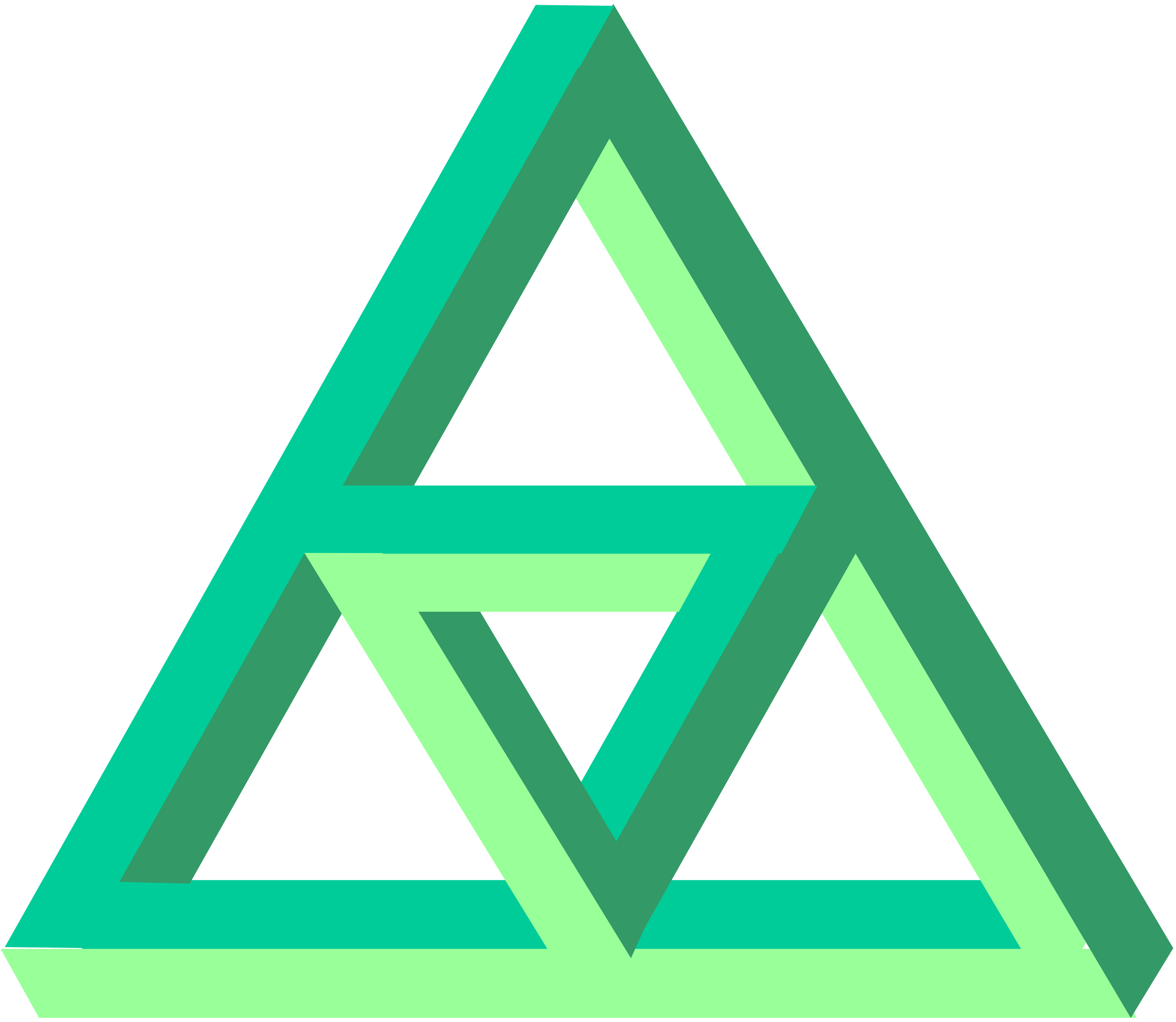
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik
– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –

mit Lösungsdiskussion zur Serie 7 des sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10



Heft 5 /2021 20. Jahrgang

Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9 und 10 – ein persönlicher Rückblick

Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz)

Anfang der 1970er Jahre erlebte der damalige Bezirk Karl-Marx-Stadt einen drastischen Rückgang in der inoffiziellen Bezirkswertung der Mathematik-Olympiade (MO). Die Ursachen waren sicher vielschichtig. Der sich schon länger anbahnende enttäuschende Negativrekord zur 14. MO (1974/75; 13. Platz von 15 Bezirken) forderte dringend eine Neukonzipierung der mathematischen Förderung. Ziel der von Dr. Helmut König geführten Aktivitäten war eine solide Breitenförderung als Grundlage der Spitzenförderung. Unter anderem wurde bereits 1973 ein Bezirkskorrespondenzzirkel Mathematik (KZM) für Schüler der Klassenstufen 7 bis 12 eingeführt. Dies und weitere Maßnahmen zur Förderung mathematisch begabter Schüler bewährten sich. Sie trugen *„zur Befähigung zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können und zur Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen“* bei (König, H.: MU Jahrgang 43, Heft 6/1997, S. 46). Die Anstrengungen zeigten schnell Erfolg – bereits zur 16. MO (1976/77) belegte der Bezirk in der inoffiziellen Bezirkswertung wieder den 1. Platz.

Ich hatte das große Glück, als Schüler die ersten beiden KZM-Jahre selbst erleben zu dürfen. Die Treffen mit meinem Zirkelleiter zur Diskussion meiner Lösungen sind mir gut in Erinnerung geblieben. Hier fand ich nicht nur Bestätigung meiner Lösungsideen oder Hinweise zur Schließung meiner Darstellungslücken, sondern lernte nachhaltig Prinzipien einer erfolgversprechenden Nachbereitung von Wettbewerbs- und KZM-Aufgaben kennen. Als ich 1986 nach meinem Mathematik-Studium und der Assistenzzeit an der Universität Jena in meine Heimatstadt zurückkehrte, übernahm ich die Leitung des KZM der Klassenstufen 9/10.

Das Grundprinzip ist seitdem geblieben. In sieben Serien erhalten die Teilnehmenden im Verlaufe eines Schuljahres jeweils fünf Aufgaben. Die Lösungseinsendungen werden bewertet und kommentiert. Die Rücksendungen enthalten (zunehmend variantenreiche) Lösungshinweise, vertiefende Beiträge zu Lösungsstrategien, anwendungsorientierte Diskussion zu mathematischen Verfahren und Wettbewerbsinformationen (Bundeswettbewerb Mathematik, Jugend forscht, IMO).

Die Materialen zum KZM wurden – zunächst unter inhaltlicher Anleitung von Herrn Dr. König – selbst hergestellt. Wie haben sich die technischen Möglichkeiten in diesen 35 Jahren verändert! Aus den Anfangsjahren bleiben die sehr händischen Vervielfältigung mittels Ormig-Verfahren[1] unvergessen (ständig blaue Finger!). Auch der Einzug der Computer-Technik lief zunächst holprig (ständig irgendwelche Überraschungen auf dem Bildschirm!). Aus der einst losen Blattsammlung zum KZM ist seit 2001 (in Anlehnung an die Zeitschrift für Mathematik „$\sqrt[\text{Die}]{\text{WURZEL}}$“[2]) eine 24-seitige Broschüre mit jährlich 9 Ausgaben geworden.

Jede Serie folgte einer inhaltlichen Dreiteilung. Für die beiden einführenden Aufgaben wurden keine speziellen Kenntnisse erwartet. *„Eine Turmuhr (mit üblichem Zwölfstundenziffernblatt) zeigt genau 13:00 Uhr an. Wie oft bilden bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minuten- und der Stundenzeiger innerhalb der nächsten zwölf Stunden einen rechten Winkel?“* (Serie 6 Aufgabe 1 [A6-1], diese und die weiteren Aufgaben stammen aus dem Schuljahr 2017/18). Doch solche Alltagsprobleme stellten eine besondere Herausforderung bzgl. der Lösungsdarstellung dar – die Einsendungen reichten von den Zeichnungen von Zeigerstellungen aller rechtwinkligen Situationen bis zu aufwendigen Gleichungssystemen. Wie soll man ausführlich aufschreiben, was doch eigentlich offensichtlich ist? Wie lässt sich Alltägliches in mathematische Form bringen?

Es folgten stets zwei Aufgaben aus dem Fundus der MO, wobei gern auf längst vergangene Jahrgänge zurückgegriffen wurde, aber auch stets aktuelle Aufgabenstellungen einflossen. *„Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck DEF mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat.“* (A1-3, in Anlehnung an Aufgabe MO541023, in der eine solche Konstruktion mit zwei Rechtecken gefordert wurde).

Die fünfte Aufgabe mit drei Teilaufgaben ließ Spielraum für komplexe Themen, z.B. *Nullstellen von Polynomen* (A2-5A), *Methode der vollständigen Induktion*

[1] Ein Matrizendrucker, auch unter dem Begriff *Ormigverfahren* bekannt, ist eine Form der Hektographie, bei der ein recht einfaches Gerät zur Vervielfältigung verwendet wird. Mit dem Matrizendrucker kann man eine begrenzte Anzahl von Abzügen (je nach Qualität der Matrizen bis maximal 250 Exemplare) von einem speziell angefertigten Original – der Matrize – herstellen. Vor dem Druck muss zuerst eine Druckvorlage, die Matrize, auch *Spiritusmatrize* genannt, angefertigt werden. Sie ist ein stärkeres (120–150 g/m²), glattes (gestrichenes) Blatt Papier, das an den druckenden Stellen mit der abzugebenden Farbe beschichtet wird. Dazu legt man das Blatt auf eine spezielle Folie, die ähnlich wie Kohlepapier funktioniert. Allerdings wird der Durchschlag nicht auf ein neues Blatt geschrieben, sondern auf die Rückseite des zu beschreibenden Papieres. Diese Kopie ist somit spiegelverkehrt und dient als Vorlage für den Druck. Die Beschichtung der Folie besteht aus einem speziellen, alkohollöslichen Wachs, und durch den Druck des Schreibens bleibt diese auf der Rückseite des Papiers haften. Die Matrize wird auf eine Trommel gespannt und diese gedreht. Unter der Trommel wird das zu bedruckende saugfähige Papier hindurchgezogen, nachdem es hauchdünn durch einen feinporigen Schwamm mit Spiritus benetzt wurde. Der Alkohol löst winzige Partikel von der Matrize, und das zu bedruckende Papier nimmt diese auf – ein Abzug entsteht.

[2] www.wurzel.org

(A5-5A), oder spezielle Gleichungen wie $n^2 - 16n + 42 = QP(n)$ mit QP als Abkürzung für das Querprodukt einer natürlichen Zahl (A7-5B). Mit A und B wurden dabei zwei Wahlaufgaben angeboten – doch für die erfolgreichsten Teilnehmenden waren Lösungseinsendungen zu beiden Aufgaben selbstverständlich, auch wenn da schon mal mehrere Seiten Lösungsdarstellung zusammenkamen.

Eine Besonderheit bildete die dritte Serie (Einsendeschluss Dezember): Alle Aufgaben entstammten dem Bundeswettbewerb Mathematik[3] (BWM), um einen Eindruck zum Schwierigkeitsgrad sowie zum Erwartungsbild zu geben und damit für die Teilnahme an diesem Angebot zu motivieren. In der fünften Serie (Einsendeschluss März) wurden zudem zwei aktuelle Aufgaben des BWM verwendet. Der Hinweis *„… [es] können Kopien der Bearbeitung für den Bundeswettbewerb eingesandt werden“* verdeutlichte das Anliegen – mit Erfolg: Unter den leider (viel zu!) wenigen Teilnehmern am BWM (1. Runde 2021: 45 von bundesweit 1182, 3.8%) sind im Vergleich zur bundesweiten Gesamtzahl unter den sächsischen Schülern überdurchschnittlich viele aus den Klassenstufen 9 und 10 (1. Runde 2021: bundesweit – 31.0%, Sachsen – 37.8%).

Fester Bestandteil des KZM waren die Seminare, die im Schuljahr viermal samstags angeboten wurden (September, Dezember, März, Juni). Hierbei hatten die Teilnehmenden nicht nur die Möglichkeit, Lösungsvarianten zu diskutieren, Lösungsstrategien zu üben oder Mathematik unterhaltsam zu erleben. Da jedes Mal ein schulferner Seminarort gewählt wurde, gab es interessante Einblicke in Anwendungen von Mathematik. Traditionell begann der Seminarzyklus an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz (TUC), natürlich mit Hinweisen zum Mathematik-Studium im Allgemeinen und an der TUC im Besonderen. Interessante Gastgeber waren beispielsweise auch immer wieder das

- das Vermessungsbüro Wuttke,
- das Sächsische Textilforschungsinstitut oder
- die Leadec Engineering GmbH,

die Einblicke in ihre Tätigkeiten boten Mathematik zum Anfassen. Aber ebenso beliebt waren kulturelle Einrichtungen der Stadt Chemnitz, wobei im Seminarprogramm ein passendes Thema angeboten wurde:

- Deutsches SPIELEmuseum (Führung mit Schwerpunkt Strategiespiele vs. Spiele in Wettbewerbsaufgaben),
- Sächsisches Industriemuseum (Führung mit Schwerpunkt Rechentechnik vs. Aufgaben mit verschiedenen Stellenwertsystemen) oder
- Tierpark Chemnitz (Zuchtprogramme vs. Wachstumsmodelle).

Zu den Gastgebervorstellungen oder Führungen waren die abholenden Eltern ausdrücklich eingeladen. Die Resonanz auf die Seminareinladungen war stets

[3] www.bundeswettbewerb-mathematik.de

erfreulich groß. Es war erstaunlich, welche oft weiten Wege die KZM-Teilnehmenden auf sich nahmen, um knapp vier Stunden Mathematik zu erleben. Schade, dass die Corona-Pandemie diese Angebote nun schon fast zwei Jahre unterbrach!

Der KZM der Klassenstufen 9/10 ordnet sich in das System der landesweiten Aktivitäten ein. Ab Klassenstufe 5 werden in den Regionen Chemnitz, Dresden und Leipzig Schülerinnen und Schüler zum KZM eingeladen. Bereits mit dem LOGO-Korrespondenzzirkel für Grundschüler werden unter dem Motto „Mathe macht Spaß – ist doch LOGO“ die Jüngsten an diese Form der Interessen- und Begabtenförderung herangeführt. Die sachsenweite Ausschreibung ab Klassenstufe 9 erschien ab 1991 angemessen, um entsprechend der Anmeldezahlen (Klassenstufe 9 durchschnittlich 20 bis 50) effizient zu arbeiten.

Auch im Schuljahr 2021/22 wird die Tradition des KZM fortgesetzt. Für die Teilnehmenden bleibt er eine wichtige Form der Wettbewerbsvorbereitung, denn beim Ringen um Punkte in mathematischen Wettbewerben wird die Fähigkeit einer vollständigen Lösungsdarstellung über die Platzierungen entscheiden. Während man die Lösungsfindung in unterschiedlicher Weise trainieren kann, ist für die Lösungsdarstellung das Aufschreiben und die kritische Durchsicht unerlässlich.

Eine kontinuierliche Teilnahme fördert die allgemeinen Eigenschaften wie Zielstrebigkeit und Durchhaltevermögen. Die Beschäftigung mit mathematischen Problemstellungen bestärkt das Interesse für das Fach. Zunehmende Erfolge bei der Lösungsfindung motivieren. Alles gute Gründe für eine Anmeldung – es lohnt, Jugendliche dafür begeistern zu wollen. Anmeldungen sind jederzeit möglich!

Lösungshinweise Serie 7

Aufgabe 7-1.
Gibt es Polyeder mit einer ungeraden Anzahl von Flächen, wobei jede Fläche ein Vieleck mit einer ungeraden Anzahl von Seiten ist? Beweisen Sie Ihre Vermutung!

Lösungshinweise: Angenommen, es gibt ein derartiges Polyeder. Dann lässt sich die Anzahl der Kanten folgendermaßen bestimmen:

Jede Seitenfläche ist ein Vieleck mit ungerader Seitenzahl. Addieren wir hierzu die Seitenzahl der anderen Seitenflächen so lange, bis alle Seitenflächen genau einmal erfasst sind, erhält man die doppelte Anzahl der Kanten des Polyeders (da jede Seite einer beliebigen Polyederseitenfläche Schnittgerade von genau zwei Seitenflächen ist). Die so berechnete Summe muss folglich das Doppelte der Kantenzahl sein, ist also geradzahlig.

Die so berechnete Summe ist aber andererseits eine Summe aus einer ungeraden Anzahl (Flächenanzahl) jeweils ungerader Zahlen (Anzahl der Seiten je Fläche). Eine solche Summe ist stets ungeradzahlig.

Beide Feststellungen widersprechen sich. Damit ist die Annahme falsch und gleichzeitig bewiesen, dass kein Polyeder existiert, der den Voraussetzungen der Aufgabe entspricht. ❑

Aufgabe 7-2.
Beweisen Sie: Wenn *a* und *b* ganzzahlig sind, dann besitzt die Gleichung

$$x^2 + 10 \cdot a \cdot x + 5 \cdot b + 3 = 0$$

keine ganzzahlige Lösung.

Lösungshinweise: Wenn die gegebene quadratische Gleichung ganzzahlige Lösungen besitzt, dann sind die Ausdrücke gemäß der Lösungsformel quadratischer Gleichungen

$$x_{1/2} = -5a \pm \sqrt{25a^2 - 5b - 3}$$

ganzzahlig. Weil $-5a$ ganzzahlig ist, muss die Diskriminate (unter dem Wurzelzeichen) das Quadrat einer natürlichen Zahl *n* sein, also

$$25a^2 - 5b - 3 = n^2$$

Formen wir diese Gleichung nach *b* um, erhalten wir

$$b = 5a^2 - \frac{n^2 + 3}{5}$$

Weil auch $5a^2$ ganzzahlig ist, ist *b* ganzzahlig, wenn $n^2 + 3$ durch 5 teilbar ist. Jedoch treten für Quadratzahlen nur die Reste 0, 1 oder 4 bei Division durch 5 auf. Folglich kann $n^2 + 3$ nur die Reste 3, 4 oder 7 ($\equiv 2$) haben, d.h. der Ausdruck ist für keine natürliche Zahl durch 5 teilbar. Somit existieren für die gegebene Gleichung keine ganzzahligen Lösungen, wenn die Koeffizienten a und b ganzzahlig sind. ❑

Aufgabe 7-3.
Ermitteln Sie alle ungeordneten Paare $(x; y)$ aus zwei natürlichen Zahlen x, y mit $x \neq y$, für die Folgendes gilt:

Das arithmetische Mittel von x und y ist eine zweistellige Zahl. Vertauscht man deren Ziffern, so erhält man das geometrische Mittel von *x* und *y*.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, dass für zwei natürliche Zahlen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ die Bedingungen erfüllt sind. Dann gibt es zwei natürliche Zahlen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit

$$\mathbf{0} < \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} < \mathbf{10} \quad ; \quad \frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \quad ; \quad \sqrt{\boldsymbol{xy}} = \mathbf{10}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$

Formen wir beide Gleichungen um zu

$$(x+y)^2 = 4 \cdot (100a^2 + 20ab + b^2)$$
$$4xy = 4 \cdot (100b^2 + 20ab + a^2)$$

so finden wir nach Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile die Gleichung

$$(x-y)^2 = 4 \cdot 99 \cdot (a^2 - b^2)$$

Offenbar ist der linke Term eine Quadratzahl und somit muss 11 ein Primteiler von $(a+b)(a-b)$, damit die Primzahl 11 in der Primfaktorenzerlegung in gerader Anzahl auftrifft. Außerdem ist $a > b$ (damit die rechte Seite positiv wird) und somit kann wegen $0 < a - b < 9$ die Differenz nicht durch 11 teilbar sein. Damit folgt wegen $(a+b) < 20$, dass $a + b = 11$ gelten muss. Dann muss $a - b$ selbst eine ungerade Quadratzahl kleiner 9 sein, also finden wir $a - b = 1$.

Wenn es eine Lösung gibt, kann dies nur mit $a = 6$ und $b = 5$ möglich sein. Mit diesen Zahlen erhalten wir

$$x + y = 2 \cdot (10a + b) = 130 \text{ und } x - y = \sqrt{4 \cdot 99 \cdot 11} = 66.$$

Daraus finden wir die Lösungen $(x; y)$ mit $(98; 32)$ bzw. $(32; 98)$. Die Probe bestätigt das Ergebnis:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{98+32}{2} = 65 \text{ und } \sqrt{98 \cdot 32} = \sqrt{3136} = 56.$$ ❑

Aufgabe 7-4.
Ermitteln Sie alle Paare natürlicher Zahlen derart, dass jedes der Paare zusammen mit der Zahl 41 ein Tripel bildet, für das sowohl die Summe der drei Zahlen des Tripels als auch die Summe von je zwei beliebig aus dem Tripel ausgewählten Zahlen Quadrate natürlicher Zahlen sind.

Lösungshinweise: Angenommen, zwei natürliche Zahlen a und b seien die gesuchten Zahlen. Dann gibt es vier ganze Zahlen x, y, z, v mit

$$\begin{array}{ccccccc} 41 & + & a & + & b & = & x^2 \\ 41 & + & a & & & = & y^2 \\ 41 & + & & & b & = & z^2 \\ & & a & + & b & = & v^2 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist äquivalent zum folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccc}
(1) & 41 & + & a & + & b & = & x^2 \\
(2) & & & & & b & = & x^2 - y^2 \\
(3) & & & a & & & = & x^2 - z^2 \\
(4) & 41 & & & & & = & x^2 - v^2
\end{array}$$

Aus (4) folgt unmittelbar $41 = (x - v) \cdot (x + v)$ und aufgrund der Primzahleigenschaft von 41 erhalten wir $x = 21$ und $v = 20$. Damit reduziert sich das obige Gleichungssystem zu

$$\begin{array}{lccccc}
(1') & a & + & b & = & 400 \\
(2') & & & b & = & 441 - y^2 \\
(3') & a & & & = & 441 - z^2
\end{array}$$

Daraus finden wir die Gleichung $y^2 + z^2 = 482$. Offenbar gilt $y \neq z$ (weil $482 : 2 = 241$ keine Quadratzahl ist), deshalb können wir o.B.d.A. $y > z$ annehmen.

Wegen $482 < 22^2$ können y und z höchstens 21 sein. Außerdem muss mindestens eine der Zahlen y oder z größer als 15 sein, weil die Abschätzung $2 \cdot 15^2 = 450 < 482$ gilt. Weiterhin erkennen wir, dass beide Zahlen ungeradzahlig sind. Wäre nämlich eine Zahl geradzahlig, so wäre deren Quadrat durch 4 teilbar und das Quadrat der anderen Zahl ließe bei Division durch 4 den Rest 2. Dies ist bekanntlich nicht möglich. Wären aber beide Zahlen geradzahlig, dann wäre die Summe ihrer Quadrate durch 4 teilbar, im Widerspruch zu 482.

Folglich können nur $y = 17$ oder $y = 19$ Lösungen sein. Für $y^2 = 289$ folgt $z^2 = 173$. In diesem Fall ist z jedoch keine natürliche Zahl. Für $y^2 = 361$ folgt $z^2 = 121$. Wir erhalten also $z = 11$.

Wenn es ein Zahlenpaar mit den geforderten Eigenschaften gibt, muss wegen (1´) $a = 441 - 121 = 320$ und (2´) $b = 441 - 361 = 80$ gelten. Die Probe bestätigt, dass das Tripel $(320, 80, 41)$ alle Bedingungen erfüllt. ❑

Hinweis: Aufgrund der Aufgabenstellung besitzt die Reihenfolge der drei Zahlen keine Bedeutung.

Aufgabe 7-5A

(a) Wenn die Summe zweier Quadratzahlen natürlicher Zahlen ein Vielfaches von 7 ist, so ist jede der Zahlen selbst durch 7 teilbar.

(b) Untersuchen Sie, ob es ein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 5 \cdot (y^2 + z^2).$$

(c) Beweisen Sie, dass es kein Zahlentrupel $(w; x; y; z)$ natürlicher Zahlen $(w > 0, x > 0, y > 0, z > 0)$ gibt, welches die folgende Gleichung erfüllt:

$$w^2 + x^2 = 7 \cdot (y^2 + z^2).$$

Lösungshinweise: (a) Wir untersuchen die Reste, die bei einer Quadratzahl einer natürlichen Zahl x bei Division durch 7 möglich sind:

Rest bei Division durch 7							
x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Betrachten wir nun die Summe von zwei Quadratzahlen, so sind nur folgende Reste möglich:

$$\begin{aligned}&0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 0 + 2 = 4, 0 + 4 = 4\\&1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 4 = 5\\&2 + 2 = 4, 2 + 4 = 6\\&4 + 4 = 8 \equiv 1\end{aligned}$$

Nur wenn beide Zahlen jeweils ein Vielfaches von 7 sind, ergibt die Summe ihrer Quadratzahlen ein Vielfaches von 7. ❑

(b) Für diese Aufgabenstellung genügt es, ein geeignetes Quadrupel anzugeben, so beispielsweise $(4, 3, 1, 2)$, denn

$$w^2 + x^2 = 9 + 16 = 25 = 5 \cdot (1 + 4) = 5 \cdot (y^2 + z^2).$$

Es wird bei einer solchen Aufgabenstellung keine Herleitung verlangt. Ein systematisches Probieren (in Hausarbeit auch mit Computer) ist ausdrücklich erlaubt. Probieren wir zum Beispiel für z, y, x die natürlichen Zahlen in aufsteigender Folge und prüfen bei jedem Schritt, ob

$$w^2 = 5 \cdot (y^2 + z^2) - x^2$$

für eine natürliche Zahl erfüllt ist, werden wir gleich bei $z = y = x = 1$ fündig, denn

$$w^2 = 5 \cdot (1 + 1) - 1 = 9$$

wird für $w = 3$ erfüllt. Aber auch das oben genannte Quadrupel würden wir mit der systematischen Suche ohne viel Rechenaufwand finden, wenn wir uns nicht gleich mit dem trivialen Quadrupel zufriedengeben (was aber im Sinne der Aufgabenstellung akzeptabel wäre).

Das Quadrupel $(4, 3, 1, 2)$ erinnert mit den beiden ersten Zahlen $(4, 3)$ an das pythagoreische Tripel $(4, 3, 5)$, zumal der dritte Wert ein Vielfaches von 5 ist. Ohne Probleme erkennen wir, dass wir mit (1, 2) wegen $1^2 + 2^2 = 5$ ergänzen können.

Natürlich könnten wir auch auf der rechten Seite mit pythagoreischen Zahlen beginnen, z.B. mit (w, x, a, b), wobei $a^2 + b^2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl c ist. Da wir $1^2 + 2^2 = 5$ bereits kennen, müssen wir nur $w = c \cdot 1$ und $x = c \cdot 2$

mit $c^2 = a^2 + b^2$ setzen, um ein Quadrupel der geforderten Art zu erhalten. Folglich ist $(5, 10, 3, 4)$ ein geeignetes Quadrupel. Die Probe bestätigt:

$$5^2 + 10^2 = 125 \; = \; 525 = 5(3^2 + 4^2)$$

(c) Es gibt kein Quadrupel der geforderten Art. Hätten wir vier geeignete Zahlen gefunden, wäre die Summe der Quadratzahlen auf der linken Seite durch 7 teilbar, und – wegen a) – sowohl w als auch x durch 7 teilbar. Dann wäre aber die linke Seite sogar durch 49 teilbar. Folglich müsste die Summe der Quadratzahlen auf der rechten Seite auch durch 7 teilbar. Wieder wegen a) ist diese Summe dann sogar durch 49 teilbar. Damit sind aber auf der rechten Seite eine ungerade Anzahl des Primfaktors 7. Den damit verbundenen Widerspruch erkennen wir am besten mit dem Extremalprinzip:

Angenommen, es gibt Quadrupel der geforderten Art. Dann wählen wir eines mit der kleinsten Summe $w^2 + x^2$. Aus $w^2 + x^2 = 7(y^2 + z^2)$ folgt, dass die linke Seite der Gleichung durch 7 teilbar ist. Wegen a) sind damit sowohl w als auch x durch 7 teilbar, sodass die linke Seite sogar durch 49 teilbar ist. Dann ist aber auch $y^2 + z^2$ durch 7 teilbar und – wieder wegen a) – sind sowohl y als auch z durch 7 teilbar. Also finden wir natürliche Zahlen w', x', y', z' mit

$$(7w')^2 + (7x')^2 = 7((7y')^2 + (7z')^2.$$

Das Quadrupel (w´, x´, y´, z´) erfüllt aber ebenfalls die geforderte Gleichung. Jedoch ist $w'^2 + x'^2 < w^2 + x^2$ im Widerspruch zur Annahme, dass $w^2 + x^2$ die kleinste Summe wäre. ❑

Aufgabe 7-5B. In der Ebene sei $P_1P_2P_3P_4$ ein beliebiges Viereck *E*. Zu untersuchen ist folgende Aussage:

> Sind Q_1, Q_2 ,Q_3 und Q_4 vier Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von *E* liegen, so dass $Q_1Q_2Q_3Q_4$ ein zu *E* kongruentes Viereck ist, so ist jeder Punkt Q_k $(k \; = \; 1, 2, 3, 4)$ ein Eckpunkt von *E*.

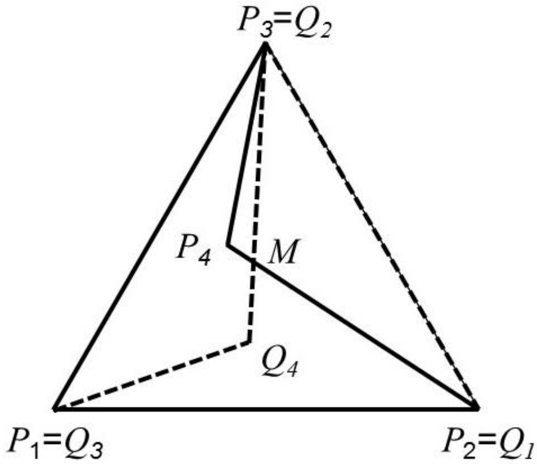
(a) Gibt es nichtkonvexe Vierecke *E*, für die die genannte Aussage falsch ist?

(b) Ist diese Aussage für alle nichtkonvexen Vierecke *E* falsch?

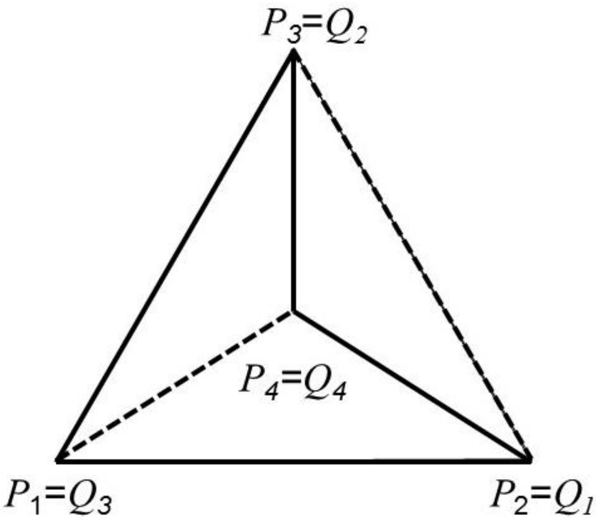
(c) Beweisen Sie, dass die Aussage für alle konvexen Vierecke wahr ist!

Hinweise: Ein Viereck *E* heißt konvex, wenn für zwei beliebige Punkte, die im Innern oder auf dem Rand von *E* liegen, auch alle Punkte der geradlinigen Verbindungslinie dieser beiden Punkt im Innern oder auf dem Rand von *E* liegen.

Lösungshinweise: (a) Um die Frage vollständig zu beantworten, genügt ein Beispiel: Es seien P_1, P_2 und P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks D. Ferner sei M sein Schwerpunkt und der Punkt P_4 liege auf der Verlängerung der Strecke $\overline{P_2M}$ über M hinaus, aber noch im Innern von D. Drehen wir nun das Dreieck D, sodass P_1 in $Q_1 = P_2$ überführt wird, gehen P_2 und P_3 in $Q_2 = P_3$ und $Q_3 = P_1$ über. Der Punkt P_4 liegt dann auf der Verlängerung der Strecke $\overline{P_3M}$ über M hinaus, aber ebenfalls im Innern von D. Offenbar sind $P_1P_2P_3P_4$ und $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kongruente Figuren, aber die Eckpunkte liegen nicht alle übereinander, da Q_4 verschieden von P_4 ist.

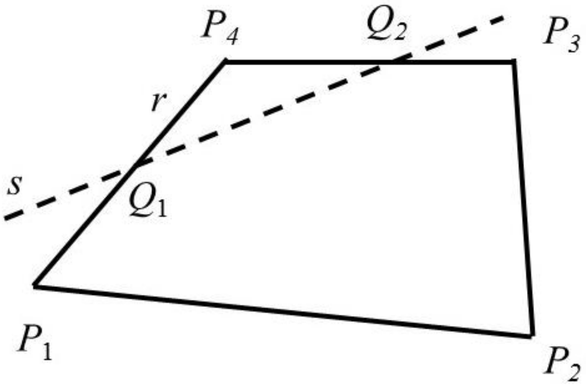


(b) Um die Frage vollständig zu beantworten, genügt ein Gegenbeispiel: Es seien P_1, P_2 und P_3 die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks D. Ferner sei P_4 sein Schwerpunkt. Drehen wir nun das Dreieck D, sodass P_1 in $Q_1 = P_2$ überführt wird, gehen P_2 und P_3 in $Q_2 = P_3$ und $Q_3 = P_1$ über. Der Punkt P_4 bleibt unverändert und fällt mit $Q_4 = P_4$ zusammen. Offenbar sind $P_1P_2P_3P_4$ und $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kongruente Figuren und die Eckpunkte liegen (bei geeigneter Bezeichnung) alle übereinander.



(c) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt, o.B.d.A. sei dies Q_1, der nicht Eckpunkt des Vierecks E ist. Wir zeigen, dass es dann eine Seite des Vierecks mit den Eckpunkten $Q_1Q_2Q_3Q_4$ gibt, die innere Punkte von E enthält (#).

Liegt Q_1 im Innern von E, so ist die Behauptung (#) offenbar richtig. Liegt Q_1 auf dem Rand von E (also wegen der Annahme im Inneren einer Seite r von E) so liegt mindestens einer der Punkte Q_2, Q_3, Q_4 nicht auf r, da sonst $Q_1Q_2Q_3Q_4$ kein Viereck wäre.



Wir können also die Bezeichnung der Punkte Q so vornehmen, dass Q_1 und Q_2 zwei benachbarte Punkte sind, die nicht beide auf der Seite r liegen. Liegt Q_2 im

Innern von E, so ist die Behauptung (#) offenbar richtig. Liegt dagegen Q_2 auf einer von r verschiedenen Seite von E, so ist Q_1Q_2 die Verbindungslinie zweier Randpunkte von E, die längs des Randes von E nicht geradlinig verbunden sind. Damit gehört jeder innere Punkt von Q_1Q_2 zum Innern von E.

Mit diesem Nachweis haben wir gezeigt: Die Gerade s durch Q_1 und Q_2 zerlegt E in zwei Vielecke mit jeweils positiven Flächeninhalten. Wegen der Konvexität von $Q_1Q_2Q_3Q_4$ liegt dieses Viereck ganz auf einer Seite von s. Da alle Eckpunkte im Innern oder auf dem Rand von E liegen, ist der Flächeninhalt (um den Inhalt der Fläche auf der anderen Seite von s) kleiner als der Flächeninhalt von E. Die beiden Vierecke können also nicht kongruent sein. Daher ist die Annahme falsch und alle Eckpunkte $Q_1Q_2Q_3Q_4$ sind auch Eckpunkte von E. ❑

Nachträge zu den Lösungsdiskussionen zur Serie 6

Aufgaben wie **A6-1** lassen sich durch systematisches Probieren lösen. Wir müssten lediglich in der Gleichung $a^2+2ab+b^2=100a+b$ nacheinander die zweistelligen Zahlen a = 10, 11, ..., 99 einsetzen und prüfen, ob sich eine ganze Zahl b mit $0 \le b \le 99$ ergibt. Ohne Verwendung von rechentechnischen Hilfsmitteln ist dies zumindest aufwändig und nicht elegant. Ähnliche Fragestellungen lassen sich ableiten: Gibt es Lösungen zu

$$100a+b=(a-b)^2$$

$$100a+b=a^2+b^2 \qquad 100a+b=a^2-b^2 \qquad 100a+b=b^2-a^2$$

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, sollte zunächst die mögliche Lösungsmenge eingegrenzt werden.

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Quadrate ihrer Ziffern sind.

Lösungshinweise: Laut Aufgabenstellung sind einstellige Zahlen a und b zu suchen, die die Gleichung $10a+b=a^2+b^2$ erfüllen. Natürlich ist es kein Problem, für die zehn Fälle a = 0, 1, ..., 9 auszuprobieren, ob es eine passende ganze Zahl b gibt. Doch zunächst soll die Zahl der Fälle reduziert werden:

Die Ausgangsgleichung ist äquivalent zu

$$a\cdot(10-a)=b\cdot(b-1)$$

Die rechte Seite ist als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen stets geradzahlig. Da a und 10 – a bzgl. Division durch 2 den gleichen Rest lassen, muss a ebenfalls geradzahlig sein. Die Anzahl der zu probierenden Fälle hat sich damit bereits halbiert. Für a = 8 (oder a = 2) ist die linke Seite durch 16 teilbar – im Widerspruch zur rechten Seite, die nicht durch 16 teilbar sein kann.

Folglich verbleiben die Fälle $a = 0, 4, 6$, doch nur $a = 0$ führt zu den trivialen Lösungen 01 bzw. 00. ❑

Aufgabe. Man finde alle zweistelligen Zahlen der Form $10 \cdot a + b$ mit einstelligen Zahlen a und b, die die Bedingung $10a + b = b^2 - a^2$ erfüllen.

Lösungshinweise: In ähnlicher Weise wie oben lässt sich die Ausgangsgleichung umformen zu

$$a \cdot (10 + a) = b \cdot (b - 1)$$

Wieder muss a geradzahlig sein. Weiter wissen wir, dass die rechte Seite für einstelligen Zahlen b nicht größer als $9 \cdot 8 = 72$ sein kann. Damit kann a nicht größer als 5 sein. Folglich müssen wir nur die Zahlen $a = 0, 2, 4$ probieren. Außer den trivialen Lösungen 00 und 01 finden wir noch die Lösung 48, denn es gilt $8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$. ❑

Die Fallreduzierung gelingt oft durch Faktorisierung mit anschließender Diskussion der zulässigen Teiler. So auch bei der

Aufgabe MO520941(a). Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen z, die größer als ihre Spiegelzahl u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ergibt.

Lösungshinweise: Setzen wir $z = 10a + b$ mit den Ziffern a und b, so sind also die Zahlen z gesucht, für die es eine ganze Zahl k gibt mit

$$\begin{aligned} k^2 &= (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = (10a+b-10b-a)(10a+b+10b+a) \\ &= 9 \cdot 11 \cdot (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung eine Quadratzahl wird, muss 11 ein Teiler von $a + b$ sein und folglich gilt $a + b = 11$. Damit ist die Lösungsmenge schon so stark eingeschränkt, dass nun ein systematisches Probieren praktikabel erscheint. (Lösung: $z = 65$) ❑

Auch die Suche nach allen zweistelligen Zahlen, deren Quadrat gleich der 3. Potenz ihrer Quersumme ist, kann durch eine Vorüberlegung drastisch eingeschränkt werden. Sind wieder a und b die Ziffern der Zahl, so soll also gelten: $(10a+b)^2 = (a+b)^3$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\left(\frac{10a+b}{a+b}\right)^2 = a + b.$$

Also muss die Quersumme eine Quadratzahl sein, und dafür kommen für zweistellige Zahlen nur 1, 4, 9 oder 16 in Frage. Dann ist aber $(10a + b)^2$ eine der Zahlen $1, 4^3, 9^3$ bzw. 16^3 und damit genügt es, die Fragestellung für die Zahlen $1, 2^3, 3^3$ und 4^3 zu prüfen. Nur 27 ist Lösung, wie eine Probe bestätigt. ❑

Rückblick auf Olympiade-Aufgaben

Aufgabe MO540934. Gegeben sind drei positive Zahlen *g, b* und *f*, für die

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

gilt.

(a) Geben Sie zwei Beispiele für je drei positive ganze Zahlen mit dieser Eigenschaft an.
(b) Beweisen Sie, dass für positive reelle Zahlen *g, b* und *f*, die diese Gleichung erfüllen, stets auch $g+b \geq 4f$ gilt.

Lösungshinweise: Es ist nicht schwierig, Beispiele für die angegebene Gleichung zu finden, so z.B. (2; 2; 1) oder (6; 3; 2).

Für Teil b) formen wir die Gleichung um zu

$$f=\frac{gb}{g+b}.$$

Weil *g* und *b* positive Zahlen sind, ist die zu beweisende Ungleichung äquivalent zu $(g+b)^2 \geq 4gb$. Dies wiederum ist gleichbedeutend zu $(g-b)^2 \geq 0$, was für alle reelle Zahlen *g* und *b* erfüllt ist. ❑

Aufgabe MO561024. Gegeben sind zwei positive rationale Zahlen *a* und *b* mit *a* + *b* = 2. In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{3+a}+\frac{2}{3+b}$$

untersucht werden.

(a) Gibt es positive rationale Zahlen a und b, für welche die Werte der linken und der rechten Seite der Ungleichung gleich sind?
(b) Beweisen Sie die Gültigkeit der Ungleichung?

Lösungshinweise: Für $a = b = 1$ finden wir eine Antwort auf den Teil a). Um die Ungleichung zu beweisen, formen wir äquivalent um (unter Beachtung, dass die Nenner jeweils positive Zahlen sind), bis wir die Ungleichung

$$(3+a)\cdot(3+b) \geq 4\cdot(1+a)\cdot(1+b)$$

erhalten. Nun gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, den Beweis abzuschließen.

(1) Wir ersetzen $a + b = 2$ die Variable b durch $2 - a$ und erhalten die quadratische Ungleichung $3a^2 - 6a + 3 = 3 \cdot (a-1)^2 \geq 0$. Diese ist für alle rationalen Zahlen a erfüllt.

(2) Wir gehen von einem Zahlenpaar aus, für das die Gleichheit gilt und schreiben $a = 1 + m$ und $b = 1 - m$ mit einer beliebigen rationalen Zahl m. Offenbar gilt weiterhin $a + b = 1 + m + 1 - m = 2$. Damit vereinfacht sich die Ungleichung zu $3 \cdot m^2 \geq 0$. Dies ist für alle rationalen Zahlen m erfüllt. ❑

Hinweis: In der Musterlösung wird ausdrücklich erwähnt, dass die Einschränkung auf rationale Zahlen nur vorgenommen wurde, um nicht dem Schulstoff vorzugreifen. Selbstverständlich gilt diese Ungleichung auch für positive reelle Zahlen.

Diese beiden Aufgaben aus der Mathematik-Olympiade motivieren einmal mehr, sich mit Ungleichungen zu beschäftigen.

Ungleichungen

Der Nachweis von Ungleichungen in mathematischen Wettbewerben wird in den Musterlösungen häufig durch trickreiche Herleitungen geführt.

Aufgabe 381043. Zeigen Sie: Wählt man drei reelle Zahlen so, dass ihre Summe 15 ist, so ist die Summe ihrer Quadrate stets größer oder gleich 75.

Lösungshinweise: Es gilt für reelle Zahlen x, y und z stets

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 \geq 0$$

Daraus folgt durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10 \cdot (x + y + z) + 75 \geq 0$$

Setzen wir nun für $x + y + z$ den Wert 15 ein, folgt unmittelbar die Behauptung. ❑

Dieser Lösungsansatz setzt voraus, dass man die Struktur der Ungleichung „durchschaut“ hat und das Lösungstripel, dass die Gleichheit erzeugt, errät.

Lösungsvariante: Gehen wir von der Gültigkeit der Abschätzung $(a + b)^2 \geq 2ab$ für beliebige reelle Zahlen aus, finden wir zunächst

(1) $$2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \geq 2 \cdot (xy + yz + xz).$$

Ist nun $x + y + z = 15$, so folgt $(x + y + z)^2 = 225$, d.h. es gilt

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy + yz + xz) = 225.$$

Die Addition von (1) und (2) führt zur Behauptung. ❑

Gewusst wie – wenn wir solche Beispiele kennen, können wir derartige Lösungswege finden. Diskutiert werden sollen hier aber Aufgabenbeispiele, für die allgemeinere Lösungsansätze versucht werden können.

Eine häufig einsetzbare Methode für den Beweis von Ungleichungen ist das ***Folgern aus der Behauptung***: Wir formen die zu beweisende Ungleichung solange um, bis die Gültigkeit der entstehenden Ausdrücke aufgrund bekannter Sachverhalte leicht zu erläutern ist. Hierbei ist auf die ausdrücklichen Hinweise zur Äquivalenz der Umformungen zu achten. Besser ist es deshalb, den eben beschriebenen Weg zur Lösungsfindung als Konzept aufzufassen und in der Lösungsdarstellung von den offensichtlichen Sachverhalten ausgehend die Behauptung herzuleiten. Beispiel:

Aufgabe. Man zeige für alle reellen Zahlen *a, b, c* die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0\,.$$

Die Lösungsfindung gelingt nach Multiplikation mit 2 und „geschicktem Gruppieren“:

$$\begin{aligned}
&2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = \\
&\quad a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = \\
&\quad (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Umformung ist offensichtlich, weil die Quadrate von reellen Zahlen stets nichtnegativ sind. Die verwendeten Umformungen sind äquivalent, also sind die Schritte auch umkehrbar, so dass wir die Lösungsdarstellung vorteilhaft mit der letzten Zeile beginnen: Für reelle Zahlen *a, b, c* gilt stets $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \geq 0$. Durch Ausmultiplizieren der Quadrate, Zusammenfassen gleicher Summanden und Division durch 2 gelangen wir zur behaupteten Ungleichung, wodurch diese bewiesen ist. ❑

Lassen sich Sonderfälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt, leicht angeben, können wir darauf eine erfolgsversprechende ***Substitution*** anwenden: Offensichtlich gilt für $a = b = c$ das Gleichheitszeichen. Betrachten wir den Fall $a \neq b = c$, so lautet die zu beweisende Ungleichung

$$a^2 + 2\cdot b^2 - 2\cdot ab - b^2 \geq 0.$$

Jetzt wird $a^2 - 2\cdot ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$ offensichtlich und vielleicht gelingt es damit, den Lösungsansatz von oben zu vermuten.

Von besonderem Interesse sind die Situationen, die von dieser Gleichheit abweichen. Es seien deshalb x und y reelle Zahlen mit $b = a + x$ und $c = a + y$. Substituieren wir nun damit b und c in der behaupteten Ungleichung, so finden wir

$$a^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2 - a(a+x) - a(a+y) - (a+x)(a+y) = x^2 + y^2 - xy$$

Aus der Aufgabenstellung mit drei Variablen wurde ein zweidimensionales Problem! Wenn nachgewiesen wird, dass die rechte Seite für alle reellen x und y nichtnegativ ist, wäre auch das ursprüngliche Problem gelöst. Es gilt wirklich:

$$x^2 + y^2 - xy \geq x^2 + y^2 - 2 \cdot |xy| = (|x| - |y|)^2 \geq 0 .$$

Ungleichungen mit quadratischen Termen lassen sich oftmals sogar auf ein eindimensionales Problem zurückführen, wenn wir den Ausdruck als Funktion einer der Variablen auffassen, beispielsweise

$$f(a) = a^2 - a \cdot (b+c) + b^2 + c^2 - bc$$

Um die Lösungen dieser quadratischen Funktion zu analysieren, betrachten wir deren Diskriminante $D = -3(b-c)^2$. Ist b von c verschieden, so ist die Diskriminante negativ und es gibt folglich keine Nullstellen. Da aber für große a der Funktionswert $f(a)$ positiv ist, gilt also für alle a: $f(a) > 0$. Ist dagegen $b = c$, so finden wir genau eine Nullstelle und es gilt folglich für alle a: $f(a) \geq 0$. Insgesamt ist die Ungleichung damit bewiesen. ❑

Für Wettbewerbsaufgaben werden solche Beweise interessanter, wenn wir ***bekannte Ungleichungen*** anwenden können. So ist die Aufgabe

MO450922/451022 für positive a und b äquivalent zu

$$4 \leq \left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + \frac{1}{ab} + 2 .$$

Für positive reelle Zahlen x kann die Ungleichung $x + \frac{1}{x} \geq 2$ als allgemein bekannt vorausgesetzt werden, womit die behauptete Ungleichung für positive a und b bereits bewiesen ist. Um diese Hilfsaussage zu beweisen, genügt deren Multiplikation mit x, um ein vollständiges Quadrat zu erkennen. Gleichwertig dazu können wir auch die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel anwenden: Für alle positiven reellen Zahlen x gilt

$$\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \leq \frac{x + \frac{1}{x}}{2} .$$

Eine Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes führt zu folgender Aussage:

$$2^n \le \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(a_2 + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_1}\right)$$

Eine andere Verallgemeinerung dieses Hilfssatzes liefert folgender Aussage:

Aufgabe. Man beweise: Für positive Zahlen *a, b* und *c* gilt stets $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$.

Lösungshinweise: Für $a = b = c$ ist nicht zu beweisen und für $b = c$ ergibt sich gerade der Hilfssatz für $x = \frac{a}{b}$. Der allgemeine Fall führt zu der Behauptung:

$$3 \le \frac{a^2b + b^2c + ac^2}{abc}.$$

Mit Hilfe der Mittelungleichung erweist sich diese Ungleichung als einfache Folgerung:

$$abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = \sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} \le \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}$$ ❑

Natürlich hätten wir auch gleich die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel auf die Ungleichung anwenden können:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \le \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3}$$

Nun sollte es nicht schwerfallen, diese Ungleichung auf mehr als 3 Summanden zu erweitern, d.h. es gilt auch für positive reelle Zahlen *a, b, c, d* bzw. $a_1, a_2, \ldots a_n$ ($n > 1$)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \ge 4; \qquad \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \ge n$$

Diese Aufgaben bestätigen wieder einmal, dass die intensive Nachbereitung von Aufgaben vergangener Olympiaden hilfreich ist. Denn wer sich die Lösungsmethode erarbeitet hat, wird mit folgender Aufgabe (bei der linken Ungleichung) keine Probleme haben:

Aufgabe MO480935. Zeigen Sie, dass für alle nichtnegativen reellen Zahlen *a, b, c* mit $a + b + c = 1$ stets $\frac{1}{3} \le a^2 + b^2 + c^2 \le 1$ gilt.

Das Finden von ***quadratischen Ergänzungen*** erweist sich oft als zielführende Lösungsstrategie.

Aufgabe MO480923(b). Zeigen Sie, dass für beliebige Paare (a; b) reeller Zahlen stets $a+b \le a^2+b^2+\frac{1}{2}$ gilt.

Lösungshinweise: Die Behauptung wird äquivalent zu $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$ umgeformt und die Gültigkeit wird offensichtlich. ❑

Aufgabe. Man beweise die Gültigkeit der Ungleichung

$$\left(1+a+a^2\right)^2 \le 3\cdot\left(1+a^2+a^4\right)$$

für alle reellen Zahlen a.

Lösungshinweise: Durch (äquivalentes) Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gelangen wir zu der Ungleichung

$$a^4-a^3-a+a \ge 0\,.$$

Nun erkennen wir die Faktorisierungsmöglichkeit:

$$(a-1)\cdot\left(a^3-1\right)\ge 0\,.$$

Diese Ungleichung ist für jede reelle zahl a erfüllt:

- Ist $a < 1$, dann sind beide Faktoren negativ und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a > 1$, dann sind beide Faktoren positiv und deren Produkt ist positiv.
- Ist $a = 1$, dann sind beide Faktoren gleich Null und die Gleichheit gilt. ❑

Aufgabe. Man beweise die Ungleichung $x^8-x^5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}\ge 0$ für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen x.

Lösungshinweise: Multiplikation beider Seiten der Ungleichung mit x^4 führt zu einem Polynom, für das wieder eine Faktorisierung gelingt. Die gegebene Ungleichung ist also äquivalent zu

$$\left(x^9-1\right)\cdot\left(x^3-1\right)\ge 0\,.$$

Nun schließen wir den Beweis wie eben ab. ❑

Kleine Änderungen in der Aufgabenstellung können zu ganz unterschiedlichen Ergebnissen führen:

Aufgabe MO301231. Man untersuche, ob für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c, d stets folgende Ungleichungen gelten:

(1) $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \le \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$,
(2) $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \le \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$.

Lösungshinweise:
zu (1) Wir nehmen an, es gelte $\sqrt{ac} + \sqrt{bd} > \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{c+d}$. Da beide Seiten positiv sind, darf quadriert werden und wir erhalten

$$ac + 2\sqrt{abcd} + bd > (a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

also

$$2\sqrt{abcd} > ad + bc.$$

Doch diese Ungleichung ist gleichbedeutend zu $0 > \left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2$, was offenbar einen Widerspruch darstellt. Also gilt die Behauptung.

zu (2) Setzen wir $a = b = 2$ und $c = d = 1$, so wird die Ungleichung widerlegt. ❑

Gewusst wo – die Suche nach geometrischen Örtern[4]

In der 52. MO wurde in zwei Aufgaben nach einem *geometrischen Ort* gefragt, d.h. nach der Menge aller Punkte, die gewisse Eigenschaften erfüllen.

Aufgabe MO520936. Es sei k ein Halbkreis über einem Durchmesser AB. Auf k werde ein weiterer von A und B verschiedener Punkt C gewählt. Wir betrachten den aus den Strecken AC und CB bestehenden Streckenzug und bezeichnen mit X denjenigen Punkt, welcher diesen Streckenzug in zwei Teile gleicher Länge zerlegt.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Punkte X, wenn C die von A und B verschiedenen Punkte auf dem Halbkreis k durchläuft.

Hinweis: Der geometrische Ort der Punkte X bezeichnet hier die Menge all dieser Punkte bei allen möglichen Wahlen des Punktes C.

Aufgabe MO520946. Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Bestimmen Sie die Menge aller derjenigen Punkte P im Inneren des Dreiecks ABC, für die es einen Punkt X auf der Geraden BC und einen Punkt Y auf der Geraden CA derart gibt, dass folgende drei Bedingungen simultan erfüllt sind:

(1) Der Punkt X ist vom Punkt C verschieden.
(2) Die Gerade XY ist parallel zur Geraden AB.
(3) Die Winkel $\angle XPC$ und $\angle CPY$ sind gleich groß.

[4] Auszüge aus dem Seminarprogramm vom 22.06.2019

Hinweis: Zwei Geraden sind auch dann parallel, wenn sie zusammenfallen.

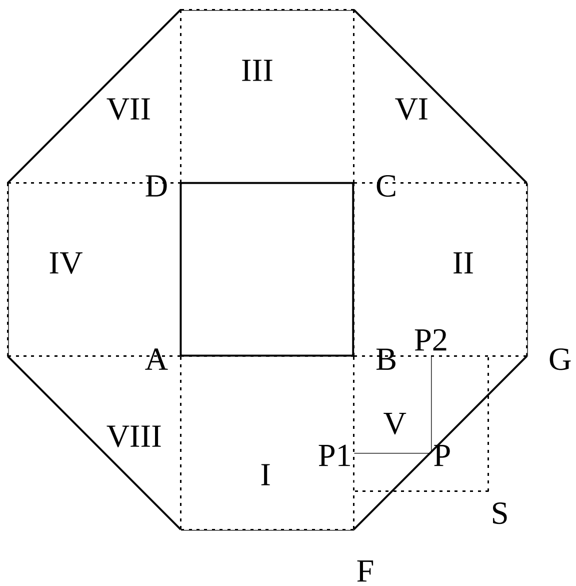
Der einfachste geometrische Ort ist der Kreis (Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt einen festen Abstand haben). Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Ellipse sind weitere Beispiele von bekannten geometrischen Orten. Bei der Suche nach den geometrischen Orten sind stets die folgenden vier Aspekte explizit darzustellen:

- eindeutige Beschreibung der gesuchten Menge,
- Nachweis, dass ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt, in dieser Menge enthalten ist,
- Nachweis, dass alle Punkte außerhalb dieser Menge nicht allen Bedingungen der Aufgabenstellung genügen,
- Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Vorschrift erzeugt werden kann.

An folgenden Beispielen können diese vier Schritte demonstriert werden.

Aufgabe. Gegeben sei ein Quadrat *ABCD* mit der Seitenlänge 1. Man ermittle den geometrischen Ort aller Punkte in der Ebene des Quadrates, für die die Summe der Abstände von den Geraden *AB*, *BC*, *CD* und *DA* gleich 4 ist!

Lösungshinweise: Die Geraden *AB, BC, CD, DA* zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder (in der Abbildung mit I, ..., VIII bezeichnet), wobei die Punkte der Trennungsgeraden zu allen ihnen anliegenden Feldern gehörig betrachtet werden. Weiterhin bezeichne $d(P,XY)$ den Abstand des Punktes *P* von der Geraden *XY*.



Wir betrachten zunächst Feld I. Wenn *P* ein Punkt aus dem Feld I ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(1)
$$d(P;AB)+d(P;BC)+d(P;CD)+d(P;DA)=4$$

Weil *P* zwischen den parallelen Geraden *BC* und *AD* liegt, gilt

(2) $d(P;BC)+(P;DA)=1.$

Da *AB* zu *CD* parallel ist und *P* in der durch *AB* begrenzten Halbebene liegt, in der *CD* nicht liegt, gilt weiterhin

(3) $d(P;CD)=d(P;AB)+1$

Wegen (1) bis (3) finden wir die Aussage $d(P;AB)=1$. Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf der Parallelen zu *AB* im Abstand 1 liegen. In ähnlicher Weise erhalten wir Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Wenn *Q* ein Punkt aus dem Feld V ist, so soll nach Aufgabenstellung gelten:

(4) $$d(Q;AB)+d(Q;BC)+d(Q;CD)+d(Q;DA)=4$$

Analog zu den Untersuchungen im Feld I findet man:

(5) $$d(Q;CD)=d(Q;AB)+1 \;;\; \mathrm{d(Q;DA)=d(Q;BC)+1}$$

Wir zeigen nun: Ist *P* ein Punkt der Strecke *FG*, dann gilt:

$$d(P;AB)+d(P;BC)=1$$

Da *FG* parallel zu *AC* verläuft, beträgt der Winkel $\angle GFB = 45^o$. Seien nun P_1 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *BC* und P_2 der Fußpunkt des Lotes von *P* auf *AB*. Das Dreieck FPP_1 ist nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, d.h., es gilt: $\overline{PP_1} = \overline{P_1F}$. Da weiterhin *AB* senkrecht auf *BC* steht, ist P_1PP_2B ein Rechteck, also gilt:

$$\overline{BP_1} = \overline{P_2P}$$

also $$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = \overline{BF}$$

Aufgrund der vorangegangenen Betrachtungen erhalten wir wie behauptet:

$$\overline{P_2P} + \overline{P_1P} = d(P;AB) + d(P;BC) = \overline{BF} = 1$$

Über Dreiecksungleichungen zeigen wir nun leicht, dass für jeden Punkt *S*, der im Feld V, aber nicht auf der Strecke *FG* liegt, die Abstandssumme von 1 verschieden ist. Die Betrachtungen im Feld V beweisen, dass *Q* auf der zu *AC* parallelen Diagonalen des Quadrates liegt, das durch Spiegelung aus *ABCD* an *B* entsteht.

In ähnlicher Weise erhalten wir in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der bereits gefundenen Geraden in I bis IV übereinstimmen. Im Innern des Quadrates können offenbar keine gesuchten Punkte liegen, da hier die Summe der Abstände dieser Punkte von den Quadratseiten genau den Wert 2 annimmt.

Somit besteht der gesuchte geometrische Ort aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte sämtlich auf einem Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates liegen und von dessen Seite jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates parallel und kongruent ist. ❑

Aufgabe. Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit der Grundfläche *ABCD* und der Kante *AE*. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken *XY*, wobei *X* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *AC* und *Y* ein beliebiger Punkt der Flächendiagonale *FH* ist.

Lösungshinweise: Durch Auswahl spezieller Situationen finden wir eine Vermutung über den gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir zum Beispiel $X = A$ und $Y = F$, so fällt *XY* mit der Flächendiagonalen der Seitenfläche *ABFE* zusammen und der Mittelpunkt ist von *XY* ist der Flächenmittelpunkt M_{ABFE}. Leicht sehen wir, dass auch die Flächenmittelpunkte M_{BCGF}, M_{CDHG} und M_{DAEH} in der gesuchten Menge enthalten sind. Somit liegt die Vermutung nahe, dass das Quadrat mit diesen vier Flächenmittelpunkten mit allen seinen inneren und Randpunkten der geometrische Ort sein könnte.

Wählen wir die Punkte *X* und *Y* entsprechend der Aufgabenstellung, so liegt der Mittelpunkt der Verbindung *XY* in der Ebene, in der die genannten Flächenmittelpunkten liegen. Mittels Strahlensatz ist nachweisbar, dass der Mittelpunkt von *XY* nicht außerhalb der beschriebenen Fläche liegen kann.

Wählen wir einen beliebigen Punkt *P* außerhalb der beschriebenen Menge aus, so zeigen wir, dass bei jeder Auswahl eines Punktes *X* auf *AC* die Verbindung *XP* die Gerade *FH* nicht schneiden kann.

Wählen wir einen beliebigen Punkt *P* der Menge aus, so schneidet die Ebene durch die Punkte *A*, *C* und *P* die Gerade *FH* in einem Punkt *P'*. Die Gerade *P'P* schneidet wiederum die Gerade *AC*, da *P'P* nicht parallel zu *AC* liegt. Somit gibt es zu jedem Punkt *P* die Punkte $X = P''$ und $Y = P'$, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. ❑

Aufgabe. Gesucht ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller von einem festen Punkt *A* ausgehenden Sehnen in einem Kreis *K*.

Lösungshinweise: Wählen wir den Durchmesser als ausgehende Sehne mit den Endpunkten *A* und *B*, so ist der Mittelpunkt M_K des Kreises Element des geometrischen Ortes. „Wandert" der von *A* verschiedene Endpunkt entlang der Kreisperipherie in Richtung *A*, so erzeugen die Mittelpunkte eine „gewölbte" Bahn, sodass die Vermutung aufgestellt werden kann, dass der geometrische Ort der Kreis durch *A* und M_K mit halben Radius des gegebenen Kreises *K* ist.

Wir wählen einen beliebigen von *A* verschiedenen Punkt *S* auf dem Kreis. Nach Satz des Thales das Dreieck *ABS* rechtwinklig. Die Verbindung des Mittelpunktes der Sehne M_{AS} mit dem Mittelpunkt des Kreises M_K verläuft nach Strahlensatz parallel zur Sehne *BS*. Somit ist das Dreieck AM_KM_{AS} ebenfalls rechtwinklig. Also liegt M_{AS} auf dem THALESkreis über AM_K.

Wählen wir einen anderen Punkt *P* der Ebene, zeichnen die Gerade *AP* über *P* hinaus und markieren den Punkt *S‘* mit |*AP*| = |*PS‘*|, so liegt dieser Punkt entweder außerhalb oder innerhalb des beschriebenen Kreises. Dann liegt aber der Punkt *S‘* entsprechend außerhalb oder innerhalb des Kreises *K*, d.h. *P* gehört nicht zum gesuchten geometrischen Ort.

Wählt wir dagegen einen beliebigen Punkt *P* der beschriebenen Menge aus, so finden wir mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von *AP* über *P* hinaus und der Kreisperipherie den zugehörigen Punkt *S*, der *P* gemäß der Aufgabenstellung definiert. ❑

Aufgabe MO410946. Es sei *P* innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen *AP* bzw. *BP*, die beide auf derselben Seite der Geraden *AB* liegen.

Bestimmen Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn *P* die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

Lösungshinweise: Wählen wir *P* = *A*, so entartet das Dreieck AO_1P zum Punkt *A* und das Dreieck BO_2P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *AC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir *P* = B, so entartet das Dreieck BO_2P zum Punkt *B* und das Dreieck AO_1P fällt mit dem Dreieck *ABC* zusammen. Der Mittelpunkt der Seite *BC* gehört somit zum gesuchten geometrischen Ort. Wählen wir schließlich den Mittelpunkt der Seite AB als Punkt P, so liegt der Mittelpunkt von $\overline{O_1O_2}$ ebenfalls auf der Mittellinie des Dreiecks ABC. Damit können wir vermuten, dass die Mittellinie des Dreiecks ABC der gesuchte geometrische Ort ist. Der Beweis ist nun recht einfach zu vollenden. ❑

Zum Abschluss des KZM-Jahres noch eine Ungleichung zur mathematischen Unterhaltung: Beweisen Sie

$$4 < \sqrt{6+\sqrt{6+\cdots+\sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}} < 5$$

Impressum

Redaktion:	Dr. Norman Bitterlich
Anschrift:	Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail:	norman.bitterlich@t-online.de
	www.kzm-sachsen.de
Auflage:	40 Exemplare

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz ° VR1380 am Amtsgericht Chemnitz °