$

In beiden Fällen folgt (wegen der Annahme $a_1 \neq a_2$) $x = 0$ bzw. $y = 0$. Wir überzeugen uns jedoch davon, dass das Paar $(0; 0)$ keine Lösung des Gleichungssystem ist. ❑

Wettbewerbsaufgaben mit Gleichungssystemen bieten sich offenbar an, im Schwierigkeitsgrad zwischen den Klassenstufen 9 und 10 zu differenzieren. So lautete die zugehörige

Aufgabe MO591034. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$a \cdot x + (5 \cdot a + 9) \cdot y = 1$$
$$(5 \cdot a + 9) \cdot x + a \cdot y = -1$$

in den Variablen x, y mit Parameter a.

(a) Bestimmen Sie für jede reelle Zahl a die Anzahl der Lösungen $(x; y)$ des linearen Gleichungssystems. Geben Sie für diejenigen Werte a, für welche das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x; y)$ hat,

(b) Gibt es ein Wertepaar $(x; y)$, welches für mehrere Werte a eine Lösung des Gleichungssystems ist?

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (a): Wir könnten die allgemeine Lösungsstrategie von linearen Gleichungssystemen wie in der Aufgabe MO590934 anwenden. Die aufwändige Rechnung wird in den offiziellen Lösungshinweisen gezeigt. Als Lösungsvariante wird aber auch darauf verwiesen, dass die spezielle

Form des Gleichungssystems eine wesentlich einfachere Lösung ermöglicht: Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$(6 \cdot a + 9) \cdot (x + y) = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

- Für $a = -\frac{2}{3}$ gibt es unendlich viele Lösungspaare (x, y).
- Ist $a \neq -\frac{2}{3}$, so folgt $y = -x$. Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, erhalten wir $x = \frac{-1}{4 \cdot a + 9}$. Für $a = -\frac{9}{4}$ kann es also keine Lösung des Gleichungssystems geben.
- Ist dagegen $a \neq -\frac{9}{4}$ erhalten wir $y = \frac{1}{4 \cdot a + 9}$ und für das Gleichungssystem gibt es genau eine Lösung $\left(-\frac{1}{4 \cdot a + 9}; \frac{1}{4 \cdot a + 9}\right)$.

Damit ist Aufgabenteil vollständig beantwortet. ❑

Lösungshinweise zu Aufgabenteil (b): Wir lösen die erste Gleichung nach a auf und erhalten für $x + 5 \cdot y \neq 0$ nach äquivalenter Umformung

$$a = \frac{1 - 9 \cdot y}{x + 5 \cdot y}$$

Es kann also in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die zweite Gleichung widersprüchlich wird). Nehmen wir dagegen $x + 5 \cdot y = 0$ an und substituieren wir in der zweiten Gleichung $x = -5 \cdot y$, so erhalten wir

$$a = \frac{1 - 45 \cdot y}{24}$$

Es kann also auch in diesem Fall nur eine Lösung für a geben (oder keine Lösung, wenn für dieses a die erste Gleichung widersprüchlich wird).

Die Frage des Aufgabeteils (b) ist also zu verneinen. ❑

Diese Aufgaben haben in der Mathematik-Olympiade einen Vorgänger:

Aufgabe MO571045. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$a^2 \cdot x + y = a$$
$$x + a^2 \cdot y = a$$

in den reellen Variablen a, x und y.

Bestimmen Sie die Menge M aller Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, für die das Gleichungssystem mindestens eine Lösung a hat. Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Aufgaben mit Gleichungssystemen wurden wiederholt in den Mathematik-Olympiaden gestellt. Da die Lösung solcher linearen Systeme eher eine technische Fertigkeit erfordert, werden sie „versteckt“, wie zum Beispiel in

Aufgabe MO580941. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $(x; y; z)$ des Gleichungssystems

$$|x+y|+z=4 \quad ; \quad |y+z|+x=5 \quad ; \quad |z+x|+y=6$$

Lösungshinweise: Mit Fallunterscheidung sind die Betragszeichen aufzulösen. In jedem dieser Fälle entstehen einfach zu lösende lineare Gleichungssysteme.

Aufgabe MO570934. Drei Mähdrescher A, B und C besitzen unterschiedliche Mähleistungen. Folgendes ist bekannt:

(1) Wird ein Feld 9 Stunden von A und 2 Stunden von B bearbeitet, ist es komplett abgeerntet.
(2) Würde das gleiche Feld 4 Stunden von A und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{2}{3}$ des Feldes abgeerntet.
(3) Würde das gleiche Feld 2 Stunden von B und 3 Stunden von C bearbeitet, wären erst $\frac{7}{12}$ des Feldes abgeerntet.

Ermitteln Sie, wie lange jeder einzelne der drei Mähdrescher brauchen würde, um das komplette Feld allein abzuernten.

Anmerkung: In den Aussagen (1) bis (3) wird vorausgesetzt, dass die Mähdrescher stets mit voller Leistung arbeiten.

Lösungshinweise: Es sei a die Stundenleistung des Mähdreschers A. Die Zahl a gibt dabei an, welchen Anteil des betrachteten Feldes A innerhalb einer Stunde bearbeiten kann. Analog seien die Stundenleistungen der anderen beiden Mähdrescher mit b und c bezeichnet. Die gegebenen Informationen führen dann zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$9 \cdot a + 2 \cdot b = 1 \qquad 4 \cdot a + 3 \cdot c = \frac{2}{3} \qquad 2 \cdot b + 3 \cdot c = \frac{7}{12}$$

Formen wir die erste Gleichung nach b und die zweite Gleichung nach c um und substituieren wir mit den resultierenden Gleichungen in der dritten Gleichung b und c, so erhalten wir eine lineare Gleichung in a. Mit deren Lösung $a = \frac{1}{12}$ finden wir aus der ersten und zweiten Gleichung $b = \frac{1}{8}$ bzw. $c = \frac{1}{9}$.

(*Hinweis:* Die genannten Umformungen müssen natürlich in der Lösungsdarstellung vollständig angegeben sein!)

Somit gilt: Mähdrescher A benötigt 12 Stunden, um das Feld allein abzuernten, Mähdrescher, B benötigt dafür 8 Stunden und Mähdrescher C benötigt dafür 9 Stunden.

Gleichungssysteme und der Satz von VIETA

Die Anwendung des Satzes von VIETA[11] als Lösungsstrategie für Gleichungssysteme schien in Vergessenheit geraten zu sein. Doch in Aufgabe MO591044 wird dieser Ansatz verwendet. Dazu betrachten wir zunächst Gleichungssysteme mit zwei Variablen. Es sollte der Zusammenhang bekannt sein: Besitzt eine quadratische Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ die reellen Nullstellen x_1 und x_2, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 = -a \quad ; \quad x_1 \cdot x_2 = b$$

Diese Aussage ist eine einfache Folgerung des Fundamentalsatzes der Algebra, nach dem sich ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in den komplexen Zahlen als Produkt von n Linearfaktoren darstellen lässt, hier also

$$x^2 + a \cdot x + b = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Nach Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x erhalten wir die behaupteten Gleichungen.

Aufgabe MO591044. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach Satz von VIETA folgt für die Koeffizienten der Funktionen f und g

$$b = x_1 \cdot x_2 \quad \text{bzw.} \quad 2b + 1 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}$$

Nach Multiplikation beider Gleichungen erhalten wir $b \cdot (2b + 1) = 1$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Außerdem folgt aus dem Satz von VIETA auch

[11] FRANCISCUS VIETA (1540 bis 1603)

$$-a = x_1 + x_2 \quad \text{bzw.} \quad (-2a+1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Führen wir diese beiden Gleichungen zusammen, finden wir

$$-(2a+1) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{a}{b}$$

Für $b = \frac{1}{2}$ erhalten wir den Widerspruch $-(2a+1) = -2a$. Für $b = -1$ erhalten wir dagegen $-(2a+1) = a$, also $a = -\frac{1}{3}$. Somit kann nur $\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$ das Lösungstupel für diese Aufgabe sein. Dies lässt sich nun durch eine Probe bestätigen, die ausführlich zu diskutieren ist. ❑

In den Aufgaben vorangegangener Jahre finden wir in den Lösungshinweisen zu Olympiade-Aufgaben bereits einen direkten Bezug zum Satz von VIETA in der

Aufgabe MO461035. Auf einem Zettel sind zwei verschiedene Zahlen notiert. Zeigen Sie, dass es reelle Zahlen x und y gibt, sodass eine der beiden notierten Zahlen $x + y$ und die andere gleich $x \cdot y + 1$ ist.

Lösungshinweise: Sind a und b die notierten Zahlen, so soll also eines der folgenden Gleichungssysteme gelten:

(I) $a = x + y$ (II) $b = x \cdot y + 1$

oder

(I‘) $a = x \cdot y + 1$ (II‘) $b = x + y$

Das obere Gleichungssystem (I), (II) ist nach dem Satz von VIETA genau dann lösbar in reellen Zahlenpaaren $(x; y)$, wenn die Gleichung

$$t^2 - a \cdot t + (b - 1) = 0$$

reelle Lösungen in t hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminate $a^2 - 4(b-1)$ nicht negativ ist, also $a^2 \geq 4(b-1)$ gilt. In Analogie finden wir auch, dass das untere Gleichungssystem (I‘), (II‘) genau dann reelle Lösungen hat, wenn $b^2 \geq 4(a-1)$ gilt.

Nehmen wir nun aber an, keines der beiden Gleichungssysteme habe reelle Lösungen. Dann müsste offenbar $a^2 + b^2 < 4(b-1) + 4(a-1)$ gelten. Da diese Ungleichung gleichbedeutend zu $(a-2)^2 + (b-2)^2 < 0$ ist, kann dies nicht möglich sein. Also hat wenigstens eines der genannten Gleichungssysteme ein reelles Zahlenpaar $(x; y)$ als Lösung. ❑

Aufgabe MO440921. Es seien x und y positive reelle Zahlen mit

dem harmonischen Mittel $h = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = 4$ und dem geometrischen Mittel $g = \sqrt{x \cdot y} = 6$.

Bestimmen Sie das arithmetrische Mittel $a = \frac{x+y}{2}$.

Lösungshinweise: Formulieren wir die Gleichung des harmonischen Mittels zu $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ um und multiplizieren wir diese Gleichung mit $x \cdot y$, so erhalten wir

$$x + y = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{g^2}{2} = 18$$

woraus das arithmetische Mittel $a = 9$ unmittelbar folgt. ❑

Dieser kurzen Lösungsdarstellung folgt die *Bemerkung*, dass aus $x + y = 18$ und $x \cdot y = 36$ mit Hilfe des Satzes von VIETA die Zahlen x und y explizit angegeben werden können, nämlich als Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 - 18z + 36 = 0$. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \geq y$ an, finden wir $x = 9 + \sqrt{45}$ und $y = 9 - \sqrt{45}$. Aber diese Angaben sind für die Lösungsdarstellung zur Aufgabe nicht erforderlich.

Der Satz von VIETA gilt für Polynome beliebigen Grades. Besitzt eine kubische Gleichung $x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ drei reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3, so gelten die folgenden Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a; \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = b; \quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -c$$

Wieder erhält man aus der Darstellung mit Linearfaktoren

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

durch Ausmultiplizieren der rechten Seite und Vergleich der Koeffizienten vor den Potenzen von x die behaupteten Gleichungen. Eine Anwendung des Satzes von VIETA mit drei Variablen finden wir in der

Aufgabe MO460941/MO461041. Finden Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x + y + z = 1 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Lösungshinweise: Zunächst ist festzustellen, dass $x, y, z \neq 0$ gelten muss. Nach Multiplikation der zweiten Gleichung mit dem Hauptnenner xyz erhalten wir nach Addition der resultierenden und der ersten Gleichungen

$$xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 = (x - 1)(y - 1)(z - 1) = 0.$$

Somit muss mindestens eine der drei Zahlen gleich 1 sein. Setzen wir $z = 1$, so gilt $x + y = 0$, also $y = -x$. Eine Probe bestätigt, dass $(x; -x; 1)$ für jede reelle Zahl $x \neq 0$ eine Lösung des Gleichungssystems ist. Wegen der Symmetrie der gegebenen Gleichungen sind auch alle Vertauschungen des Lösungstripels wiederum Lösungen des Gleichungssystems. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch

$$L = \{(1, t, -t), (t, 1, -t), (t, -t, 1), t \neq 0. \text{beliebig reell}\} \qquad \square$$

Für eine Variante der Lösung nehmen wir nun an, dass das obige Gleichungssystem eine Lösung in reellen Zahlen besitzt. Dann können wir die drei Zahlen x, y, z als Nullstellen eines kubischen Polynoms

$$s^3 + a \cdot s^2 + b \cdot s + c = 0$$

betrachten, für dessen Koeffizienten nach dem Satz von VIETA gilt

$$-a \;= x + y + z = 1$$
$$b = xy + yz + zx = xyz = -c$$

Wir nehmen weiter an, c sei positiv, und substituieren $c = t^2$ mit einer beliebigen reellen Zahl t. Damit suchen wir die Nullstellen des kubischen Polynoms

$$s^3 - s^2 - t^2 s - t^2 = 0$$
also $(s^2 - t^2)s - (s^2 - t^2) = (s - 1)(s^2 - t^2) = 0.$

Daraus können wir die obige Lösungsmenge ebenfalls ermitteln.

Die Schwierigkeit bei der Lösungsfindung besteht demnach in der Umformung der Gleichungen zu einer Struktur, die den Gleichungen im Satz von VIETA entsprechen.

Aufgabe. Ermitteln Sie alle Tripel $(x; y; z)$ reeller Zahlen, für die das folgende Gleichungssystem mit dem reellen Parameter a erfüllt wird:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Lösungshinweise: Wegen $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ gilt $xy + yz + zx = \frac{(a^2 - a^2)}{2} = 0$. Weiter können wir $(x + y + z)^3$ umformen zu

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3xy(x + y) + 3yz(y + z) + 3xz(x + z)$$

Verwenden wir die erste Gleichung, können wir dies weiterhin umformen zu

$$(x + y + z)^3 =$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + 6 \cdot xyz + 3 \cdot xy(a - z) + 3 \cdot yz(a - x) + 3 \cdot xz(a - y)$$

also

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3 \cdot xyz + 3a \cdot (xy + yz + xz)$$

Deshalb finden wir $xyz = 0$. Somit suchen wir die Nullstellen des Polynoms $s^3 - a \cdot s^2 = 0$. Dieses Polynom ist gleichbedeutend zu $s^2 \cdot (s - a) = 0$ mit dem Lösungstripel $(0; 0; a)$ und allen Vertauschungen. ❑

Aufgaben Serie 6 (2020/21)

Einsendungen bis 18. Mai 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder norman.bitterlich@t-online.de [12].

Aufgabe 6-1.
Gesucht sind alle echt vierstelligen natürlichen Zahlen *n* mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von *n* durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen *a* und *b* entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von *a* und *b* gleich *n*.

(5 Punkte)

Hinweis: Eine natürliche Zahl heißt „echt n-stellig“, wenn die erste (linke) Ziffer in der n-stelligen Dezimaldarstellung ungleich Null ist.

Aufgabe 6-2.
Beweisen sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 6-3.
Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(x; y; z)$ von reellen Zahlen x, y, und z, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 6-4.
Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten *a*, *b*, *c* sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

(6 Punkte)

(*Hinweis:* Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktsumme mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

[12] Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

Aufgabe 6-5A.
Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(2 Punkte)

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(2 Punkte)

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 2$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 6-5B.
Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

(a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

(2 Punkte)

(b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

(2 Punkte)

(c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

(4 Punkte)

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
Telefon:	(0371) 4660751
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz