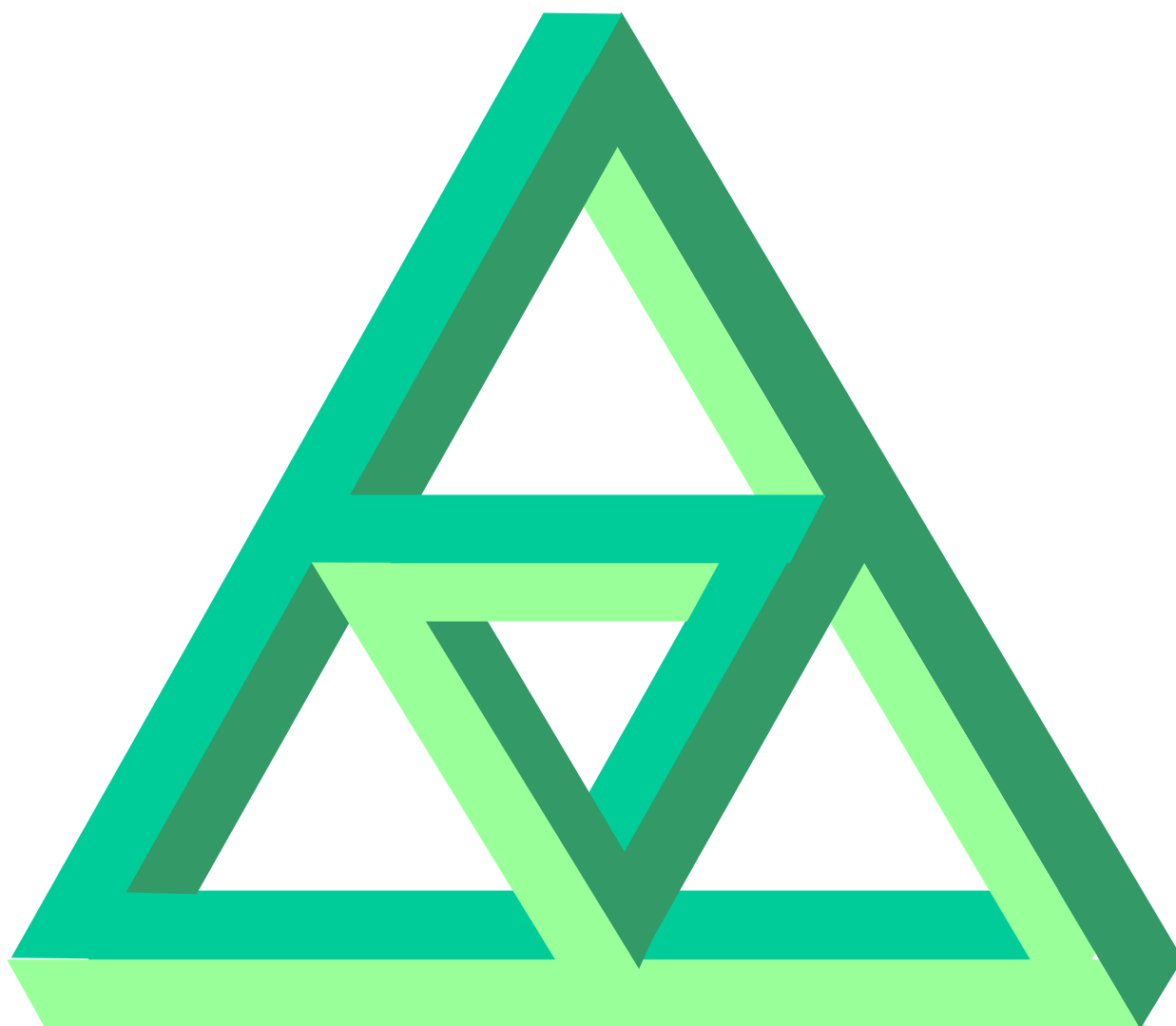


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft November 2021

20. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In den Kostproben wird regelmäßig über mathematische Wettbewerbe informiert. Passend zur Jahreszeit informieren wir in diesem Heft über einen mathematischen Adventskalender.

Ein Auszug aus einem alten Mathematik-Buch soll unterhaltsam Einblicke in der Mathematikgeschichte geben.

In diesem Heft greifen wir mit Thema 10 die Diskussion von Brüchen wie in Aufgabe **MO611013** auf. Zudem wenden wir uns – angeregt durch die Aufgabe **MO611014** – der Streckenberechnung in geometrischen Figuren zu. Da solche Fragestellungen in den höheren Runden der Mathematik-Olympiaden oft nur ein erster Schritt in Aufgaben mit Flächenberechnungen sind, empfehlen wir die intensive Nachbereitung dieser Thematik.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 10 – Beschränkte und kürzbare Brüche

Aufgabe 10.1 – MO611013³

- a) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $n \cdot z < 2021$ gilt.
- b) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen z mit der Eigenschaft, dass für alle positiven ganzen Zahlen n die Ungleichung $\frac{2n+1}{3n+2} < z$ gilt.

Lösungshinweise – Teilaufgabe a): In Vorbereitung der Aufgabe b) hilft dieser Teil, die erforderlichen Arbeitsschritte zu erkennen:

- Aufstellen einer Vermutung für die gesuchten Zahlen z ,
- Nachweis, dass für Zahlen dieser Vermutung die Ungleichung gilt,
- Nachweis, dass für alle anderen Zahlen die Ungleichung nicht gilt.

In Teilaufgabe a) können wir $z \leq 0$ vermuten.

- Für alle positiven ganzen Zahlen n gilt $\frac{2021}{n} > 0$ und folglich auch $\frac{2021}{n} > 0 \geq z$, womit die Ungleichung für alle $z \leq 0$ gilt.
- Wählen wir eine Zahl $z_0 > 0$, so finden wir für eine positive ganze Zahl n_0 mit $n_0 > \frac{2021}{z_0}$ die Ungleichung $n_0 \cdot z_0 > \frac{2021}{z_0} \cdot z_0 = 2021$. Damit ist gezeigt, dass die Aussage für alle Zahlen $z > 0$ nicht erfüllt ist.

Die gesuchte Lösungsmenge umfasst folglich alle nichtpositiven Zahlen z .

Teilaufgabe b) Um den Wertebereich des Bruchs auf der linken Seite der Ungleichung abzuschätzen, ist eine Wertetabelle hilfreich:

n	1	2	3	4
$\frac{2n+1}{3n+2}$	$\frac{3}{5} = 0.600$	$\frac{5}{8} = 0.625$	$\frac{7}{11} \approx 0.636$	$\frac{9}{14} \approx 0.643$

Mit den wenigen Werte können wir die Vermutung aufstellen, dass der Ausdruck $\frac{2n+1}{3n+2}$ nicht kleiner als 0.6 ist und mit zunehmenden n größer wird. Tatsächlich gilt:

$$6n^2 + 13 + 5 = (2n + 1) \cdot (3n + 5) < (2n + 3) \cdot (3n + 2) = 6n^2 + 13n + 6$$

also

$$\frac{2n+1}{3n+2} < \frac{2n+3}{3n+5}$$

³ Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

Außerdem finden wir die Abschätzung $\frac{2n+1}{3n+2} < \frac{2}{3}$, weil für alle positiven ganzen Zahlen n gilt:

$$6n + 3 = 3 \cdot (2n + 1) < 2 \cdot (3n + 2) = 6n + 4$$

Also sind die möglichen Zahlen z nach unten durch $\frac{2}{3}$ beschränkt, d.h. für alle reellen Zahlen z mit $z \geq \frac{2}{3}$ ist die gegebene Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt.

Wir zeigen nun noch, dass z nicht kleiner gewählt werden kann. Setzen wir beispielsweise $z = \frac{2}{3} - t$ mit einer positiven reellen Zahl t , so finden wir folgende Abschätzung:

$$6n + 3 = 3 \cdot (2n + 1) < (2 - 3t) \cdot (3n + 2) = 6n + 4 - 9nt - 6t$$

Also gilt

$$0 < 1 - 3t(3n - 2)$$

Wir erkennen nun, dass für alle n mit $3n - 2 > \frac{1}{3t}$, also $n > \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3t} + 2\right)$, diese Ungleichung aber nicht erfüllt ist. Somit kann z nicht kleiner gewählt werden und es gilt $z \geq \frac{2}{3}$. □

Aufgabe 10.2 (in Anlehnung an Aufgabe MO411033). Finden Sie alle reellen Zahlen z , für die die folgende Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist:

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 8}{16 \cdot n^2 - 1} > z$$

Lösungshinweise: Um eine Vermutung aufzustellen, berechnen wir einige Werte. Dabei beachten wir, dass im Klausurwettbewerb die Nutzung eines Taschenrechners nicht zugelassen sein könnte und beschränken uns deshalb (zumindest in der Lösungsdarstellung bei Hausaufgaben-Wettbewerben) beim Dividieren auf Abschätzungen:

$$\begin{array}{ll} n = 1 & \frac{48}{15} > 3 \\ n = 3 & \frac{224}{143} > \frac{224}{144} > \frac{216}{144} > \frac{3}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} n = 2 & \frac{120}{63} \approx 2 \\ n = 4 & \frac{360}{255} > \frac{340}{255} > \frac{4}{3} \end{array}$$

Wir vermuten, dass für alle reellen Zahlen $z \leq 1$ die geforderte Ungleichung für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist. Tatsächlich gilt,

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 \cdot n + 8}{16 \cdot n^2 - 1} = 1 + \frac{24 \cdot n + 9}{16 \cdot n^2 - 1} > 1 \geq z$$

weil Zähler und Nenner des verbleibenden Bruches für alle $n > 0$ positiv sind.

Wählen wir dagegen eine Zahl $z_0 = 1 + t$ mit einer positiven reellen Zahl t (also $z > 1$), so finden wir für ganze Zahlen n mit $\frac{24 \cdot n + 9}{16 \cdot n^2 - 1} < t$, dass der gegebene Bruch kleiner als z ist. Dass es für jedes t auch solche Zahlen n gibt, zeigen wir mit der Abschätzung $\frac{24 \cdot n + 9}{16 \cdot n^2 - 1} < \frac{24 \cdot n}{8 \cdot n^2} = \frac{3}{n} < t$. Somit ist für $n > \frac{3}{t}$ die Ungleichung für solche Zahlen n erfüllt, d.h. die Grenze kann nicht erhöht werden. \square

Hinweis: Mit Fertigkeiten bei der Grenzwertberechnung können wir zwar erkennen, dass der Wert des Bruches für große Werte n beliebig nahe bei 1 liegen wird, womit $z \leq 1$ vermutet werden kann. Es ist aber dennoch der Beweis zu führen, dass für kein Wert von n ein Wert kleiner als 1 erreicht werden kann. In diesem Fall ist es bereits im ersten Teil des Beweises ersichtlich.

Aufgabe 10.3 – MO490946.

- a) Man bestimme die kleinste positive ganze Zahl y , für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$ erfüllt ist.
- b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl y , für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ erfüllt ist.

Lösungshinweise - Teilaufgabe a) Der linke Teil der Ungleichung ist äquivalent zu $2010 \cdot x - 41 \cdot y > 0$ und der rechte Teil ist äquivalent zu $y - 49x > 0$.

Setzen wir also $t = 2010 \cdot x - 41 \cdot y$ und $u = y - 49 \cdot x$, so sind t und u positive ganze Zahlen. Stellen wir diese Gleichungen nach x und y um, erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= t + 41 \cdot u \geq 1 + 41 = 42 \\ y &= 49 \cdot t + 2010 \cdot u \geq 49 + 2010 = 2059 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $t = u = 1$, weswegen für mögliche Nenner $y \geq 2059$ gilt.

Weil mit $x = 42$ und $y = 2059$ aber tatsächlich $\frac{41}{2010} < \frac{42}{2059} < \frac{1}{49}$ erfüllt ist, lautet die Antwort der Teilaufgabe a) $y = 2059$. \square

Wir erkennen in dieser Lösung, dass sowohl der Zähler als auch der Nenner leicht als Summe der beiden gegebenen Zähler bzw. Nenner ermittelt werden können: $42 = 41 + 1$ und $2059 = 2010 + 49$. Wir finden die Idee des dazwischen liegenden Bruchs bereits in einer früheren MO-Aufgabe:

Aufgabe 10.4 – MO411043. Für drei reelle Zahlen a, b, c sei $0 < a < b < c$ vorausgesetzt. Beweisen Sie, dass dann gilt: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$

Lösungshinweise: Wir erkennen zunächst für $x, y, z, w > 0$ die Ungleichungskette

$$\frac{x}{y} < \frac{z}{w} \rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w} < \frac{z}{w}$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} < \frac{z}{w} &\Rightarrow xw < yz \Rightarrow xy + xw < xy + yz \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+w} \\ \frac{z}{w} > \frac{x}{y} &\Rightarrow yz > xw \Rightarrow zw + yz > zw + xw \Rightarrow \frac{z}{w} > \frac{x+z}{y+w} \end{aligned}$$

Wegen $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt[3]{s}} = \sqrt[6]{s}$ für alle positiven reellen Zahl s folgt aus $a < b < c$ auch $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[3]{c}}$ und damit wie behauptet $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} < \frac{\sqrt{a+\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{b}}} < \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[3]{b}} < \frac{\sqrt{b+\sqrt{c}}}{\sqrt[3]{b+\sqrt[3]{c}}} < \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[3]{c}}$ □

Zudem wird in der Aufgabe für Kl. 10 die Frage nach kleinstem Nenner beantwortet:

Aufgabe – MO491046. Zwei verschiedene, vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ mit $p, q, r, s > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ seien so gewählt, dass sie folgende Eigenschaft besitzen: Für jeden Bruch $\frac{x}{y}$ mit $x, y > 0$ und $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ (1) gilt $y > \max(q, s)$, d.h. der Nenner y ist sowohl größer als der Nenner q als auch größer als der Nenner s .

- Beweisen Sie, dass $\frac{x}{y} = \frac{p+r}{q+s}$ ein Bruch mit kleinstmöglichem positiven Nenner ist, der (1) erfüllt.
- Beweisen Sie, dass für Brüche mit dieser Eigenschaft stets $qr - ps = 1$ gilt.

Einen anderen Aufgabentyp mit Brüchen finden wir in

Aufgabe 10.5 – MO410933. Für jede natürliche Zahl n ist der Bruch

$$\frac{n^3 - 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 3}{n^3 + 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 3}$$

kürzbar. Beweisen Sie diese Aussage!

Lösungshinweise: Da der Faktor 3 sowohl im Zähler als auch im Nenner auffällt, vermuten wir, dass auch $n^3 + 2 \cdot n$ für alle n durch 3 teilbar ist. Dies ist tatsächlich erfüllt, denn wir finden

$$n^3 + 2 \cdot n = n^3 - n + 3 \cdot n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot n$$

Weil das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets durch 3 teilbar ist, kann also der gegebene Bruch für alle natürlichen Zahlen n mit 3 gekürzt werden. □

Thema 11 – Streckenberechnung

Vorbemerkung: In geometrischen Aufgabenstellungen wird häufig keine Skizze gezeigt. Es sollte bei der Lösungsdarstellung deshalb stets mit einer (sorgfältigen) Skizze begonnen werden, in der alle gegebenen Punkte eingezeichnet sind. Werden Hilfspunkte benötigt, sind deren Konstruktion im Text zu beschreiben.

In computer-gestützten Lösungsdarstellungen genügen einfache Grafikrealisierungen, solange die wichtigen Aussagen erkennbar sind. Wenn nicht ausdrücklich laut Aufgabenstellung verlangt, sollte der allgemeiner Fall skizziert werden. Die Verwendung von Spezialfällen (z.B. ein gleichseitiges Dreieck statt eines allgemeinen spitzwinkligen Dreiecks) könnte zu Vermutungen führen, die sich allgemein nicht bestätigen lassen. Gelingt jedoch kein erfolgversprechender Lösungsansatz, so kann die erfolgreiche Behandlung von Spezialfällen mit Punkten honoriert werden.

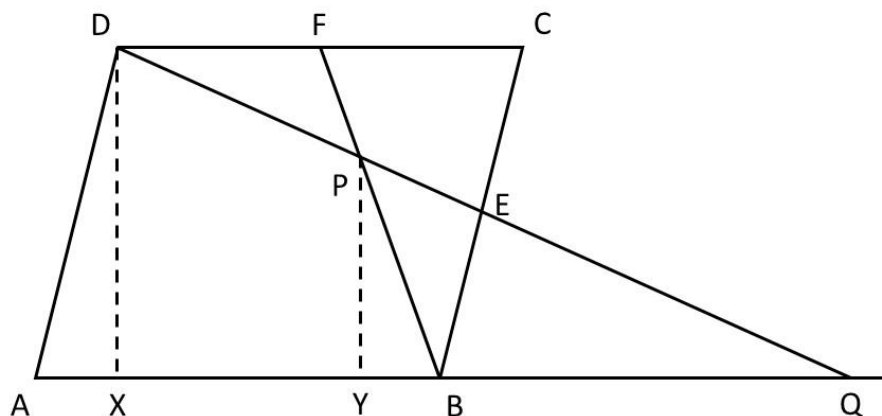
Zur Streckenberechnung in geometrischen Figuren erweisen sich Verhältnisgleichungen infolge von Ähnlichkeit oder mittels Anwendung eines Strahlensatzes oft als nützlich, wie auch in:

Aufgabe 11.1 – MO611014. Das Viereck $ABCD$ sei ein Parallelogramm, bei dem der Abstand der parallelen Geraden AB und CD gleich 6 ist. E und F seien die Mittelpunkte der Seiten \overline{BC} und \overline{CD} . Die Gerade DE schneide die Strecke \overline{BF} im Punkt P und die Gerade AB im Punkt Q .

- Zeigen Sie, dass $|AQ| = 2 \cdot |AB|$ gilt.
- Zeigen Sie, dass P auf der Geraden AC liegt, und bestimmen Sie die Länge des Abstands von P zur Geraden AB .

Lösungshinweise -

Teilaufgabe a) Die Dreiecke CDE und BQE sind nach dem Kongruenzsatz (wsw) kongruent, da $|BE| = |EC|$ gilt und die an \overline{BE} und \overline{EC} anliegenden Innenwinkel nach dem Wechselwinkelsatz an geschnittenen Parallelen bzw. als Scheitelwinkel jeweils übereinstimmen. Also gilt $|AQ| = |AB| + |BQ| = |AB| + |CD|$, woraus die Behauptung folgt, da $ABCD$ ein Parallelogramm ist.



Teilaufgabe b) Zunächst betrachten wir den Schnittpunkt P der Geraden DQ und BF . Aus der ersten Teilaufgabe folgt durch Anwendung des Strahlensatzes, dass P die

Strecken \overline{BF} und \overline{DQ} jeweils im Verhältnis 1 : 2 teilt, da $|DF| = \frac{1}{2} \cdot |BQ|$ erfüllt ist und folglich $|FP| : |PB| = |DF| : |BQ| = |DP| : |PQ| = 1 : 2$ gilt. Damit erhalten wir $|PQ| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$.

Nun betrachten wir den Schnittpunkt der Geraden AC und DQ . Um nicht die Behauptung bereits vorauszusetzen, nennen wir diesen Schnittpunkt P' und wollen zeigen, dass P' mit P zusammenfällt. Aus der erneuten Anwendung des Strahlensatzes mit dem Zentrum P' folgt, dass P' die Strecken \overline{AC} und \overline{DQ} jeweils im Verhältnis 1 : 2 teilt, da die Gleichungen $|P'C| : |P'A| = |DC| : |AQ| = |DP'| : |P'Q| = 1 : 2$ gelten und damit $|P'Q| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$ ist. Somit sind P und P' identisch, denn beide Punkte liegen auf DQ und haben den gleichen Abstand zu Q . P liegt daher auch auf AC .

Fällen wir nun die Lote von D und P auf AQ und bezeichnen deren Fußpunkte mit X bzw. Y , so sind die Dreiecke XQD und YQP ähnlich (www). Somit erhalten wir die Verhältnisgleichung $|YP| : |XD| = |QP| : |QD|$.

Wegen $|XD| = 6$ und $|QP| = \frac{2}{3} \cdot |DQ|$ finden wir für den Abstand des Punktes P von der Geraden AQ : $|YP| = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. □

Aufgabe 11.2 – MO581032. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 12. Der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} wird mit M bezeichnet. Der Punkt P liegt auf der Strecke \overline{BC} und der Punkt Q auf der Strecke \overline{AC} .

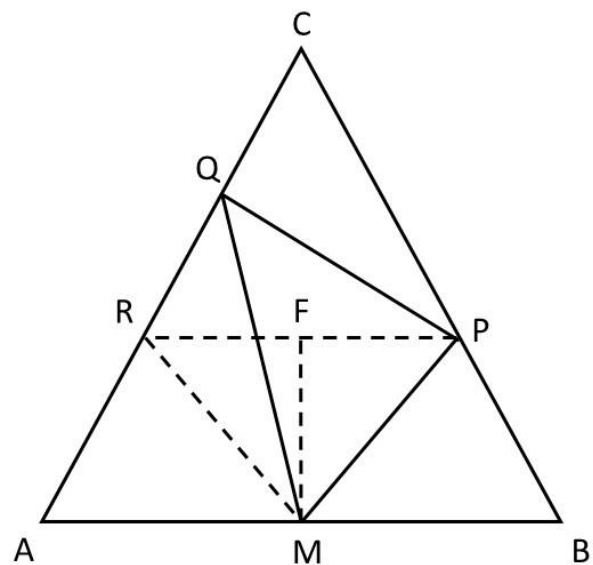
- Sei zunächst $|BP| = 4$ und $|AQ| = 9$. Beweisen Sie, dass $|\angle PMQ| = 60^\circ$ gilt.
- Bestimmen Sie $x = |CQ|$ für alle Lagen von P (auf der Strecke \overline{BC}) und Q (auf der Strecke \overline{AC}), für die $|\angle PMQ| = 60^\circ$ und $|\angle PQC| = 90^\circ$ gilt.

Lösungshinweise – Teilaufgabe a) Die Dreiecke BPM und AMQ sind ähnlich, weil sie in der Größe der Winkel

$$|\angle PBM| = |\angle MAQ| = 60^\circ$$

und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen:

$$|BP| : |BM| = |AM| : |AQ| = 2 : 3.$$



Daher stimmen die Größen der beiden anderen einander entsprechenden Innenwinkel dieser Dreiecke überein: $|\angle BMP| = |\angle AQM|$ und $|\angle MPB| = |\angle QMA|$. Da die

Innenwinkelsumme in Dreiecken 180° beträgt und der Winkel $\angle AMB$ ebenfalls 180° groß ist, hat der gesuchte Winkel $\angle PMQ$ die Größe 60° .

Teilaufgabe b) Wenn $\angle PQC$ ein rechter Winkel ist, dann ist PQ parallel zur von B ausgehenden Höhe des Dreiecks ABC und je weiter P von B entfernt ist, desto kleiner ist der Winkel $\angle PMQ$. Liegt P' zwischen P und C und ist Q' der Fußpunkt des Lotes von P' auf die Gerade AC , so liegen P' und Q' im Inneren des Winkels $\angle PMQ$, es gilt also $|\angle PMQ| > |\angle P'MQ'|$.

Damit gibt es höchstens eine Lage von P und Q wie in der Aufgabenstellung gefordert. Wir zeigen nun, dass für $x = |CQ| = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$ und $|CP| = 2 \cdot x$ die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind:

Wegen $1 < \sqrt{3} < 2$ folgt $3 < |CQ| < 6$ und auch $6 < |CP| < 12$, sodass P und Q wie gefordert auf den entsprechenden Dreiecksseiten liegen. Die Dreiecke BPM und AMQ sind ähnlich, weil sie in den Größen der Winkel $|\angle PBM| = |\angle MAQ| = 60^\circ$ und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen:

$$|BP|:|BM| = (6 \cdot \sqrt{3} - 6):6 = \sqrt{3} - 1$$

$$|AM|:|AQ| = 6 : (3 + 3 \cdot \sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} - 1$$

Weiter schließen wir wie bei Teilaufgabe a) auf $|\angle PMQ| = 60^\circ$. Offensichtlich ist auch $|\angle PQC| = 90^\circ$, da wegen $|PC| = 2 \cdot |QC|$ das Dreieck PCQ ein halbes gleichseitiges Dreieck ist. Es gibt also nur eine mögliche Lage für P und Q mit $|\angle PMQ| = 60^\circ$ und $|\angle PQC| = 90^\circ$, und für diese gilt $x = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$. \square

Oft lassen sich Streckenlängen über Gleichungen bestimmen. Weisen wir zunächst nach, dass die Dreiecke AMQ und BPM ähnlich sind (www), so folgt aus dem Verhältnis einander entsprechender Seiten dieser Dreiecke nacheinander (mit $x = |CQ|$):

$$|AQ|:|AM| = |BM|:|BP|$$

$$(12 - x) : 6 = 6 : (12 - 2 \cdot x)$$

also

$$(12 - x) \cdot (12 - 2 \cdot x) - 36 = 2(x^2 - 18 \cdot x + 54) = 0$$

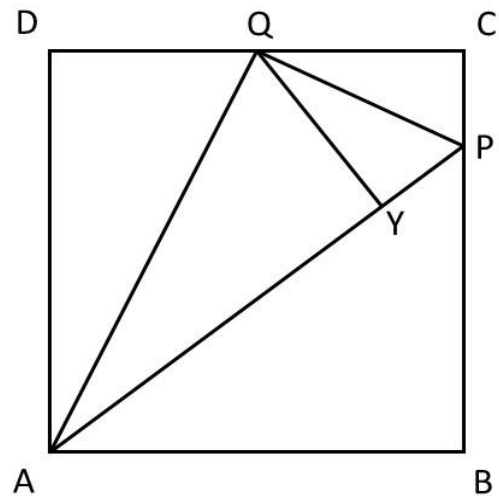
Dafür finden wir über die Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen $x_{1,2} = 9 \pm 3 \cdot \sqrt{3}$. Für $x_1 = 9 + 3 \cdot \sqrt{3} > 9 + 3 = 12$ läge der Punkt Q außerhalb der Seite \overline{AC} . Damit entfällt diese Möglichkeit und es bleibt als einziger Lösungskandidat $|CQ| = x_2 = 9 - 3 \cdot \sqrt{3}$. Nun müssen wir aber noch zeigen, dass dies tatsächlich Lösung ist.

Aufgabe 11.3 – MO480924. Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a , Q der Mittelpunkt der Seite \overline{CD} und P ein Punkt auf der Seite \overline{BC} derart, dass $|\angle PAQ| = |\angle QAD|$ gilt.

- Bestimmen Sie den Abstand des Punkts Q von der Geraden AP in Abhängigkeit von der Länge a der Quadratseite.
- Beweisen Sie, dass $|\angle AQP| = 90^\circ$ gilt.

Lösungshinweise: Teil a) Sei Y der Fußpunkt des Lotes von Q auf AP . Wegen

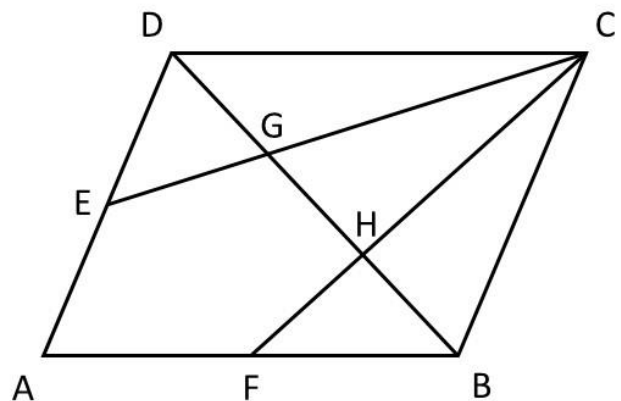
- $|\angle QAD| = |\angle PAQ| = |\angle YAQ|$,
- der beiden rechten Winkel und
- der gemeinsamen Seite AQ



folgt die Ähnlichkeit der Dreiecke AQD und AYQ nach Kongruenzsatz SWW. Also gilt für den gesuchten Abstand $|QY| = |QD| = \frac{1}{2}$. \square

Aufgabe 11.4 – MO090923. Es ist zu beweisen: Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten \overline{AB} und \overline{AD} , so teilen die Schnittpunkte dieser Verbindungsstrecken mit der Diagonalen \overline{BD} diese in drei gleich lange Teilstrecken.

Lösungshinweise: Es sei E der Mittelpunkt der Seite \overline{AD} , F der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} , G der Schnittpunkt der Strecken \overline{EC} und \overline{BD} und H der Schnittpunkt der Strecken \overline{FC} und \overline{BD} . Die Dreiecke FBH und CHD sind ähnlich, denn sie stimmen in den Winkeln überein (Scheitelwinkel und Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen). Wegen $|FB| : |DC| = 1 : 2$ gilt auch $|HB| : |HD| = 1 : 2$.



Wegen $|HB| + |HD| = |BD|$ folgt somit $|HB| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

In gleicher Weise folgern wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EGD und CGB (www) die Gleichung $|GD| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

Dann gilt aber auch $|HG| = |BD| - |GD| - |BH| = \frac{1}{3} \cdot |BD|$.

Somit sind die drei Teilstrecken auf \overline{BD} alle gleich lang. \square

Themen 10 und 11 – Aufgaben

Aufgabe 10.6 – MO490946.

a) (s. Thema 10)

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $qr - ps = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Bestimmen Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl y , für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette $\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$ erfüllt ist.

Aufgabe 10.7 – MO411033. Wie viele ganze Zahlen n mit $\frac{2^{2005}}{45} < n \leq 2^{2005}$ gibt es, welche in der Form $2^a \cdot 45^b$ mit ganzen Zahlen a, b darstellen lassen?

Aufgabe 10.8 – MO411033. Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n , für die der Bruch

$$\frac{16 \cdot n^2 + 24 + 8}{16 \cdot n^2 - 1}$$

gekürzt werden kann!

Aufgabe 11.5 – MO510924. Es sei ABC ein Dreieck mit $|\overline{AC}| < |\overline{BC}|$. Die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei C schneide die Seite \overline{AB} in einem Punkt P , die Außenwinkelhalbierende desselben Winkels schneide die Gerade AB in einem Punkt Q . Die Punkte X und Y seien die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden AC bzw. BC .

- Beweisen Sie, dass das Dreieck PCQ rechtwinklig ist, und dass $|\overline{PX}| = |\overline{PY}|$ gilt.
- Beweisen Sie, dass das Verhältnis der Längen der Strecken \overline{AP} und \overline{BP} mit dem Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke APC und BPC übereinstimmt.

Aufgabe 11.6 – MO570935.⁴ Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A_{ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von BC und P der Mittelpunkt von \overline{AM} . Weiter schneide die Gerade BP die Seite \overline{AC} in einem Punkt Q .

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $MCQP$.

Aufgabe 11.7 – MO580932. Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit Spitze C ist M der Mittelpunkt der Basis \overline{AB} und P ein von A und B verschiedener Punkt der Strecke \overline{AB} . Die Senkrechte in P auf AB schneidet die Gerade BC in Q und die Gerade AC in R .

Zeigen Sie, dass dann stets $|PQ| + |PR| = 2 \cdot |MC|$ erfüllt ist.

⁴ Aufgabe 2-4 des Sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben⁵

Für die Aufgabe 2-1 des aktuellen sächsischen Korrespondenzzirkels Mathematik der Klassenstufen 9/10 finden wir in den Aufgaben der Mathematik-Olympiade eine verallgemeinernde Formulierung:

Aufgabe MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Eine Lösungsdiskussion werden wir dazu im Dezember-Heft vorstellen.

Aufgabe. Man beweise für alle natürlichen Zahlen m und n die Ungleichung

$$Q(m + n) \leq Q(m) + Q(n)$$

(dabei bezeichnet $Q(x)$ die Quersumme der natürlichen Zahl x).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach. Wir beobachten die Eigenschaft $Q(m + 1) = Q(m) + 1$, falls für den Nachfolger von m kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Folglich wird es gelingen, die Behauptung durch n -malige Addition von 1 schrittweise zu beweisen.

Dagegen wird in den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien a_0, \dots, a_k die Ziffern der Zahl m und b_0, \dots, b_k die Ziffern der Zahl n und c_0, \dots, c_k, c_{k+1} die Ziffern der Summe $m + n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Entsprechend des Algorithmus der Addition gilt für jede Dezimalstelle

$$c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0$$

$$c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1$$

...

$$c_{k+1} = u_k$$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Addieren wir alle Zeilen, wird die Behauptung bestätigt:

$$\begin{aligned} Q(m + n) &= c_0 + \dots + c_{k+1} = \\ &a_0 + \dots + a_k + b_0 + \dots + b_k - 9 \cdot (u_0 + \dots + u_k) \leq Q(m) + q(n) \end{aligned}$$

□

⁵ Ergänzung zum Sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10, Aufgabe 2-1, siehe https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Lassen sich bei Aufgaben mit Quersummen die Lösungen über die Zifferndarstellung erarbeiten, kommt es im Allgemeinen zu einer Gleichung mit mehreren Unbekannten, die sich durch geschickte Fallunterscheidung lösen lässt.

Aufgabe. Finden Sie alle positiven ganzen Zahlen n , für die das Quadrat der Quersumme gleich der Quersumme des Quadrates von n ist, also $(Q(n))^2 = Q(n^2)$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei n eine solche gesuchte mit $(Q(n))^2 = Q(n^2)$. Wir verwenden die Eigenschaft $Q(n) \leq n$ und die für positive ganze Zahlen r und s oben bewiesene Ungleichung $Q(r + s) \leq Q(r) + Q(s)$.

Betrachten wir einstellige Zahlen n , so gilt $Q(n) = n$ und deshalb muss auch $n^2 = Q(n^2)$ gelten. Das ist aber nur für $n^2 < 10$ möglich, also $n = 1, 2, 3$.

Setzen wir für eine zweistellige Zahl $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b ($a > 0$), so finden wir einerseits

$$Q(n)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und andererseits

$$Q(n^2) = Q(100a^2 + 20ab + b^2) \leq Q(a^2) + Q(2ab) + Q(b^2) \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Damit das Gleichheitszeichen gilt müssen alle Summanden jeweils kleiner als 10 sein. Das bedeutet aber, nur die Zahlen 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 und 31 genügen der geforderten Gleichung.

Sind nun a_k, \dots, a_1, a_0 die Ziffern der $(k + 1)$ -stelligen Zahl n , also $n = \sum_{i=0}^k 10^i \cdot a_i$ mit $Q(n) = a_k + \dots + a_1 + a_0$, so lässt sich die Aussage verallgemeinern: Alle Zahlen n , deren Ziffern die folgenden Bedingungen erfüllen, sind Lösung der geforderten Gleichung: $a_i^2 < 10$ für alle $i = 0, \dots, k$ und $2 \cdot a_i \cdot a_j < 10$ für alle $i, j = 0, \dots, k$ mit $i \neq j$. □

Oft lassen sich in Aufgaben mit Quersummen die Terme jedoch nicht auf die Zifferndarstellung umformulieren. Dann hilft meist nur eine Abschätzung.

Aufgabe MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen n , die wie üblich im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = Q(Q(n))$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + \text{ggT}(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $Q(Q(n)) \geq 16$. Da n neunstellig ist, gilt $Q(n) \leq 81$. Die Zahl zwischen 1 und 81 mit der größten Quersumme ist 79. Für alle neunstelligen Zahlen n gilt folglich

$$1 \leq Q(Q(n)) \leq 16 = Q(79).$$

Insgesamt erhalten wir aus beiden Abschätzungen $Q(Q(n)) = 16$. Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $Q(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

Fall 1: Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.

Fall 2: Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Im Fall (1) lassen sich genau 9 und im Fall (2) genau $(9 \cdot 8 : 2 =)$ 36 solche neunstellige Zahlen bilden. Es gibt also 45 neunstellige Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $\text{ggT}(n; 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus Fall (2), die auf 8 enden. Also finden wir als die gesuchte Anzahl $(45 - 8 =)$ 37. \square

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

$$12; 1212; 12121212; 1212121212121212; \dots$$

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhalten wir durch Multiplikation mit einem Faktor der Form (in geeigneter Länge) $100\dots001$ die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch $100\dots001 \cdot t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. \square

Aufgabe. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q ?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen n .

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
 Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
 Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ (d.h. $n = \underbrace{1 \dots 1}_{9\text{-mal}}$) fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Kommen wir mit diesen Beispielen schon auf einen geeigneten Ansatz? Wohl eher nicht! Ohne Herleitung sei nur angegeben: Für $p^2 = q$ erfüllt zum Beispiel die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^p 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Gemeint sind also folgende Zahlen:

$$\begin{aligned} p = 1 &\Rightarrow k = 100 && \Rightarrow n = 10000 \\ p = 2 &\Rightarrow k = 10100 && \Rightarrow n = 102010000 \\ p = 3 &\Rightarrow k = 100010100 && \Rightarrow n = 10002020102010000 \end{aligned}$$

Wir müssen nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p -mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$ -mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. \square

Aufgabe. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n , deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot \max\{a, b\} \geq a + b$ gilt, können wir jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch zusätzliche Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachten wir für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11\dots11}_{k\text{-mal}} \underbrace{22\dots22}_{n\text{-mal}}$$

Wählen wir $k = 2^n - 2n$, so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme ebenfalls $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^n - 2n + 2n = 2^n$. \square

Mathematik-Adventskalender

Auf den Internetseiten⁶ der **Deutschen Mathematiker-Vereinigung e.V.** lesen wir: Die Landschaft der Mathematikwettbewerbe wird immer vielfältiger. Neben der traditionellen Mathematik-Olympiade, dem Bundeswettbewerb Mathematik oder auch dem größten mathematischen Schülerwettbewerb, dem Känguru der Mathematik, gibt es viele weitere, wie die Mathematik-Adventskalender.

⁶ www.mathematik.de/wettbewerbe, es werden hier Auszüge von dieser und von da verlinkten Internetseiten dargestellt

Das Angebot unter **www.mathe-im-advent.de** bietet jedes Jahr vorweihnachtlichen Mathezauber für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 4 bis 6 und 7 bis 9. Auch Früh- und Spätstartende ab Klasse 2 bzw. bis Klasse 10 können teilnehmen. Täglich kann man alleine oder im Klassenverband die beliebten Mathewichtel-Aufgabengeschichten aus dem Weihnachtsdorf lösen. Jährlich begeistern sich ca. 150.000 Kinder, Jugendliche, Eltern und Lehrkräfte für die Knobelaufgaben. Mitmachen lohnt sich!

Anspruchsvoller und sehr empfehlenswert ist der **MATH+ Adventskalender**, denn er bietet pfiffigen Jugendlichen ab der 10. Klasse sowie Studierenden, Lehrkräften und allen Interessierten faszinierende Einblicke in aktuelle Mathematik-forschung und den Berufsalltag von Mathematikerinnen und Mathematikern. Mit den kniffligen Aufgaben wird eingeladen, über den Schulstoff hinaus die Kraft und Schönheit der Mathematik zu entdecken.

Die Mathe-Adventskalender stehen unter der Schirmherrschaft der Bundesministerin für Bildung und Forschung, ANJA KARLICZEK MdB. Die Schirmherrin schreibt:

„Ich freue mich sehr, dass die Mathe-Adventskalender jedes Jahr so viele Schülerinnen und Schüler zur Beschäftigung mit Mathematik motivieren und herausfordern. Denn es ist für unser Land sehr wichtig, dass wir junge Menschen für MINT-Fächer gewinnen. Ich wünsche den Mathe-Adventskalendern viel Erfolg, spannende Aufgaben und viele neugierige und aktive Teilnehmerinnen und Teilnehmer.“

Jede interessierte Person kann teilnehmen und unabhängig vom Gewinnspiel die Aufgaben lösen. Grundsätzlich können die Aufgaben gelöst, die man möchte. Bei der Bewertung wird aber das Alter berücksichtigt.

Für die Teilnahme ist ausschließlich eine einfache Registrierung erforderlich. Mit Angabe eines noch nicht vergebenen Benutzernamens, der Wahl eines Passwortes und einer echten E-Mail-Adresse kann jede Person ein Benutzerkonto einrichten. Die Registrierung ist selbstverständlich kostenlos und ab dem 1. November bis einschließlich 31. Dezember möglich.

Aufgaben des MATH+ Adventskalenders. Vom 1. bis 23. Dezember wird täglich um 16 Uhr (MEZ) eine Aufgabe auf dieser Webseite veröffentlicht. Die Aufgabe am 24. Dezember wird um 10 Uhr (MEZ) veröffentlicht. Die Aufgaben sind Multiple-Choice-Aufgaben mit zehn vorgegebenen Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Das Team des MATH+ Adventskalenders achtet darauf, dass alle Aufgaben für Zehntklässler geeignet sind, d. h. es werden keine mathematischen Vorkenntnisse vorausgesetzt, die erst später in der Schule oder gar an der Universität vermittelt werden.

Um eine Lösung einreichen zu können, muss man eingeloggt sein. Der Einsendeschluss für alle Aufgaben ist der 31. Dezember um 23:59:59 Uhr (MEZ). Bis zu diesem Zeitpunkt können eingereichte Antworten auch geändert werden. Es werden jedoch Punkte für richtige Antworten entsprechend dem Zeitpunkt der Einreichung bzw. der letzten Änderung vergeben:

So gibt es 5 Punkte, wenn die Lösungsabgabe bzw. die letzte Änderung der Antwort bis 23:59:59 Uhr (MEZ) am Tag der Veröffentlichung der Aufgabe (bzw. nach Wochenende am darauffolgenden Montag) erfolgte. Erfolgt die Lösungsabgabe bzw. die letzte Änderung bis 17:59:59 Uhr (MEZ) am folgenden Tag (bzw. nach Wochenenden am darauffolgenden Dienstag), so werden noch 3 Punkte vergeben. Für alle Lösungsabgaben bzw. letzte Änderungen bis 23:59:59 Uhr (MEZ) am 31.12.2021 gibt es noch einen Punkt.

Mitmachen lohnt nicht nur, sondern bereitet auch täglich mathematisches Vergnügen!

Im Aufgaben-Archiv sind zudem die Aufgaben der letzten Jahre zugänglich. Hier als Beispiel die Aufgabe vom 01.12.2020:

In einer alten Wichtelmütze liegen genau 80 Euroscheine. Der Weihnachtsmann sagt zu Knecht Ruprecht: „Wenn du zufällig 69 Scheine aus der Mütze ziehst, dann befinden sich darunter garantiert

- ein 100 €-Schein,
- drei 50 €-Scheine,
- fünf 20 €-Scheine,
- sieben 10 €-Scheine und
- neun 5 €-Scheine.

Was ist der Gesamtwert aller Geldscheine in der Mütze?

Als Lösungsmöglichkeiten werden die 10 Werte vorgeschlagen: 2500 € / 2845 € / 2075 € / 2465 € / 2920 € / 2695 € / 2150 € / 2330 € / 2285 € / 2710 €,

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieter

Verlag von August Stein, Potsdam 1895⁷.

⁷ Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp **Mainzer Fraktur** verwendet.

Zweiter Curfus

Abchnitt XXII
Von den Gleichungen höheren Grades

§332

Lehrsatz. Wenn alle Coefficienten einer numerischen Gleichung ganze Zahlen sind, so sind ihre reellen Wurzeln entweder ganze oder irrationale Zahlen.

Beweis. Die Gleichung sei

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_0 = 0$$

und alle Coefficienten ganze Zahlen. Wäre eine ihrer Wurzeln ein eigentlicher Bruch $\frac{p}{q}$, so müßte

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_0 = 0$$

sein. Multipliciert man mit q^{n-1} , so wäre

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} q + a_2 p^{n-2} q^2 + \dots + a_0 q^{n-1} = 0$$

Dies ist aber unmöglich, da das erste Glied ein Bruch, alle folgenden ganze Zahlen sind.

§333

Auffinden der rationalen Wurzeln

Die rationalen Wurzeln einer numerischen Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten sind nach d. v. S ganze Zahlen. Da nun das constante Glied alle Wurzeln als Factoren enthält, so sind die etwa vorhandenen rationalen Wurzeln unter den Teilern dieses Gliedes zu suchen. Die Prüfung, ob einer dieser Teiler eine Wurzel ist, kann auf verschiedenem Wege erfolgen.

1. Wenn man den zu prüfenden Teiler für x in die Gleichung substituirt, so ergibt sich ohne Weiteres, ob es der Gleichung genügt. Man führt die nötige Rechnung mit Vorteil in folgender an einem Beispiel erläuterten Weise auf. Die Gleichung sei:

$$x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 43x + 42 = 0$$

Um den Wert der linken Seite für irgend ein x zu finden, rechnet man in der durch die Klammern angedeuteten Weise:

$$[((x + 7)x - 7)x - 43]x + 42$$

Das konstante Glied der Gleichung hat den Teiler (-7). Da nun dieser Ausdruck für $x = -7$ gleich null wird, ist (-7) eine Wurzel.
Sind die zu prüfende Teiler große Zahlen, ist diese Rechnung daher beschwerlich, so benutzt man lieber folgende Methode:

- Man dividiert das konstante Glied durch den zu prüfenden Teiler, addiert zum Quotienten den Coefficienten des vorletzten Gliedes, dividiert wieder durch jenen Teiler, addiert zu diesem Quotienten den vorhergehenden Coefficienten und führt sofort bis zum höchsten Gliede. Erscheint dann 0, so ist der Teiler eine Wurzel. Denn ist a der für das obige Beispiel zu prüfende Teiler des konstanten Gliedes, so muß

$$a^4 + 7a^3 - 7a^2 - 43a + 42 = 0$$

sein. Daher kann auch geschrieben werden:

$$a^4 \left\{ 1 + \left[7 + \left(-7 + \left(-43 + \frac{42}{a} \right) : a \right) : a \right] : a \right\} = 0$$

wodurch die obige Regel gerechtfertigt ist.

Offenbar muß bei dieser Rechnung jeder der Quotienten eine ganze Zahl sein, soll das Resultat 0 werden. Man ist also der weiteren Prüfung mit dem Teiler a überhoben, sobald eine der Divisionen nicht aufgeht.

- Eine dritte Prüfungsmethode besteht in der Division der Gleichung durch den Faktor $(x - a)$. Geht die Division auf, so ist $(x - a)$ ein Wurzelteiler und a eine Wurzel. Der erhaltene Quotient ist dann das Produkt aller übrigen Wurzelfaktoren, ein Polynom vom $(n-1)$ ten Grade, und für die weitere Prüfung auf eine andere rationale Wurzel bequemer als die gegebene Gleichung n ten Grades.

(Die Partialdivision wurde vorgerechnet und als Ergebnis $x^3 + x^2 - 15x + 25$ angegeben.)

Inhaltsverzeichnis Heft November 2021

Vorwort	2
Thema 10 – Beschränkte und kürzbare Brüche.....	3
Thema 11 – Streckenberechnung	7
Themen 10 und 11 – Aufgaben.....	11
Quersummen in Wettbewerbsaufgaben	12
Mathematik-Adventskalender	15
In alten Mathe-Büchern geblättert	17

Aufgabenbezogene Themen zur Nach- und Vorbereitung von Wettbewerben der Mathematik-Olympiade

Ausgabe ⁸	Nr.	Thema	Aufgabenbezug
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024
Jan./Okt. 2021	Thema 01	Funktionalgleichungen	MO611012 MO601016

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de

Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

⁸ Alle Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter <http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html> erhältlich.