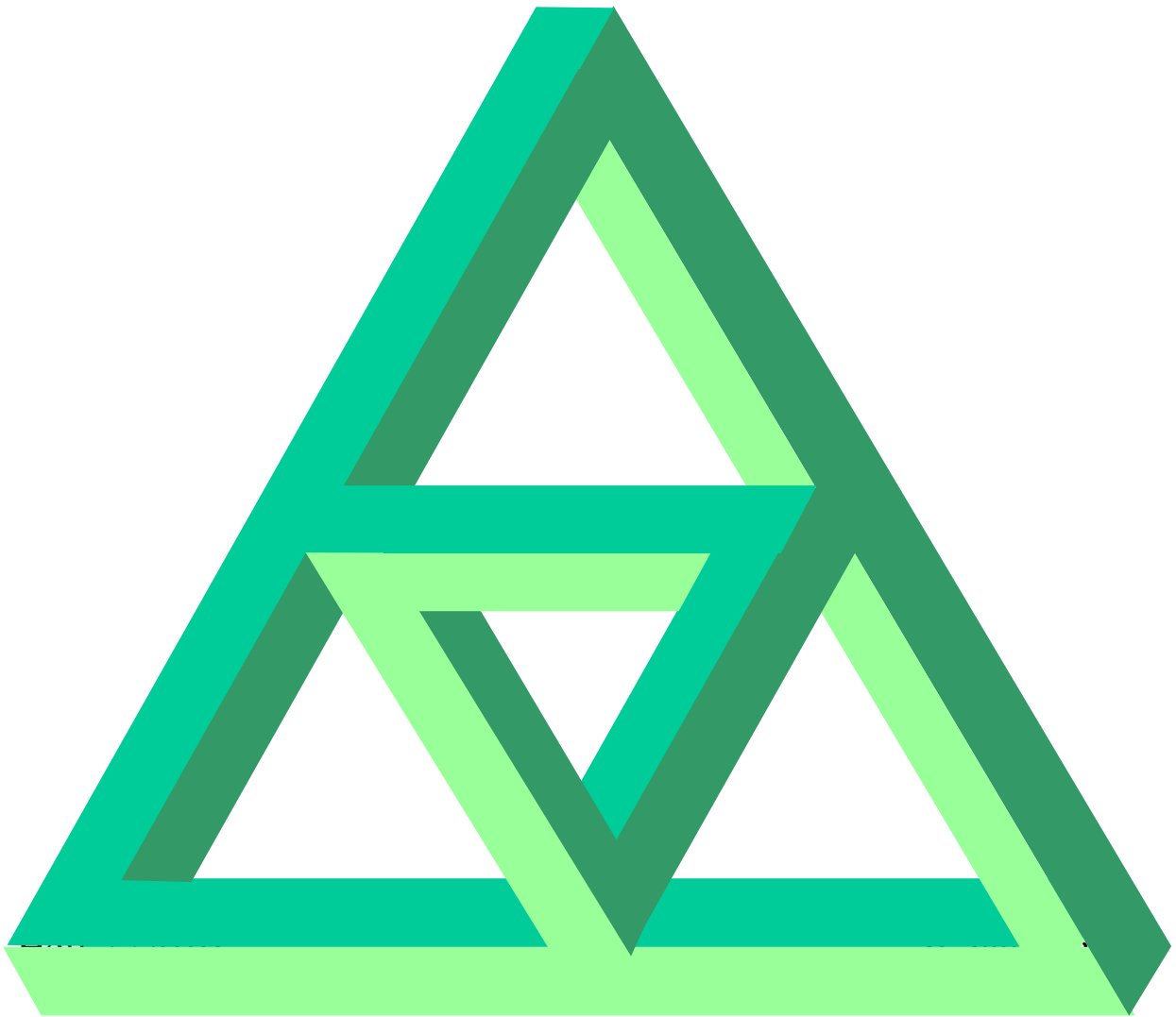


# Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik  
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 5 des sächsischen  
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10

---



## Lösungshinweise Serie 5

**Aufgabe 5-1.** In der Ebene seien  $3n$  Punkte gegeben ( $n$  natürliche Zahl,  $n > 1$ ), von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Kann man aus diesen Punkten (wenn man sie als Eckpunkte nimmt)  $n$  Dreiecke bilden, die paarweise keine Punkte gemeinsam haben und nicht ineinander enthalten sind?

*Lösungshinweise:* Da es für  $3n$  Punkte nur endlich viele Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten gibt, gibt es eine Gerade  $g$ , die zu keiner dieser Strecken parallel ist. Da die Punktmenge endlich ist, kann man die Gerade  $g$  derart verschieben, dass sich alle Punkte auf einer Seite von  $g$  befinden. Ausgehend von einer solchen Lage verschiebe man die Gerade in Richtung der Punkte. Dabei liegt in jeder Lage maximal 1 Punkt auf der Gerade. Man kann folglich die Punkte in eindeutiger Weise von 1 bis  $3n$  nummerieren. Jeweils die Punkte  $3k - 2$ ,  $3k - 1$  und  $3k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) lassen sich zu einem Dreieck verbinden, so dass die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.  $\square$

**Aufgabe 5-2.** Man finde alle Primzahlen  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ , sodass folgende Gleichung gilt:

$$p_1^2 = p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2.$$

*Lösungshinweise:* Da alle Primzahlen größer 1 sind, gilt

$$p_1 \geq \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20} > 4.$$

Deshalb ist  $p_1$  verschieden von 3 und somit lässt  $p_1^2$  bei Division durch 3 den Rest 1. Daraus folgt, dass mindestens eine der Primzahlen  $p_2, \dots, p_6$  gleich 3 ist (es sei dies  $p_6 = 3$ ), denn andernfalls würde die Summe der Quadrate der fünf Primzahlen bei Division durch 3 den Rest 2 lassen. Jedoch ist es nicht möglich, dass genau vier der fünf Primzahlen gleich 3 sind ( $p_3 = \dots = p_6 = 3$ ), denn die daraus resultierende Gleichung

$$p_1^2 - p_2^2 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 - p_2) = 4 \cdot 3^2 = 36$$

hat keine Lösung in Primzahlen, wie eine Analyse über die Faktorenerlegung von 36 zeigt.

Nach Aufgabe 3-5A(a) ist die Differenz der Quadratzahlen zweier ungerader natürlichen Zahlen stets durch 8 teilbar. Somit ist die Summe

$$p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 = p_1^2 - p_6^2$$

durch 8 teilbar. Da aber das Quadrat jeder Primzahl größer als 2 bei Division durch 8 den Rest 1 lässt, muss  $p_2 = \dots = p_5 = 2$  gelten.

Eine Probe zeigt, dass das Tupel  $(5; 2; 2; 2; 2; 3)$  tatsächlich Lösung der Aufgabe ist und wie die Herleitung zeigt, keine weiteren Lösungen (bis auf Permutationen von  $p_2, \dots, p_6$ ) existieren können:

$$5^2 = 25 = 4 + 4 + 4 + 4 + 9 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \quad \square$$

**Aufgabe 5-3.** (Aufgabe 1 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde)  
 Ein Würfel mit Kantenlänge 10 wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerlegt. Anschließend wird einer dieser beiden Quader durch einen zweiten ebenen Schnitt weiter in zwei Quader mit ganzzahligen Kantenlängen zerteilt.

Welches ist das kleinstmögliche Volumen des größten der drei Quader?

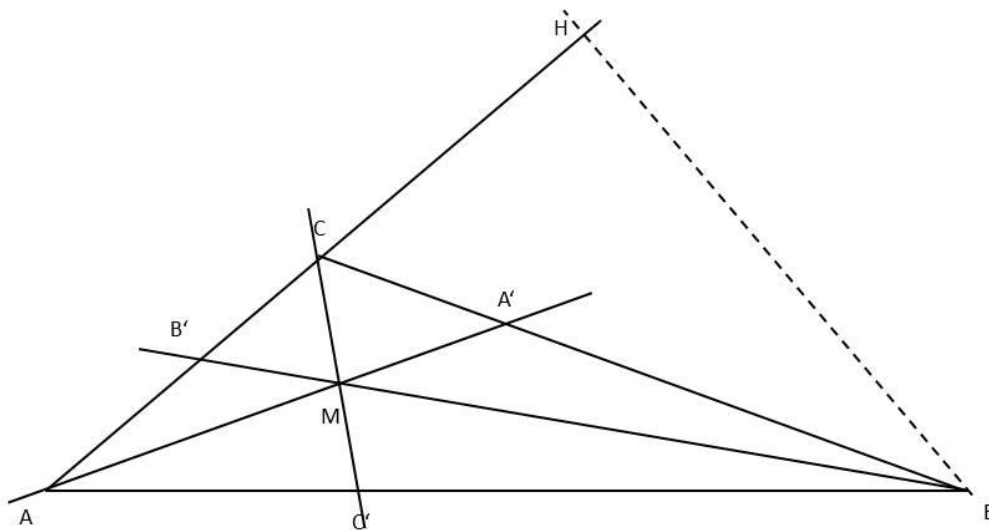
*Anmerkung: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.*

*Lösungshinweise:* Wird der Würfel in drei Quader geteilt, hat der größte Quader ein Volumen von mindestens 333. Mit dem ersten Schnitt entstehen zwei Quader mit Grundflächen  $10 \times 10$  und ganzzahliger Höhe. Ist für einen dieser Quader die Länge der Höhe 4 oder mehr, so hat der größte Quader mindestens ein Volumen von 400. Ist dagegen für einen dieser Quader die Länge der Höhe höchstens 2, so hat der andere Quader ein Volumen von mindestens 800 – eine Teilung des großen Teilquaders führt zu einer Situation, bei der der größte Quader ebenfalls mindestens ein Volumen von 400 aufweist.

Wir betrachten deshalb den Fall, dass mit dem ersten Schnitt ein Quader mit dem Volumen 300 abgetrennt wurde. Durch Teilung des restlichen Quaders entstehen zwei Quader, von denen ein Quader ein Volumen von mindestens 350 besitzt. Da durch Halbierung des Quaders das Volumen 350 realisiert werden kann, ist 350 das kleinstmögliche Volumen, das der größte Quader haben kann.

**Aufgabe 5-4.** (Aufgabe 3 des Bundeswettbewerbs Mathematik 2021, 1. Runde)  
 In einem Dreieck  $ABC$  sei  $\angle ACB = 120^\circ$ , und die Innenwinkelhalbierenden durch  $A$ ,  $B$  und  $C$  schneiden die jeweils gegenüberliegenden Seiten in  $A'$  bzw.  $B'$  bzw.  $C'$ . Wie groß ist der Winkel  $\angle A'C'B'$ ?

*Lösungshinweise:* Entsprechend der Aufgabenstellung werden die Winkelhalbierende in das Dreieck  $ABC$  eingezeichnet und die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten mit  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  bezeichnet. Der gemeinsame Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden wird  $M$  genannt. Zudem wird vom Eckpunkt  $B$  das Lot auf die Verlängerung der Seite  $\overline{AC}$  gefällt, der Fußpunkt sei  $H$ .



Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende Streckenlängen festgelegt:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= c; & |\overline{AC'}| &= c_1; & |\overline{C'B}| &= c_2 \\ |\overline{AC}| &= b; & |\overline{B'C}| &= b_1; & |\overline{AB'}| &= b_2 \\ |\overline{BC}| &= a; & |\overline{BA'}| &= a_1; & |\overline{A'C}| &= a_2 \\ |\overline{CC'}| &= w \end{aligned}$$

Es gilt der Winkelhalbierendensatz, nämlich dass eine Winkelhalbierende eines Innenwinkels im Dreieck die gegenüberliegende Dreieckseite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten teilt. (Dieser Satz darf zitiert werden).

Ziel ist es zu zeigen, dass die Gerade  $C'B'$  die Winkelhalbierende im Dreieck  $AC'C$  für den Winkel  $\angle AC'C$  ist. Nach Umkehrung des Satzes über die Winkelhalbierenden wäre dies erfüllt, wenn die Gleichung  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{w}{c_1}$  gilt.

Nach dem Winkelhalbierendensatz gilt im Dreieck  $ABC$  mit der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle ABC$  die Gleichung  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a}{c}$ .

Außerdem gilt im Dreieck  $ABC$  mit der Winkelhalbierenden des Winkels  $\angle ACB$  die Gleichung  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b}{a}$ . Wegen  $c = c_1 + c_2$  lässt sich diese Gleichung umformen zu  $\frac{c}{c_2} = \frac{b+a}{a}$ , woraus  $c_2 = \frac{ac}{a+b}$  und  $c_1 = \frac{bc}{a+b}$  folgt.

Um die Länge der Winkelhalbierenden  $w$  des Winkels  $\angle ACB$  zu bestimmen, ermittelt man einerseits den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  als Summe der Flächeninhalte der Dreiecke  $AC'C$  und  $C'BC$ , durch  $A_{AC'C} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot w \cdot \sin 60^\circ$  bzw.  $A_{C'BC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot w \cdot \sin 60^\circ$ , also  $A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot (a + b) \cdot w \cdot \sqrt{3}$ . Der Flächeninhalt lässt sich aber andererseits auch aus dem halben Produkt aus der

Dreiecksseite  $b$  und zugehöriger Höhe  $h_b$  ermitteln. Diese Höhe verläuft als Höhe im gleichseitigen Dreieck  $BC'C$  (mit  $C'$  auf der Geraden durch  $A$  und  $C$  mit  $|\overline{CH}| = |\overline{HC'}|$ ) mit der Seitenlänge  $a$ , also gilt  $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{4} \cdot a \cdot b \cdot \sqrt{3}$ . Folglich ist  $w = \frac{ab}{a+b}$ . Mit diesen Vorbereitungen erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{w}{c_1} = \frac{\frac{ab}{a+b}}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a}{c} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Die Gerade durch  $C'$  und  $B'$  halbiert also den Winkel  $\angle CC'A$ . In gleicher Weise zeigt man nun, dass auch die Gerade durch  $C'$  und  $A'$  den Winkel  $\angle BC'C$ . Deshalb gilt:

$$\angle CC'B' + \angle A'C'C = \frac{1}{2} \cdot (\angle CC'A + \angle BC'C) = \frac{1}{2} \cdot \angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90$$

□

### Aufgabe 5-5A

- (a) Man beweise die Ungleichung  $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$  für alle natürlichen Zahlen  $n$ .  
 (b) Man beweise die Ungleichung  $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+3)$  für  $n > 1$ .  
 (c) Man finde natürliche Zahlen  $n$ , für die näherungsweise gilt:  $\sum_k^n \frac{1}{\sqrt{k}} \approx 2021$ .

*Lösungshinweise:*

(a) Nach der Ungleichung des geometrischen und arithmetischen Mittels gilt für alle  $n > 0$ :  $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k} \leq \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n k$ .

Die Summe in der rechten Seite der Ungleichung ist nach der Gaußschen Summenformel  $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ , folglich gilt:  $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ . Durch Potenzieren finden wir die gesuchte Ungleichung. □

(b) Es gilt für jede positive ganze Zahl  $k$  nach Anwendung der geometrischen-arithmetischen Mittelungleichung für  $\sqrt{k \cdot 1} \leq \frac{k+1}{2}$  (wobei für alle  $k > 1$  die Kleiner-Beziehung erfüllt ist):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} &= \sum_{k=1}^n \sqrt{k \cdot 1} < \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{2n + n \cdot (n+1)}{4} \\ &= \frac{n \cdot (n+3)}{4} \end{aligned}$$

□

(c) Jeden Summanden der Summe  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  können wir wie folgt umformen:

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2 \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^n 2 \cdot (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2 \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{1})$$

bzw.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2 \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \text{ also}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^n 2 \cdot (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = 2\sqrt{n} - \sqrt{0} = 2\sqrt{n}.$$

Somit gilt:

$$2 \cdot (\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Also lassen sich folgende Grenzen für  $n$  feststellen:

$$n > 1020605 \text{ wegen } 2\sqrt{n} \leq 2020,5 \text{ für } n \leq 1020605$$

$$\text{und } n < 1023638 \text{ wegen } 2\sqrt{n+1} - 2 \geq 2021,5 \text{ für } n \geq 1023638. \quad \square$$

**Aufgabe 5-5B.** Ein  $n$ -Tupel von natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heißt *Pythagoreisches Zahlen- $n$ -Tupel* (kurz  *$P$ - $n$ -Tupel* genannt), falls seine Zahlen die Gleichung  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$  erfüllen.

(a) Man beweise: Ist die Differenz zweier Quadratzahlen von natürlichen Zahlen geradzahlig, so ist sie durch 4 teilbar.

(b) Man untersuche, ob ein  $P$ -102-Tupel mit geeigneten natürlichen Zahlen  $a_{101}$  und  $a_{102}$  existiert, dessen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die ersten 100 natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, 100$  sind!

(c) Gegeben sei ein  $P$ - $n$ -Tupel  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$  mit ungeradzahligem  $a_n$  (mit  $1 < k < n$ ). Man gebe ein  $P$ - $(n+1)$ -Tupel an, das ebenfalls mit  $a_1, a_2, \dots, a_k$  beginnt.

*Lösungshinweise:*

(a) Es sei  $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$  geradzahlig. Dann ist mindestens einer der Faktoren geradzahlig.

Angenommen  $(a + b)$  sei durch 2 teilbar, dann sind beide Summanden  $a$  und  $b$  entweder geradzahlig oder ungeradzahlig. Stets ist aber dann auch die Differenz  $(a - b)$  durch 2 teilbar.

In analoger Weise führt die Annahme,  $(a - b)$  sei geradzahlig, zu der Feststellung, dass in diesem Fall  $(a + b)$  durch 2 teilbar ist. Folglich ist das Produkt stets durch 4 teilbar.

(b) Mittels der Summenformel für Quadrate von natürlichen Zahlen findet man:

$$1^2 + 2^2 + \dots + 100^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 = 338350.$$

Nimmt man nun an, es gäbe zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$ , so dass  $(1, 2, \dots, 100, a, b)$  ein Pythagoreisches Zahlen-102-Tupel ist, so müsste gelten

$$338350 + a^2 = b^2$$

Da 338350 zwar durch 2, nicht aber durch 4 teilbar ist, die geradzahlige Differenz  $b^2 - a^2$  jedoch nach Aufgabe (a) stets durch 4 teilbar wäre, kann es kein  $P$ -102-Tupel der geforderten Art geben.

(c) Es sei  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ein  $P$ - $n$ -Tupel mit ungeradzahligem  $a_n$ . Dann gilt also

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$$

Da  $a_n$  ungeradzahlig ist, sind  $\frac{a_n^2-1}{2}$  und  $\frac{a_n^2+1}{2}$  beide ganzzahlig. Weiter gilt

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n^2-1}{2}\right)^2.$$

Folglich ist das Quadrat einer ungeraden Zahl stets als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar. Daraus können wir unmittelbar erkennen, dass das  $(n+1)$ -Tupel

$$\left(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \frac{a_n^2-1}{2}, \frac{a_n^2+1}{2}\right)$$

ein  $P$ - $(n+1)$ -Tupel ist. □

*Ergänzung:* Ist im  $P$ - $n$ -Tupel die Zahl  $a_n$  geradzahlig, können wir in ähnlicher Weise wie unter A5-5B(c) ein  $P$ - $(n+1)$ -Tupel konstruieren. Offensichtlich sind  $\frac{a_n^2}{4} - 1$  und  $\frac{a_n^2}{4} + 1$  ganze Zahlen, die die Gleichung

$$a_n^2 = \left(\frac{a_n^2}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{a_n^2}{4} - 1\right)^2$$

erfüllen.

## Ergänzende Lösungsdiskussionen

Wir betrachten zu **Aufgabe 5-5A** ähnliche Fragestellungen, wie zum Beispiel

**Aufgabe.** Beweisen Sie für alle natürlichen Zahlen  $n$  ( $n \geq 2$ ) die Ungleichung

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

*Lösungshinweise:*

Variante 1: Für jede natürliche Zahl  $k$  ( $k \geq 2$ ) gilt

$$1 + \sqrt{\frac{k-1}{k}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$$

Setzen wir diese Beziehung für jeden Summanden in der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung ein, folgt unmittelbar deren Richtigkeit.

Variante 2: Für alle  $k$  ( $0 < k \leq n$ ) gilt  $\sqrt{k} \leq \sqrt{n}$ , wobei das Gleichheitszeichen nur für  $k = n$  richtig ist. Also finden wir für  $n \geq 2$  die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \square$$

**Aufgabe.** Beweisen Sie die folgende Ungleichung für natürliche Zahlen  $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \frac{n}{2} \cdot \sqrt{2(n+1)}$$

*Lösungshinweise:* So wie der junge CARL FRIEDRICH GAUß (1777 – 1855) bei der Berechnung der Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen, fassen wir je zwei Summanden der Summe zusammen:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} &= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \\ &+ \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{1} \\ &= (\sqrt{1} + \sqrt{n}) + (\sqrt{2} + \sqrt{n-1}) + \dots + (\sqrt{n} + \sqrt{1}) \end{aligned}$$

Nun ist also nur noch zu zeigen, dass für jeden dieser in Klammern zusammengefassten Terme gilt

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} \quad (a \text{ und } b \text{ natürliche Zahlen mit } a+b = n+1) \quad \square$$

Analog können wir ähnliche Formel herleiten, wie z.B.  $\sum_{j=1}^n k^j \leq \frac{n}{2} \cdot (n+1)^j$ .

Die Aufgabe 5-5A(c) hat ihren Ursprung in der

**Aufgabe MO371045.** Man beweise folgende Ungleichung:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}} = \sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{\sqrt{k}} < 1999.$$

**Aufgabe.** Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2002}{2003} < (0,2003)^2$$



*Lösungshinweise:* Wir bezeichnen das Produkt auf der linken Seite der zu beweisenden Ungleichung mit  $x$  und betrachten ein weiteres Produkt dieser Art, nämlich

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2003}{2004}$$

Da für alle von Null verschiedenen Zahlen  $n$  wegen  $4n^2 - 4n < 4n^2 - 4n + 1$

$$\frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}$$

gilt, ist  $x < y$ . Damit erhalten wir  $x^2 < x \cdot y$ . Nun ist aber  $y$  gerade so gewählt, dass  $x \cdot y = \frac{2}{2004}$  ist. Also finden wir die Abschätzung:

$$x < \sqrt{\frac{2}{2004}} = \frac{1}{\sqrt{1002}} < \frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} < 0,04 = 0,2^2 < 0,2003^2. \quad \square$$

**Aufgabe.** Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{54}.$$

*Lösungshinweise:* Wir könnten wie oben ein geeignetes Produkt definieren und in Analogie eine Abschätzung suchen. Setzen wir deshalb wieder das abzuschätzende Produkt als  $x$  und bilden wir  $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2010}{2011}$ , so folgt mit ähnlicher Argumentation wie oben

$$x < \sqrt{\frac{1}{2011}} < \frac{1}{\sqrt{1936}} = \frac{1}{44}$$

Dies genügt aber nicht, da  $\frac{1}{54} < \frac{1}{44}$  gilt. Wir finden aber für alle  $k \geq 2$

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{\sqrt{3k-2}}{\sqrt{3k+1}}.$$

Daraus können wir für jedes  $k$  die Ungleichung  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k-1}}$  ableiten, also speziell für  $k = 1005$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2009}{2010} < \frac{1}{\sqrt{3016}} < \frac{1}{\sqrt{2916}} = \frac{1}{54}$$

### Bei der **Aufgabe MO541035**

Man bestimme die Menge aller reellen Zahlen  $x$ , für welche die Gleichung  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-4} = 2$  erfüllt ist.

wurde ausdrücklich hingewiesen, dass zunächst zu untersuchen sei, für welche reellen Zahlen die angegebenen Wurzeln definiert sind. Damit die Terme unter den Wurzeln nichtnegativ sind, muss offenbar  $x \geq 2$  gelten. Dies ist wesentlich, um nach einmaligem Quadrieren aus der Gleichung

$$-x + 1 = 4 \cdot \sqrt{2x - 4}$$

zu erkennen, dass es keine Lösung geben kann, weil die linke Seite negativ, die rechte Seite aber stets positiv ist. Also ist die Lösungsmenge leer.

Nochmaliges Quadrieren führt zwar weiter zu der „vernünftigen“ quadratischen Gleichung  $x^2 - 34x + 65 = 0$  mit den Nullstellen  $x_{1,2} = 17 \pm 4\sqrt{14}$ , aber eine Probe zeigt, dass sie keine Lösung sind (obwohl beide Zahlen größer als 2 sind)! Allerdings ist die Probe wesentlich aufwendiger als die Diskussion über den Definitionsbereich.

Davor wurde in der 29. MO letztmalig eine Wurzel-Ungleichung gestellt:

**Aufgabe MO291034.** Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen  $x$ , die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1.$$

*Lösungshinweise:* Die Lösungsmenge lässt sich zunächst durch Diskussion des Definitionsbereiches eingrenzen. Die Zahl  $x$  muss größer als -5 sein (damit der Wurzelausdruck definiert und positiv ist). Die Zahl  $x$  kann nicht -1 sein (weil sonst der Nenner gleich 0 wäre). Außerdem muss  $x$  größer als -1 sein (damit der Bruch positiv ist). So vorbereitet kann die Ungleichung äquivalent umgeformt werden und man erhält  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{17}{4}$ . Daraus folgt letztlich die gesuchte Lösungsmenge für  $x$ :  $-1 < x < \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{17} - 1)$ .

### **Pythagoreische 4-Tupel**<sup>1</sup>

Quadrupel  $(a, b, c, d)$  von natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft  $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$  nennt man *Pythagoreische Zahlenquadrupel* oder kurz P-4-Tupel (vgl. Aufgabe 5-5B).

---

<sup>1</sup> Nach MNU Vol. 42 (1989), Heft 3, S. 166-173

Es interessieren hier nur Quadrupel ohne gemeinsamen Teiler (da wir andernfalls alle 4 Zahlen durch diesen gemeinsamen Teiler dividieren könnten). Ein teilerfremdes P-4-Tupel, also mit  $\text{ggT}(a;b;c;d) = 1$ , kann höchstens zwei Zahlen mit einem gemeinsamen Teiler enthalten und wird aus geraden und ungeraden Zahlen bestehen. Es sind folglich folgende Fälle denkbar:

(1) Alle Zahlen eines P-4-Tupel sind geradzahlig. Dann enthalten alle Zahlen den Faktor 2 und das P-4-Tupel ist nicht teilerfremd.

(2) Die Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind ungerade und folglich auch  $d$ . Somit gibt es ganze Zahlen  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  und  $d'$ , so dass die Gleichung

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c' + 1)^2 = (2d' + 1)^2$$

gilt. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2 + a' + b' + c') + 2 = 4 \cdot d' \cdot (d' + 1)$$

erkennen wir, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (2), in dem alle Zahlen des P-4-Tupel ungeradzahlig sind, ist also nicht möglich.

(3) Zwei der Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  sind ungerade, die dritte und folglich auch  $d$  sind gerade. Wir betrachten also o.B.d.A. den Fall

$$(2a' + 1)^2 + (2b' + 1)^2 + (2c')^2 = (2d')^2.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen zu

$$4 \cdot (a'^2 + b'^2 + a' + b') + 2 = 4 \cdot (d'^2 - c'^2)$$

erkennen wir ebenso, dass die rechte Seite durch 4 teilbar ist, die linke Seite jedoch nicht. Der Fall (3) ist also ebenfalls nicht möglich.

Da es P-4-Tupel gibt, z.B. (1 ; 4 ; 8 ; 9), gilt wegen (1) bis (3): In einem P-4-Tupel ist genau eine der Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  ungerade, die anderen beiden Zahlen sind gerade. Dann ist  $d$  ungeradzahlig.

**Satz.** In einem teilerfremden P-4-Tupel  $(a;b;c;d)$  ist mindestens eine der Zahlen durch 3 teilbar.

*Beweis:* Ist  $a$ ,  $b$  oder  $c$  durch 3 teilbar, wäre nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, keine der drei Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  sei durch 3 teilbar. Das Quadrat einer nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl lässt bei Division durch 3 stets den Rest 1. Wenn jede Quadratzahl  $a^2$ ,  $b^2$  und  $c^2$  den Rest 1 lässt, dann lässt deren Summe den Rest 3 bei Division durch 3. Folglich ist  $d^2$  und damit auch  $d$  durch 3 teilbar.

**Satz.** Ist eine der geraden Zahlen eines P-4-Tupel durch 4 teilbar, so ist auch die andere gerade Zahl des P-4-Tupel durch 4 teilbar.

*Beweis:* Seien  $a = 4a' \pm 1$  und  $d = 4d' \pm 1$  die ungeraden Zahlen des P-4-Tupels, dann ist wegen

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= d^2 - a^2 = 16d'^2 \pm 8d' + 1 - (16a'^2 \pm 8a' + 1) \\ &= 8 \cdot (2(d'^2 - a'^2) \pm d' \mp a') \end{aligned}$$

die Summe der beiden geradzahligem Quadrate des PQ durch 8 teilbar. Ist eine dieser Zahlen durch 4 teilbar, dann ist deren Quadrat durch 16 teilbar und folglich muss auch das Quadrat der anderen Zahl mindestens durch 8 (und deshalb durch 16) teilbar sein. Damit ist auch die zweite gerade Zahl durch 4 teilbar.  $\square$

Wir suchen nun ein Verfahren zur Erzeugung aller P-4-Tupel in einem vorgegebenen Zahlenbereich. Aufgrund der Umformung  $a^2 + b^2 = d^2 - c^2$  können wir uns auf solche Zwischenwerte beschränken, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Nicht jede natürliche Zahl hat diese Eigenschaft. Durch Probieren finden wir schnell, dass z.B. 7 zwar als Differenz zweier Quadrate ( $4^2 - 3^2$ ), nicht aber als Summe zweier Quadrate darstellbar ist. Auch die Zahl 10 bereitet Probleme, da sie Summe ( $1^2 + 3^2$ ), nicht aber Differenz zweier Quadratzahlen ist. Allgemein gilt:

**Satz.** Eine natürliche Zahl  $m$  lässt sich als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie eine der folgenden „Bauarten“ aufweist:

- (a)  $m = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j}$  (wobei die Faktoren  $p_j$  Primzahlen der Form  $4n + 1$  und die Exponenten  $a_j$  natürliche Zahlen sind)
- (b)  $m = 2 \cdot a^2$
- (c)  $m = n^{2r} \cdot (a^2 + b^2)$
- (d)  $m = 2 \cdot (a^2 + b^2)$  (mit natürlichen Zahlen  $n, r, a, b$ )

*Beweisskizze:* Während der Fall (a) recht aufwendig zu beweisen ist und hier nicht dargestellt wird, sind die Bedingungen (b) bis (d) offensichtlich:

$$\begin{aligned} 2 \cdot a^2 &= a^2 + a^2 \\ n^{2r} \cdot (a^2 + b^2) &= (n^r \cdot a)^2 + (n^r \cdot b)^2 \\ 2 \cdot (a^2 + b^2) &= (a + b)^2 + (a - b)^2 \end{aligned} \quad \square$$

**Satz.** Eine natürliche Zahl  $m$  lässt sich als Differenz zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellen, wenn sie

- (a) ungerade und größer 1 ist oder
- (b) gerade, größer als 4 und durch 4 teilbar ist.

*Beweisskizze:* Leicht sehen wir den Fall (a), denn ist  $2k + 1$  eine ungerade natürliche Zahl, so gilt:  $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ . Der Teil (b) erweist sich als wesentlich komplexer und sei hier ohne Beweis angegeben.

Unter Anwendung beider Aussagen finden wir durch systematisches Probieren 24 natürliche Zahlen zwischen 1 und 100, die sich sowohl als Summe als auch als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen lassen und somit zu P-4-Tupeln führen. Dabei gibt es für

- für 5, 8, 13, 17, 20, 25, 29, 37, 41, 52, 53, 61, 68, 73, 89, 97 und 100 genau eine Möglichkeit,
- für 32 und 40 genau zwei Möglichkeiten,
- für 45, 72 und 80 genau 3 Möglichkeiten sowie
- für 65 und 85 genau 4 Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also 38 P-4-Tupel. Ordnen wir diese P-4-Tupel nach der Größe der vierten Zahl  $d$ , so stellen wir fest, dass das gewählte Suchverfahren (Summen- bzw. Differenzdarstellung aller Zahlen bis 100) keine lückenlose Tabelle mit  $d < 50$  erzeugte. So fehlen beispielsweise die Tupel (1, 12, 12, 17) und (8, 9, 12, 17). Obwohl in diesen Tupeln die Zahlen noch recht klein sind, hätte wir das Suchverfahren bis  $1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2 = 17^2 - 12^2 = 145$  führen müssen!

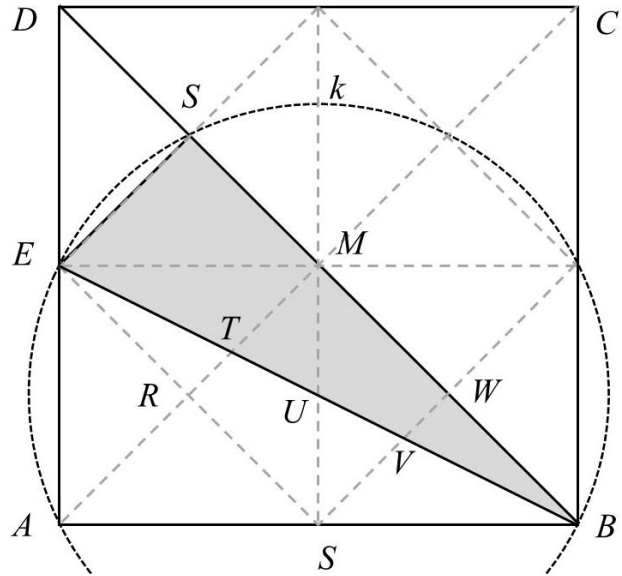
Wie weit muss also systematisch gesucht werden, um wirklich alle Tupel mit  $d < 50$  zu finden? Wegen  $m = d^2 - c^2 = (d + c) \cdot (d - c)$  wird  $m$  in zwei Faktoren  $d + c = t_1$ ,  $d - c = t_2$ ,  $t_1 \geq t_2$ , zerlegt. Dabei sind die Grenzen für die Faktoren mit  $(m; 1)$  und  $(\sqrt{m}; \sqrt{m})$  gegeben. Die Zahl  $d$  erhalten wir daraus als  $d = \frac{t_1 + t_2}{2}$ , d.h. es gilt:  $\sqrt{m} \leq d \leq \frac{1+m}{2}$  bzw.  $m \leq d^2$ . Um also die Tabelle aller P-4-Tupel mit  $d < 50$  vollständig zu finden, sind alle Zahlen  $m$  bis 2401 zu untersuchen.

## Thema 4 – Flächenberechnungen durch Flächenzerlegung

*Vorbemerkungen:* Anstelle der Bestimmung von Streckenlängen, die zur Berechnung des Flächeninhaltes benötigt werden, kann die Zerlegung der Grundfigur in kongruente Teilflächen zum Ergebnis allein durch Auszählen der betroffenen Teilflächen gelingen.

**Aufgabe MO601023.** Gegeben ist ein Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge 1. Es sei  $E$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AD}$ . Die Strecke  $\overline{BE}$  ist der Durchmesser eines Kreises  $k$ . Der Kreis  $k$  schneidet die Diagonale  $\overline{BD}$  in  $S$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $EBS$ .

*Lösungshinweise:* Aufgrund der Konstruktionsvorschrift ist das Dreieck  $EBS$  nach dem Satz von THALES rechtwinklig mit dem rechten Winkel am Punkt  $S$ . Weiter gilt wegen  $\sphericalangle DSE = 90^\circ$  und  $\sphericalangle EDS = 45^\circ$  gemäß Innenwinkelsummensatzes gilt auch  $\sphericalangle SED = 45^\circ$ . Das Dreieck  $ESD$  ist folglich gleichschenkelig-rechtwinklig. So können wir das Quadrat  $ABCD$  mit 16 zum Dreieck  $ESD$  kongruenten Dreiecken vollständig und überschneidungsfrei überdecken.

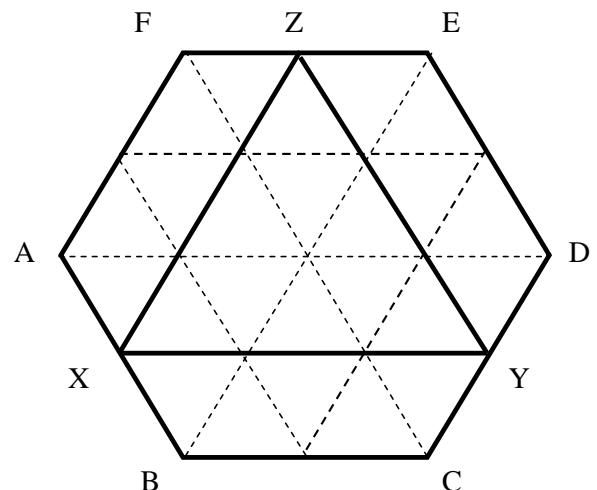


Wir beschreiben nun die gesuchte (in der Abbildung grau hinterlegte) Fläche mittels dieser Teildreiecke. Offensichtlich stimmt der Flächeninhalt des Dreiecks  $EMS$  mit dem eines Überdeckungsdreiecks überein. Weiterhin ist das Dreieck  $ERT$  kongruent zum Dreieck  $BWV$ , denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite  $|BW| = |ER|$  überein. Also gilt  $A_{ETM} + A_{BWV} = A_{ETM} + A_{ERT} = A_{ERM}$  und damit stimmt auch dies mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Schließlich ist das Dreieck  $MTU$  kongruent zum Dreieck  $SVU$ , denn sie stimmen in den Winkeln und in der Seite  $|SU| = |MU|$  überein. Also stimmt die Summe  $A_{MTU} + A_{MUVW} = A_{SVU} + A_{MUVW} = A_{MSW}$  mit dem Flächeninhalt eines solchen Überdeckungsdreiecks überein. Somit entspricht der gesuchte Flächeninhalt genau dem Dreifachen des Flächeninhalts eines solchen Überdeckungsdreiecks und damit  $\frac{3}{16}$  der Quadratfläche.  $\square$

**Aufgabe.** In einem regelmäßigen Sechsecks  $ABCDEF$  seien  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  die Mittelpunkte der Seiten  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$ .

Gesucht ist das Verhältnis  $A_S : A_D$ , wenn  $A_S$  der Flächeninhalt des Sechsecks und  $A_D$  der Flächeninhalt des Dreiecks  $XYZ$  ist.

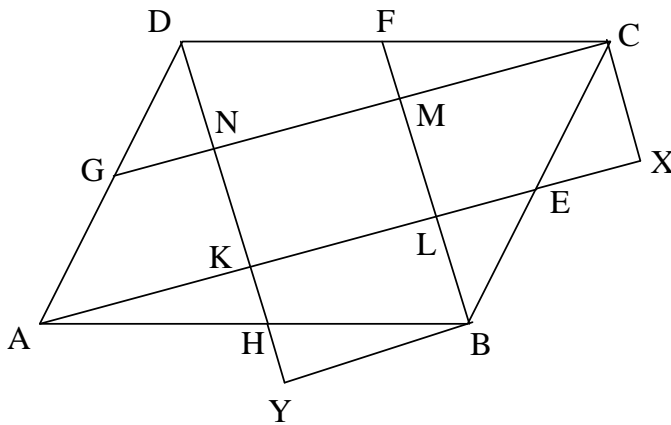
*Lösungshinweise:* Eine Skizze verweist bereits auf den Lösungsansatz durch „Aus zählen“ geeigneter Teilflächen. Mithilfe der gestrichelten Linien zerlegen wir das regelmäßige Sechseck  $ABCDEF$  in 24 kongruente Teildreiecke, von denen das Dreieck  $XYZ$  insgesamt 9 dieser Teildreiecke umfasst.



**Aufgabe MO431024.** Gegeben sei ein Parallelogramm  $ABCD$ . Die Seitenmitten von  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  und  $\overline{DA}$  seien mit  $H$ ,  $E$ ,  $F$  bzw.  $G$  bezeichnet. Die Verbindungslinien  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{CG}$  und  $\overline{DH}$  schneiden im Innern des Parallelogramms ein Viereck  $KLMN$  aus.

- (a) Zeigen Sie, dass  $KLMN$  ein Parallelogramm ist.
- (b) Bestimmen Sie das Verhältnis des Flächeninhalts dieses Parallelogramms  $KLMN$  zu dem des Parallelogramms  $ABCD$ .

*Lösungshinweise:* Wieder bereitet die Teilaufgabe (a) die Lösung für (b) vor. Fertigen wir eine Skizze an und beachten die in (a) zu zeigenden Streckenabschnitte, so erkennen wir die prinzipielle Möglichkeit, das Parallelogramm  $ABCD$  ermitteln mit zu  $KLMN$  kongruenten Parallelogrammen zu überdecken, wobei allerdings Eckpunkte wie  $X$  und  $Y$  außerhalb der Fläche von  $ABCD$  liegen.

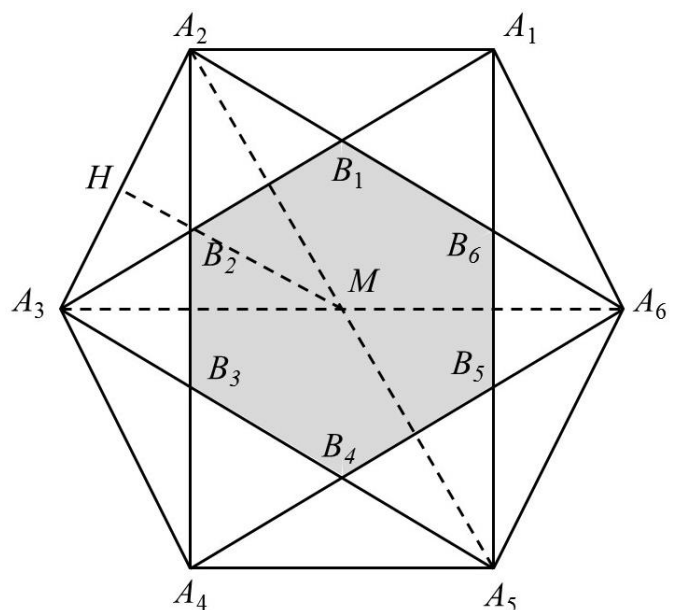


Wir sehen, dass die Dreiecke  $BEL$  und  $EXC$  sowie  $AKH$  und  $HYB$  kongruent sind und die entstandenen Vierecke  $LXCM$  bzw.  $KYBL$  jeweils kongruent (und damit flächengleich) zum Parallelogramm  $KLMN$  sind. Ergänzen wir in analoger Weise die Figur über  $DF$  und  $AG$  wird unmittelbar ersichtlich, dass die Gesamtfläche des Parallelo-

gramms  $ABCD$  aus 5 Parallelogrammen der Größe  $KLMN$  zusammensetzt werden kann. Somit ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Parallelogramms  $KLMN$  zu dem des Parallelogramms  $ABCD$  wie 1 : 5.  $\square$

**Aufgabe MO450924.** In der Mitte des regelmäßigen Sechsecks  $A_1A_2\dots A_6$  mit dem Flächeninhalt  $A$  schneiden die sechs Diagonalen  $\overline{A_1A_3}$ ,  $\overline{A_2A_4}$ ,  $\overline{A_3A_5}$ ,  $\overline{A_4A_6}$ ,  $\overline{A_5A_1}$  und  $\overline{A_6A_2}$  ein kleineres Sechseck  $B_1B_2\dots B_6$  mit dem Flächeninhalt  $B$  aus. Berechnen Sie den Flächeninhalt  $B$  in Abhängigkeit von  $A$ .

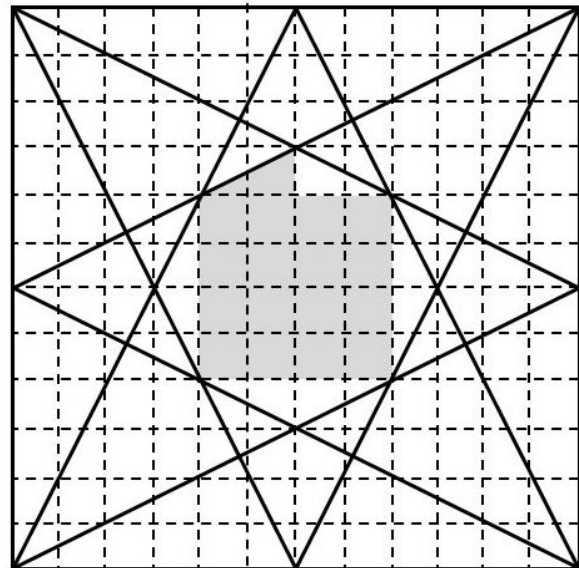
*Lösungshinweise:* Zeichnen wir in die Skizze zusätzlich die Geraden  $A_2A_5$ ,  $A_3A_6$  und  $MB_2$  ein, so erkennen wir, dass das Dreieck  $A_2A_3M$  gleichseitig ist und durch die (Hilfs-) Linien in sechs flächengleiche Teildreiecke zerlegt



wird. Davon gehören zwei der sechs Teildreiecke zur gesuchten Fläche  $B$ . Also nimmt im Dreieck  $A_2A_3M$  die Fläche von  $B$  genau  $\frac{1}{3}$  der zu  $A$  gehörenden Fläche ein. Da diese Argumentation für jedes Paar benachbarter Eckpunkte von  $A$  ebenso richtig ist, finden wir  $B = \frac{1}{3} \cdot A$ .  $\square$

**Aufgabe.** Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 10 cm. Wir verbinden jeden Eckpunkt des Quadrates mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Dadurch wird im „Inneren“ ein konvexes Achteck gebildet. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Achtecks?

*Lösungshinweise:* Der Lösungsansatz durch ein Quadratgitter erscheint im Kontext dieser Aufgaben als sinnvoll. Jedoch gelingt es anstatt mit einem  $10 \times 10$ -Netz deutlich einfacher mit einem  $12 \times 12$ -Netz. In diesem Fall liegen nämlich die Eckpunkte des Achtecks auf Gitterpunkten und der Flächeninhalt kann allein durch Auszählen ermittelt werden:  $4 \times 4$  dieser Gitterquadrate in der Mitte und 8 rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten  $2 \times 1$  (d.h. mit dem Flächeninhalt eines Gitterquadrates), also insgesamt 24 Gitterquadrate.



Da jedes dieser Gitterquadrate einen Flächeninhalt von  $\frac{100}{144} \text{ cm}^2$  hat, beträgt der Flächeninhalt des Achtecks  $24 \cdot \frac{100}{144} = \frac{50}{3} \text{ cm}^2$ .  $\square$

Für die Zerlegung von Flächen muss mitunter erst ein „passendes“ Gitternetz gefunden werden.

*Literatur:* Ambrus A, Berta T. Zur Verwendung von Quadrat- Dreiecks- und Würfelgitter beim Lösen mathematischer Aufgaben. In: Mathematikinformation, Heft Nr. 45, TU Braunschweig, klartext GmbH print- & medienservice, Göttingen, 2006. (s. <http://www.mathematikinformation.info/pdf/MI45Ambrus.pdf>, 10.04.21)

## Pythagoras und Verwandte

Die Gleichung  $a^2 + b^2 = c^2$  wird wohl stets mit dem Satz von Pythagoras in Verbindung gebracht.



Zunächst untersuchen wir Teiler der Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  unter der Voraussetzung, dass der größte gemeinsame Teiler aller drei Zahlen gleich 1. Andernfalls könnten wir jede der Zahlen durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren.

Offensichtlich ist genau eine der drei Zahlen geradzahlig. Wären zwei Zahlen geradzahlig, so wären auch deren Quadrate geradzahlig. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier geradzahlig Zahlen) geradzahlig und somit auch die Zahl selbst. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 2. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen ungeradzahlig sein, weil die Summe zweier ungeradzahlig Zahlen geradzahlig ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 3 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 3 teilbar, so wären deren Quadrate durch 9 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 9 teilbaren Zahlen) durch 9 teilbar und somit die Zahl selbst durch 3 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 3. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 3 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 3 jeweils den Rest 1 lassen. Aber die Summe  $a^2 + b^2$  würde dann den Rest 2 lassen, was für eine ganze Zahl  $c^2$  nicht möglich ist.

Es ist auch stets genau eine der drei Zahlen durch 5 teilbar. Wären zwei der Zahlen durch 5 teilbar, so wären deren Quadrate durch 25 teilbar. Dann wäre auch das Quadrat der dritten Zahl (als Summe oder Differenz zweier durch 25 teilbaren Zahlen) durch 25 teilbar und somit die Zahl selbst durch 5 teilbar. Der größte gemeinsame Teiler der drei Zahlen wäre mindestens 5. Es können aber auch nicht alle drei Zahlen nicht durch 5 teilbar sein, weil dann deren Quadrate bei Division durch 5 jeweils den Rest 1 oder 4 lassen. Aber die Summe  $a^2 + b^2$  würde dann den Rest 2 oder 3 lassen (was für eine ganze Zahl  $c^2$  nicht möglich ist) oder eine durch 5 teilbare Zahl ergeben.

Um geometrische „Verwandte“ zu finden, verallgemeinern wir den Exponenten, also  $a^z + b^z = c^z$  ( $z$  reell) und untersuche, ob es für solche Gleichungen ebenfalls geometrische Interpretationen gibt<sup>2</sup>.

(a) Für  $z = 1$  erhalten wir die triviale Streckenaddition.

(b) Bezeichnet  $c$  die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck und  $h$  die darauf stehende Höhe, so gilt für die Hypotenusenabschnitte  $p$  und  $q$ :

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{c + 2h}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = \frac{1}{2}.$$

---

<sup>2</sup> Windisch, G. Geometrische Interpretationen der Gleichung  $x^\alpha + y^\alpha = z^\alpha$ . In: alpha 22 (1988) Heft 2, S. 30.

*Lösungshinweise:* Im rechtwinkligen Dreieck gelten die Beziehungen  $c = p + q$  und  $h^2 = p \cdot q$ . Daraus folgt:

$$c + 2h = p + q + 2\sqrt{p \cdot q} = (\sqrt{p} + \sqrt{q})^2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.  $\square$

(c) Für die Katheten  $a$  und  $b$  eines rechtwinkligen Dreiecks und dessen Höhe  $h$  auf  $c$  gilt

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -2.$$

*Lösungshinweise:* Aus  $a^2 + b^2 = c^2$  folgt nach Division durch  $a^2b^2$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}.$$

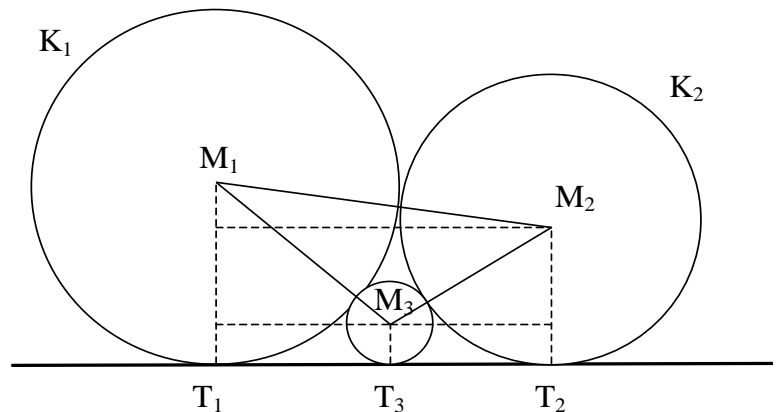
Mit Hilfe der Flächenformeln für das rechtwinklige Dreieck folgt aus  $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$  unmittelbar die Behauptung.  $\square$

(d) Gegeben seien 3 Kreise  $K_1, K_2$  und  $K_3$  mit den Radien  $r_3 < r_2 \leq r_1$ , für die eine Gerade  $g$  die Tangente ist. Die Kreise mögen sich wie in der Abbildung zu sehen paarweise berühren. Dann gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -\frac{1}{2}.$$

*Lösungshinweise:* Bezeichnen  $T_1, T_2$  und  $T_3$  die Berührungspunkte der Kreise mit der Tangente (s. Skizze), so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned} \overline{T_2T_1}^2 + (r_2 - r_1)^2 &= (r_2 + r_1)^2 \\ \overline{T_2T_3}^2 + (r_2 - r_3)^2 &= (r_2 + r_3)^2 \\ \overline{T_1T_3}^2 + (r_1 - r_3)^2 &= (r_1 + r_3)^2 \end{aligned}$$



Durch Ausmultiplizieren der Klammern und Zusammenfassen finden wir

$$\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_2}, \quad \overline{T_1T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_1r_3}, \quad \overline{T_2T_3} = 2 \cdot \sqrt{r_2r_3}.$$

Folglich gilt wegen  $\overline{T_1T_3} + \overline{T_3T_2} = \overline{T_1T_2}$  die Gleichung  $\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_3r_2} = \sqrt{r_1r_2}$ .  
 Nach Division durch  $\sqrt{r_1r_2r_3}$  ergibt sich unmittelbar die Behauptung.  $\square$

Für  $z = -1$  sei auf den EULERSchen Satz<sup>3</sup> verwiesen, der einen Zusammenhang zwischen den Radien des In- ( $r$ ) und des Umkreises ( $R$ ) und dem Abstand der Mittelpunkte beider Kreise ( $d$ ) beschreibt:

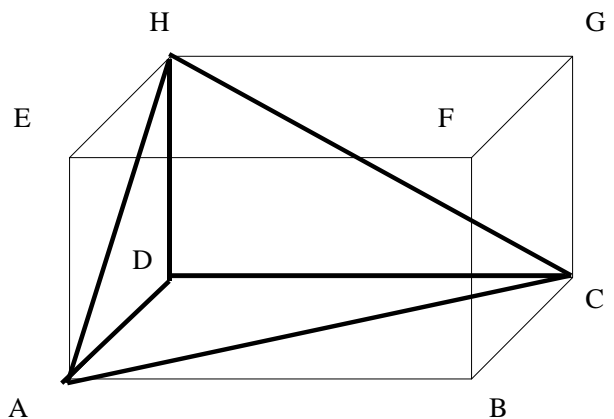
$$d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R.$$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}, \text{ also eine verwandte Gleichung mit } z = -1.$$

Eine Verallgemeinerung anderer Art bildet die räumliche Version des Satzes von Pythagoras, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:

**Aufgabe 411041.** Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide  $ABCD$  gilt: Sind die Dreiecke  $ABD$ ,  $ACD$  und  $BCD$  sämtlich bei  $D$  rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks  $ABC$ .



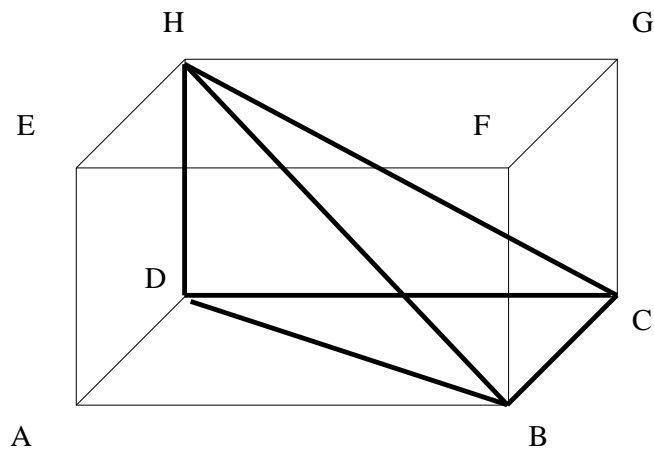
*Lösungshinweise:* Man betrachte die Quaderecke  $ACDH$  in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen, deren Flächeninhalte sich jeweils als halbe Produkte der zugehörigen Quaderkanten bestimmen lassen. Laut obiger Aufgabe gilt dafür

$$F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta ADH}^2 + F_{\Delta CDH}^2 = F_{\Delta ACH}^2.$$

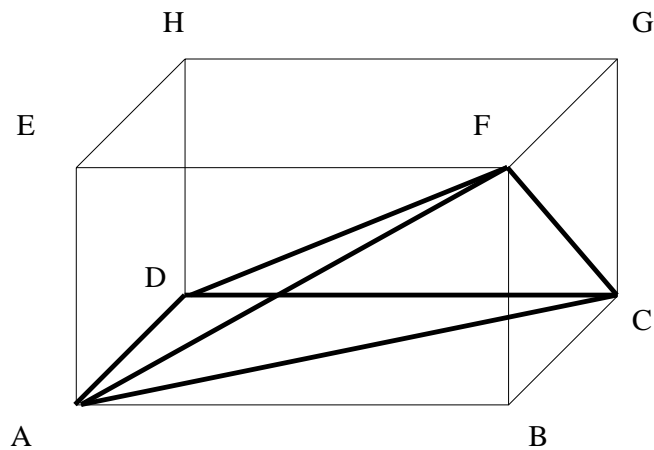
Der Beweis ist leicht erbracht, wenn man zunächst die Höhe  $h_{AC}$  auf  $AC$  im rechtwinkligen Dreieck  $ACD$  aus den Quaderseiten  $AD$  und  $CD$  bestimmt und anschließend die Länge der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $DH$  und  $h_{AC}$  ermittelt. Dieser Zusammenhang wurde bereits 1622 vom Mathematiker JOHANNES FAULHABER (1580 bis 1635) publiziert.

Man kann aber weitere Körper mit drei rechten Winkeln ausschneiden:

<sup>3</sup> LEONHARD EULER, 1707 bis 1783



Es gilt im BUBECK-Tetraeder:  $F_{\triangle DBH}^2 - F_{\triangle DCH}^2 = F_{\triangle BCH}^2 - F_{\triangle BCD}^2$ . HEINRICH BUBECK berichtete darüber 1992 in der Zeitschrift *Didaktik der Mathematik*.



Im derart schiefen Tetraeder gilt:  $F_{\triangle ADF}^2 + F_{\triangle CDF}^2 = F_{\triangle ADC}^2 + F_{\triangle ACF}^2$ .

## Bekannte Sätze der Mathematik

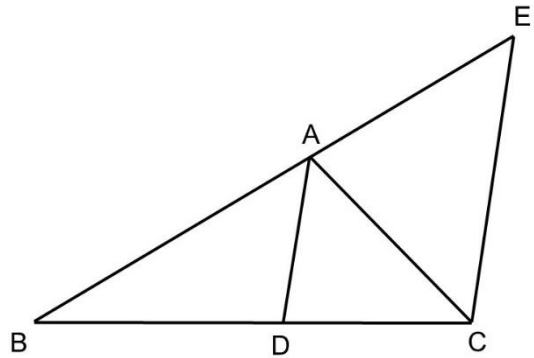
**Winkelhalbierendensatz.** In EUKLIDS „Elemente, fünfzehn Bücher“<sup>4</sup> wird in der Übersetzung von JOHANN FRIEDRICH LORENZ<sup>5</sup>, Halle 1781, im Sechsten Buch auf Seite 88 als 3. Satz der Winkelhalbierendensatz angegeben:

„Wenn in einem Triangel, ABC, eine gerade Linie, AD, einen seiner Winkel, BAC, halbiert: so schneidet sie die Gegenseite solches Winkels, BC, den beyden andern Seiten, BA, AC, proportionirt. Und wenn sie die eine Seite, BC, den beyden übrigen Seiten, BA, AC, proportionirt schneidet, so halbiert sie den Gegenwinkel solcher Seite, BAC.“

<sup>4</sup> In den Büchern der Elemente des griechischen Mathematikers EUKLID VON ALEXANDRIA (3. Jh. v. Chr.) wurde die Arithmetik und Geometrie seiner Zeit zusammenfasst

<sup>5</sup> (1737 – 1807), deutscher Mathematiker und Pädagoge

Den anschließend geführten *Beweis* können wir im heutigen Sprachgebrauch nachvollziehen: Es sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels  $\sphericalangle CAB$  mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite  $BC$  sei  $D$ . Im Punkt  $C$  ziehen wir die Parallele zu  $AD$ , deren Schnittpunkt mit der Verlängerung von  $AB$  sei  $E$ .



Dann sind  $\sphericalangle ECA$  und  $\sphericalangle DAC$  Wechselwinkel an den Parallelen  $AD$  und  $CE$  und folglich gleich groß. Weiterhin sind  $\sphericalangle AEC$  und  $\sphericalangle BAD$  Stufenwinkel an diesen Parallelen und folglich gleich groß.

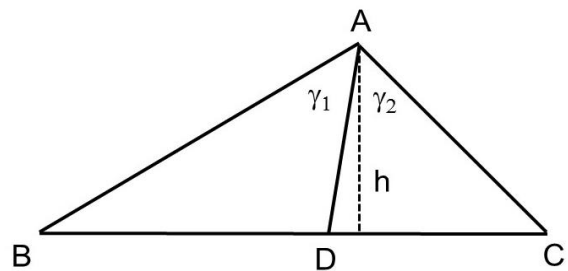
Da gemäß der Konstruktion die Winkel  $\sphericalangle BAD$  und  $\sphericalangle CAD$  gleich groß sind, sind auch die Winkel  $\sphericalangle ECA$  und  $\sphericalangle AEC$  gleich groß. Deshalb ist das Dreieck  $ACE$  gleichschenkelig und es gilt  $|AC| = |AE|$ .

Nun gilt nach Strahlensatz mit dem Zentrum  $B$  und den Parallelen  $AD$  und  $CE$  die Verhältnisgleichung  $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$ , also wie behauptet

$$|BD| : |DC| = |AB| : |AC|. \quad \square$$

Der Beweis der Umkehrung nutzt die gleichen geometrischen Prinzipien: Aus der angegebenen Verhältnisgleichung wird über die Umkehrung des Strahlensatzes auf die Parallelität der Strecken  $AD$  und  $CE$  geschlossen. Durch Winkelvergleiche wird  $AD$  als Winkelhalbierende erkannt.

*Beweisvariante:* Ist die Flächenberechnung für ein Dreieck mithilfe des Sinus eines eingeschlossenen Winkels bekannt, können wir folgenden kurzen Beweis des Winkelhalbierendensatzes führen:



Wir berechnen die Flächeninhalte der Dreiecke  $ABD$  und  $ADC$  einerseits über die Grundseite und zugehöriger Höhe und andererseits über den halben Winkel und die anliegenden Seiten. Somit gilt:

$$\frac{A_{ABD}}{A_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot h} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \gamma_1}{\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \sin \gamma_2}$$

Nach Kürzen in der rechten Gleichung der Gleichungskette finden wir die behauptete Verhältnisgleichung.  $\square$

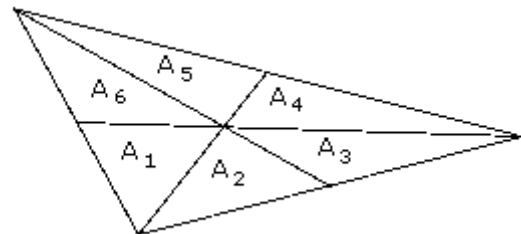
**Schwerpunktsatz im Dreieck.** Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Seitenhalbierenden in Abschnitte mit dem Längenverhältnis 1:2

*Beweis:* Durch die drei Seitenhalbierenden wird das Dreieck in sechs Teildreiecke geteilt. Je drei davon besitzen zusammen den selben Flächeninhalt, denn die Seitenhalbierenden teilen das Dreieck in zwei flächengleiche Teile:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_4 + A_5 + A_6$$

$$A_2 + A_3 + A_4 = A_5 + A_6 + A_1$$

$$A_3 + A_4 + A_5 = A_6 + A_1 + A_2$$

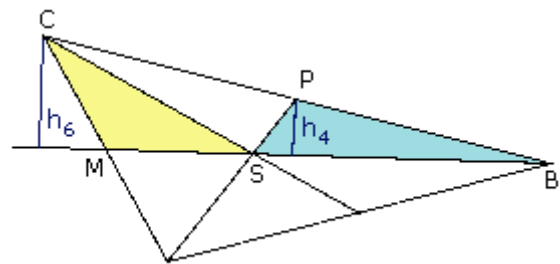


Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten so ergibt sich  $A_1 - A_4 = A_4 - A_1$ . Daraus folgt die

Gleichheit  $A_1 = A_4$ . Analog kann man die dritte von der ersten Gleichung subtrahieren sowie die dritte von der zweiten und erhält so insgesamt, dass die Flächeninhalte gegenüberliegender Dreiecke untereinander jeweils gleich sind. Die jeweils benachbarten Dreiecke  $A_2|A_3$ ,  $A_4|A_5$  und  $A_1|A_6$  besitzen ebenfalls paarweise denselben Flächeninhalt, da sie jeweils gleiche Grundseiten haben (die Hälfte einer großen Dreiecksseite) und identische Höhen. Damit besitzen alle sechs kleinen Dreiecke denselben Flächeninhalt, d.h.

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6.$$

Betrachte man nun die vierte und die sechste Dreiecksfläche. Die Höhen dieser Dreiecke sind parallel, da sie beide senkrecht auf der Seitenhalbierenden  $MB$  stehen. Weil  $P$  die Strecke  $BC$  halbiert, ist  $|BC| : |BP| = 2 : 1$  und folglich nach dem Strahlensatz auch  $h_6 : h_4 = 2 : 1$ .



Weiterhin besitzen die Dreiecke  $BPS$  und  $MSC$  denselben Flächeninhalt. Wenn aber die Höhe  $h_6$  doppelt so groß ist wie  $h_4$ , muss gelten:  $|BS| : |MS| = 2$ , und damit teilt der Schwerpunkt  $S$  die Seitenhalbierende  $MB$  in zwei Abschnitte mit dem Längenverhältnis 2 : 1.

Analog kann man je zwei Teildreiecke betrachten, die an den anderen Seitenhalbierenden anliegen und kommt zu entsprechenden Ergebnissen für die Lage von  $S$  auf diesen Strecken. □

## Aufgaben Serie 7 (2020/21)

Einsendungen bitte bis 22. Juni 2021 an Dr. Norman Bitterlich, Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz oder [norman.bitterlich@t-online.de](mailto:norman.bitterlich@t-online.de) <sup>6</sup>.

### Aufgabe 7-1.

Gibt es Polyeder mit einer ungeraden Anzahl von Flächen, wobei jede Fläche ein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Seiten ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung! (5 Punkte)

### Aufgabe 7-2.

Beweisen Sie: Wenn  $a$  und  $b$  ganzzahlig sind, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + 10 \cdot a \cdot x + 5 \cdot b + 3 = 0$$

keine ganzzahlige Lösung. (5 Punkte)

### Aufgabe 7-3.

Ermitteln Sie alle ungeordneten Paare  $(x; y)$  aus zwei natürlichen Zahlen  $x, y$  mit  $x \neq y$ , für die Folgendes gilt:

Das arithmetische Mittel von  $x$  und  $y$  ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von  $x$  und  $y$ . (6 Punkte)

### Aufgabe 7-4.

Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind. (6 Punkte)

(Hinweis: Von den folgenden beiden Aufgaben wird lediglich die Lösung mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Werden jedoch beide Aufgaben bearbeitet und beträgt die erreichte Punktzahl mehr als 8, wird ein Zusatzpunkt vergeben, bei mehr als 12 Punkten werden zwei Zusatzpunkte vergeben.)

### Aufgabe 7-5A

(a) Wenn die Summe zweier Quadratzahlen natürlicher Zahlen ein Vielfaches von 7 ist, so ist jede der Zahlen selbst durch 7 teilbar. (2 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob es ein Zahlentupel  $(w; x; y; z)$  natürlicher Zahlen ( $w > 0, x > 0, y > 0, z > 0$ ) gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 5(y^2 + z^2). \quad (2 \text{ Punkte})$$

---

<sup>6</sup> Der Empfang von elektronischen Einsendungen wird kurz mit Re: bestätigt. Erhalten Sie diese Bestätigung nicht, dann bitte zur Vermeidung von Datenverlusten nachfragen!

(c) Beweisen Sie, dass es kein Zahlentupel  $(w; x; y; z)$  natürlicher Zahlen ( $w > 0, x > 0, y > 0, z > 0$ ) gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 7(y^2 + z^2) \text{ erfüllt.} \quad (4 \text{ Punkte})$$

**Aufgabe 7-5B.** In der Ebene sei  $P_1P_2P_3P_4$  ein beliebiges Viereck  $E$ . Zu untersuchen ist folgende Aussage:

Sind  $Q_1, Q_2, Q_3$  und  $Q_4$  vier Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von  $E$  liegen, so dass  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  ein zu  $E$  kongruentes Viereck ist, so ist jeder Punkt  $Q_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) ein Eckpunkt von  $E$ .

- (a) Gibt es nichtkonvexe Vierecke  $E$ , für die die genannte Aussage falsch ist? (2 Punkte)
- (b) Ist diese Aussage für alle nichtkonvexe Vierecke  $E$  falsch? (2 Punkte)
- (c) Beweisen Sie, dass die Aussage für alle konvexen Vierecke wahr ist! (4 Punkte)

*Hinweise:* Ein Viereck  $E$  heißt konvex, wenn für zwei beliebige Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von  $E$  liegen, auch alle Punkte der geradlinigen Verbindungslinie dieser beiden Punkt im Innern oder auf dem Rand von  $E$  liegen.

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich  
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz  
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de; www.kzm-sachsen.de  
Auflage: 40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins  
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz