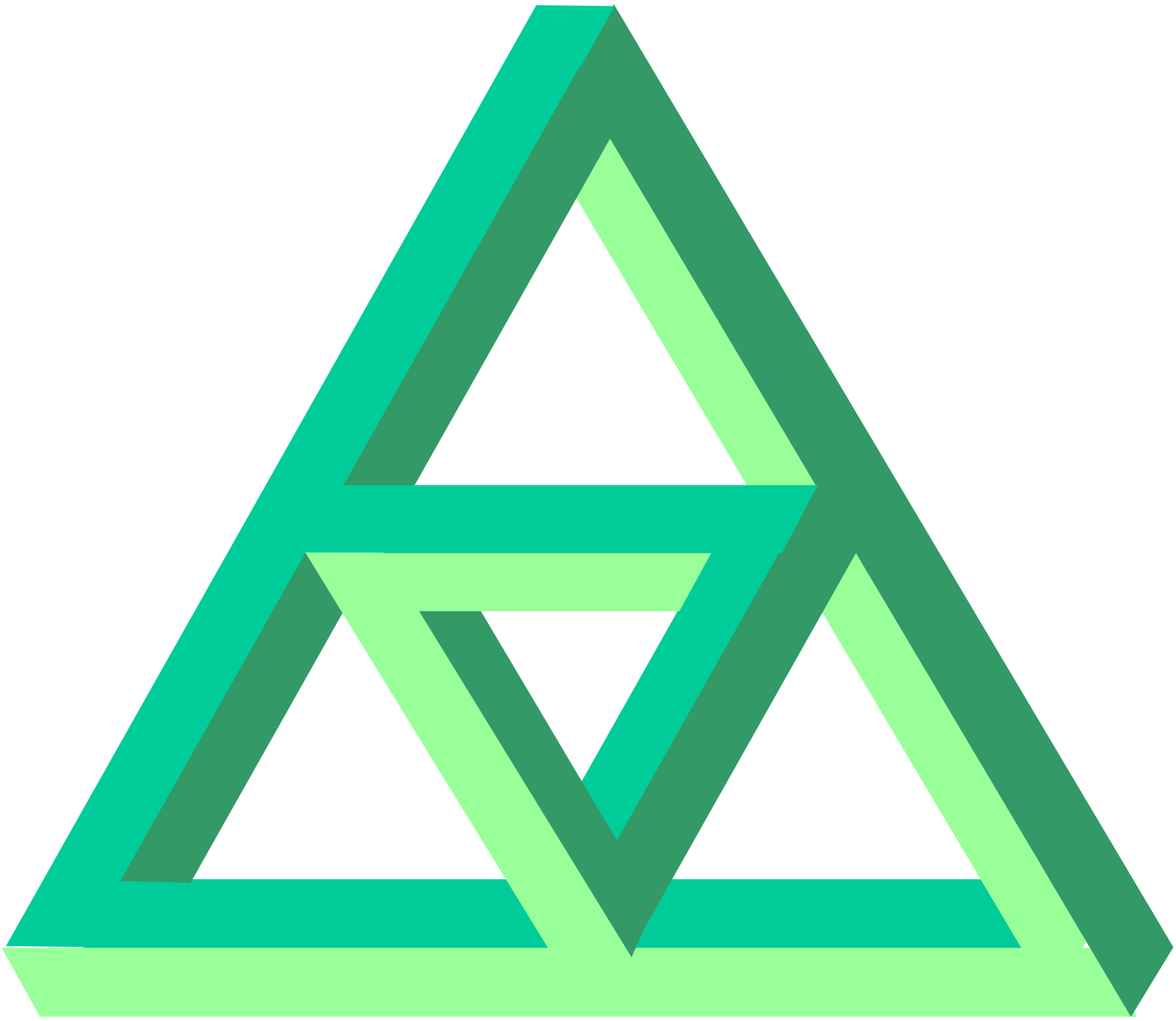
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 02/22 – März 2022

21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt. Lösungseinsendungen zu diesen Aufgaben werden individuell bewertet und beantwortet. Die Seitenumbrüche im Heft sind so gewählt, dass sich die Themenseiten auch separat ausdrucken lassen (im Allgemeinen vier Seiten, als Broschüren-Druck geeignet).

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

In diesem Heft diskutieren wir mit Bezug zu den Aufgaben **MO610923/MO611022** im Thema 14 Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen. Es werden verschiedene Lösungsstrategien für derartige Aufgaben vorgestellt.

Ein Auszug aus dem Neunten Buch von Euklids Elementen zeigt unterhaltsam einen Ausschnitt aus der Geschichte der Primzahlen.

Hinweise auf den 4. Tag der Mathematik der Technischen Universität Chemnitz und auf „Mathematik alpha“ geben allen Mathematik-Interessierten attraktive Angebote zur Mathematik-Förderung weiter.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 14 – Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen

Aufgabe 14.01 – MO610923[3]. Ermittle alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit folgenden Eigenschaften:

(1) Es gilt $p < q$.
(2) Auch $p - 6$ und $p + 6$ sind zweistellige Primzahlen.
(3) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.
(4) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

Lösungshinweise: Die Einschränkung der Lösungsmenge auf zweistellige Primzahlen motiviert zur systematischen Suche. In der Nachbereitung solcher Aufgaben ist es nicht nur zulässig, sondern auch hilfreich, die Bearbeitung auf diese Weise zu beginnen. Auch in Aufgaben in Heimarbeit wie beim Korrespondenzzirkel Mathematik oder im Bundeswettbewerb Mathematik kann die Lösungsmenge so gefunden werden. In der Lösungsdarstellung ist jedoch der Verweis auf das mittels Rechentechnik erhaltene Ergebnis nicht zugelassen. Die computer-gestützte systematische Suche muss so wiederholt werden, dass alle Rechenschritte im Text nachvollziehbar sind (beispielsweise in einer Tabelle)! Dies ist aber nur möglich, wenn die Anzahl der zu untersuchenden Fälle überschaubar bleibt.

Eine systematische Suche könnte auf allen (90 · 90 =) 8100 Paaren zweistelliger Zahlen beruhen. Für jedes dieser Paare sind die Eigenschaften (1) bis (4) zu prüfen. Das ist computer-gestützt kein Problem. Aber es ist sofort ersichtlich, dass diese vollständige Untersuchung nicht in die Lösungsdarstellung übernommen werden kann. Es kommt also nun darauf an, in einer Vorbetrachtung aufgrund der Eigenschaften (1) bis (4) möglichst viele Zahlenpaare als Lösung auszuschließen und damit die Anzahl der zu überprüfenden Zahlenpaare verringert wird.

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft (1) reduziert sich die Anzahl bereits auf $89 + 88 + \cdots + 1 = \frac{89 \cdot 90}{2} = 4005$ Paare. Beziehen wir uns nur auf die 21 zweistelligen Primzahlen 11, 13, …, 97 (als Liste ohne Nachweis der Vollständigkeit), verbleiben nur $20 + 19 + \cdots + 1 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ zu untersuchende Paare. Für eine tabellarische Übersicht in der Lösungsdarstellung sind es aber zu viele.

Unter Beachtung der Eigenschaft (2) stellen wir fest, dass keine der Primzahlen auf 1 oder 9 enden kann, denn andernfalls würde die um 6 verringerte oder die um 6

[3] Die mit MO gekennzeichneten Aufgabenstellungen werden entsprechend der Aufgabennummern zitiert. Die Lösungshinweise werden in Anlehnung an die Hinweise der Aufgabenkommission formuliert (siehe www.mathematik-olympiaden.de).

vergrößerte Zahl auf 5 enden und kann somit keine Primzahl sein. Für die Primzahl p sind folglich nur 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83 oder 97 möglich, von denen aber

13 wegen 13 – 6 = 7 < 10,
43 wegen 43 + 6 = 49 = 7 · 7,
83 wegen 83 – 6 = 77 = 7 · 11 und
97 wegen 97 – 6 = 91 = 7 · 13

entfallen.

Wenn wir nun die Eigenschaft (3) berücksichtigen, lassen sich die noch zu untersuchenden Zahlenpaare bereits übersichtlich angeben:

(23 ; 43), (23 ; 53), (23 ; 73), (23 ; 83), (53 ; 73), (53 ; 83), (17 ; 37), (17 ; 47), (17 ; 67), (17 ; 97), (37 ; 47), (37 ; 67), (37 ; 97), (47 ; 67), (47 ; 97), (67 ; 97).

In einer (vollständigen, hier jedoch nur angedeuteten) Tabelle lässt sich nun ohne viel (Kopf-) Rechenaufwand prüfen, welche dieser 16 Zahlenpaare auch die Eigenschaft (4) erfüllt:

p	q	p · q	QS(p · q)	Vergleich QS(p · q) mit p
23	43	989	26	26 ≠ 23
…				
23	73	1679	23	23 = 23
…				
17	37	629	17	17 = 17
…				
67	97	6499	28	28 ≠ 67

Als Lösungen finden wir die Zahlenpaare (17 ; 37) und (23 ; 73), wobei wir den Tabelleneintrag als Probe verwenden können.

Wir können jedoch die Eigenschaft (4) nicht nur als Kontrolle verwenden, sondern daraus weitere Einschränkungen ableiten. Da das Produkt zweier zweistelliger Zahlen höchstens vierstellig ist, kann die Quersumme von $p \cdot q$ höchstens (4 · 9 =) 36 betragen. Somit gilt für die Primzahl p die Einschränkung $p \leq 36$, d.h. es genügt nur die acht Zahlenpaare

(23 ; 43), (23 ; 53), (23 ; 73), (23 ; 83), (17 ; 37), (17 ; 47), (17 ; 67), (17 ; 97)

zu überprüfen.

Die Eigenschaft (4) lässt jedoch noch eine weitere Einschränkung zu. Weil die Quersumme QS einer Zahl bei Division durch 9 den gleichen Rest wie die Zahl selbst lässt, sind wegen $QS(p \cdot q) - p = p - p = 0$ auch $p \cdot q - p = p \cdot (q - 1)$ durch 9 teilbar. Da p als zweistellige Primzahl weder durch 9 noch durch 3 teilbar ist, muss $q - 1$ durch 9 teilbar sein. Dies ist aber nur für $q = 37$ oder $q = 73$ möglich, d.h. es genügt die zwei Zahlenpaare

(23 ; 73), (17 ; 37)

zu untersuchen. Wie oben gesehen, sind damit die Lösungen gefunden, die durch die Probe noch zu bestätigen sind. ❑

Wann wir die Vorbetrachtungen beenden und die verbleibenden Zahlenpaare systematisch untersuchen, ist sicherlich eine Abwägung zwischen Zeitaufwand für die Findung weiterer Lösungsansätze gegenüber dem erforderlichen Rechenaufwand. Während Listen von untersuchten Beispielen in der Korrektur prinzipiell akzeptiert werden müssen (es sei denn durch die Fülle ist eine Kontrolle praktisch nicht mehr zumutbar) und lediglich als „nicht elegant“ kritisiert werden, sind Tabellen mit 16 Fällen natürlich praktikabel. Hier haben die Vorbetrachtungen eine akzeptable Vorauswahl ermöglicht.

Die verkürzte Aufgabenstellung in Klassenstufe 10 erweist sich da komplizierter als in Klassenstufe 9, weil ohne eine vollständige Auswertung der Eigenschaft (2) immerhin 59 zu untersuchenden Fälle verbleiben – für eine Heimarbeit eine noch akzeptable, aber äußerst unelegante Lösungsdarstellung, jedoch unter Klausurbedingungen zeitlich nicht realisierbar.

Aufgabe 14.02 – MO611022. Ermitteln Sie alle Paare von zweistelligen Primzahlen (p, q) mit den folgenden Eigenschaften:

(1) p und q besitzen die gleiche Einerstelle.
(2) Die Quersumme des Produktes $p \cdot q$ ist gleich p.

Lösungshinweise: Mit der Argumentation wie oben finden wir aus der Eigenschaft (2) die Einschränkungen $p \in \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$ und $q \in \{19,37,73\}$. Aufgrund der Eigenschaft (1) verbleiben somit 5 Zahlenpaare, die zu untersuchen sind:

(13 ; 73), (17 ; 37), (19 ; 19), (23 ; 73), (29 ; 19).

Anhand der Erfüllung der Eigenschaft (2) erweisen sich nur die Zahlenpaare (17 ; 37) und (23 ; 73) als Lösung der Aufgabe. ❑

Systematisches Probieren als Lösungsansatz

Für die Lösungsfindung bei Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen sind oft Untersuchungen für die ersten Primzahlen 2, 3, 5, … hilfreich. Auch wenn dann eventuell allgemeine Lösungsansätze oder Nichtexistenzbeweise für größere Primzahlen misslingen sollten, wären Bewertungspunkte für spezielle Lösungen bereits gesichert.

Aufgabe 14.03 – MO500936. Man bestimme alle Paare $(p\,;q)$ von Primzahlen, für die auch $p^2 - 3q - 1$ eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst spezielle Lösungen.

- Ist $p = 2$, so ist $r = 2^2 - 3q - 1 = 3 - 3q$ für $q > 1$ negativ und offensichtlich keine Primzahl.
- Ist $p = 3$, ist für $r = 3^2 - 3q - 1 = 8 - 3q$ nur $q = 2$ als Lösung mit einer Primzahl $r = 2$ möglich.
- Ist $p = 5$, ist für $r = 5^2 - 3q - 1 = 24 - 3q$ nur für $q = 7$ das Ergebnis $r = 3$ eine Primzahl.
- Ist $p = 7$, erkennen wir aus $r = 7^2 - 3q - 1 = 48 - 3q = 3 \cdot (16 - q)$, dass r durch 3 teilbar und deshalb keine Primzahl ist. Wir vermuten, dass dies für alle Primzahlen $p > 5$ gilt.

Tatsächlich ist eine Primzahl $p > 5$ nicht durch 3 teilbar und deshalb lässt p^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit ist r durch 3 teilbar und es muss als Primzahl $r = 3$ gelten. Dies ist aber nur für $3q = p^2 - 4 = (p - 2) \cdot (p + 2)$ möglich, wenn ein Faktor in der rechtsseitigen Faktorenzerlegung gleich 3 und der andere gleich q ist. Wegen $p + 2 > 3$ muss $p - 2 = 3$, also $p = 5$ gelten – im Widerspruch zu $p > 5$. Somit sind mit (3 ; 2) und (5 ; 7) alle Lösungen gefunden. ❑

Lösungsdiskussion: Versuchen wir in gleicher Weise mit der Primzahl q zu probieren, finden wir ebenfalls die Lösungen.

- Ist $q = 2$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 7$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass es mit $p = 3$ und folglich $r = 2$ gelingt und erkennen, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine weiteren Lösungen geben kann.
- Ist $q = 3$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 10$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine Lösungen geben kann.

- Ist $q = 5$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 16$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass für $p > 5$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine Lösungen geben kann.
- Ist $q = 7$, müsste $r = p^2 - 3 \cdot q - 1 = p^2 - 22$ eine Primzahl sein. Wir erkennen, dass es mit $p = 5$ und folglich $r = 3$ gelingt und erkennen, dass für $p > 5$ die Zahl r durch 3 teilbar ist und es deshalb keine weiteren Lösungen geben kann.

In allen Schritten erkennen wir, dass für $p > 3$ die Zahl r durch 3 teilbar ist. Ob es aber für $q > 7$ Lösungen mit $p = 2$ oder $p = 3$ geben kann, können wir nicht allein aus q schließen, sondern müssen wie oben für p die Untersuchung führen.

Aufgabe 14.04 – MO081012. Gesucht sind alle Primzahlen p, sodass $50 + p$ und $50 - p$ Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Durch Probieren mit verschiedenen Primzahlen p stellen wir fest,

- dass $p = 2$ keine Lösung ist, weil 50 – 2 = 48 und 50 + 2 = 52 keine Primzahlen sind.
- Dagegen finden wir für $p = 3$ eine Lösung, weil 50 – 3 = 47 und 50 + 3 = 53 Primzahlen sind.
- Wählen wir $p = 5$, führt es zu keiner Lösung, weil 50 – 5 = 45 und 50 + 5 = 55 keine Primzahlen sind. Die Teilbarkeit durch 5 lässt sich vermutlich nicht verallgemeinern.
- Deshalb probieren wir noch $p = 7$. Dies ist auch keine Lösung, weil 50 – 7 = 43 und 50 + 7 = 57 keine Primzahlen sind.

Können wir jetzt schon vermuten, dass für $p > 3$ entweder $50 - p$ oder $50 + p$ stets durch 3 teilbar ist?

Tatsächlich, lässt p bei Division durch 3 den Rest 1 ($p = 3 \cdot p' + 1$), so ist

$$50 + p = 50 + 3 \cdot p' + 1 = 3 \cdot (p' + 17)$$

durch 3 teilbar. Lässt dagegen p bei Division durch 3 den Rest 2 ($p = 3 \cdot p' + 2$), so ist

$$50 - p = 50 - 3 \cdot p' - 2 = 3 \cdot (16 - p')$$

durch 3 teilbar. Wenn es weitere Lösungen gibt, muss folglich $50 - p$ selbst durch 3 teilbar sein, d.h. $p = 47$. Wegen $50 + p = 97$ sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt und $p = 3$ sowie $p = 47$ sind die Lösungen der Aufgabe. ❑

Aufgabe 14.05 – MO370941/MO371041. Beweisen Sie folgende Aussage:
Sind $p = n^{n^n} + n^n + n + 1$ und n Primzahlen, dann ist auch $q = n^{n^n} - n^n + n - 1$ eine Primzahl.

Lösungshinweise: Um sich die Zahlen p und q vorstellen zu können, probieren wir zunächst $n = 2$:

$$p = 2^{2^2} + 2^2 + 2 + 1 = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$
$$q = 2^{2^2} - 2^2 + 2 - 1 = 16 - 4 + 2 - 1 = 13$$

Wir finden damit eine wahre Aussage. Da bereits $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$ eine sehr große Zahl liefert, ist weiteres Probieren nicht angemessen. Wir erkennen aber, dass p für eine ungerade Zahl n als Summe von vier ungeraden Summanden stets gerade ist. Jedoch kann $p = 2$ für $n > 1$ nicht erfüllt werden. Es gibt also keine weiteren Primzahlen p der genannten Form, sodass die Behauptung bewiesen ist. ❑

Aufgabe 14.06 – MO261222. Es seien $p > q > r$ drei aufeinanderfolgende Primzahlen. Die Summe ihrer Quadrate sei ebenfalls eine Primzahl. Ermitteln Sie alle $(p\,; q\,; r)$ mit dieser Eigenschaft.

Lösungshinweise: Für eine nicht durch 3 teilbare Zahl lässt deren Quadrat den Rest 1 bei Division durch 3. Sind also alle drei Primzahlen nicht durch 3 teilbar, so ist die Summe ihrer Quadrate durch 3 teilbar. Folglich muss sich unter den Primzahlen die Zahl 3 befinden, um die Bedingungen der Aufgabe erfüllen zu können:

(2; 3; 5): 4 + 9 + 25 = 38, keine Primzahl
(3; 5; 7): 9 + 25 + 49 = 83, Primzahl.

Damit ist das Tripel (3; 5; 7) einzige Lösung der Aufgabe. ❑

Aufgabe 14.07. Man bestimme alle Paare $(p\,;\ q)$ von Primzahlen, für die $p^q + q^p$ auch eine Primzahl ist.

Lösungshinweise: Wir probieren mit kleinen Primzahlen und setzen zunächst $p = 2$. Dann sind alle Primzahlen q gesucht, für die $2^q + q^2$ auch Primzahl ist.

- Offenbar liefert $q = 2$ keine Lösung, weil dann der Ausdruck $2^2 + 2^2$ den Wert 8 annimmt.
- Probieren wir $q = 3$, finden wir mit $2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$ eine Lösung.

- Nach Einsetzen von $q = 5$ oder $q = 7$ vermuten wir, dass wegen $2^5 + 5^2 = 32 + 25 = 57$ bzw. $2^7 + 7^2 = 128 + 49 = 177$ für $q > 5$ der Ausdruck stets ein Vielfaches von 3 ist.

Tatsächlich lassen für jedes $q > 5$ der Ausdruck 2^q bei Division durch 3 den Rest 2 und der Ausdruck q^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Also ist die Summe beider Summanden durch 3 teilbar.

Statt des Probierens mit $p = 2$ können wir aber auch am Anfang feststellen, dass nicht beide Primzahlen gleichzeitig gerade oder gleichzeitig ungerade sein dürfen, weil in diesen Fällen der zu untersuchende Ausdruck stets geradzahlig und größer als 2 wäre. Aufgrund der Symmetrie in beiden Variablen sind (2 ; 3) und (3 ; 2) die einzigen Lösungen. ❑

Ergänzung 1. Sind p und q Primzahlzwillinge (d.h. es gilt $p = q + 2$), so ist $p^q + q^p$ stets durch $p + q$ teilbar.

Lösungshinweise: Wegen $p = q + 2$ ist p größer als q. Deshalb können wir die folgenden Umformungen durchführen.

$$\frac{p^q + q^p}{p + q} = \frac{p^q + q^q + q^p - q^q}{p + q} = \frac{p^q + q^q}{p + q} + \frac{q^{q+2} - q^q}{2q + 2}$$

Für ganze Zahlen a und b und für ungerade Exponenten n ist $a^n + b^n$ durch stets durch $a + b$ teilbar[4]. Also ist der erste Summand wegen der Primzahl $q > 2$ eine ganze Zahl. Außerdem gilt

$$\frac{q^{q+2} - q^q}{2q + 2} = q^q \cdot \frac{q^2 - 1}{2(q + 1)} = q^q \cdot \frac{(q - 1)(q + 1)}{2(q + 1)}$$

Weil $q - 1$ geradzahlig ist, ist auch der zweite Summand ganzzahlig. Somit ist die Behauptung bewiesen. ❑

Ergänzung 2. Man bestimme alle Tripel $(p\,;q\,;r)$ aus Primzahlen, sodass $p^q + p^r$ eine Quadratzahl ist.

Lösungshinweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit[5] nehmen wir $q \leq r$ an und schreiben für die Aufgabenstellung $p^q + p^r = p^q(1 + p^{r-q})$.

---

[4] $a^n + b^n = (a + b) \cdot (a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

[5] „o.B.d.A.“ ist gerechtfertigt, weil durch Umbenennung der Variablen die bezeichnete Situation gewährleistet werden kann.

Fall 1: $q < r$. Offenbar ist p kein Teiler von $1 + p^{r-q}$. Deshalb müssen zur Erfüllung der Aufgabestellung sowohl p^q als auch $1 + p^{r-q}$ Quadratzahlen sein. Für Primzahlen p und q ist p^q nur für $q = 2$ eine Quadratzahl. Außerdem muss es eine positive ganze Zahl z mit $p^{r-q} = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$ geben.

Für $z = 2$ folgt $p^{r-2} = 3$, woraus sofort $r = 3$ und $p = 3$ folgt. Die Probe bestätigt das Tripel (3 ; 2 ; 3) als Lösung: $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 6^2$.

Für $z > 2$ muss p sowohl ein Teiler von $z - 1$ als auch ein Teiler von $z + 1$ sein. Dann ist p aber auch ein Teiler von $(z+1) - (z-1) = 2$. Also kann in diesem Fall nur $p = 2$ gelten. Außerdem ist nur im Fall $z = 3$ sowohl $z - 1$ als auch $z + 1$ eine Zweierpotenz. Aus $2^{r-2} = (3-1)(3+1) = 8$ erhalten wir $r = 5$. Die Probe bestätigt das Tripel (2 ; 2 ; 5) als Lösung: $2^2 + 2^5 = 4 + 32 = 6^2$.

Betrachten wir nun den Fall $q = r$. Dann vereinfacht sich der Term zu $2 \cdot p^q = z^2$. Damit ist 2 ein Teiler von z^2 und deshalb auch von z. Folglich ist aber auch 2 ein Teiler von p^q und damit auch von p. Schließlich folgt daraus, dass $p = 2$ gilt. Für jede ungerade Primzahl q ergibt dann aber $2 \cdot 2^q = 2^{q+1}$ stets eine Quadratzahl. Somit sind auch alle Tripel $(2;\ q;\ q)$ mit Primzahlen $q > 2$ Lösung der Aufgabe. ❑

Funktionsgleichungen mit Primzahlen

Aufgabe 14.08 – MO450942 und KZM 4-3[6]. Man finde alle Paare $(p\ ;\ q)$ von Primzahlen, für die es ganze Zahlen x und y gibt, sodass folgende Gleichungen gelten:

$$p = x^2 - y \quad ; \quad q = y^2 + 3x - 7$$

Lösungshinweise: Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$p + q = x \cdot (x+3) + y \cdot (y-1) - 7$$

Da entweder x oder $x + 3$ geradzahlig ist und ebenfalls entweder y oder $y - 1$ geradzahlig ist, muss $p + q$ ungeradzahlig sein. Folglich ist eine der beiden Primzahlen gleich 2.

Es sei $p = 2$. Damit gilt in der ersten der gegebenen Gleichungen $x^2 = y + 2$. Weil keine Quadratzahl bei Division durch 3 den Rest 2 lässt, ist y offenbar nicht durch 3 teilbar. Dann lässt aber y^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Damit folgt in der zweiten

[6] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

der gegebenen Gleichungen, dass q durch 3 teilbar ist und als Primzahl $q = 3$ folgt. Wir zeigen nun noch, dass es auch geeignete Zahlen x und y gibt. Mit $(p\,;q) = (2\,;3)$ folgt $y^2 + 3x = 10$. Wir erkennen, dass für $x = y = 2$ die zweite Gleichung wegen $3 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 7$ erfüllt wird. Außerdem ist auch die erste Gleichung in diesem Fall $2 = 2^2 - 2$ eine wahre Aussage.

Es sei nun $q = 2$. Dann gilt $y^2 + 3x = 9$. Für $x = 0$ kann es keine passende Primzahl p geben. Für positive Zahlen x existiert keine passende ganze Zahl y. Ist dagegen x eine negative ganze Zahl, so ist y^2 und damit auch y durch 3 teilbar. Also ist y^2 auch durch 9 teilbar und somit ist x durch 3 teilbar. Damit ist aber auch p durch 9 teilbar. Also kann es außer $(2\,;3)$ keine weiteren Lösungen in Primzahlen p und q geben. ❑

Aufgabe 14.09. Welche Tripel $(x\,;y\,;z)$ von Primzahlen genügen folgender Gleichung?

$$x^3 - y^3 - z^3 = 6y \cdot (y + 2)$$

Lösungshinweise: Da die rechte Seite der Gleichung positiv ist, gilt $x > y\,, z \geq 2$. Da die rechte Seite der Gleichung zudem geradzahlig ist, gilt entweder $y = 2$ und $z \geq 3$ oder $y \geq 3$ und $z = 2$.

Nehmen wir zunächst $y = 2$ an. Dann vereinfacht sich die Gleichung zu

$$x^3 - 8 - z^3 = 6 \cdot 2 \cdot (2 + 2) = 48$$

also

$$x^3 - z^3 = (x - z)(x^2 + xz + z^2) = 56 = 7 \cdot 8$$

Da die Summe der drei ungeraden Summanden in der zweiten Klammer ungeradzahlig ist, kann die Faktorenzerlegung nur in folgender Form erfolgen

$$x - z = 8 \quad ; \quad x^2 + xz + z^2 = 7$$

Wegen $x \geq 11$ kann es aber keine Lösungen in ganzzahligen Zahlen x und z geben. Nehmen wir deshalb $z = 2$ an. Dann finden wir

$$x^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 = (y + 2)^3$$

Somit sind für alle Primzahlzwillinge x und y mit $x = y + 2$ die Tripel $(x\,;y\,;2)$ Lösung der Gleichung. ❑

Faktorisierung zur Lösung von Aufgaben mit Primzahlen

Aufgabe 14.10 – MO420922. Man beweise, dass für jede Primzahl $p > 5$ die Zahl $p^4 - 1$ durch 120 teilbar ist.

Lösungshinweise: Es gilt die Faktorenzerlegung

$$p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1).$$

- Da p eine ungerade Primzahl ist, sind $p - 1$ und $p + 1$ geradzahlig und eine davon sogar durch 4 teilbar, also ist 8 ein Teiler von $p^4 - 1$.
- Da p nicht durch 3 teilbar ist, ist $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar.
- Da p nicht durch 5 teilbar ist, gilt entweder $p = 5k \pm 1$ oder $p = 5k \pm 2$ (mit geeigneter ganzzahliger Zahl k). Im ersten Fall ist 5 ein Teiler von $p^2 - 1$, im zweiten Fall von $p^2 + 1$.

Also ist $p^4 - 1$ durch $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ teilbar. ❑

Hinweis: Diese Aufgabe hat thematisch einen frühen Vorgänger in

Aufgabe 14.11 – MO081036. Es seien $p > q > 3$ zwei Primzahlen. Man zeige: Die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 24 teilbar.

Lösungshinweise: Man forme die Differenz zweier Quadratzahlen zu einem Produkt um:

$$p^2 - q^2 = (p - q) \cdot (p + q)$$

Beide Primzahlen sind ungerade, also ist sowohl die Differenz als auch die Summe durch 2 teilbar. Weil p und q bei Division durch 4 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 3) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 3), so ist sogar die Differenz bzw. die Summe durch 4 teilbar. Also ist das Produkt insgesamt durch 8 teilbar.

Weil p und q bei Division durch 3 entweder den gleichen Rest lassen (jeweils 1 oder 2) oder unterschiedlichen Rest lassen (also 1 und 2), so ist die Differenz bzw. die Summe durch 3 teilbar. Also ist das Produkt stets durch 3 teilbar.

Insgesamt ist die Zahl $p^2 - q^2$ ist durch 8 · 3 = 24 teilbar. ❑

Aufgabe 14.12 – MO480932.
a) Es sei p eine beliebige Primzahl mit der Eigenschaft $p > 3$. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl n so gibt, dass $p^2 = 24 \cdot n + 1$ gilt.
b) Es seien p und n positive ganze Zahlen, für die $p^2 = 24 \cdot n + 1$ gilt. Untersuchen Sie, ob p dann notwendigerweise eine Primzahl sein muss.

Lösungshinweise, Teilaufgabe a): Die Behauptung ist bewiesen, wenn $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p > 3$ durch 24 teilbar ist. Dies ist aber in der Aufgabe MO081036 für $q = 1$ bereits gezeigt.
Teilaufgabe b): Die Formulierung des Aufgabenteils a) lässt vermuten, dass die Behauptung zu verneinen ist. Dann genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden. Das systematische Probieren mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist aufwändig und führt bei den ersten Versuchen entweder zu Primzahlen p oder zu Ergebnissen, die keine Quadratzahlen sind. Wir müssen also versuchen, n so zu wählen, dass auf der rechten Seite der Gleichung eine Quadratzahl zu erkennen ist. Dies gelingt uns beispielsweise mit $n = 26$, denn es gilt

$$p^2 = 24 \cdot n + 1 = 24 \cdot (24 + 2) + 1 = 24^2 + 2 \cdot 24 \cdot 1 + 1 = (24 + 1)^2 = 25^2$$

Es ist $p = 25$ keine Primzahl und somit wurde ein Gegenbeispiel erbracht. ❑

Es ist zur Beantwortung der Fragestellung nicht erforderlich, weitere Gegenbeispiele zu finden. Es ist aber in der Nachbereitung immer eine Untersuchung wert, ob sich ein spezieller Lösungsansatz so verallgemeinern lässt, um mehrere oder gar unendlich viele Gegenbeispiele zu generieren. Setzen wir für eine beliebige natürliche Zahl k für $n = 26 + k \cdot 25$, so finden wir

$$p^2 = 24 \cdot (26 + k \cdot 25) + 1 = 24^2 + 2 \cdot 24 + 1 + k \cdot 24 \cdot 25$$
$$p^2 = (24 + 1)^2 + k \cdot 24 \cdot 25 = 25^2 + 25 \cdot 24 \cdot k = 25 \cdot (25 + 24 \cdot k)$$

Folglich ist für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k das Quadrat p^2 stets durch 25 und somit p durch 5 teilbar und keine Primzahl. ❑

Aufgabe 14.13 – MO511023. Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(p\,;\,z)$ mit einer Primzahl p und einer positiven ganzen Zahl z, für welche die Beziehung $z^2 = 25 \cdot p + 9$ gilt.

Lösungshinweise: Die geforderte Gleichung formen wir zu $25 \cdot p = (z - 3)(z + 3)$ um. Damit können wir die Faktorenzerlegung der linken Seite analysieren.

$z+3$	$z-3$	Bedingung für p	p	Primzahl
25	p	$25–p=6$	19	ja
p	25	$p-31=6$	37	ja
$25\cdot p$	1	$25\cdot p-1=6$	0,28	nein
1	$25\cdot p$	$1-25\cdot p=6$	-0,2	nein
5	$5\cdot p$	$5-5\cdot p=6$	-0,2	nein
$5\cdot p$	5	$5\cdot p-5=6$	2,2	nein

Damit finden wir insgesamt zwei Lösungen: $(19;\ 22)$ und $(37;\ 28)$. ❑

Interessante Eigenschaften von Primzahlen

Von LEONARD EULER (1707 – 1783) stammt das Polynom $P(x)=x^2+x+41$, das für $x=0,1,2,\dots,39$ Primzahlen liefert. Ohne den Funktionswert konkret auszurechnen ist wegen $40^2+40+41=40^2+2\cdot 40+1=(40+1)^2$ der Wert $P(40)$ keine Primzahl. Für $x=41$ ist $P(41)$ durch 41 teilbar und ebenfalls keine Primzahl. Mit dem Polynom $P(x)=x^2-79\cdot x+1601$ finden wir für alle $x=0,1,2,\dots,79$ als Funktionswert Primzahlen. Kann es sogar Polynome geben, die bei allen natürlichen Argumenten Primzahlen liefern?

CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) zeigte 1752 folgenden **Satz**: Ist $P(x)$ ein nichtkonstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, dann können nicht alle Werte der Form $|P(0)|, |P(1)|, |P(2)|, \dots$ Primzahlen sein.

Beweisidee: Jedes Polynom $P(x)$ mit $P(0)=p$ können wir auch in der Form $P(x)=p+x\cdot Q(x)$ mit einem geeigneten Polynom $Q(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten schreiben. Dann ist für alle ganzen Zahlen k der Funktionswert $P(kp)$ durch p teilbar, denn es gilt $P(kp)=p+kp\cdot Q(kp)$. Da aber P für alle natürlichen Zahlen eine Primzahl ergeben soll, ist für alle k der Funktionswert $P(kp)=p$ und somit $Q(kp)=0$. Ein Polynom, dass unendlich viele Nullstellen hat, ist aber konstant gleich Null im Widerspruch zur Definition von $P(x)$. ❑

Kleiner Satz von FERMAT[7]. Für eine Primzahl p und eine beliebige ganze Zahl a ist a^p-a durch p teilbar.

Beweisidee (mittels der Methode der vollständigen Induktion). Es genügt, sich auf positive ganze Zahlen a zu beschränken. Für negative a folgt nämlich die Aussage aus $(-a)^p-(-a)=-(a^p-a)$ für ungerade Primzahlen p und für $p=2$ aus $(-a)^2-(-a)=a^2+a=a^2-a+2a$.

[7] PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665)

Induktionsanfang: Für $a = 0$ und $a = 1$ ist p stets Teiler von $0^p - 0 = 0$ bzw. $1^p - 1 = 0$.
Induktionsvoraussetzung: Der Ausdruck $a^p - a$ ist für gewisse a durch p teilbar.
Induktionsschritt: Wir betrachten $(a+1)^p - (a+1)$ und wenden die binomische Formel an:

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a + 1 - (a+1)$$

In der Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ steht p für $1 \leq k \leq p-1$ nur im Zähler und nicht im Nenner. Jeder der Binomialkoeffizienten ist somit durch p teilbar. Damit lässt $(a+1)^p - (a+1)$ bei Division durch p den gleichen Rest wie $a^p - a$ und ist somit ebenfalls durch p teilbar.
Induktionsschluss: Für alle ganzen Zahlen ist $a^p - a$ durch p teilbar.

Folgerung. Sind a und p teilerfremd, so ist wegen $a^p - a = a \cdot (a^{p-1} - 1)$ auch $a^{p-1} - 1$ durch p teilbar.

WILSONscher Satz[8]. Eine natürliche Zahl $n > 1$ ist genau dann eine Primzahl, wenn die Zahl $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist.

Beweisidee: Es sei n eine zusammengesetzte Zahl, d.h. es gibt entweder

- ganze Zahlen $1 < a < b < 1$ mit $n = a \cdot b$, dann sind a und b als Faktoren in $(n-1)!$ enthalten, oder
- eine ganze Zahl a mit $n = a^2$, dann gilt $2a < n$ und a und $2a$ sind als Faktoren in $(n-1)!$ enthalten.

Folglich ist in beiden Fällen n ein Teiler von $(n-1)!$ und deshalb kein Teiler von $(n-1)! + 1$. Damit ist bewiesen: Wenn $(n-1)! + 1$ durch n teilbar ist, dann ist n keine zusammengesetzte Zahl und somit eine Primzahl.

Es sei nun n eine Primzahl p $(n = p)$. Weil p eine Primzahl ist, lassen sich die Zahlen $2, 3, \ldots, p-2$ in eindeutiger Weise und vollständig in Paare zusammenfassen, deren Produkte jeweils bei Division durch p den Rest 1 lassen. Dann lässt auch $(p-2)!$ bei Division durch p den Rest 1. Folglich ist $(p-2)! - 1$ restlos durch p teilbar und somit auch $(p-1)! - p + 1$ und wie behauptet auch $(p-1)! + 1$. ❑

[8] JOHN WILSON (1741 – 1793)

Postulat von BERTRAND[9]. Ist p eine Primzahl, so liegt zwischen p und $2p$ mindestens eine weitere Primzahl.

Hinweis: Diese Aussage erscheint beinahe trivial – dennoch ist der Beweis recht langwierig. Man kann die Ungleichungskette

$$\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n} \leq \prod_{p\leq\sqrt{2n}} 2n \cdot \prod_{\sqrt{2n}<p\leq\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{n<p\leq 2n} p$$

beweisen[10]. Dabei werden die Produkte über alle Primzahlen in den angegebenen Intervallen gebildet, das leere Produkt hat den Wert 1. Existiert nun keine Primzahl p im letzten Produkt, so führt dies zu einem Widerspruch für alle $n > 4000$. Für die Zahlen bis 4000 lässt sich aber leicht zeigen, dass das Postulat stets erfüllt ist.

Palindrom-Zahlen

Palindrom-Zahlen sind Zahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Der Begriff Palindrom kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Hin- und Herbewegung“ (παλινδρομηση = palíndromese). Das Datum 22.02.2022 erinnerte uns an diese Besonderheit unter den Zahlen, zumal es für längerer Zeit der letzte Tag war, der in Langform eine Palindrom-Zahl ergibt. Für die Jahre 2023 bis 2029 existieren keine passenden Tageszahlen. Erst am 03.02.2030 können wir wieder einen Palindrom-Tag begehen. Für die Datumsangabe in Kurzform 2.2.22 ist natürlich schon im nächsten Jahr das nächste Palindrom in Sicht: 3.2.23.

Unter den Palindrom-Zahlen gibt es auch Palindrom-Primzahlen, also Primzahlen, deren Wert sich nicht ändert, wenn sie von hinten nach vorn gelesen werden. Die ersten derartigen Zahlen sind 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, …

Die Anzahl der palindromischen Primzahlen mit 1, 2, 3, … Ziffern ist 4, 1, 15, 0, 93, 0, 668, 0, 5172, 0, 42042, 0, … Die Anzahlen 0 in dieser Aufzählung sind schnell erklärt: Da jede Palindrom-Zahl mit einer geraden Anzahl von Ziffern durch 11 teilbar ist, existiert nur eine Palindrom-Primzahl mit gerader Stellenzahl, die 11.

Im Jahre 2001 fand HARVEY DUBNER (1928 – 2019) die bisher größte Palindrom-Primzahl mit 39027 Ziffern: $P = 10^{39026} + 4538354 \cdot 10^{19510} + 1$.

---

[9] JOSEPH LOUIS FRANÇOIS BERTRAND (1822 bis 1900)

[10] Winzenick, J. Das Postulat von Bertrand. Proseminararbeit, Universität Paderborn, 2005.

Bekannt ist der so genannte **196-Algorithmus**: Zu einer mehrstelligen Zahl n wird die natürliche Zahl addiert, welche dadurch entsteht, dass die Ziffernfolge von n umgekehrt wird. Diese Addition wird mit der Summe immer wiederholt, bis eine Palindrom-Zahl entsteht, z.B. $n = 65$ ⇒ 65 + 56 = 121. Die nach mehreren Schritten entstehende Zahl kann selbst bei kleinen Startzahlen sehr groß werden, für 89 ergibt sich erst 8813200023188 als erstes Palindrom. Die kleinste Zahl, für welche nicht bekannt ist, ob der Algorithmus irgendwann eine Palindrom-Zahl liefert, ist 196.

Viele weitere interessante Informationen zu Palindrom-Zahlen stehen unter https://mathematikalpha.de/palindrom-zahlen.

Die mathematische Fundgrube in diesen Web-Seiten ist ein überaus empfehlenswertes Angebot! Zur Einführung unter https://mathematikalpha.de erklärt sich „Mathematik alpha" selbst: *„Das Freeware-Programm behandelt eine Vielzahl von Themen der Mathematik und Naturwissenschaften. Ziel dieses Programms ist es, Lehrern, Schülern, Studenten und allen mathematisch Interessierten Unterstützung bei der Behandlung von mathematischen Aufgaben der Bereiche Analysis, Algebra, Geometrie und Stochastik zu geben. Darüber hinaus werden fachübergreifende mathematische Anwendungen aus der Physik, der Informatik, der Astronomie sowie der Chaostheorie behandelt. Insbesondere für eine gymnasiale Ausbildung oder ein mathematisches Anfangsstudium kann das Programm gut genutzt werden. Zusätzlich bietet dieses Internetangebot die Download-Möglichkeit eines mathematischen Lexikons, einer Vielzahl von Aufgabentexten und Einzelprogrammen sowie mathematischer Literatur, darunter alle Hefte der „Zeitschrift alpha" und Lehrbücher der Mathematik."* [11]

(Vorläufige) Herzliche Einladung zum

4. Tag der Mathematik der TUC

Für den 2. April 2022 möchte die Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Chemnitz alle herzlich zu ihrem Tag der Mathematik einladen! Hauptevent soll wieder der Team-Wettbewerb für Teams aus den Klassenstufen 8/9 und den Klassenstufen 10 bis 12 mit jeweils 3 bis 5 Teilnehmenden werden. Dafür ist eine Anmeldung bis zum 28. März unter

https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/tdm/anmeldung/

erforderlich. Aber auch Lehrerinnen und Lehrer sowie alle Mathematikinteressierten sind herzlich willkommen!

[11] Zitat vom 26.02.2022

Die Veranstaltung soll nach Möglichkeit wieder in Präsenz im Hörsaalgebäude der TUC (Reichenhainer Str. 90, 09126 Chemnitz, 09:00 Uhr bis gegen 15:00 Uhr) stattfinden – noch ist es aber nicht entschieden, ob dies unter den dann geltenden sächsischen Pandemie-Beschränkungen möglich sein wird.

Vorgesehen ist der Hauptvortrag von Frau Prof. Uta Freiberg über „Die wunderbare Welt der Fraktale“ (14:00 Uhr bis 14:30 Uhr). Als Lehrerfortbildung (10:00 Uhr bis 12:00 Uhr, mit Teilnahmebestätigung) sind Vorträge von Prof. Horst Martini über „M. C. Escher – Mathematik und Kunst“ und Prof. Peter Stollmann über „Grenzwerte – konvergiert sie oder konvergiert sie nicht?“ angekündigt. Zudem wird ganztägig die Mitmach-Ausstellung in der Haupthalle zugänglich sein – alles vorbehaltlich der pandemie-bedingten Umsetzbarkeit.

Details zum 4. TdM werden nach Anmeldung per E-Mail bekanntgegeben.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euklids
Elemente[12]

Funfzehn Bücher
auſ dem griechiſchen überſetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Wayſenhauſes[13]

Siebentes Buch

Definitionen

1. Die **Einheit** iſt, nach welcher jedeſ Ding Einſ heißt.
2. Eine Zahl aber iſt die auſ Einheiten beſtehende Vielheit.
3. Eine kleinere Zahl iſt ein **Theil** der gröſſern, wenn die gröſſere ſich von ihr genau meſſen läßt.

[12] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

[13] Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/5, zitiert am 26.02.2022,

4. Eine kleinere Zahl ist ein **vielfacher Theil** der grössern, wenn die grössere sich von ihr nicht genau messen läßt.
5. Eine grössere Zahl ist ein **Vielfaches** der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.
6. Eine **gerade** Zahl ist, welche sich halbieren läßt.

   …

11. Eine **Primzahl** ist, welche sich nur von der Einheit genau messen läßt.
12. Zahlen, welche nur die Einheit zum gemeinschaftlichen Maaße haben, sind **Primzahlen zu einander** (relative Primzahlen).

…

Der 1. Satz

Wenn zwei ungleiche Zahlen, AB, CD, vorhanden sind, und man nimmt immer die kleinere von der grössern weg, ohne daß vom Rest die nächstvorhergehende Zahl eher genau gemessen werde, als bis derselbe zur Einheit geworden: so sind die zuerst gedachten Zahl, AB, CD, Primzahlen zu einander.

Wären AB, CD, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl, etwa von E gemessen. Nun lasse AB, von CD gemessen, den Rest AF < CD, und CD, von AF gemessen, den Rest CG < AF, und AF, von CG gemessen, den Rest AH = 1.

E mißt die CD, und CD die BF, folglich mißt E die BF; aber auch die ganze AB, folglich auch den Rest AF. Dieser Rest aber mißt die DG, folglich mißt auch E die DG; aber auch die ganze CD, folglich auch den Rest CG. Dieser Rest aber mißt die FH, folglich mißt auch E die FH; aber auch die ganze AF, folglich auch den Rest AH, das ist, die Einheit, welches unmöglich, weil E > 1.

Neuntes Buch

Der 20. Satz

Jeder angegebenen Menge von Primzahlen, A, B, C, können noch mehrere beygefügt werden.

Es sey die den gegebenen Primzahlen, A, B, C, meßbare kleinste Zahl, DE, so ist, wenn die Einheit DF dazukommt, EF entweder eine Primzahl, oder nicht. Ist das erste, so ist schon Eine Primzahl mehr als angegeben worden. Ist es aber das letzte, so wird EF von irgend einer Primzahl, G, gemessen. Diese G aber ist mit keiner der A, B, C, einerley. Denn wäre dies, so würde sie die DE messen, weil A, B, C, die DE messen. Nun mißt G die EF, folglich auch den Rest DF, das ist, eine Zahl die Einheit, welches unmöglich.

Inhaltsverzeichnis Heft 02/22 - März 2022

Aufgabenbezogene Themen

Ausgabe[14]	Nr.	Thema	Aufgabe
März 2022	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
Jan. 2022	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
Dez. 2021	Thema 12	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
Nov. 2021	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
Nov. 2021	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
Okt. 2021	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
Sept. 2021	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045
Juli/Aug. 2021	Thema 07	Kryptogramm	MO610912 MO560931 MO561031
Juni 2021	Thema 06	Einbeschriebene Figuren und Körper	MO600936
Mai 2021	Thema 05	Quadratische Funktionen	MO600934
Apr. 2021	Thema 04	Flächenberechnung	MO601023 MO600932
März 2021	Thema 03	Gleichungssysteme	MO590934
Febr. 2021	Thema 02	Vollständige Quadrate	MO601024

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[14] Alle Hefte und weitere Themen sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.