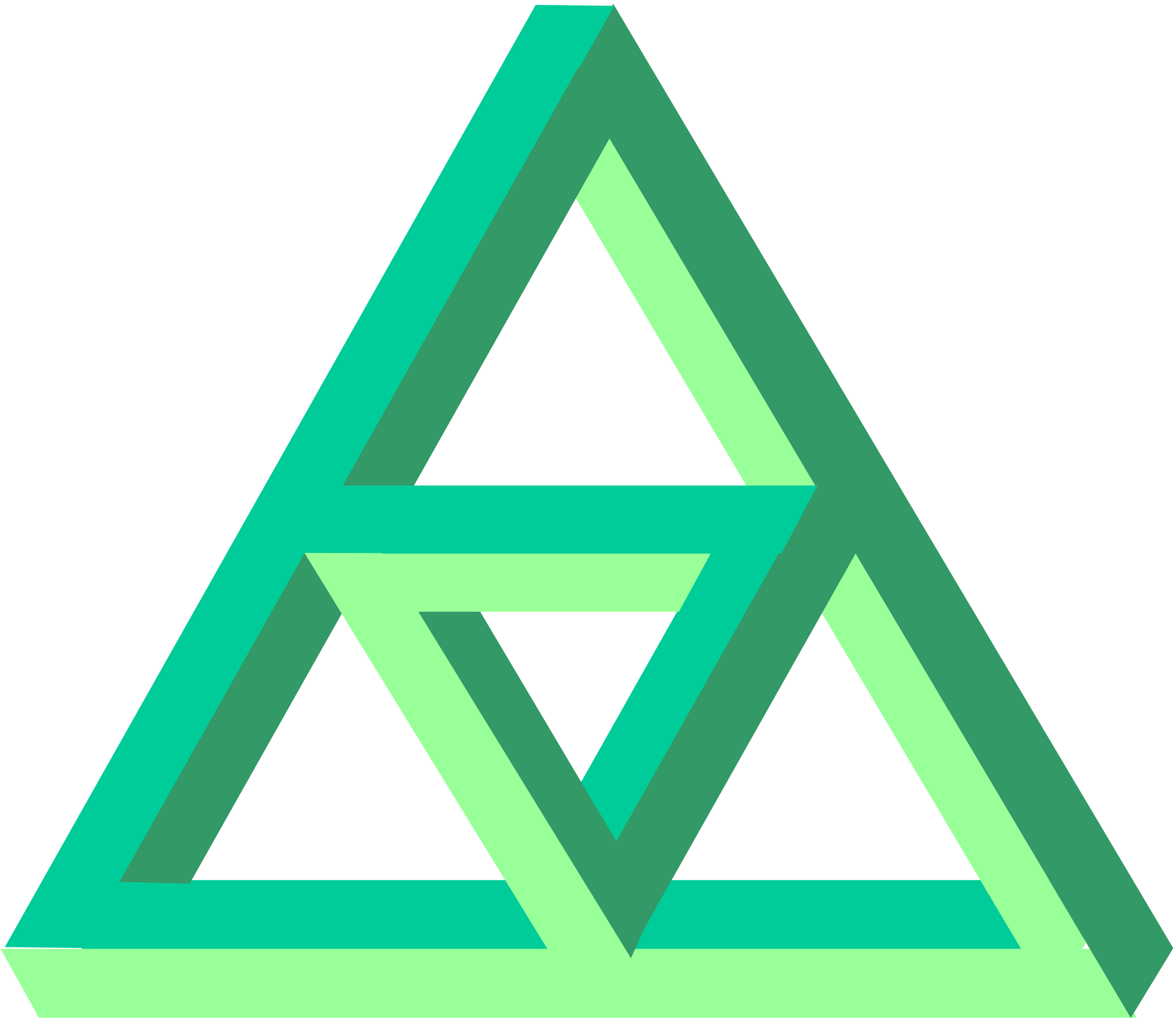
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 6 des sächsischen
Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 4 /2021 20. Jahrgang

Lösungshinweise Serie 6

Aufgabe 6-1. Gesucht sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen n mit der folgenden Eigenschaft: Teilt man die Dezimaldarstellung von n durch einen „Schnitt“ in der Mitte, so dass zwei zweistellige natürlichen Zahlen a und b entstehen, so ist das Quadrat aus der Summe von a und b gleich n.

Lösungshinweise: Nach den gestellten Bedingungen muss die Gleichung

$$a^2 + 2ab + b^2 = 100a + b = n$$

mit natürlichen Zahlen a und b mit $10 \le a \le 99, 10 \le b \le 99$ gelten. Durch äquivalente Umformung erhält man daraus

$$a^2 + 2a \cdot (b - 50) + b^2 - b = 0\,.$$

Wendet man auf diese quadratische Gleichung die bekannte Lösungsformel an, folgt

$$a_{1,2} = 50 - b \pm \sqrt{2500 - 99b}\,.$$

Damit die Lösung für a eine natürliche Zahl ist, muss es eine natürliche Zahl t ($t \le 50$) mit $2500 - 99b = t^2$ geben. Dies ist gleichbedeutend mit

$$99b = 2500 - t^2 = (50 + t) \cdot (50 - t)\,.$$

Wegen der Faktorenzerlegung 99 = 9 · 11 muss der Faktor 11 in den Faktoren (50 + t) oder (50 – t) enthalten sein. Das kann nur für t = 5, 16, 27, 38, 49 bzw. t = 6, 17, 28, 39, 50 sein. Da das Produkt beider Faktoren durch 9 teilbar sein muss, scheiden davon 6, 16, 17, 27, 28, 38 und 39 aus, so dass nur t = 5, 49, 50 als mögliche Lösung verbleiben. Aus diesen Werten folgen für b = 25, 1 bzw. 0. Aus der obigen Lösungsformel findet man für a die Werte

$$a = 25 \pm 5,\ a = 49 \pm 49 \text{ bzw. } a = 50 \pm 50.$$

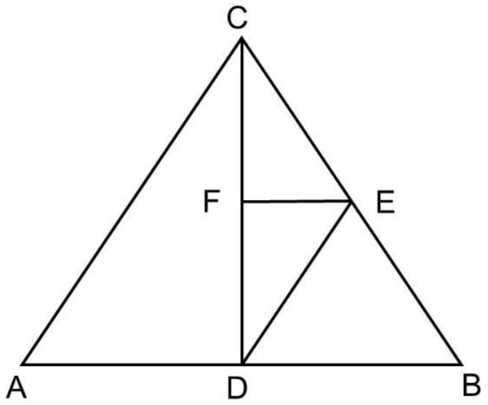
Unter Beachtung der Wertebeschränkung für a und b können folglich nur a = 30 und a = 20 zu einer Lösung führen. Tatsächlich erfüllen die Zahlen n = 3025 und n = 2025 die Bedingungen der Aufgabe.

Lässt man für b auch eine zweistellige Zahl mit führender Null zu (also $0 \le b \le 99$), so findet man für b = 1 die Zahl a = 98. Tatsächlich erfüllt auch n = 9801 die Bedingungen der Aufgabe. Lässt man auch nicht echt vierstellige Zahlen zu (d.h. $0 \le a \le 99$), so ist a = 0 als Lösung möglich, was zu den weiteren Lösungen n = 0000 und n = 0001 führt.

(Die Schreibweise mit vier Ziffern ist dabei notwendig, um den Schnitt gemäß Aufgabenstellung ausführen zu können.) ❑

Hinweis: Eine Liste aller Quadratzahlen von 32² bis 99² und Prüfung der geforderten Eigenschaft ist eine (wenn auch nicht elegante) vollständige Lösungsdarstellung. Sie ist ohne technische Hilfsmittel zu erstellen und der Korrektor kann die Rechnungen nachvollziehen. Die Nutzung von Rechentechnik ist für die Lösungsfindung in einer Hausarbeit stets zulässig, die Argumentation darf sich aber nicht auf die Ausführung eines Programmes begründen. Insbesondere reicht es nicht, nur die Lösungsmenge anzugeben, da auf diese Weise nicht nachgewiesen wurde, dass es keine weiteren Lösungen gibt (aufgrund eines Programmierfehlers könnten Lösungen übersehen werden).

Aufgabe 6-2 – MO561012. Beweisen Sie, dass sich ein gleichseitiges Dreieck stets restlos in vier Teildreiecke zerlegen lässt, dass drei der vier Teildreiecke rechtwinklig sind und ein Teildreieck gleichseitig ist.



Lösungshinweise: Es genügt eine geeignete Zerlegung anzugeben und nachweisen, dass diese tatsächlich die Anforderungen der Aufgabe erfüllt.

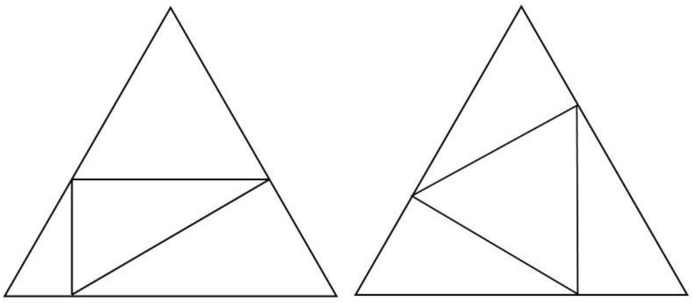
Wir fällen im ersten Schritt vom Punkt *C* auf die Seite $\overline{AB}$ das Lot. Den Schnittpunkt nennen wir *D*. Da das Lot $\overline{AD}$ senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, ist das Dreieck *ADC* ein rechtwinkliges Dreieck.

Wir markieren im zweiten Schritt auf $\overline{BC}$ einen Punkt *E*, der vom Punkt *B* den Abstand $|BE| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = a/2$ hat. Dann ist $\overline{DE}$ eine Mittellinie des Dreiecks *ABC* und somit gilt $|DE\ | = \ a/2$. Also ist das Dreieck *DBE* gleichseitig.

Abschließend fällen wir von *E* das Lot auf $\overline{AD}$. Den Schnittpunkt nennen wir *F*. Dann zerlegt das Lot $\overline{EF}$ das Dreieck *DEC* in zwei rechtwinklige Dreiecke *DEF* und *FEC*.

Somit erfüllt die Zerlegung mit den Dreiecken *ADC*, *DBE*, *DEF* und *FEC* die Bedingungen der Aufgabe. ❑

Es gibt weitere Möglichkeiten der Zerlegung, jedoch ist entweder duch die Konstruktionsbeschreibung oder durch eine Analyse sicherzustellen, dass es tatsächlich ein gleichseitiges und drei rechtwinklige Dreiecke sind.



Aufgabe 6-3. Ermitteln Sie diejenigen Tripel $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z})$ von reellen Zahlen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, und $\boldsymbol{z}$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x + y + z = 9 \quad ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad ; \quad xy + yz + zx = 27.$$

Lösungshinweise: Wenn es reelle Zahlen x, y und z gibt, die diese Gleichungen erfüllen, so existiert nach dem Satz von VIETA[1] ein Polynom dritten Grades der Form

$$P(t) = t^3 - (x + y + z) \cdot t^2 + (xy + yz + xz) \cdot t - xyz$$

für das die Werte von x, y und z die Nullstellen sind. Für das Absolutglied dieses Polynoms finden wir:

$$xyz \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = yz + xz + xy$$

Also erhalten wir $xyz = 27$. Damit finden wir für das Polynom

$$P(t) = t^3 - 9 \cdot t^2 + 27 \cdot t - 27 = (t - 3)^3$$

die Nullstellen $x = y = z = 3$. Die Probe bestätigt, dass alle drei gegebenen Gleichungen damit erfüllt werden. ❑

Aufgabe 6-4 (MO-Klassiker MO094102, 1969/70). Man beweise folgenden Satz: Wenn in einer quadratischen Gleichung

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

die Koeffizienten a, b, c sämtlich ungerade Zahlen sind, dann hat diese Gleichung keine rationalen Lösungen.

Lösungshinweise: Angenommen, die gegebene Gleichung mit ungeraden a, b und c besitzt eine rationale Lösung x. Dann lässt sich x in der Form $x = \frac{p}{q}$ darstellen, wobei p und q ganze teilerfremde Zahlen mit $q > 0$ sind. Damit gilt:

$$a \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + c = 0 \text{, also } ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Fall 1: p und q sind ungerade.
Da die Quadrate ungerader Zahlen ungerade und die Produkte ungerader Zahlen ebenfalls ungerade sind sowie die Summe dreier ungerader Zahlen ungerade ist, steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ungerade Zahl, die ungleich 0 ist. Damit ergibt sich ein Widerspruch.

Fall 2: Einer der beiden Zahlen p, q ist gerade, die andere ungerade.
Dann ist bpq eine gerade Zahl und von den Zahlen ap^2 und cq^2 ist eine gerade und die andere ungerade. Die Summe zweier gerader und einer ungeraden Zahl ist aber ungerade, woraus wie im Fall 1 ein Widerspruch folgt.

[1] s. Heft 2/2021 „Gleichungssysteme und der Satz von VIETA“ (S. 19 – 23)

Fall 3: p und *q* sind gerade.
Dann sind beide Zahlen im Widerspruch zur Annahme nicht teilerfremd.

Da es keine weitere Möglichkeit gibt, ist die Behauptung bewiesen. ❑

Lösungsvariante: Man wende auf die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ die Lösungsformel an und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}\,.$$

Damit x rational wird, muss der Radikand $b^2 - 4ac$ eine Quadratzahl sein. Für die ungeradzahligen Koeffizienten schreiben wir $2a' + 1$, $2b' + 1$ bzw. $2c' + 1$ mit ganzen Zahlen a', b' und c'. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (2b'+1)^2 - 4 \cdot (2a'+1)(2c'+1) \\ &= 4b'^2 + 4b' + 1 - 16a'c' - 8 \cdot (a'+c') - 4 \end{aligned}$$

Weil $\boldsymbol{b'^2 + b' = b' \cdot (b' + 1)}$ als Produkt zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets durch 2 teilbar ist, gibt es eine ganze Zahl Z mit

$$b^2 - 4ac = 8 \cdot Z - 3\,.$$

Angenommen, es gäbe eine ganz Zahl k mit $8 \cdot Z - 3 = k^2$, dann ist wegen

$$4 \cdot (2 \cdot Z - 1) = 8 \cdot Z - 4 = k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$$

die rechte Seite dieser Gleichung durch 8 teilbar (k muss ungerade sein und von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen $k - 1$ und $k + 1$ ist eine mindestens durch 4 und die andere durch 2 teilbar), aber die linke Seite ist nicht durch 8 teilbar (weil der Ausdruck in der Klammer eine ungerade Zahl darstellt). Also kann es eine solche Zahl k nicht geben. ❑

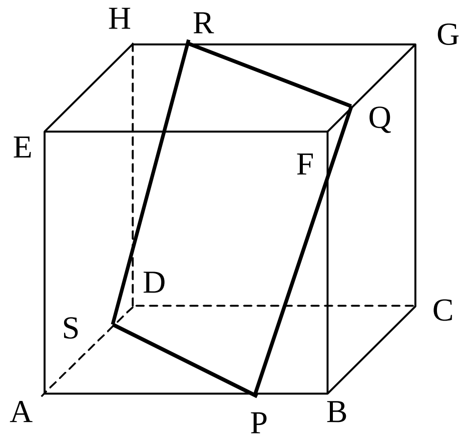
Aufgabe 6-5A. Ein Würfel mit der Kantenlänge 1 m werde durch einen ebenen Schnitt in zwei Teile zerlegt. Man betrachte im Folgenden die dabei entstehende Schnittfläche.

(a) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von mehr als 1,1 m² einschließt?

(b) Kann der Schnitt so erfolgen, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist?

(c) Für welche ungeraden Zahlen $n > 1$ gilt: Es gibt einen ebenen Schnitt derart, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges n-Eck ist.

Lösungshinweise:



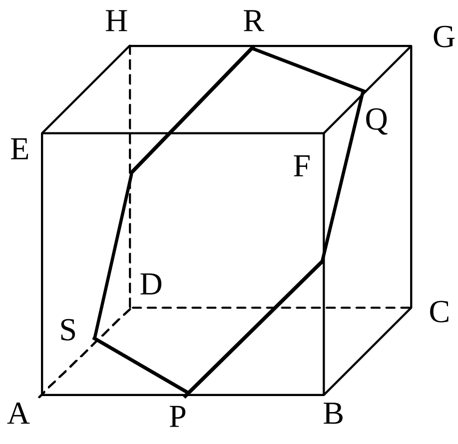
(a) Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit Kantenlänge 1 mit den in der Skizze markierten Punkten *P, Q, R, S,* so dass gilt *PB* = *FQ* = *HR* = *DS* = ¼ (Skizze nicht maßstabsgerecht). Die Länge der Strecke *PS* beträgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck *APS* mit dem rechten Winkel bei *A*,

$$\overline{PS} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Laut Konstruktion ist *RQ* parallel zu *SP* und gleich lang. Die Strecke *PQ* lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes des Pythagoras berechnen (im Dreieck *PBF* mit dem rechten Winkel bei *B* und anschließend im Dreieck *PFQ* mit dem rechten Winkel bei *F*) und es gilt

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}}.$$

Ebenfalls nach Konstruktion ist *RS* parallel zu *QP* und gleich lang. Also liegen *P, Q, R* und *S* in einer Ebene. Aus Symmetriegründen sind auch die Diagonalen *RP* und *QS* gleich lang und somit ist das Viereck *PQRS* ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{18}{16} = 1{,}125$ (m²), das vollständig im Innern der Schnittfläche liegt.



(b) Wählt man die Punkte *P, Q, R* und *S* so, dass sie die entsprechenden Würfelkanten halbieren, so sind die Strecken *SP* und *QR* parallel und gleich lang. Die zusätzlichen Schnittpunkte auf *BF* und *DH* halbieren ebenfalls diese Kanten. Damit sind alle Seitenkanten der Schnittfläche gleich lang. Weil die Hauptdiagonalen jeweils in ihrer Länge einer Flächendiagonalen entsprechen, ist das entstandene Sechseck regelmäßig.

(c) Man kann ein gleichseitiges Dreieck (regelmäßiges 3-Eck) erhalten: Legt man beispielsweise die Schnittebene durch die Punkte *B, D* und *G* fest, so entsteht als Schnittfläche ein Dreieck mit jeweils Flächendiagonalen als Seiten.

Man kann kein regelmäßiges 5-Eck als Schnittfläche erhalten, denn wenigsten zwei Seiten der Schnittfigur müssten auf gegenüberliegenden Würfelseiten liegen. Eine Ebene schneidet aber die parallelen Würfelseiten so, dass die

Schnittgeraden ebenfalls parallel zueinander sind. Dies ist aber bei einem regelmäßigen Fünfeck nicht möglich.

Da verschiedene Kanten einer Schnittfigur auf verschiedenen Würfelseiten liegen, kann es kein regelmäßiges n-Eck mit $n > 6$ geben. Somit sind für ungerade n nur für $n = 3$ regelmäßige n-Ecke als Schnittfläche möglich. ❑

Aufgabe 6-5B. Gitterpunkte der Ebene (bzw. des Raumes) seien alle Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines ebenen (bzw. räumlichen) kartesischen Koordinatensystems ganze Zahlen sind.

a) Es seien in der Ebene 5 Gitterpunkte (bzw. im Raum 9 Gitterpunkte) beliebig ausgewählt. Man zeige, dass der Mittelpunkt mindestens einer der Verbindungsstrecken von je zwei dieser Punkte wieder ein Gitterpunkt ist.

b) Man zeige: Es gibt unendlich viele regelmäßige Tetraeder, dessen Eckpunkte Gitterpunkte des Raumes sind.

c) Man zeige: Es gibt kein gleichseitiges Dreieck, dessen Eckpunkte Gitterpunkte der Ebene sind.

Lösungshinweise:
(a) Wir betrachten zunächst den ebenen Fall. Für zwei Gitterpunkte $(x_1 ; y_1)$ und $(x_2 ; y_2)$ berechnet sich der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke mittels

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right) .$$

Dieser Mittelpunkt ist genau dann selbst ein Gitterpunkt, wenn sowohl x_1 und x_2 als auch y_1 und y_2 jeweils denselben Rest bei Division durch 2 lassen.

Da es für jede Koordinate des Gitterpunktes 2 Möglichkeiten bezüglich des Restes bei Division durch 2 gibt, können insgesamt $2^2 = 4$ Kombinationen der Reste bei Division durch 2 vorkommen. Hat man nun 5 Gitterpunkte, so stimmen nach dem Schubfachprinzip mindestens 2 dieser 5 Gitterpunkte in den Resten bei Division durch 2 in beiden Koordinaten überein. Für dieses Paar von Gitterpunkten ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

In Analogie beweist man die Behauptung für den räumlichen Fall, da sich auch hier der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke koordinatenweise als Mittelwert der Koordinaten ergibt. Die Zahl der Kombinationen erhöht sich bei 3 Koordinaten auf $2^3 = 8$. Nach dem Schubfachprinzip findet man deshalb unter 9 Gitterpunkten stets ein Paar von Gitterpunkten, die koordinatenweise im Rest bei Division durch 2 übereinstimmen. Für dieses Paar ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke selbst wieder ein Gitterpunkt.

(b) In einem Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Deckfläche *EFGH* (mit der Kante *AE*) bildet der Körper mit den Eckpunkten *ACFH* einen regelmäßigen

Tetraeder, da alle Seitenkanten dieses Körpers als Flächendiagonalen des Würfels gleichlang sind. Es gibt unendlich viele Würfel, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind. Somit existieren auch unendlich viele Tetraeder der geforderten Art.

(c) Angenommen, es existiert in einem ebenen Gitter ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art. Dann kann man einerseits den Flächeninhalt A dieses Dreiecks durch Addition und Subtraktion von Teilflächen von Rechtecken und rechtwinkligen Dreiecksflächen mit rationalen Ergebnissen erhalten. Dazu bilde man das kleinste achsenparallele Rechteck, das das Dreieck vollständig enthält. Die Ecken dieses Rechtecks sind ebenfalls Gitterpunkte.

Andererseits ist das Quadrat einer Seitenlänge a stets rational, da es mittels des Satzes von Pythagoras als Summe zweier Quadrate ganzzahliger Längen dargestellt werden kann. Dann ist aber der Flächeninhalt nach der Flächenformel $A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ stets irrational.

Mit diesem Widerspruch zwischen rationalen und irrationalen Flächenwert ist bewiesen, dass es kein solches Dreieck geben kann. ❑

PELLsche Gleichung

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ mit dem ganzzahligen Faktor A ist in natürlichen Zahlen x und y zu lösen, wobei die triviale Lösung $(1; 0)$ nicht in die weitere Diskussion einbezogen wird. Die Gleichung wurde nach dem britischen Mathematiker JOHN PELL (1611 – 1685) benannt, der sich u.a. mit Diophantischen Gleichungen beschäftigte.

Zunächst diskutieren wir die Möglichkeiten für A. Es können negative Zahlen ausgeschlossen werden, denn in diesem Fall ließe sich die Gleichung als $x^2 + |A| \cdot y^2 = 1$ schreiben, die für $|A| > 1$ nur die trivialen Lösungen hat. Ist A eine Quadratzahl einer ganzen Zahl, gibt es außer der trivialen Lösung auch keine weiteren Lösungen, denn auf der linken Seite der Gleichung steht die Differenz zweier Quadratzahlen, die den Wert 1 annehmen soll. Folglich sind PELLsche Gleichungen nur für Nichtquadratzahlen A interessant.

Wir können für ein vorgegebenes A durch systematisches Suchen eine Lösung $(x ; y)$ finden. So ist offensichtlich $(3; 2)$ eine Lösung von $x^2 - 2y^2 = 1$, aber auch $(17; 12)$ ist eine Lösung. Können wir auch alle Lösungen finden?

Ist $(x_0 ; y_0)$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - A \cdot y^2 = 1$, so gilt nach Binomischer Formel

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)(x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0) = 1$$

und folglich finden wir wegen

$$(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n \cdot (x_0 - \sqrt{A} \cdot y_0)^n = 1$$

neue Lösungen mit

$$x_n + \sqrt{A} \cdot y_n = (x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0)^n,$$

wenn wir alle Summanden der Binomischen Formel ohne $\sqrt{A}$ zu x_n und die anderen Summenden mit $\sqrt{A}$ zu y_n zusammenfasst. Auf diese Weise erhalten wir

$$x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A} \right)^n + \left(x_0 - y_0\sqrt{A} \right)^n \right)$$
$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{A}} \cdot \left(\left(x_0 + y_0\sqrt{A} \right)^n - \left(x_0 - y_0\sqrt{A} \right)^n \right)$$

Daraus leiten wir aus der expliziten Bildungsvorschrift eine Rekursionsvorschrift her:

$$x_{n+1} + \sqrt{A} \cdot y_{n+1} = \left(x_n + \sqrt{A} \cdot y_n\right)\left(x_0 + \sqrt{A} \cdot y_0\right)$$
$$= (x_n x_0 + A \cdot y_n y_0) + \sqrt{A} \cdot (x_n y_0 + y_n x_0)$$

Am Beispiel der Lösung (3; 2) für $A = 2$ führt dies zu

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Eliminieren wir aus diesem Gleichungssystem zunächst y_n, so gilt:

$$3x_{n+1} - 4y_{n+1} = x_n.$$

Setzen wir nun für $4y_{n+1}$ nach der ersten Gleichung $x_{n+2} - 3x_{n+1}$ ein, erhalten wir die Rekursion:

$$x_n + 2 \;=\; 6x_{n+1} - x_n\,.$$

Eliminieren wir nun noch x_n, so führt dies zu:

$$3y_{n+1} - 2x_{n+1} = y_n.$$

Setzen wir abschließend für $2x_{n+1}$ entsprechend der ersten Gleichung $y_{n+2} - 3y_{n+1}$ ein, finden wir die Rekursion:

$$y_n + 2 \;=\; 6y_{n+1} - y_n\,.$$

Sind damit alle Lösungen gefunden? Um dies zu untersuchen, definieren wir:
Eine Lösung $(x_0; y_0)$ der PELLschen Gleichung wird minimale Lösung genannt, wenn für alle Lösungen $(x; y)$ die Ungleichung $x_0 + y_0\sqrt{A} \leq x + y\sqrt{A}$ erfüllt ist.

Die minimale Lösung ist eindeutig bestimmt. Gäbe es nämlich zwei minimale Lösungen $(x_{01}; y_{01})$ und $(x_{02}; y_{02})$, so wäre

$$x_{01} + y_{01}\sqrt{A} = x_{02} + y_{02}\sqrt{A}$$
$$x_{01} - x_{02} = \sqrt{A} \cdot (y_{02} - y_{01})$$

Auf der rechten Seite steht aber für $y_{01} \neq y_{02}$ eine irrationale Zahl, im Widerspruch zur rationalen Zahl auf der linken Seite, folglich müssen $y_{01} = y_{02}$ übereinstimmen und damit auch $x_{01} = x_{02}$.

Wenn nun $(x^*; y^*)$ eine weitere, nicht nach obigen Konstruktionsprinzip auffindbare Lösung der PELLschen Gleichung wäre, gilt für alle natürlichen Zahlen *n*

$$x * + y * \sqrt{A} \neq \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n$$

Aus der Minimalität von $(x_0; y_0)$ folgt

$$1 < x_0 + y_0\sqrt{A} < x * + y * \sqrt{A}.$$

In diesem Fall gibt es also einen Exponenten *k* mit

$$\left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^k < x * + y * \sqrt{A} < \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^{k+1}.$$

Multiplizieren wir diese Ungleichungskette mit $\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k$, finden wir eine weitere Lösung $(x'; y')$, wenn wir in folgender Ungleichungskette das mittlere Produkt ausmultiplizieren und die rationalen und irrationalen Summanden wieder entsprechend zusammenfassen.

$$1 < x' + y'\sqrt{A} = (x * + y * \sqrt{A})\left(x_0 - y_0\sqrt{A}\right)^k < 1 \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right).$$

Leicht überzeugen wir uns, dass $(x'; y')$ tatsächlich die PELLsche Gleichung erfüllt. Sind *x*' und *y*' positiv, so ist aus der letzten Ungleichung bereits ein Widerspruch zur Minimalität von $(x_0 ; y_0)$ gegeben.

Keine der Zahlen kann 0 sein, weil daraus entweder $-Ay'^2 > 0$ oder $x'^2 = 1$ folgen würde. Beide Zahlen können aber auch nicht gleichzeitig negativ sein (wegen der linken Seite der letzten Ungleichungskette), so dass wir noch folgende Fälle analysieren müssen:

$$x' < 0 < y' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < -x' + y'\sqrt{A}$$
$$y' < 0 < x' \quad \Rightarrow \quad x' + y'\sqrt{A} < x' - y'\sqrt{A}$$

d.h. $1 < x' + y'\sqrt{A} < \left|x' - y'\sqrt{A}\right| \quad \Rightarrow \quad 1 < \left|\left(x' + y'\sqrt{A}\right) \cdot \left(x' - y'\sqrt{A}\right)\right| = 1$

Dieser Widerspruch zeigt, dass das Paar $(x'; y')$ aus positiven ganzen Zahlen tatsächlich alle Bedingungen einer Lösung der PELLschen Gleichung erfüllt und zudem eine neue minimale Lösung wäre. Also haben wir mit dem obigen

Verfahren, ausgehend von der minimalen Lösung, alle unendlich vielen Lösungen gefunden.

Hinweis: Für jede positive Nichtquadratzahl A existieren Lösungen, und diese können mit Hilfe von Kettenbrüchen konstruktiv angeben werden.

Verallgemeinern wir die PELLsche Gleichung zu $x^2 - Ay^2 = C$ mit ganzahliger Konstanten C, so hängt die Existenz von Lösungen vom Wert C ab. Während beispielsweise $(10; 7)$ die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 2$ erfüllt, gibt es für $x^2 - 2y^2 = 3$ keine Lösungen, nachweisbar mittels der Restklassen bei Division durch 3:

- Wären nämlich x und y beide durch 3 teilbar, so ist die linke Seite – im Widerspruch zur rechten Seite – sogar durch 9 teilbar.
- Wäre nur eine Zahl x oder y durch 3 teilbar, muss auch die andere Zahl durch 3 teilbar sein.
- Sind aber beide Zahlen nicht durch 3 teilbar, so ergibt sich ein Widerspruch, weil deren Quadrate dann jeweils den Rest 1 bei Division durch 3 lassen.

Wenn es aber für eine Konstante C eine Lösung gibt, so finden wir sogar unendlich viele Lösungen, indem wir eine spezielle Lösung $(x_C; y_C)$ der Gleichung $x^2 - Ay^2 = C$ mit den allgemeinen Lösungen der PELLschen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ kombinieren:

$$\left(x_C + y_C\sqrt{A}\right) \cdot \left(x_0 + y_0\sqrt{A}\right)^n.$$

Für jede natürliche Zahl n finden wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der rationalen und irrationalen Summanden eine Lösung der verallgemeinerten PELLschen Gleichung. Mathematisch besonders interessant erscheint der Fall $C = -1$.

Thema 6 – Einbeschriebene Körper[2]

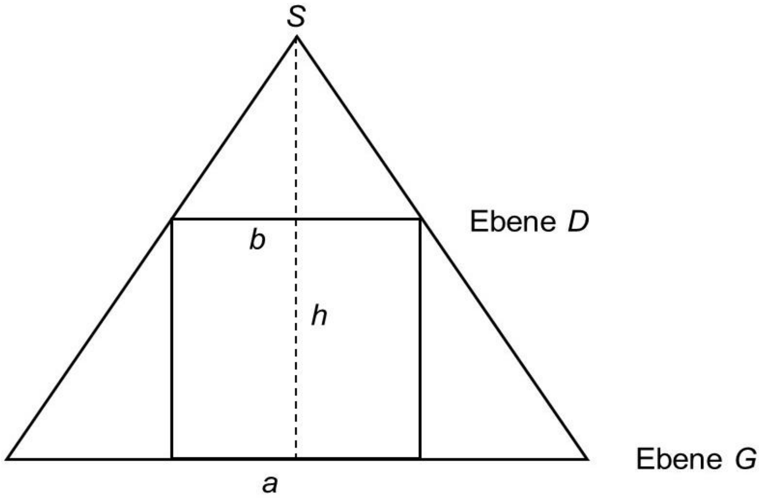
Aufgabe MO600936. Wir betrachten in dieser Aufgabe eine gerade quadratische Pyramide. Im Inneren dieser Pyramide liege ein Würfel, der mit seiner Grundfläche auf der Grundfläche der Pyramide steht. Weiterhin sollen die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Die Länge der Grundkanten der Pyramide wird im Folgenden mit a, die Länge ihrer Höhe mit h und schließlich die Länge der Würfelkanten mit b bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$ gilt.
b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem a, h und b positive ganze Zahlen sind und die Gleichung aus Teil a) gültig ist.

[2] Thema 6 der Beitragsreihe zur Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden; www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von b alle Paare (a, h) positiver ganzer Zahlen, wenn b eine Primzahl ist und die Gleichung aus Teil a) erfüllt sein soll.

Lösungshinweise: Da die Aufgabenstellung keine Abbildung zur Veranschaulichung des Sachverhaltes enthält, skizzieren wir die gegebene Situation. Häufig lassen sich räumliche Fragestellungen auf ein ebenes Problem zurückführen, wenn wir eine geeignete Schnittebene finden. Hier eignet sich die senkrechte Parallelprojektion auf senkrecht stehende Würfelebene.



Teil a) Die Ebene, in welcher die Deckfläche des Würfels liegt, schneidet die Pyramide in einem Quadrat, dessen Ecken auf den Seitenkanten der Pyramide liegen. Da auch die Eckpunkte der Deckfläche des Würfels auf den Seitenkanten der Pyramide liegen, handelt es sich bei dem genannten Quadrat genau um die Deckfläche des Würfels. Die Ebene schneidet von der großen also eine kleine Pyramide ab.

Die kleine Pyramide geht durch eine zentrische Streckung an der Spitze S in die große Pyramide über, welche die Ebene D der Deckfläche des Würfels in die Ebene G der Grundfläche der großen Pyramide überführt. Bei dieser Streckung geht jede Ecke der quadratischen Deckfläche des Würfels in die entsprechende Ecke der Grundfläche der großen Pyramide über. Da die Deckfläche des Würfels die Seitenlänge b und die Grundfläche der großen Pyramide die Seitenlänge a haben, muss der Streckfaktor der genannten Abbildung gleich $\frac{a}{b}$ sein.

Andererseits hat S von D den Abstand $h - b$ und von G den Abstand h, also ist der Streckfaktor gleich $\frac{h}{h-b}$. Durch Gleichsetzen erhalten wir die Beziehung

$$\frac{h}{h-b} = \frac{a}{b}$$

die nach Multiplikation mit $(h - b) \cdot b$ zu $h \cdot b = a \cdot (h - b) = a \cdot h - a \cdot b$ und weiter nach Addition von $a \cdot b$ zu $a \cdot b + h \cdot b = a \cdot h$ führt. Nach Division durch $a + h$ finden wir hieraus Die Behauptung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$.

Teil b) Ein Beispiel ist $a = 2$, $h = 2$ und $b = 1$, denn es gilt $1 = \frac{2 \cdot 2}{2+2}$. Es ist die Probe, aber keine Herleitung erforderlich!

Teil c) Die Gleichung $b = \frac{a \cdot h}{a+h}$ ist gleichbedeutend mit $(a-b) \cdot (h-b) = b^2$. Daher müssen $a-b$ und $h-b$ Komplementärteiler von b^2 sein. Wäre dabei einer von ihnen negativ, so wären beide negativ und der kleinere läge zwischen $-b^2$ und $-b$. Das kann aber nicht sein, weil *a* und *h* positiv sind. Folglich müssen $a-b$ und $h-b$ beide positiv sein. Weil *b* eine Primzahl ist, gibt es drei Fälle:

$a-b = 1$ und $h-b = b^2$,
$a-b = b$ und $h-b = b$,
$a-b = b^2$ und $h-b = 1$.

Diese Fälle führen auf die folgenden Lösungen (unter Beachtung der möglichen Vertauschung von *a* und *h*):

$$(a,h) = ((b+1) \cdot b, b+1), (a,h) = (b+1, (b+1) \cdot b), (a,h) = (2b, 2b).$$

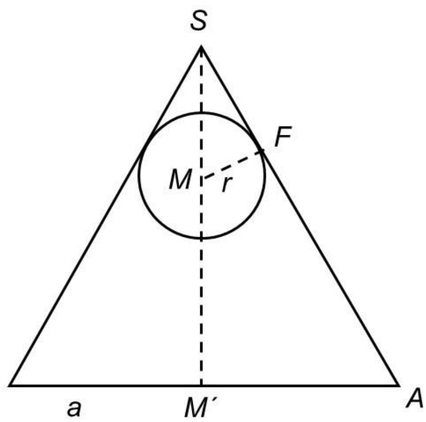
In einer Probe müssen wir noch zeigen, dass es sich hierbei auch tatsächlich um Lösungen der Gleichung aus Teil a) handelt. ❑

Derartige Aufgabenstellungen finden wir schon in den Anfängen der Mathematik-Olympiaden, beispielsweise in

Aufgabe MO031024. In einem Kreiskegelkörper mit der Spitze *S*, dessen Achsenschnitt die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt *M* die Höhe $\overline{SM'}$ des Kegels im Verhältnis $|SM| : |MM'| = 1:2$ teilt. Die Länge eines Durchmessers der Grundfläche des Kegels sei *a*.

Wie groß ist der Radius *r* der Kugel?

Lösungshinweise: Im Aufgabentext wird bereits auf den geeigneten Achsenschnitt hingewiesen. Das räumliche Problem können wir also in die Ebene projizieren: Wir zeichnen die Schnittfläche durch *S* und *M´*, in der die Mantellinie *SA* des Kreiskegelkörpers zu sehen ist. Da die Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, hat auch die Mantellinie die Länge *a*. Wir suchen den Radius *r*, der in der Zeichnung die Länge des Lotes vom Mittelpunkt *M* der Kugel auf die Mantellinie mit Fußpunkt *F* darstellt. Wir erkennen, dass die Dreiecke *MFS* und *AM´S* ähnlich sind.



Somit finden wir

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a, \qquad \text{also} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Für die Höhe h des Schnittdreiecks wissen wir: $h = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3}$. Nach Voraussetzung ist $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ unmittelbar $|SM| = \frac{h}{3}$ folgt. Daraus erhalten für den gesuchten Radius $r = \frac{a}{12} \cdot \sqrt{3}$. ❑

In der Diskussion mit Kugeln oder Kreisen darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier sich berührender Kugeln oder Kreise durch den gemeinsamen Berührungspunkt geht.

Aufgabe MO510945. Auf einer waagerechten Ebene E liegen drei gleich große Kugeln K_1, K_2 und K_3, die sich paarweise berühren. Die Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 dieser Kugeln bilden also ein gleichseitiges Dreieck. Eine vierte Kugel K_4 berührt die Kugeln K_1, K_2, K_3 und die Ebene E. Eine weitere Kugel K_5 wird von jeder dieser vier Kugeln K_1, K_2, K_3 und K_4 von außen berührt.

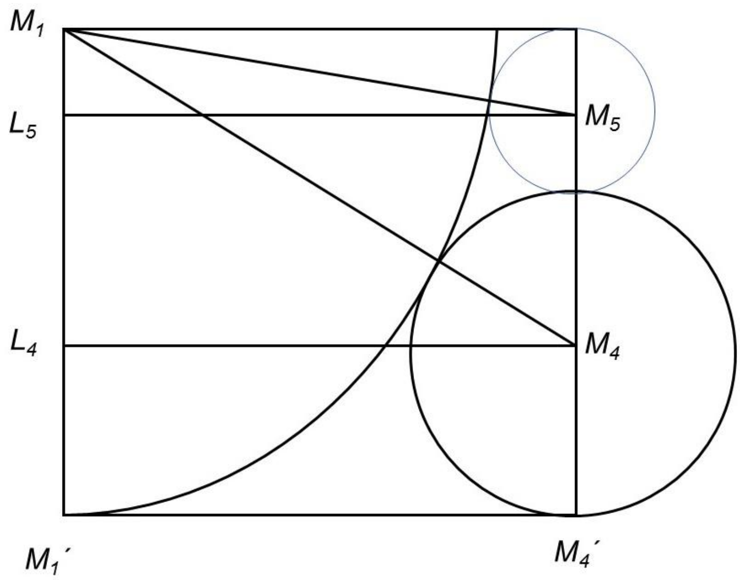
In welcher Lagebeziehung steht K_5 zur Ebene E' durch M_1, M_2 und M_3?

Lösungshinweise: Für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bezeichnen wir mit M_i der Mittelpunkt der Kugel K_i, mit r_i der Radius der Kugel K_i und mit M'_i das Bild von M_i unter der senkrechten Parallelprojektion auf E. Für die Radien $r_1 = r_2 = r_3$ setzten wir R.

Schritt 1: Lagebestimmung der M'_i in E. Da für $i \neq 5$ der Berührungsradius von K_i mit E senkrecht auf E steht, ist für $i \neq 5$ der Punkt M'_i auch der Berührpunkt von K_i mit E. Da sich die gleich großen Kugeln K_1, K_2, K_3 von außen berühren, bilden ihre Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E', und es gilt $E' \parallel E$. Somit bilden M'_1, M'_2 und M'_3 ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $2R$ in der Ebene E. Da die Abstände von M_4 zu M_i für $i \in \{1, 2, 3\}$ alle gleich sind, liegt M_4 in den mittelsenkrechten Ebenen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3. Da diese Ebenen senkrecht zu E' und damit auch senkrecht zu E stehen, werden sie in der senkrechten Parallelprojektion auf E als Mittelsenkrechte von $M'_1M'_2$, $M'_1M'_3$ und $M'_2M'_3$ abgebildet. Der Punkt M'_4, das Bild von M_4 unter dieser Projektion, ist also der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $M'_1M'_2M'_3$.

Analog ergibt sich, dass auch M_5 auf M'_4 abgebildet wird. Die Kugeln K_4 und K_5 liegen also senkrecht übereinander und es ist $M'_4 = M'_5$. Weiter gilt

$$|M'_1 M'_4| = \frac{2}{3} R \cdot \sqrt{3}$$



als Umkreisradius im gleichseitigen Dreieck $M'_1M'_2M'_3$ mit der Kantenlänge $2R$.

Schritt 2: Bestimmung von r_4 und r_5. Dafür zeichnen wir einen ebenen Schnitt E´´ durch die Mittelpunkte M_1, M_4 und M_5, der senkrecht auf der Ebene E steht. Dann finden wir

$$|M_5 M'_4| = r_5 + 2 \cdot r_4, |M_1 M_4| = R + r_4, |M_1 M_5| = R + r_5.$$

Seien L_4 und L_5 die Fußpunkte der Lote von M_4 bzw. M_5 auf $M_1M'_1$. Die Vierecke $M'_1M'_4M_4L_4$ und $L_4M_4M_5L_5$ sind dann Rechtecke. Im rechtwinkligen Dreieck $L_4M_4M_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$(R - r_4)^2 + \left(\frac{2}{3} R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_4)^2$$

Umstellen nach r_4 unter Beachtung von $R \neq 0$ liefert $r_4 = \frac{1}{3} R$. Im rechtwinkligen Dreieck $L_5M_5M_1$ folgt ähnlich

$$(R - 2 \cdot r_4 - r_5)^2 + \left(\frac{2}{3} R \cdot \sqrt{3}\right)^2 = (R + r_5)^2$$

Umstellen nach r_5 liefert $r_5 = \frac{1}{6} R$. Damit folgt $2 \cdot r_4 + 2 \cdot r_5 = R$.

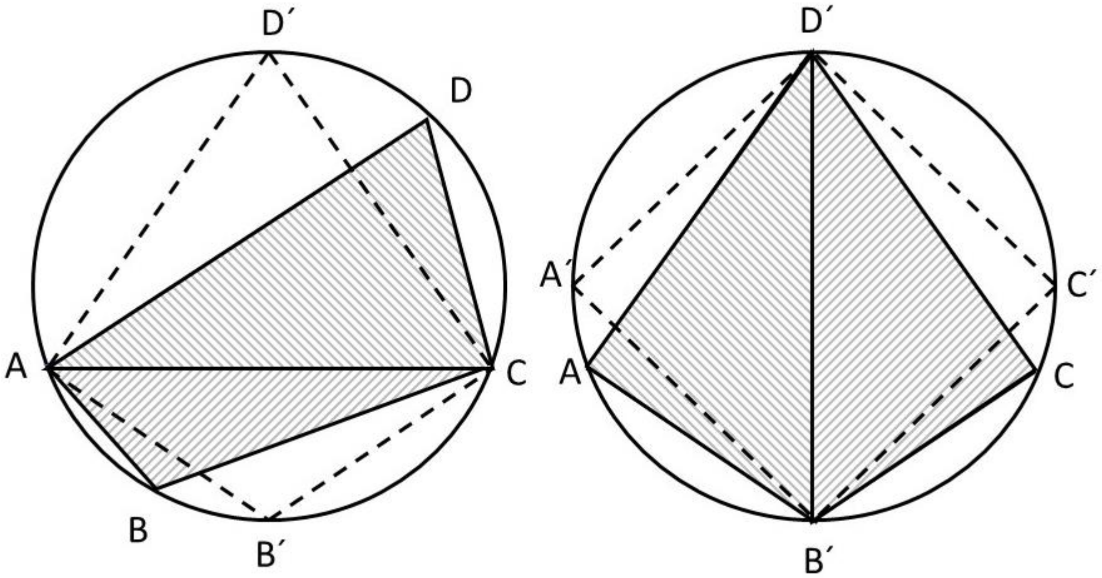
Antwort: E′ tangiert also die Kugel K_5 (im Umkreismittelpunkt von Dreieck $M_1M_2M_3$). ❑

Thema 6 – Einbeschriebene Figuren

Aufgabe 1 – MO380941. Gegeben ist ein Kreis k. Man beweise, dass von allen diesem Kreis einbeschriebenen Vierecken (Sehnenvierecken) die Quadrate den größten Flächeninhalt haben.

Lösungshinweise: Wir betrachten ein Sehnenviereck $ABCD$ des Kreises k. Die Mittelsenkrechte von AC schneide k in $B´$ und $D´$ so, dass auch $AB´CD´$ ein Sehnenviereck von k ist. Dann ist $B´D´$ ein Durchmesser von k. Daher ist in den Dreiecken $AB´C$ und $ACD´$ die Summe der auf AC senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken ABC und ACD. (Diese

Summen sind genau dann gleich, wenn *B* und *D* selbst auf der Mittelsenkrechten von *AC* liegen, also mit *B´* und *D´* zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks *AB´CD´* ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen Sehnenvierecks *ABCD*.



Nun gehen wir von dem Sehnenviereck *AB´CD´* aus und betrachten die Mittelsenkrechte von *B´D´*, die *k* in *A´* und *C´* so schneidet, dass auch *A´B´C´D´* ein Sehnenviereck von *k* ist. Dann ist *A´C´* ein Durchmesser von *k*. Daher ist in den Dreiecken A´B´D´ und C´B´D´ die Summe der auf A´C´ senkrechten Höhen größer oder gleich der entsprechenden Summe in den Dreiecken *AB´D´* und *CB´D´*. (Diese Summen sind genau dann gleich, wenn *A* und *C* mit *A´* und *C´* zusammenfallen.) Wir erkennen: Der Flächeninhalt des Sehnenvierecks *A´B´C´D´* ist größer oder gleich dem Flächeninhalt des Sehnenvierecks *AB´CD´* und deshalb auch größer oder gleich des ursprünglichen Sehnenvierecks *ABCD*.

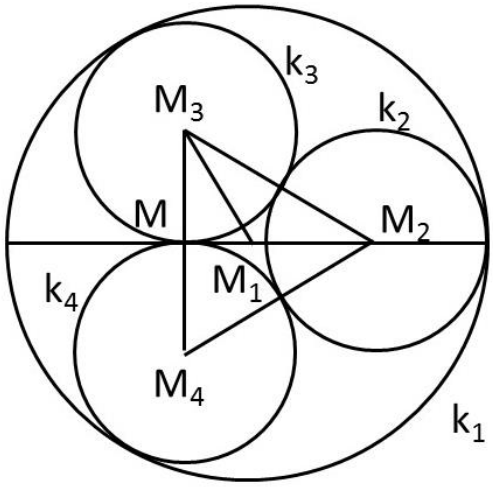
Das Sehnenvierecks *A´B´C´D´* ist aber aufgrund der Umkehrung des Satzes von THALES ein Quadrat. Eine Vergrößerung dessen Flächeninhaltes ist nicht mehr möglich, womit wir die Behauptung bewiesen haben. ❑

Aufgabe MO480944/481044. Es sei *C* ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Über $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ seien die Halbkreise h_1 bzw. h_2 zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis k_3 berühre h_1 von innen, h_2 von außen und weiterhin die Strecke $\overline{AB}$.

Wenn die Radien von h_2 und k_3 beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von h_1?

Vorbemerkung: Bei Aufgaben mit konkreten Maßangaben ist es üblich, zu Beginn darauf zu verweisen, dass die Maßeinheiten im Folgenden weggelassen werden, wenn dadurch keine Missverständnisse möglich sind. Zudem dürfen wir ohne Beweis verwenden: Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt auf der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte.

Lösungshinweise: Zum Aufgabentext wurde eine Skizze gezeigt. Wir ergänzen die Skizze, indem wir an der Strecke $\overline{AB}$ spiegeln. Dadurch wird h_1 zu einem Kreis k_1, h_2 zu einem Kreis k_2 und es kommt ein Kreis k_4 hinzu.



Die Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen Sie haben alle den Radius $r = 3$ und berühren jeweils k_1 von innen. Somit erkennen wir, dass die Mittelpunkte der Kreise k_2, k_3 und k_4 ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2 \cdot r = 6$ bilden. In diesem Dreieck beträgt der Radius seines Umkreises (also der Abstand des Mittelpunktes eines inneren Kreises zum Mittelpunkt M_1 des Kreises k_1) $\frac{2}{3} r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Damit finden wir den Zusammenhang: $r_1 - r_2 = 2r \cdot \sqrt{3}$.

Der Radius des Halbkreises h_1 beträgt also $(3 + 2\sqrt{3})$ cm ≈ 6,46 cm. ❑

Hinweis: Wenn die Ausgangsmaße konkret mit einer Maßzahl und einer Maßeinheit angegeben werden, wird erwartet, dass auch das Ergebnis in Maßzahlen dieser Maßeinheit angegeben wird (also z.B. keine Wurzelausdrücke im Ergebnis stehen). Wir können die Rechnung ohne Taschenrechner wie folgt abschätzen:

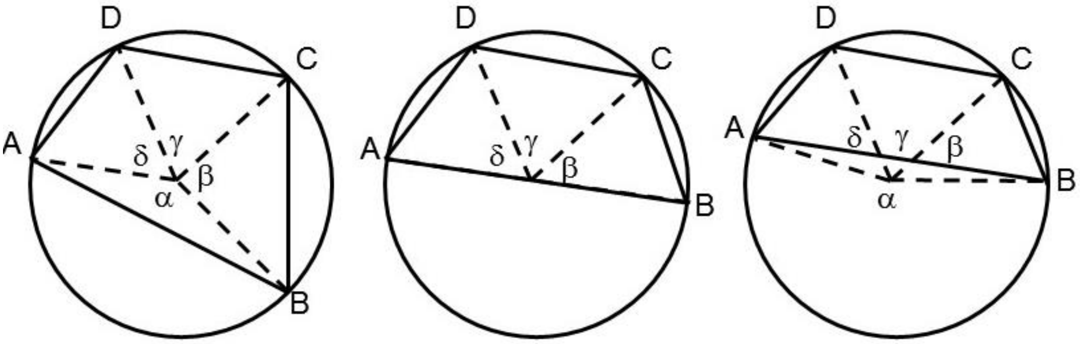
Wegen $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 3{,}24 = 1{,}8^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,75 abschätzen, oder wegen $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 < 3{,}0276 = 1{,}74^2$ können wir $\sqrt{3}$ mit 1,73 abschätzen. Die Berechnung der Quadrate ist dabei ohne Taschenrechner möglich.

Aufgabe MO400943. Einem Kreis k sei ein Viereck $ABCD$ einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit a, b, c, d bezeichnet. Ein zweites dem Kreis k einbeschriebenes Viereck $A'B'C'D'$ habe ebenfalls a, b, c, d als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'A'}$ unterscheiden kann).

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind!
b) Beweisen Sie, dass je zwei Vierecke, die die in a) genannten Voraussetzungen erfüllen, zueinander flächengleich sind!

Lösungshinweise: Teil a) wird als Aufgabe 06-7a (Thema_06_Aufgaben.pdf) gestellt.

Teil b) Mit α, β, γ, δ bezeichnen wir die Zentriwinkelgrößen, die im Kreis k zu den Sehnenlängen gehören. Mit F_a, F_b, F_c und F_d bezeichnen wir die Flächeninhalte der jeweils in *k* von einer Sehne der Länge *a, b, c* und *d* und zwei Radien begrenzten Dreiecke. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:



(I) Alle vier Winkel sind kleiner als 180° und es gilt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_a + F_b + F_c + F_d$.

(II) Es sei $\alpha = 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta = 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d$.

(III) Es sei $\alpha > 180°$. Dann gilt $\beta + \gamma + \delta < 180°$. Dann haben die Vierecke jeweils den Flächeninhalt $F_b + F_c + F_d - F_a$.

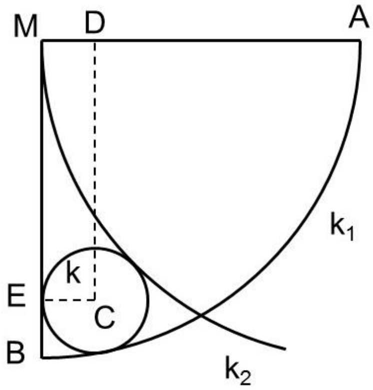
Nach Voraussetzung treten im Viereck *A´B´C´D´* dieselben Zentriwinkelgrößen auf wie in *ABCD,* nur möglicherweise in anderer Reihenfolge. Da aber die betrachteten drei Fälle nicht von der Reihenfolge der Winkel α, β, γ, δ abhängen, trifft für das Viereck *A´B´C´D´* derselbe Fall wie für das Viereck *ABCD* zu.

Somit haben die beiden Vierecke jeweils den gleichen Flächeninhalt und wir haben die Behauptung bewiesen. ❑

Aufgabe MO411032. Es sei *AB* ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit gegebenem Radius *r* und Mittelpunkt *M*. Ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt *A* und dem Radius *r* teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis *k* einbeschrieben werden, d.h. er soll die Strecke $\overline{MB}$ berühren und den Kreis k_1 von innen sowie den Kreis k_2 von außen berühren.

a) Wie groß ist der Radius des Kreises *k*?
b) Konstruieren Sie den Kreis *k* nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise Teil a): Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei *C,* sein Radius *x*. Die Fußpunkte der Lote von *C* auf $\overline{MA}$ und $\overline{MB}$ nennen wir *D* bzw. *E*. Dann ist *MDCE* ein Rechteck. *E* ist der Berührungspunkt von *k* mit $\overline{MB}$. Es gilt $|CE| = |DM| = x$, also $|AD| = r - x$.

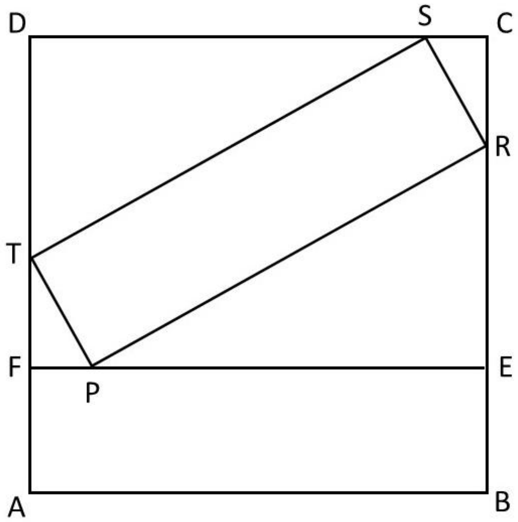


Nun finden wir aufgrund der Verbindungslinien zwischen den Kreismittelpunkten $|AC| = r + x$ und $|MC| = r - x$.

Setzen wir für die Länge $|DC|$ zur Abkürzung der Schreibweise *y*, so folgt nach dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck *ADC* mit rechtem Winkel am Punkt *D* bzw. im rechtwinkligen Dreieck *MCD* mit rechtem Winkel am Punkt *D*: $(r - x)^2 = x^2 + y^2$ und $(r + x)^2 = (r - x)^2 + y^2$. Nach dem wir y^2 eliminieren und die dabei entstehende Gleichung umstellen, erhalten wir $r^2 = 6 \cdot rx$, d.h. wegen r ≠ 0 finden wir $x = \frac{r}{6}$. ❑

Hinweis zu Teil b): Bei der Konstruktionsbeschreibung darf das Ergebnis aus Teil a) verwendet weren, d.h. es darf (mit geometrischen Mitteln, z.B. mittels Anwendung des Strahlensatzes) der sechste Teil des Radius konstruiert werden.

Aufgabe. Gegeben ist ein Quadrat, welches in zwei unterschiedliche Rechtecke geteilt ist, das kleinere Rechteck kann dabei dem größeren so einbeschrieben werden, dass auf jeder Seite des größeren Rechtecks genau ein Eckpunkt des kleineren liegt. In welchem Verhältnis wurde das Quadrat geteilt?



Lösungshinweise: Wir nehmen o.B.d.A.[3] an, dass die Kantenlänge des Quadrates 1 sei. Das kleinere Rechteck habe die Kantenlängen

$|AF| = |TP| = x$ und $|AB| = |PR| = 1$.

Bezeichnen wir die Längen $|FT| = y$, $|FP| = z$, $|PE| = a$ und $|ER| = |DT| = b$, so gelten aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke *FPT* und *PER* die Verhältnisse

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{1} \text{ bzw. } \frac{z}{x} = \frac{b}{1}.$$

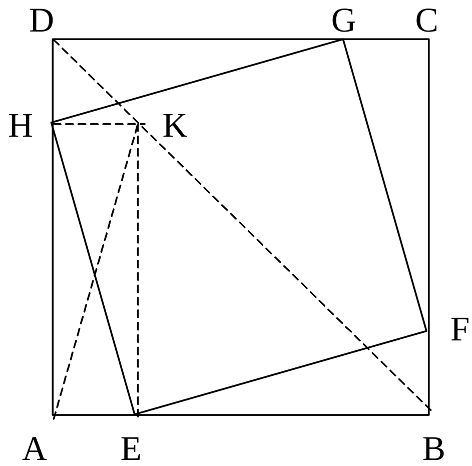
Damit das kleine Rechteck *PRST* wie gefordert in das Rechteck *ECDF* passt, muss gelten: $z + a = 1$ und $y + b = 1 - x$. Dies können wir zusammenfassen zu

$$b \cdot (y + c) - a \cdot (c + a) = b \cdot (1 - x) - a$$

Aus dem $b^2 - a^2 = b - 1$ folgt. Mit $a^2 + b^2 = 1$ erhalten wir daraus $b = -\frac{1}{2}$ und schließlich $x = 2 - \sqrt{3}$.

[3] o.B.d.A. – ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Eine solche Anmerkung ist ohne weitere Hinweise zulässig, wenn offensichtlich die vorgenommene Auswahl keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

Das gesuchte Verhältnis beträgt somit $\frac{1-x}{x} = 1 + \sqrt{3}$. ❑



Aufgabe. Einem Quadrat soll ein Quadrat mit minimalem Umfang einbeschrieben werden.

Lösungshinweise (geometrisch):
Ein einbeschriebenes Quadrat entsteht, wenn die Punkte *E, F, G* und *H* die Quadratseiten im gleichen Verhältnis teilen. Setzen wir $a = \left|\overline{AB}\right|$ und $x = \left|\overline{AE}\right|$, dann wird der Umfang *u* minimal, wenn $\left|\overline{HE}\right|$ minimal wird.

Ergänzen wir die Punkte *A, E* und *H* zum Rechteck *AEKH*, dann liegt *K* immer auf der Diagonalen *BD*, da das Dreieck *KHD* gleichschenklig rechtwinklig ist. Weiterhin gilt $\left|\overline{AK}\right| = \left|\overline{HE}\right|$. Also wird der Umfang minimal, wenn *AK* das Lot auf *BD* ist, und damit gilt $\left|\overline{AH}\right| = \left|\overline{HE}\right| = \frac{a}{2}$.

(analytisch) Wir finden mit dem Satz von PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck *AEH* die Gleichung $\left|\overline{HE}\right|^2 = x^2 + (a-x)^2$. Aus der Umformung

$$x^2 + (a-x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2 \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$$

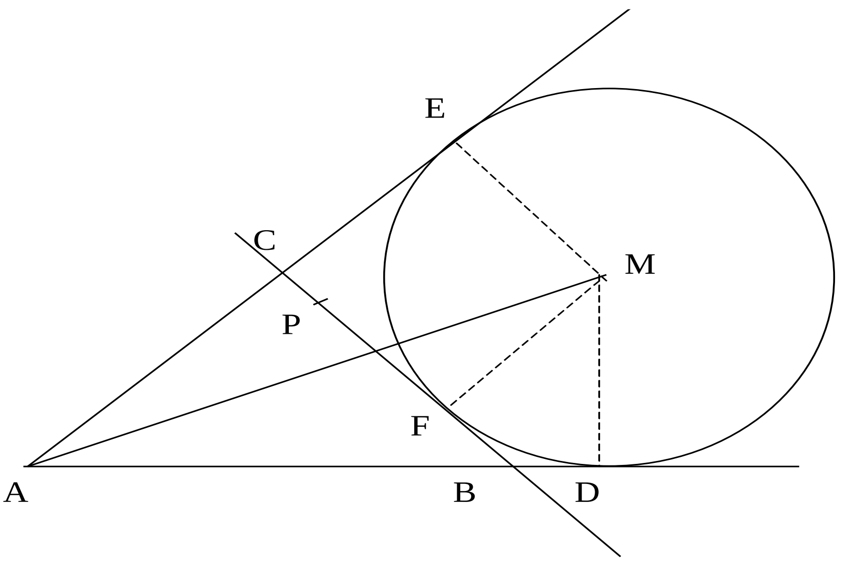
folgt, dass $\left|\overline{HE}\right|$ minimal wird, wenn $x = \frac{a}{2}$ gilt. ❑

Hinweis: Ersetzen wir in der Aufgabestellung für die einzubeschreibende Figur „Quadrat“ durch „Rechteck“, entartet das einbeschriebene Rechteck zur Diagonalen.

Aufgabe. Gegeben ist ein Winkel α mit dem Scheitel *A* und ein Punkt *P* im Winkelfeld von α. Eine Gerade g durch den Punkt *P* schneidet die Schenkel des Winkels α in den Punkten *B* und *C*. Wie muss man die Gerade *g* wählen, damit das Dreieck *ABC* minimalen Umfang besitzt?
Lösungshinweise:
Wir zeichnen durch den Punkt *P* eine beliebige Gerade und den Ankreis des Dreiecks *ABC* zur Seite *BC*. Der Ankreis berührt die Seiten (oder deren Verlängerungen) in den Punkten *D, E* und *F*. Für den Umfang *u* des Dreiecks *ABC* gilt dann

$$u = \left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{AE}\right|.$$

Der Umfang wird folglich minimal, wenn der Radius des Ankreises möglichst klein wird. Dies ist der Fall, wenn *PM* Radius des Umkreises ist. Für die vollständige Lösung ist noch die folgende Konstruktionsaufgabe zu lösen.

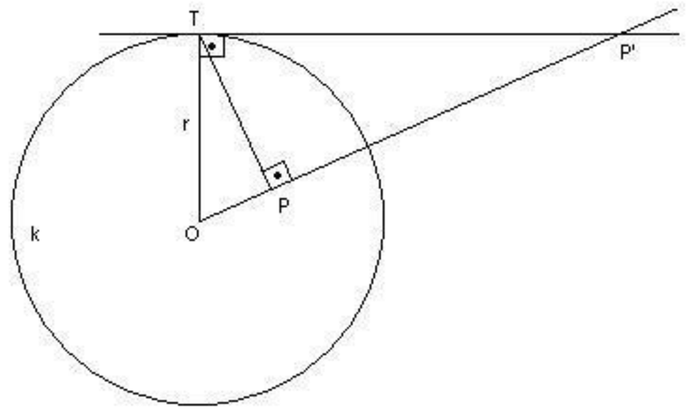


Aufgabe. Konstruieren Sie zu einem gegebenen Winkel α in *A* und einem im Winkelfeld gegebenen Punkt *P* das Dreieck *ABC* mit minimalen Umfang, wobei *B* und *C* auf den Winkelschenkeln und *P* auf der Seite *BC* liegen.

Inversion am Kreis

Definition: Die Inversion an einem Kreis *k* mit Mittelpunkt *O* und Radius *r* ist die Abbildung, die jeden Punkt *P* der Ebene außer *O* auf den Punkt *P*' mit $P' \in \overline{OP}$ abbildet und $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$.

Dem Punkt *O* wird ein „unendlich ferner Punkt" zugeordnet.



Konstruktion: Es sei *P* ein von *O* verschiedener Punkt im Innern des Kreises *k*.

- Wir zeichnen die Gerade durch *O* und *P*.
- Die Senkrechte *s* in *P* zu *OP* schneidet *k* in *T*.
- Die Tangente an *k* in *T* schneidet *OP* in *P*'.

Existenz und Eindeutigkeit (!) sind leicht gezeigt; ebenso, dass *P*' tatsächlich der gesuchte Punkt ist. Wie verändert sich die Konstruktion von *P*' für einen Punkt *P* außerhalb von *k*?

Eigenschaften: (die sich leicht beweisen lassen)

- Die Inversion ist umkehrbar eineindeutig (bijektiv), d.h. aus dem Bild einer Inversion erhält man durch erneute Inversion wieder das Ausgangsbild.
- Geraden durch *O* sind Fixgeraden, sie werden also auf sich selbst abgebildet. Auch der Kreis *k* wird auf sich (sogar punktweise) abgebildet.

– Kreise senkrecht zu *k* sind Fixkreise, Kreise, die *O* nicht enthalten, werden wieder zu Kreisen, die *O* nicht enthalten und Kreise, die *O* enthalten, werden zu Geraden, die *O* nicht enthalten.

– Die Inversion am Kreis ist winkeltreu, das heißt die Größen von Winkeln bleiben bei Inversion an einem Kreis erhalten.

Eine interessante **Anwendungsaufgabe.** Gegeben seien ein Punkt A, zu A nicht kollineare Punkte M und N sowie Radien r_M und r_N .

Konstruieren Sie denjenigen Kreis durch A, der die Kreise $k_M(M,\ r_M)$ und $k_N(N,\ r_N)$ jeweils senkrecht schneidet.

Lösungsidee: Wir spiegeln A an k_M sowie an k_N und erhalten A_M bzw. A_N. Der gesuchte Kreis ist der Umkreis des Dreiecks AA_NA_M.

Thema 05 – Quadratische Funktionen

Aufgabe 1 – MO600934. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$f_a(x) = x^2 - 2ax + 5a^2 - 12a$$

gegebene Funktionenschar mit reellem Parameter a.

a) Bestimmen Sie alle diejenigen Werte für a, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat.
b) Bestimmen Sie unter allen Werten für a, für welche die Funktion $f_a(x)$ genau zwei verschiedene Nullstellen hat, diejenigen, für welche der Abstand dieser Nullstellen maximal ist.

Lösungshinweise: Da die Nullstellen zu untersuchen sind, wenden wir in naheliegender Weise die Lösungsformel für quadratische Gleichungen an und finden:

$$x_{1/2} = a \pm \sqrt{a^2 - 5a^2 + 12a} = a \pm 2 \cdot \sqrt{3a - a^2}$$

Es existieren genau dann zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn die Diskriminante $D = a \cdot (3 - a)$ positiv ist. Dies ist für alle a mit $0 < a < 3$ der Fall. Für die Differenz beider Nullstellen gilt zudem $|x_1 - x_2| = 4 \cdot \sqrt{3a - a^2}$, wobei a aus dem Intervall $(0; 3)$ gewählt werden kann. Wegen

$$3a - a^2 = -\left(a - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4}$$

ist die Diskriminante nicht größer als $\frac{9}{4}$ und das Maximum wird für $a = \frac{3}{2}$ angenommen. Somit betragen die gesuchten Nullstellen

$$x_1 = \frac{3}{2} + 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\,;\; x_2 = \frac{3}{2} - 2 \cdot \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = -\frac{3}{2}$$

Der Abstand beider Nullstellen ist $x_1 - x_2 = \frac{9}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 6$. ❑

Auch bei der folgenden Aufgabe führt die Diskussion der Diskriminante zur Lösung.

Aufgabe 2 – MO431023. Sei *b* eine ungerade ganze Zahl. Finden Sie alle ganzzahligen Werte von *c* in Abhängigkeit von *b*, für welche die Gleichung $x^2 + b \cdot x + c = 0$ zwei verschiedene ganzzahlige Lösungen hat.

Lösungshinweise: Wir bestimmen die Diskriminante aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen in Normalform: $D = \frac{1}{4} \cdot (b^2 - 4 \cdot c)$. Wir erhalten genau dann zwei verschiedene ganzzahlige Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{D}$, wenn $b^2 - 4 \cdot c$ das Quadrat einer ungeraden Zahl ist. Setzen wir für eine ganze Zahl *z*

$$b^2 - 4 \cdot c = (2 \cdot z - 1)^2$$

so können wir diese Gleichung nach *c* auflösen:

$$c = -z^2 + z + \frac{b^2 - 1}{4}$$

Für eine ungerade Zahl *b* ist der Ausdruck $b^2 - 1 = (b - 1) \cdot (b + 1)$ stets durch 4 teilbar (weil der Vorgänger und der Nachfolger von *b* jeweils gerade Zahlen sind). Somit ist *c* für jede ganze Zahl *z* selbst eine ganze Zahl. Damit sind alle Lösungen der Aufgabe gefunden. ❑

Anstatt die Lösungen mit Hilfe der Lösungsformel zu analysieren, eignet sich auch die Anwendung des Wurzelsatzes von VIETA[4], der für quadratische Gleichungen in Normalform wie folgt lautet:

Sind x_1 und x_2 die reellen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 + a \cdot x + b$, so gilt

$$x_1 + x_2 = -a\,;\; x_1 \cdot x_2 = b$$

Lösungsvariante: Mittels Wurzelsatz von VIETA finden wir für die Nullstelen x_1 und x_2 dieser Funktion die Zusammenhänge

$$x_1 + x_2 = -b\,;\; x_1 \cdot x_2 = c$$

also nach c umgeformt:

$$c = x_1 \cdot (-b - x_1) = -x_1^2 - b \cdot x_1$$

[4] vergleiche Thema 03 – Gleichungssysteme (II)

Wir erkennen: Ist die Nullstelle x_1 eine beliebige ganze Zahl n und ermitteln wir c über die Gleichung $c = -n^2 - b \cdot n$, so lauten die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^2 + bx + n^2 - bn = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + n^2 - nb} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - n\right)^2}$$

Ist b eine ungerade Zahl, so ist die Diskriminante größer als 0 und es gibt zwei verschiedene Nullstellen, die ganzzahlig sind. ❑

Aufgabe 3 – MO590944. Bestimmen Sie alle reellen Zahlenpaare $(a; b)$, für welche die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

zwei verschiedene reelle Nullstellen x_1 und x_2 besitzt und die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Bildungsvorschrift

$$g(x) = x^2 + (2a + 1) \cdot x + (2b + 1)$$

die Nullstellen $\frac{1}{x_1}$ und $\frac{1}{x_2}$ besitzt.

Lösungshinweise: Nach dem Wurzelsatz von VIETA sind für die genannten Nullstellen folgende Gleichungen erfüllt:

$$x_1 + x_2 = -a\,;\; x_1 \cdot x_2 = b$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2a - 1\,;\; \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = 2b + 1$$

Multiplizieren wir die beiden rechtsstehenden Gleichungen miteinander, so erhalten wir $1 = b(2b + 1)$, gleichbedeutend zu $2 \cdot b^2 + b - 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung ermitteln wir mit der bekannten Lösungsformel: $b_1 = -1$ und $b_2 = \frac{1}{2}$. Wenn es also Lösungen für a und b gibt, muss b einen dieser beiden Werte annehmen.

Außerdem erhalten wir aus den Gleichungen zu den Nullstellen:

$$-(2a + 1) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-a}{b}$$

Es sei nun $b = \frac{1}{2}$, dann folgt daraus $-(2a + 1) = -2a$, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Es sei deshalb $b = -1$, also $-(2a + 1) = a$. Diese Gleichung ist nur für $a = -\frac{1}{3}$ erfüllt.

Nun müssen wir mit diesen Parametern für die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Nullstellen ermitteln und prüfen, dass diese zueinander wie in der behaupteten Beziehung stehen:

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{37}}{6}$$
$$g(x) = x^2 + \tfrac{1}{3} \cdot x - 1 \;\longrightarrow\; x_{3,4} = -\tfrac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Wir überzeugen uns noch, dass x_3 der reziproke Wert von x_1 ist:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{37}}{6}} = \frac{6 \cdot \left(1+\sqrt{37}\right)}{\left(1-\sqrt{37}\right) \cdot \left(1+\sqrt{37}\right)} = \frac{6 \cdot \left(1+\sqrt{37}\right)}{-36} = -\frac{1+\sqrt{37}}{6} = x_3$$

In gleicher Weise können wir zeigen, dass auch x_4 der reziproke Wert von x_2 ist.

❑

Aufgabe 4 – MO551014.

a) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$. Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1), p(2), p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

Die Teilaufgabe (a) lädt dazu ein, sich mit der gegebenen quadratischen Funktion auseinanderzusetzen und erfolgreich erste Bewertungspunkte zu erhalten. Auch wenn die Aufgabe insgesamt schwierig erscheinen sollte – diesen einführenden Teil sollte man immer bearbeiten!

Lösungshinweise zu Teil a) Mit $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ gilt

$$p(x) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + (2{,}5 + 0{,}5) = 2{,}5 \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot x + 3.$$

Damit ergeben sich durch Einsetzen der geforderten Argumente jeweils die ganzzahligen Werte: $p(1) = 6$, $p(2) = 14$, $p(3) = 27$ und $p(11) = 311$.

Teil b) Aus den beiden Bedingungen ergibt sich (indem wir die Argumente 0 bzw. –1 einsetzen), dass sowohl $a + b = p(0)$ als auch $2 \cdot a = p(-1)$ ganze Zahlen sind.

Ist a selbst eine ganze Zahl, so ist wegen der ersten Bedingung auch b eine ganze Zahl und die Behauptung folgt unmittelbar.

Ist a keine ganze Zahl, so können wir eine ganze Zahl a' mit $a = a' + \frac{1}{2}$ wählen. Werten wir noch einmal die erste Bedingung aus, so gibt es auch eine ganze Zahl b' mit $b = b' - \frac{1}{2}$. In diesem Fall gilt

$$p(x) = a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b') + \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x).$$

Für eine ganze Zahl x ist aber $a' \cdot x^2 + b' \cdot x + (a' + b')$ eine ganze Zahl. Zudem ist $x^2 - x = x \cdot (x - 1)$ eine gerade ganze Zahl, also ist auch der letzte Summand von $p(x)$ eine ganze Zahl und die Behauptung folgt auch hier unmittelbar. ❑

Aufgabe 5. Man bestimme alle quadratischen Funktionen $f(x) = x^2 - px + q$ mit Primzahlen p und q, die eine Primzahl als Nullstelle haben.

Lösungshinweise: Sind x_1 und x_2 die Nullstellen von $f(x)$, so gilt nach dem Wurzelsatz von VIETA $x_1 \cdot x_2 = q$. Somit erhalten wir unmittelbar $x_1 = q$ und $x_2 = 1$. Also finden wir wegen $x_1 + x_2 = p$ die Gleichung $q + 1 = p$. Diese ist aber nur für $q = 2$ und $p = 3$ erfüllbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabenstellung lässt sich auf Polynome $P(x) = x^n - px + q$ mit natürlichen Zahlen $n > 0$ verallgemeinern.

Vollkommene, befreundete und gesellige Zahlen [5]

Eine natürliche Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. So finden wir, dass 6 eine vollkommene Zahl ist, denn die Summe ihrer Teiler 1, 2 und 3 ergibt gerade 6. Die nächste vollkommene Zahl ist 28, weil für die Summe ihrer Teiler 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 gilt.

Auf der Suche nach vollkommenen Zahlen können wir zunächst einige Spezialfälle analysieren. Offensichtlich ist keine Primzahl p vollkommen, da sie nur den echten Teiler $1 < p$ besitzt. Wir betrachten deshalb nun eine Zahl n als das Produkt zweier verschiedener Primzahlen a und b, also $n = a \cdot b$. Wäre n vollkommen, so müsste gelten $1 + a + b = a \cdot b$. Daraus folgt

$$2 = a \cdot b - a - b + 1 = (a - 1) \cdot (b - 1).$$

Diese Gleichung kann aber nur erfüllt werden, wenn $a = 2$ und $b = 3$ (oder $a = 3$ und $b = 2$) gilt. In diesem Fall erhalten wir die erste vollkommene Zahl $n = 6$.

Betrachten wir nun eine natürliche Zahl n, die das Produkt von drei verschiedenen Primzahlen a, b und c ist, also $n = a \cdot b \cdot c$. „Vollkommene Zahl" bedeutet dafür

$$1 + a + b + c + ab + bc + ca = abc$$

bzw.

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$$

Wählen wir $a \geq 3$, dann gilt o.B.d.A. $b \geq 5$ und $c \geq 7$. Daraus folgt unmittelbar die Abschätzung

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq \frac{1}{105} + \frac{1}{35} + \frac{1}{21} + \frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{87}{105} < 1,$$

[5] vgl. Gardner, M.: Mathematische Hexereien, Weltbild Verlag Augsburg, 1990.

also kann n nicht vollkommen sein. Ist dagegen $a = 2$, so vereinfacht sich die Eigenschaft der vollkommenen Zahl zu

$$3 + b + c + 2 \cdot (b + c) + b \cdot c = 2 \cdot b \cdot c$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu $(b - 3) \cdot (c - 3) = 12$. Leicht finden wir durch systematisches Probieren für die Faktorenzerlegung für 12, dass es dafür keine Lösungen in Primzahlen b und c gibt. Folglich kann eine vollkommene Zahl nicht das Produkt von drei Primzahlen sein.

Wir untersuchen nun einen weiteren Spezialfall, nämlich $n = 2^{k-1} \cdot p$ mit einer natürlichen Zahl $k > 1$ und einer Primzahl p. Die Summe $S(n)$ der echten Teiler von n ergibt sich zu

$$S(n) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + p + 2 \cdot p + 2^2 \cdot p + \ldots + 2^{k-2} \cdot p$$

Die Summe der Potenzen von 2 lässt sich vereinfachen und wir erhalten

$$S(n) = 2^k - 1 + (2^{k-1} - 1) \cdot p$$

Wenn nun $S(n) = 2^{k-1} \cdot p$ gelten soll, so finden wir für p die notwendige Bedingung $p = 2^k - 1$. (Solche Primzahlen werden nach dem Franzosen MARIN MERSENNE (1588 bis 1648) *Mersennesche Zahlen* genannt.)

Die vollkommene Zahl $28 = 4 \cdot 7 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$ ist eine Zahl mit dieser Struktur. Man kann sogar beweisen, dass eine Zahl n genau dann vollkommen ist, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass $n = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ gilt und $2^k - 1$ Primzahl ist. Als nächste vollkommene Zahl finden wir auf diese Weise 496.

Seien $1 \leq t_1, t_2, \ldots, t_k \leq n$ alle Teiler der Zahl n einschließlich 1 und der Zahl n selbst. Dann lässt sich die Eigenschaft der vollkommenen Zahlen so formulieren: Eine Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn die Summe der Reziproken ihrer Teiler 2 beträgt (warum?). Daraus ergibt sich die Fragestellung: Kann die Summe der Reziproken der Teiler einer Zahl auch größer als 2 werden?

Es sei $S^*(n)$ die Summe der Reziproken aller Teiler einer Zahl n. Für eine Primzahl p ist $S^*(p) = 1 + \frac{1}{p}$ viel kleiner als 2. Aber schnell finden wir Beispiele wie $S^*(24) = 3$. Wir vermuten, dass sich für Fakultätszahlen $n!$ recht große Werte für $S^*(n!)$ ergeben, denn es gilt:

$$S^*(n!) > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Tatsächlich kann die Summe der rechten Seite (die als harmonische Reihe bekannt ist) sehr groß werden. Untersuchen wir die Reihe für $n = 2^k$, so gilt folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{\geq 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}}\geq 1+\frac{k}{2}.$$

Wir müssen also nur k groß genug wählen, um ein sehr großes $S^*(n!)$ mit $n = 2^k$ zu erhalten. Aber um auf diese Weise mit Sicherheit einen Wert für S^* von mindestens 5 zu finden, würden wir $k = 8$ und folglich $n = 2^8 = 256$ wählen müssen. Dann ist die Summe der Reziproken aller Teiler von 256! größer als 5.

Wenn S^* sehr groß werden kann, dann kann auch die Summe der (echten) Teiler einer Zahl n größer als die Zahl n werden (warum?). Doch was kann passieren, wenn wir von einer beliebigen Zahl die Summe der (echten) Teiler bilden, von diesem Summenwert wieder die Summe seiner (echten) Teiler usw.? Beginnen wir beispielsweise mit der Zahl 220, so finden wir

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

und $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Die Summe der Teiler einer dieser Zahlen ist genau die andere dieser Zahlen – solche Zahlen heißen *befreundet*. Auch 1.184 und 1.210 sind befreundet, ebenso 2.620 und 2.924. Es gibt 13 Paare von befreundeten Zahlen kleiner als 100.000. Es wird vermutet, dass es unendlich viele befreundete Zahlen gibt. Das kleinste Beispiel befreundeter Zahlen $(220; 284)$ ist schon lange bekannt, aber erst 1636 fand Pierre de Fermat (1601 bis 1665) ein weiteres Paar befreundeter Zahlen $(17296; 18416)$. Auf der Suche nach weiteren Paaren wurden schnell große Zahlen gefunden, so etwa von René Descartes (1596 bis 1650) das Zahlenpaar $(9363584; 9437056)$. Erstaunlich, dass dabei das zweitkleinste Paar $(1184; 1210)$ lange Zeit „übersehen“ und erst 1867 durch den sechzehnjährigen Nicolò Paganini (nicht zu verwechseln mit dem bekannten Violinvirtuosen!) angegeben wurde. Derartige Überraschungen dürften heute allerdings versagt bleiben!

Beginnen wir diesen Prozess mit 12496, so finden wir nacheinander 14288, 15472, 14536, 14264 und dann wieder 12496. Solche Zahlen heißen *gesellig*, und zwar in diesem Fall der Ordnung 5. Es gibt gesellige Zahlen der Ordnung 4 (z.B. beginnend mit 1264460) und sogar der Ordnung 28 (z.B. beginnend mit 14316). Man hat aber noch kein Beispiel der Ordnung 3, aber auch keinen Beweis der Nichtexistenz gefunden.

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins
„Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz