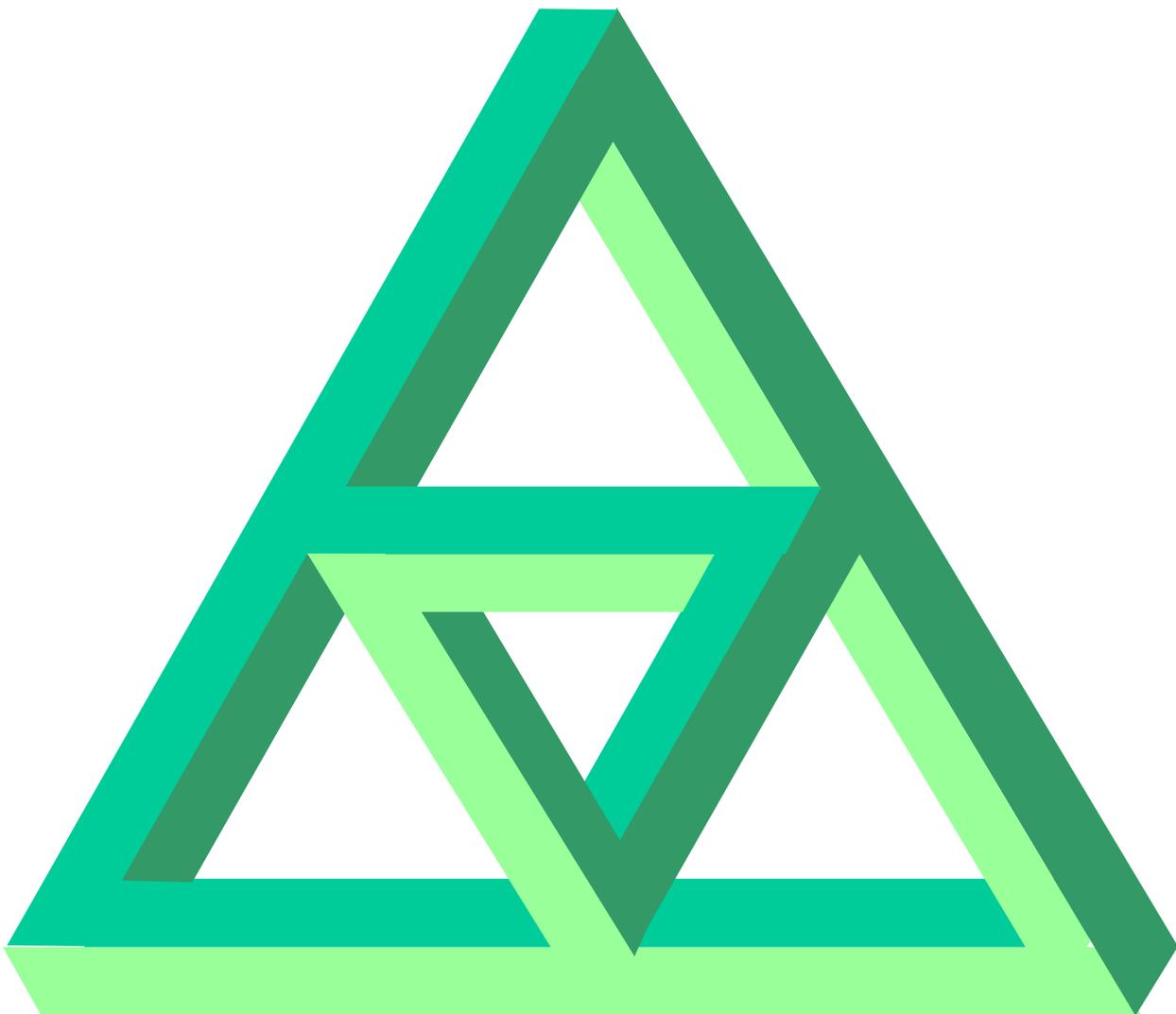


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO610941/MO611041** stehen die Anforderungen bei Aufgaben mit Betragszeichen in Gleichungen und Gleichungssystemen im Mittelpunkt. Durch eine vollständige Fallunterscheidung entstehen Teilaufgaben, in denen keine Betragszeichen mehr vorkommen. Der entstehende Mehraufwand in der Lösungsdarstellung muss unter Klausurbedingungen kompensiert werden, indem die Analogien der verschiedenen Fälle erkannt und ausgenutzt werden.

Die Aufgaben **MO610946/MO611046** erwiesen sich als sehr anspruchsvoll, weil ausgehend von speziellen Lösungen Konstruktionsvorschriften für unendlich viele Beispiele zu finden waren. Das Grundprinzip des Lösungsansatzes ist aber aus geometrischen und arithmetischen Problemstellungen gut bekannt.

Ausführlich werden Zerlegungen von Rechtecken durch flächengleiche Teilrechtecke diskutiert und damit die **KZM-Aufgabe 6-2** vertieft. Hier spielen sowohl die Suche nach speziellen Lösungen als auch rekursive Konstruktionsvorschriften eine entscheidende Rolle.

Mit einem Auszug aus dem 20. Jahrgang der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht“ (1889) wird für die **KZM-Aufgabe 7-5B** die historische Quelle zitiert.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 16 – Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme

Die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ gilt als allgemein bekannt. In Aufgabe **MO490921** wurde dazu noch folgender Hinweis gegeben:

*Der Betrag einer ganzen Zahl ist sehr einfach zu bestimmen. Zum Beispiel gilt:
 $|+8| = +8, |-8| = +8, |+7| = +7, |-7| = +7, |0| = 0.$*

Wettbewerbsaufgaben mit Betragszeichen können wir prinzipiell durch Fallunterscheidung lösen, indem wir alle Situationen untersuchen, für die wir die Gleichungen oder Gleichungssysteme ohne Betragszeichen umformulieren können.

Aufgabe 16.01 - MO610941/MO611041. Bestimmen Sie alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, welche das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$\frac{10}{1 + |x|} + y = 4 \quad ; \quad \frac{10}{1 + |y|} + x = 4.$$

Lösungshinweise: Wir führen eine Fallunterscheidung durch, mit der das Gleichungssystem ohne Betragszeichen formuliert werden kann.

Fall 1: x und y sind beide nichtnegativ. Dann können wir wegen $|x| = x$ und $|y| = y$ die Betragsstriche weglassen. Die linke Gleichung formen wir um zu

$$1 + y = 5 - \frac{10}{1 + x}.$$

Wegen $1 + y \geq 1 > 0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{5 - \frac{10}{1 + x}} + x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot (1 + x)}{(1 + x) - 2} = 4 - x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(x - 1)$ zur quadratischen Gleichung $x^2 - 3 \cdot x + 6 = 0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass die Diskriminante $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6$ negativ ist, weshalb dieser Fall keine Lösung hat.

Fall 2: x ist negativ, y ist nichtnegativ, d.h. $|x| = -x$ und $|y| = y$. Die linke Gleichung ist damit gleichbedeutend zu

$$1 + y = 5 - \frac{10}{1 - x}.$$

Wegen $1 + y \geq 1 > 0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{5 - \frac{10}{1-x}} + x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot (1-x)}{(1-x) - 2} = 4 - x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(-1-x)$ zur quadratischen Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind. Wegen der Voraussetzung $x < 0$ kann in diesem Fall nur x_1 eine Lösung sein und wir erhalten mit $y = 4 - \frac{10}{1-(-2)} = \frac{2}{3}$ das Lösungspaar $(-2, \frac{2}{3})$, das wir durch eine Probe bestätigen:

$$\frac{10}{1 + |-2|} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4 \quad ; \quad \frac{10}{1 + |\frac{2}{3}|} + (-2) = \frac{30}{5} - 2 = 4.$$

Fall 3: x ist nichtnegativ, y ist negativ, d.h. $|x| = x$ und $|y| = -y$. Dieser Fall entspricht dem Fall 2, weil durch Vertauschen der Variablen x und y die beiden Ausgangsgleichungen getauscht werden. Wir finden somit das Lösungspaar $(\frac{2}{3}, -2)$.

Fall 4: x und y sind beide negativ, d.h. $|x| = -x$ und $|y| = -y$. Die linke Gleichung ist gleichbedeutend zu

$$1 - y = -3 + \frac{10}{1-x}.$$

Wegen $1 - y \geq 1 > 0$ können wir dies in die rechte Gleichung einsetzen und äquivalent umformen. Wir erhalten:

$$\frac{10}{-3 + \frac{10}{1-x}} + x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10 \cdot (1-x)}{-3 \cdot (1-x) + 10} = 4 - x.$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach Multiplikation mit $(3 \cdot x + 7)$ zur quadratischen Gleichung $x^2 - 5 \cdot x - 6 = 0$. Mit Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erkennen wir, dass $x_1 = -1$ und $x_2 = 6$ Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind. Wegen der Voraussetzung $x < 0$ kann in diesem Fall nur x_1 eine Lösung sein und wir erhalten mit $y = 4 - \frac{10}{1-(-1)} = -1$ das Lösungspaar $(-1, -1)$, das wir durch eine Probe bestätigen: $\frac{10}{1+|-1|} + (-1) = 4$.

Einziges Lösungspaar sind $(-1; -1)$, $(-2; \frac{2}{3})$ und $(\frac{2}{3}; -2)$. □

Aufgabe 16.02 – MO561015. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x \cdot |x| - 2 \cdot x$.

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

- b) Bestimmen Sie durch Argumentieren anhand des Graphen dieser Funktion f diejenigen reellen Zahlen s , für welche die Gleichung $x \cdot |x| - 2 \cdot x = s$ genau zwei verschiedene Lösungen für x hat.

Hinweis: Das Ablesen von Werten aus einer Zeichnung führt nur zu einer Vermutung. Das ist jedoch zulässig, wenn deren Korrektheit mit einer Probe bestätigt wird.

Lösung Teil a) Wir können den Graphen auf der Basis einer Wertetabelle skizzieren.

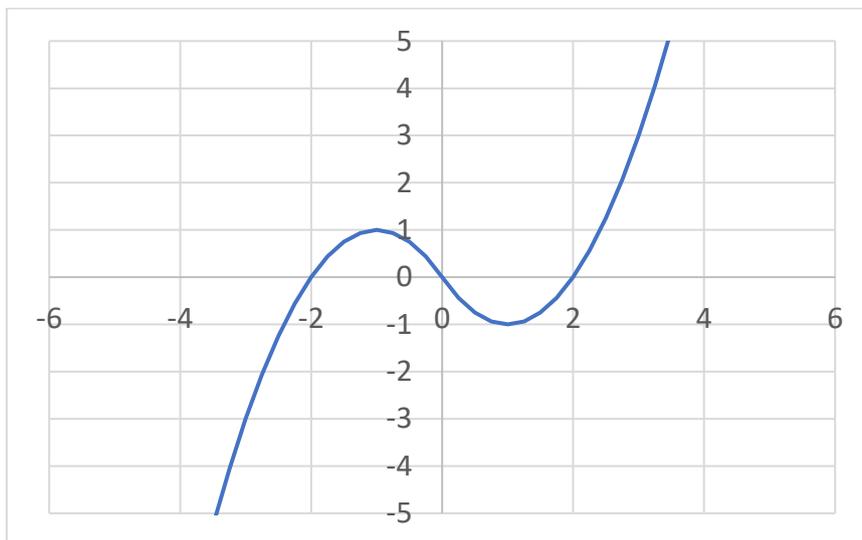
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	0	1	0	-1	0	5

Wir charakterisieren die Teilgraphen aber genauer: Aufgrund des Betragszeichens führen wir dazu eine Fallunterscheidung.

Fall 1: Für $x \geq 0$ gilt $f(x) = x^2 - 2 \cdot x = (x - 1)^2 - 1$. Der Graph G^+ dieser Funktion ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_1 = (1; -1)$.

Fall 2: Für $x \leq 0$ gilt $f(x) = -x^2 - 2 \cdot x = -(x + 1)^2 + 1$. Der Graph G^- dieser Funktion ist eine nach unten geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt $S_2 = (-1; 1)$.

Der Graph von $f(x)$ besteht damit aus den beiden Teilgraphen G^+ und G^- , die im Punkt $S = (0; 0)$ zusammentreffen.



Lösungshinweise Teil b) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = s$ entspricht der Anzahl der Schnittpunkte der horizontalen Geraden $y = s$ mit dem Graphen der Funktion $f(x)$. Diese Anzahlen lassen sich unmittelbar aus dem Graphen ablesen:

Es sei $s > 1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten³ $(1 + \sqrt{1+s}; s)$ und keinen mit dem Teilgraphen G^- , also insgesamt 1 Schnittpunkt.

Es sei $s = 1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_2 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $(1 + \sqrt{2}, 1)$, also insgesamt 2 Schnittpunkte.

Es sei $0 < s < 1$. Die Horizontale $y = s$ hat zwei Schnittpunkte mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $(-1 \pm \sqrt{1-s}; s)$ und einen mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $(1 + \sqrt{1+s}; s)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $s = 0$. Die Horizontale $y = s$ enthält S sowie die Punkte $(-2; 0)$ und $(2; 0)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $-1 < s < 0$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $(-1 - \sqrt{1-s}; s)$ und zwei mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $(1 \pm \sqrt{1+s}; s)$, also insgesamt 3 Schnittpunkte.

Es sei $s = -1$. Die Horizontale $y = s$ enthält S_1 und einen weiteren Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^+ mit den Koordinaten $(-1 - \sqrt{2}; -1)$, also insgesamt 2 Schnittpunkte.

Es sei $s < -1$. Die Horizontale $y = s$ hat einen Schnittpunkt mit dem Teilgraphen G^- mit den Koordinaten $(-1 - \sqrt{1-s}; s)$ und keinen mit dem Teilgraphen G^+ , also insgesamt 1 Schnittpunkt.

Die Gleichung hat also für $s = 1$ und $s = -1$ genau zwei Lösungen. □

Lösungsvariante: Obwohl in der Aufgabenstellung ausdrücklich die Argumentation anhand des Graphen der Funktion $f(x)$ gefordert wurde (und deshalb in der Lösungsdarstellung der Bezug zum Graphen erkennbar sein soll!), wollen wir die Lösungen der Gleichung $x \cdot |x| - 2 \cdot x - s = 0$ auch rechnerisch bestimmen. Wir beachten dabei, dass wir die Anzahl der Nullstellen sowohl im Bereich $x < 0$ als auch im Bereich $x \geq 0$ zählen müssen.

Für $x < 0$ erhalten wir mittels Lösungsformel für die quadratische Gleichung $f(x) = -x^2 - 2x - s = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-s}$.

- Ist $s > 1$, dann ist die Diskriminante negativ und es gibt keine reellwertigen Lösungen.
- Für $s = 1$ ist der Wert $x = -1$ die einzige Lösung der Gleichung.

³ Da eine Argumentation anhand des Graphen genügt, müssen die Schnittpunkt-Koordinaten nicht exakt angegeben werden.

- Für $0 \leq s < 1$ ist die Diskriminante nichtnegativ und wegen $1 \geq \sqrt{1-s}$ gibt es zwei Lösungen.
- Für $s < 0$ entfällt in diesem Fall die positive Lösung x_1 und es gibt genau eine Lösung.

Für $x \geq 0$ erhalten wir mittels Lösungsformel für die quadratische Gleichung $f(x) = x^2 - 2x - s = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+s}$.

- Ist $s < -1$, dann ist die Diskriminante negativ und es gibt keine reellwertigen Lösungen.
- Für $s = -1$ ist der Wert $x = 1$ die einzige Lösung der Gleichung.
- Für $-1 < s \leq 0$ ist die Diskriminante nichtnegativ und wegen $1 \geq \sqrt{1+s}$ gibt es zwei Lösungen.
- Für $0 < s$ entfällt in diesem Fall die negative Lösung x_2 und es gibt genau eine Lösung.

Obwohl diese Herleitung kürzer erscheint, müssen wir bei der Zusammenfassung die Fallunterscheidung die obige ausführliche Argumentation führen. So finden wir, dass es nur für $s = 1$ und $s = -1$ genau zwei Lösungen gibt:

	Anzahl Schnittpunkte		
	$x < 0$	$x \geq 0$	Gesamt
$s > 1$	0	1	1
$s = 1$	1	1	2
$0 < s < 1$	2	1	3
$s = 0$	2*	2*	3
$0 > s > -1$	1	2	3
$s = -1$	1	1	2
$-1 > s$	1	0	1

* der Schnittpunkt $(0; 0)$ ist in beiden Graphen enthalten.

Aufgabe 16.03 – MO570922. Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -4 \cdot |x - 4| + 8$ und $b(x) = -|x - 8| + 6$.

- Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen a und b in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
- Weisen Sie nach, dass beide Funktionen eine gemeinsame Nullstelle haben.
- Ermitteln Sie für die Funktion b alle weiteren Nullstellen.
- Ermitteln Sie reelle Zahlen p, q, r , für die die Funktion c mit der Gleichung $c(x) = p \cdot |x - q| + r$ eine Nullstelle bei $x_1 = 2$ hat und ihren größten Wert 7 für $x_2 = 6$ annimmt.
- Ergänzen Sie im Koordinatensystem aus a) den Graphen der Funktion c .

Lösungshinweise: Wir erkennen, dass die Funktionen stückweise linear sind. Deshalb genügt es, einige Funktionswerte zu bestimmen. Wir wählen die Argumente so, dass die Auswirkungen der Betragszeichen berücksichtigt werden, z.B.

x	2	3	4	5	6
$a(x)$	$-4 \cdot 2 + 8$ $= 0$	$-4 \cdot 1 + 8$ $= 4$	$-4 \cdot 0 + 8$ $= 8$	$-4 \cdot -1 + 8$ $= 4$	$-4 \cdot -2 + 8$ $= 0$

x	6	7	8	9	10
$b(x)$	$- -2 + 6 = 4$	$- -1 + 6 = 5$	$-0 + 6 = 6$	$-1 + 6 = 5$	$-2 + 6 = 4$

Lösungshinweise Teil b) Aus der Wertetabelle und den daraus gezeichneten Funktionsverläufen vermuten wir $x = 2$ als gemeinsame Nullstelle. Mit der Probe $a(2) = -4 \cdot |2 - 4| + 8 = 0$ und $b(2) = -|2 - 8| + 6 = 0$ ist der geforderte Nachweis vollständig erbracht.

Lösungshinweise Teil c) Auch hier genügt es, anhand der Graphen zu erkennen, dass nur zwei Nullstellen möglich sind und die zweite Nullstelle vermutlich bei $x = 14$ gegeben ist. Die Probe bestätigt es: $b(14) = -|14 - 8| + 6 = 0$.

Setzen wir für die rechnerische Nullstellenbestimmung $b(x) = 0$, so können wir die Gleichung zu $|x - 8| = 6$ vereinfachen. Mit der erforderlichen Fallunterscheidung finden wir

$$\begin{aligned} x < 8: |x - 8| &= -(x - 8) = 6 &\Rightarrow x &= 2 (< 8), \\ x \geq 8: |x - 8| &= x - 8 = 6 &\Rightarrow x &= 14 (> 8) \end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Teil d) Auch bei dieser Aufgabenformulierung genügt es, geeignete Zahlen p, q, r ohne Herleitung anzugeben und nachzuweisen, dass diese Zahlen alle Bedingungen erfüllen. In den Lösungshinweisen des Aufgabenausschusses steht hierzu:

„Anmerkung: Man kann die reellen Zahlen auch ermitteln, indem man sie glücklich errät, ...“

Anstatt zu raten können wir besser anhand der Funktionen a und b wichtige Eigenschaften des Graphens ablesen.

- Den größten Wert beobachten wir, wenn der Ausdruck in den Betragszeichen 0 wird. Damit finden wir $c(2) = 7 = r$ mit $q = 6$.
- Da $x_1 = 2$ links vom Maximum der Funktion c liegt, schreiben wir die Funktion für $x < q$ in der Form $c(x) = -p \cdot (x - 6) + 7$, Damit finden wir $c(2) = -p \cdot (2 - 6) + 7 = 0$. Dies wird für $p = \frac{7}{4}$ erfüllt.

Wir können aber auch die gesuchten Zahlen mittels eines Gleichungssystems ermitteln, wenn wir aus den Graphen von a und b verallgemeinert haben, dass es für

Funktionen dieses Typs zwei Nullstellen gibt, die symmetrisch zum Maximum der Funktion liegen. Dann gilt

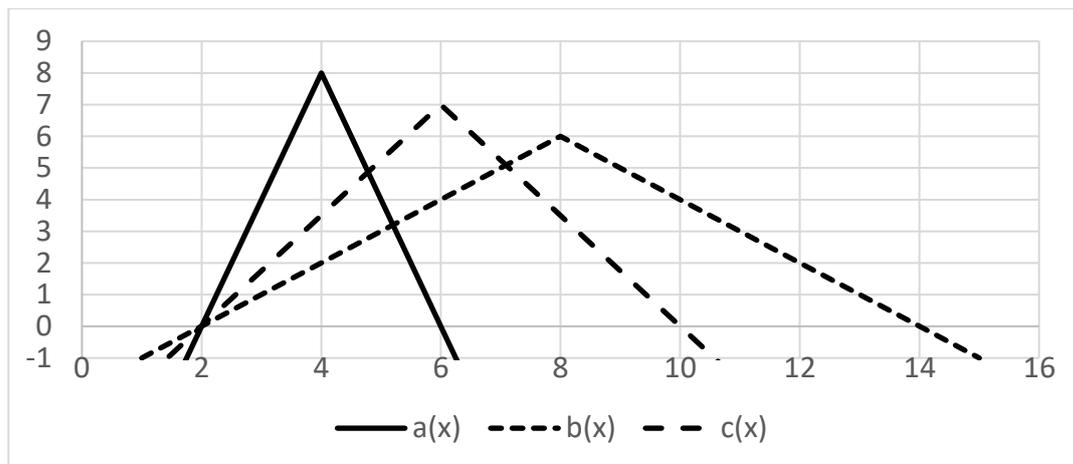
$$\begin{aligned} c(2) &= -p \cdot |2 - q| + r = 0, \\ c(6) &= -p \cdot |6 - q| + r = 7, \\ c(10) &= -p \cdot |10 - q| + r = 0. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der 1. und 3. Gleichung erhalten wir

$$|2 - q| = |10 - q|,$$

nachdem wir den Parameter r subtrahierten und durch $-p$ teilten (da $c(x)$ nicht konstant ist, gilt $p \neq 0$). Wegen $2 < q < 10$ und $2 - q < 10 - q$ können nicht beide Differenzen gleichzeitig negativ oder gleichzeitig positiv sein. Es muss also $2 - q < 0 < 10 - q$ gelten, womit die Gleichung äquivalent zu $q - 2 = 10 - q$ wird. Wir erhalten also $q = 6$. Den Wert $r = 7$ finden wir dann unmittelbar aus der 2. Gleichung. Setzen wir schließlich die Werte für q und r in die 3. Gleichung ein, erhalten wir $p = \frac{7}{4}$.

Lösung zu den Teilaufgaben a und e)



Aufgabe 16.04 – MO580941/MO581041. Bestimmen Sie alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} |x + y| + z &= 4 \\ |y + z| + x &= 5 \\ |z + x| + y &= 6 \end{aligned}$$

Lösungshinweise: Wir können die Gleichungen durch folgende Fallunterscheidungen ohne Betragszeichen schreiben.

Fall 1 (alle drei Terme in den Betragszeichen sind nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x \geq 0$. Damit können wir alle Betragszeichen weglassen. Das entsprechende

Gleichungssystem hat aber keine Lösungen, da in den drei Gleichungen die linken Seiten übereinstimmen, die rechten Seiten aber nicht.

Fall 2 (genau zwei Terme in den Betragszeichen sind nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x < 0$. Damit können wir in zwei Gleichungen die Betragszeichen weglassen. Das entsprechende Gleichungssystem aus diesen zwei Gleichungen hat aber keine Lösungen, da die linken Seiten übereinstimmen, die rechten Seiten aber nicht.

Ebenso gibt es mit gleicher Argumentation keine Lösungen für $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x \geq 0$ sowie für $x + y < 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x \geq 0$.

Fall 3.1 (genau ein Term in den Betragszeichen ist nichtnegativ): $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$x + y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $2 \cdot x = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $2 \cdot y = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot z = 11$. Durch eine Probe bestätigen wir, dass $\left(\frac{9}{2}; 5; -\frac{11}{2}\right)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} \left|\frac{9}{2} + 5\right| - \frac{11}{2} &= \frac{19}{2} - \frac{11}{2} = 4, \\ \left|5 - \frac{11}{2}\right| + \frac{9}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5, \\ \left|-\frac{11}{2} + \frac{9}{2}\right| + 5 &= \frac{2}{2} + 5 = 6. \end{aligned}$$

Fall 3.2: $x + y < 0$, $y + z \geq 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad y + z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $2 \cdot z = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot x = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $2 \cdot y = 11$. Durch eine Probe erkennen wir, dass $\left(-5; \frac{11}{2}; \frac{9}{2}\right)$ keine Lösung des Gleichungssystems ist, weil schon die erste Gleichung nicht bestätigt werden kann:

$$\left|-5 + \frac{11}{2}\right| + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5 \neq 4.$$

Fall 3.3: $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x \geq 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad z + x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $-2 \cdot y = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $2 \cdot z = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $2 \cdot x = 11$. Durch eine Probe erkennen wir, dass $\left(\frac{11}{2}; -\frac{9}{2}; 5\right)$ keine Lösung des Gleichungssystems ist, weil schon die erste Gleichung nicht erfüllt ist:

$$\left|\frac{11}{2} - \frac{9}{2}\right| + 5 = \frac{2}{2} + 5 = 6 \neq 4.$$

Fall 4: (kein Term in den Betragszeichen ist nichtnegativ): $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Das Gleichungssystem lässt sich nun so formulieren:

$$-x - y + z = 4 \quad ; \quad -y - z + x = 5 \quad ; \quad -z - x + y = 6.$$

Durch Addition der ersten und zweiten Gleichung erhalten wir $-2 \cdot y = 9$, durch Addition der ersten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot x = 10$, durch Addition der zweiten mit der dritten Gleichung $-2 \cdot z = 11$. Durch eine Probe bestätigen wir, dass $\left(-5; -\frac{9}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ eine Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} \left|-5 - \frac{9}{2}\right| - \frac{11}{2} &= \frac{19}{2} - \frac{11}{2} = 4, \\ \left|-\frac{9}{2} - \frac{11}{2}\right| - 5 &= \frac{20}{2} - 5 = 5, \\ \left|-\frac{11}{2} - 5\right| - \frac{9}{2} &= \frac{21}{2} - \frac{9}{2} = 6. \end{aligned}$$

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Damit sind alle Lösungen gefunden. □

Lösungsvariante: Anstelle der umfangreichen Fallunterscheidung kann folgende trickreiche Vorbetrachtung geführt werden. Angenommen $(x; y; z)$ wäre eine Lösung mit $y + z \geq 0$. Dann finden wir die Abschätzung

$$5 = |y + z| + x = y + x + z \leq |x + y| + z = 4.$$

Da dies nicht richtig sein kann, gilt $y + z < 0$. Angenommen, es wäre $x + z \geq 0$. Dann finden wir die Abschätzung

$$6 = |x + z| + y = x + z + y \leq |x + y| + z = 4.$$

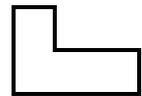
Da auch dies nicht richtig sein kann, gilt $x + z < 0$. Damit verbleiben nur noch zwei Fälle:

- *Fall 1':* $x + y \geq 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Dies entspricht dem Fall 3.1 in obiger Lösungsdarstellung.
- *Fall 2':* $x + y < 0$, $y + z < 0$ und $z + x < 0$. Dies entspricht dem Fall 4 in obiger Lösungsdarstellung.

Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion

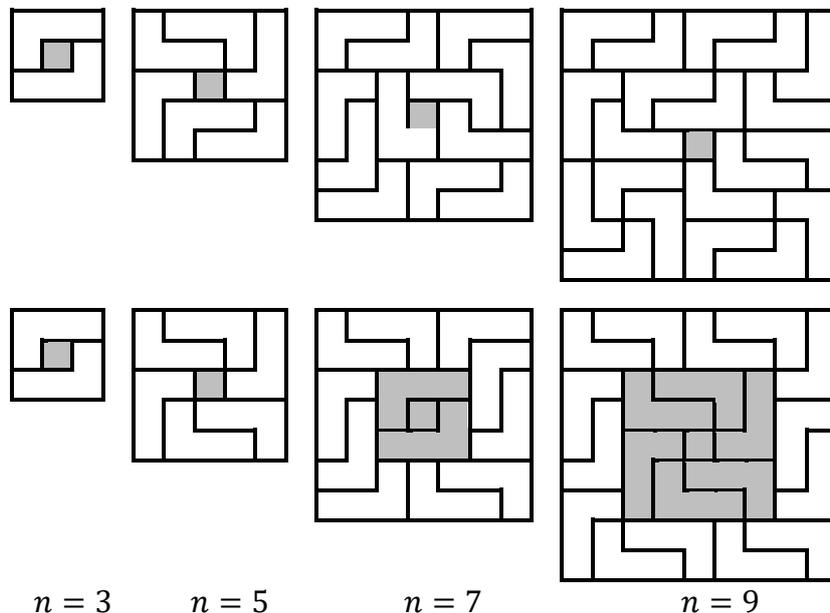
Für einen (Nicht-) Existenzbeweis anhand unendlich vieler (Gegen-) Beispiele können wir eine explizite Bildungsvorschrift beschreiben, mit der wir für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ (mit geeigneter Startzahl n_0) solche Beispiele erzeugen können. Vorteilhaft kann es aber auch sein, nur konkrete Beispiele für kleine n anzugeben und dann zu beschreiben, wie wir aus diesen Beispielen rekursiv neue Beispiele erzeugen können. Bei der Diskussion zur Zerlegung von Dreiecken und Quadraten⁴ haben wir dieses Vorgehen bereits angewandt. In diesem Heft wird im Beitrag „Primäre Zerlegungen“ ebenfalls dieser Ansatz gewählt. Wir erinnern zunächst an

Aufgabe MO481021⁵. Es sei $n \geq 3$ eine ungerade Zahl. Von einem $n \times n$ -Schachbrett wird das mittlere Feld entfernt. Der Rest soll in L-Stücke der nebenstehend abgebildeten Form aus vier Schachbrettfeldern zerlegt werden.



- Bestimmen Sie für $n = 3, 5, 7, 9$ jeweils eine solche Zerlegung.
- Zeigen Sie, dass für beliebiges ungerades n mit $n \geq 3$ die Zerlegung des $n \times n$ -Schachbretts ohne mittleres Feld in eine gerade Anzahl von L-Stücken möglich ist.

Lösungshinweise Teil a) Für die Fälle $n = 3, 5, 7, 9$ sind beispielsweise folgende Zerlegungen möglich (es genügt eine Zeichnung, in der die Einhaltung der Bedingungen ohne weitere Kommentare ersichtlich ist):



$n = 3$

$n = 5$

$n = 7$

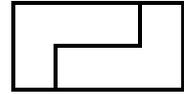
$n = 9$

⁴ S. Thema 12.3/4 – Zerlegung einer Dreiecks-/Quadratfläche (Heft 03/2022)

⁵ s. Thema 12.2 – Ebene Bedeckungen (Heft 11/2021)

Während in der oberen Reihe Zerlegungen zu sehen sind, die offenbar keine verallgemeinerungsfähige Strukturen zeigen⁶, unterstützt die untere Reihe die Lösungsfindung für Teil b.

Lösungshinweise Teil b) Nehmen wir an, dass wir für eine Zahl n bereits eine Zerlegung in gerade viele Teile gefunden haben. Wir konstruieren nun eine Zerlegung für $n + 4$, indem wir um das $n \times n$ -Quadrat einen Ring der Breite 2 legen, der aus nebenstehenden Elementen besteht.



Für die ungerade Zahl n ist entweder $n + 1$ oder $n + 3$ durch 4 teilbar. Wie beim Übergang von $n = 3$ zu $n = 7$ in der Zeichnung ersichtlich können wir für $n = 4k + 3$ ($k = 1, 2, \dots$) den nächsten Ring legen, indem wir an jeder Seite ein 2×4 -Element einfügen. Wie beim Übergang von $n = 5$ zu $n = 9$ können wir in ähnlicher Weise für $n = 4k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) den nächsten Ring legen, indem wir ebenfalls an jeder Seite ein 2×4 -Element einfügen.

Damit haben wir gezeigt, dass für alle ungeraden $n \geq 3$ die geforderten Zerlegungen möglich sind. \square

Aufgabe – BWM 1975, 2. Runde, Aufgabe 3.

Es sei $a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ das arithmetische Mittel und

$g_n = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$ das geometrische Mittel der natürlichen Zahlen

x_1, x_2, \dots, x_n ($n > 1$). Mit S_n sei die folgende Behauptung bezeichnet:

$$S_n: \text{Ist } \frac{a_n}{g_n} \text{ eine natürliche Zahl, so ist } x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

Man beweise S_2 und widerlege S_n mindestens für alle geraden $n > 2$.

Lösungshinweise: Wir wollen hier nur den zweiten Teil der Aufgabe diskutieren und zeigen, dass die Aussage S_n für alle $n > 2$ falsch ist. Es ist ungewöhnlich, eine Wettbewerbsaufgabe derart mit „mindestens“ zu formulieren. Wir vermuten, dass sich der Nachweis für ungerade Zahlen $n > 1$ als trickreich oder kompliziert erweist und deshalb deren Lösung nicht erwartet wurde.

Legen wir eine natürliche Zahl $n > 2$ fest, so genügt zur Widerlegung von S_n , ein Gegenbeispiel anzugeben, das heißt natürliche Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n zu finden, die nicht alle gleich sind, aber deren Quotient aus arithmetischen und geometrischen Mittelwerten eine ganze Zahl ergibt. Es ist dabei nicht erforderlich, ein geeignetes Tupel herzuleiten.

⁶ In Aufgabe MO480921 wurde nur der Teil a) als Aufgabe gestellt – dafür sind beliebige Strukturen völlig ausreichend.

Für $n = 4$ finden wir mit $x_1 = 81, x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ein Gegenbeispiel, denn es gilt

$$\frac{a_4}{g_4} = \frac{\frac{81 + 1 + 1 + 1}{4}}{\sqrt[4]{81 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}} = \frac{21}{3} = 7.$$

Nehmen wir an, es gibt für alle geraden Zahlen $n > 2$ ein Gegenbeispiel, das bis auf eine Variable (o.B.d.A. $x_1 = m \neq 1$) nur Variablen der Form $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$ enthält, so lautet der zu untersuchende Quotient:

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{\frac{m + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1 \text{ mal}}}{n}}{\sqrt[n]{m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-1 \text{ mal}}}}.$$

Günstig wäre es, wenn m die n -te Potenz einer natürlichen Zahl k ist, also $m = k^n$, so dass im Nenner die ganze Zahl k steht. Den Zähler von a_n können wir damit als $k^n + (n - 1)$ schreiben und der Quotient wird zu

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{k^n + n - 1}{n \cdot k}.$$

Wäre nun k ein Teiler von $n - 1$, also $k' \cdot k = n - 1$ für eine geeignet ausgewählte natürliche Zahl k' , so könnten wir den Bruch mit k kürzen und erhalten

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{k^{n-1} + k'}{n}.$$

Wir wissen, dass $a^m + b^m$ für ungerade Zahlen m durch $(a + b)$ teilbar⁷ ist. Wählen wir $k' = 1$ (woraus $n = k + 1$ folgt), so ist $k^{n-1} + 1 = k^{n-1} + 1^{n-1}$ durch $k + 1 = n$ teilbar. Der Quotient ist also ganzzahlig. Wir bestätigen das Ergebnis noch durch die Probe. Wir setzen für geradzahliges $n > 2$.

$$x_1 = (n - 1)^n, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$$

und finden

$$\frac{a_n}{g_n} = \frac{\frac{(n - 1)^n + (n - 1)}{n}}{(n - 1)} = \frac{(n - 1)^{n-1} + 1}{n}$$

Der Zähler ist durch $(n - 1) + 1 = n$ teilbar und somit ist der Quotient ganzzahlig. Die Aussage S_n ist somit für gerade Zahlen $n > 2$ widerlegt. \square

⁷ $a^m + b^m = (a + b)(a^{m-1} - a^{m-2} \cdot b + a^{m-3} \cdot b^2 - \dots - a \cdot b^{m-2} + b^{m-1})$, m ungerade

Um die Aussage S_n auch für ungerade Zahlen $n > 1$ zu widerlegen, kann gezeigt werden⁸, dass für $p = 3$ das Tupel $x_1 = 27, x_2 = 8, x_3 = 1$ und für alle Primzahlen $p > 3$ die Tupel

$$x_1 = (p - 2)^{p-1}, x_2 = (p - 2) \cdot \left(\frac{p - 1}{2}\right)^p, x_3 = x_4 = \dots = x_p = 1$$

Gegenbeispiele ergeben. Als Folgerung können wir die Aussage S_n auch für alle Vielfachen einer ungeraden Zahl $n > 1$ widerlegen. Lässt sich nämlich n als Produkt $m \cdot p$ mit einer ganzen Zahl m und einer Primzahl p darstellen, so gibt es für p ein p -Tupel, das die Aussage S_p widerlegt. Dann widerlegt das n -Tupel der Form

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= x_{1,2} = \dots = x_{1,m} = x_1, \\ &\dots \\ x_{p,1} &= x_{p,2} = \dots = x_{p,m} = x_p, \end{aligned}$$

die Aussage $S_{m \cdot p}$. Das gleichmäßige „Vervielfachen“ der Variablen verändert weder das arithmetische noch das geometrische Mittel, denn es gilt

$$\begin{aligned} a_{m \cdot p} &= \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^m x_{i,j}}{m \cdot p} = \frac{\sum_{i=1}^p \frac{\sum_{j=1}^m x_{i,j}}{m}}{p} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i}{p} = a_p, \\ g_{m \cdot p} &= \sqrt[m \cdot p]{\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^m x_{i,j}} = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^p \sqrt[m]{\prod_{j=1}^m x_{i,j}}} = \sqrt[p]{\prod_{i=1}^p x_i} = g_p. \end{aligned}$$

Unabhängig von dieser Herleitung konstruieren wir nun geeignete Gegenbeispiele rekursiv. Für $n = 3$ hat das Tupel $x_1^* = 27, x_2^* = 8, x_3^* = 1$ den arithmetische Mittelwert 12 und den geometrischen Mittelwert 6.

Nehmen wir an, wir hätten für ein $i > 2$ ein Gegenbeispiel für die Aussage S_i gefunden, das ebenfalls den arithmetischen Mittelwert 12 und den geometrischen Mittelwert 6 hat. Dann können wir für jedes $n > 1$ für das $(i + 3 \cdot n)$ -Tupel der Form

$$\begin{aligned} &x_1, x_2, \dots, x_i, \\ &x_{1,1} = x_{1,2} = \dots = x_{1,n} = x_1^*, \\ &x_{2,1} = x_{2,2} = \dots = x_{2,n} = x_2^* \\ &x_{3,1} = x_{3,2} = \dots = x_{3,n} = x_3^* \end{aligned}$$

die Mittelwerte berechnen:

$$a_{i+3n} = \frac{\sum_{k=1}^i x_k + \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^3 x_{m,l}}{i + 3 \cdot n} = \frac{i \cdot 12 + n \cdot 3 \cdot 12}{i + n \cdot 3} = 12,$$

^{8 8} K.R. Löffler (Hrsg.): Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1972-1982. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart 1987, S. 75.10

$$g_{i+3 \cdot n} = \sqrt[i+3 \cdot n]{\prod_{k=1}^i x_k \cdot \prod_{j=1}^n \prod_{m=1}^3 x_{j,m}} = \sqrt[i+3 \cdot n]{6^i \cdot (6^3)^n} = 6.$$

Beginnend mit $i = 3$ können wir so für alle $i = 3, 6, 9, \dots, 3n$ für natürliche Zahlen der Form $3n > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Wir finden mit dem Tupel $x_1 = 27, x_2 = 24, x_3 = 6, x_4 = 2, x_5 = 1$ ein Gegenbeispiel für S_5 mit arithmetischem Mittelwert 12 und geometrischem Mittelwert 6. Damit können wir auch für alle $i = 5, 8, 11, \dots, 3n + 2$ für natürliche Zahlen der Form $3n + 2 > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Wir finden mit $x_1 = 36, x_2 = 18, x_3 = 18, x_4 = 6, x_5 = 4, x_6 = 1, x_7 = 1$ ein Gegenbeispiel für S_7 mit arithmetischem Mittelwert 12 und geometrischem Mittelwert 6. Damit können wir auch für alle $i = 7, 10, 13, \dots, 3n + 1$ für natürliche Zahlen der Form $3n + 1 > 0$ Gegenbeispiele konstruieren.

Zusammen mit dem oben gezeigten Gegenbeispiel zur Aussage S_4 haben wir für alle $n > 2$ Gegenbeispiele gefunden. \square

Anmerkung: Die Angabe der speziellen Gegenbeispiele für $n = 3, 5, 7$ ist schwer nachvollziehbar. Unter Klausurbedingungen erscheinen sie nicht auffindbar. Da aber keine Herleitung der Lösungsfindung erforderlich ist, sondern lediglich nachgewiesen werden muss, dass die angegebenen Tupel alle Bedingungen erfüllen, ist in einer Hausarbeit die Lösungsfindung mittels Rechentechnik zugelassen. Da der geometrische Mittelwert 6 sein soll, können die Variablen für S_n nur die Form $x_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) haben. Die Exponenten sind nichtnegative ganze Zahlen mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Durch systematisches Probieren lassen sich Belegungen für die Exponenten finden, für die der arithmetische Mittelwert 12 ergibt.

Aufgabe MO610946. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von 6 sind.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass diese n positiven ganzen Zahlen verschieden sind. Die Zahl 1 ($= 6^0$) ist ebenfalls eine Potenz von 6.

Lösungshinweise: Derartige Zahlen existieren genau für $n = 1$ und für alle ganzen Zahlen $n \geq 3$.

Für $n = 1$ können wir die Zahl 1 wählen. Für $n = 4$ können wir die Zahlen 1, 8, 9, 18 (Summe: $36 = 6^2$; Produkt: $1 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 3^2) = 6^4$) oder die Zahlen 3, 3, 6, 24 (Summe: $36 = 6^2$; Produkt: $3 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2^3 \cdot 3) = 6^4$) verwenden.

Haben wir für eine Zahl n eine Lösung x_1, x_2, \dots, x_n mit der Summe $s = x_1 + \dots + x_n = 6^a$ und dem Produkt $p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 6^b$ mit ganzen Zahlen a und b gefunden, so erhalten wir für $n + 2$ ebenfalls eine Lösung, nämlich

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = 2 \cdot s, x_{n+2} = 3 \cdot s.$$

Offensichtlich ist die neue Summe der $n + 2$ Zahlen gleich

$$s + 2 \cdot s + 3 \cdot s = 6 \cdot s = 6^{a+1}$$

und damit wieder eine Potenz von 6. Für das neue Produkt ergibt sich

$$p \cdot (2 \cdot s) \cdot (3 \cdot s) = 6 \cdot p \cdot s^2 = 6^{b+2a+1},$$

was ebenfalls wieder eine Potenz von 6 ist. Folglich erhalten wir auf diese Weise aus einer Lösung für $n = 1$ Lösungen für alle ungeraden Zahlen $n \geq 1$, und aus einer Lösung für $n = 4$ Lösungen für alle geraden Zahlen $n \geq 4$.

Der Nachweis, dass es für $n = 2$ keine solche Zahlenpaare gibt, ist noch gesondert zu führen. □

Anmerkungen: Wie schon bei der Aufgabe des BWM besteht eine besondere Schwierigkeit im Finden geeigneter Beispiele. Da im Aufgabentext auf den Fall $n = 1$ hingewiesen wurde, darf dieser im Ergebnis nicht übersehen werden. Für $n = 3$ finden wir das Beispiel 1, 2, 3 ($S = 1 + 2 + 3 = 6$; $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$). Aufgrund der Aufgabenformulierung vermuten wir (ohne uns dessen sicher zu sein!), dass die Aussage nicht für alle n gelten wird. Es wäre deshalb ein erstes Teilergebnis, zu beweisen, die Aussage gelte für alle ungeraden Zahlen $n \geq 1$.

Es erscheint sehr spekulativ, aus den Beispielen für $n = 1$ und $n = 3$ bereits das Konstruktionsprinzip für größere Zahlen n zu erkennen. Beim Probieren suchen wir deshalb noch nach Zahlen x und y mit $S = 1 + 2 + 3 + x + y = 36$ und $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y = 6^k$, wobei x und y nur die Primfaktoren 2 und 3 haben dürfen. Die Werte $x = 12$ und $y = 18$ und damit ein geeignetes Konstruktionsprinzip sind auf diese Weise zu finden.

Nun stellen wir fest, dass es für $n = 6$ ebenfalls ein Beispiel existiert, nämlich sechsmal die Zahl 6. Da das oben gefundene Konstruktionsprinzip aus $n = 6$ auch zu einem korrekten Beispiel für $n = 8$ führt, bleibt nur noch zu untersuchen, ob es Beispiele für $n = 2$ und $n = 4$ gibt.

Da die Teilsumme $6 + 6 + 6 = 18$ die Gesamtsumme bei $n = 6$ nicht verändert, untersuchen wir für $n = 4$ das Tupel 6, 6, 6, 18. dessen Produkt beträgt $2^4 \cdot 3^5$. Nun liegt die Lösung mit den Zahlen 1, 8, 9, 18 schon nahe.

Aufgabe MO611046. Man bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von 10 sind.

Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass diese n positiven ganzen Zahlen verschieden sind. Die Zahl 1 ($= 10^0$) ist ebenfalls eine Potenz von 10.

Lösungshinweise: Derartige Zahlen existieren genau für $n = 1$ und für alle ganzen Zahlen $n \geq 5$.

Für $n = 1$ können wir die Zahl 1 wählen. Wir finden weitere Beispiele:

$$n = 6: 5, 5, 5, 5, 40, 40 \quad (S = 100 = 10^2; P = 5^4 \cdot (2^3 \cdot 5^1)^2 = 10^6)$$

$$n = 7: 5, 5, 5, 5, 20, 20, 40 \quad (S = 100; P = 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^1)^2 \cdot (2^3 \cdot 5^1) = 10^6)$$

$$n = 8: 5, 5, 5, 5, 20, 20, 20, 20 \quad (S = 100; P = 5^4 \cdot (2^2 \cdot 5^1)^4 = 10^8)$$

Haben wir für eine Zahl n eine Lösung x_1, x_2, \dots, x_n mit der Summe $s = x_1 + \dots + x_n = 10^a$ und dem Produkt $p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n = 10^b$ mit ganzen Zahlen a und b gefunden, so erhalten wir für $n + 4$ ebenfalls eine Lösung, nämlich

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = s, x_{n+2} = s, x_{n+3} = 2 \cdot s, x_{n+4} = 5 \cdot s.$$

Offensichtlich ist die neue Summe der $n + 4$ Zahlen gleich

$$s + s + s + 2 \cdot s + 5 \cdot s = 10 \cdot s = 10^{a+1}$$

und damit wieder eine Potenz von 10. Für das neue Produkt ergibt sich

$$p \cdot s \cdot s \cdot (2 \cdot s) \cdot (5 \cdot s) = 10 \cdot p \cdot s^4 = 10^{b+4a+1},$$

was ebenfalls wieder eine Potenz von 10 ist. Folglich erhalten wir auf diese Weise aus einer Lösung für $n = 1$ eine Lösung für $n = 5$: 1, 1, 1, 2, 5 (Summe: 10, Produkt: 10). Aus einer Lösung für $n = 4 \cdot m + k$ finden wir Lösungen für alle geraden $n = 4 \cdot (m + 1) + k$ mit $k = 1, 2, 3, 4$ und $m \geq 1$. Weil wir Lösungen für $n = 5, 6, 7, 8$ kennen, existieren neben $n = 1$ für alle $n \geq 5$ Lösungen.

Dass es für $n = 2, 3, 4$ keine Lösungen gibt, muss gesondert nachgewiesen werden. \square

Anmerkungen: Auch bei dieser Aufgabe besteht eine besondere Schwierigkeit im Finden geeigneter Beispiele. Den Fall $n = 1$ beachten wir. Für $n = 5$ finden wir das Beispiel 1, 1, 1, 2, 5 ($S = 1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 10$; $P = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$). Da wir ein Beispiel für $n = 10$ angeben können (nämlich zehnmal die Zahl 10), haben wir bereits drei Spezialfälle gelöst.

Wir vermuten, dass es für $n = 2, 3, 4$ keine Beispiele geben wird, da wir die Summe 10 nicht aus Summanden bilden können, die gleich 1 sind oder durch 2 oder 5 teilbar sind, wobei die Faktoren 2 und 5 gleich oft vorkommen. Größere Summen wollen wir

zunächst nicht versuchen. Beim Probieren für $n = 6$ könnten wir das interessante Tupel $(1, 1, 1, 1, 8, 8)$ finden. Da die Summe 20 beträgt, wäre es ein Kandidat für ein geeignetes Beispiel, wenn wir jeden dieser sechs Werte mit 5 multiplizieren. Tatsächlich erfüllen die Zahlen 5, 5, 5, 5, 40, 40 alle Bedingungen.

Die Zerlegung $40 = 20 + 20$ führt uns zu einem Beispiel für $n = 7$, denn die Summe bleibt unverändert und das Produkt erhöht sich um den Faktor 10. Da wir dies auch für den zweiten Wert 40 ausführen können, finden wir auch ein Beispiel für $n = 8$.

Nachtrag: Beide Aufgaben könnten zum Verallgemeinern verführen.

Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geq 2$ alle positiven ganzen Zahlen n mit folgender Eigenschaft: Es gibt n positive ganze Zahlen, deren Produkt und deren Summe jeweils Potenzen von k sind.

Für $k = 2$ ist diese Eigenschaft für alle $n \geq 1$ gegeben. Dazu geben wir jeweils geeignete Tupel an:

$$n = 1: \quad 2 \quad (S = 2; p = 2),$$

$$n = 2: \quad 2; 2 \quad (S = 2 + 2 = 4; P = 2 \cdot 2 = 4),$$

$$n = m \geq 2:$$

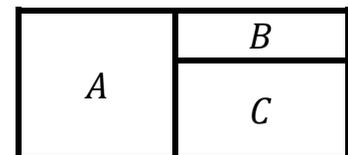
$$2; 2; 2^2; \dots; 2^{m-1} \left(S = 2 + \sum_{i=1}^{m-1} 2^i = 2^m; P = 2 \prod_{i=1}^{m-1} 2^i = 2^{\frac{n(n+1)}{2}+1} \right).$$

□

Primäre und sequentielle Zerlegungen von Rechtecken

KZM – Aufgabe 6-2⁹. Ein Rechteck sei in eine Anzahl kleinere Rechtecke lückenlos und überdeckungsfrei zerlegt. Dies kann beispielsweise so erfolgen, dass man zunächst das Ausgangsrechteck durch einen geraden Schnitt in zwei Rechtecke teilt, dann eines der in diesem Schritt entstandenen Teilrechtecke erneut durch einen geraden Schnitt in zwei weitere Rechtecke zerlegt usw.

In der Abbildung kann man annehmen, dass mit einem ersten Schnitt das Rechteck A abgeteilt wurde und in einem zweiten Schnitt die Rechtecke B und C entstanden. Eine solche Zerlegung, für die eine geeignete Schnittfolge ermittelbar ist, wird sequentiell genannt. Gibt es jedoch keine solche Schnittfolge, heißt die Zerlegung primär.



- a) Man zeige, dass es keine primären Zerlegungen eines Rechteckes in drei Teilrechtecke gibt (d.h., dass jede Zerlegung eines Rechtecks in drei Teilrechtecke eine sequentielle Zerlegung ist).

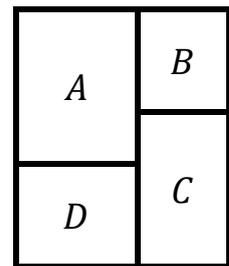
⁹ https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

b) Man untersuche, ob eine primäre Zerlegung eines Quadrates in fünf Teilrechtecke existiert.

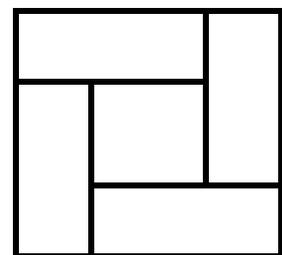
Lösungshinweise Teil a) Angenommen, es gäbe eine primäre Zerlegung in drei Teilrechtecke. Da diese Teilrechtecke die vier Eckpunkte des Ausgangsrechtecks enthalten, gibt es mindestens ein Teilrechteck, das zwei dieser Eckpunkte enthält (Schubfachprinzip). Das können jedoch nur benachbarte Eckpunkte sein. Folglich kann dieses Teilrechteck mittels einer Schnittlinie abgeschnitten werden. Das verbleibende Rechteck kann nun mittels eines weiteren Schnittes in zwei Teilrechtecke zerlegt werden. Folglich ist die Zerlegung sequentiell und nicht primär. \square

Über die Aufgabenstellung hinaus suchen wir eine primäre Zerlegung für vier Teilrechtecke. Wir nehmen also wiederum an, es gäbe eine solche primäre Zerlegung. Dann kann es darunter kein Teilrechteck geben, das zwei Eckpunkte des Ausgangsrechtecks enthält, denn dann könnten wir dieses Teilrechteck mit einem Schnitt abtrennen. Für das verbleibende Rechteck gibt es aber nur sequentielle Zerlegungen in drei Teilrechtecke. Also ist diesem Fall insgesamt jede Zerlegung sequentiell und es existiert keine primäre Zerlegung.

Untersuchen wir deshalb den Fall, dass jedes der vier Teilrechtecke genau einen Eckpunkt des Ausgangsrechtecks enthält. Dann stoßen benachbarte Teilrechtecke (hier A und B) an einer Seite (ggf. teilweise) zusammen. Haben diese Teilrechtecke A und B die gleiche Breite, so entsteht eine durchgehende Schnittlinie. Damit können wir in einem ersten Schnitt das Ausgangsrechteck in zwei Rechtecke A/B und C/D zerlegen¹⁰ und im zweiten bzw. dritten Schnitt die Teilrechtecke A und B bzw. C und D erzeugen. Haben dagegen diese Teilrechtecke A und B nicht die gleiche Breite, kann die verbleibende Fläche nur dann durch zwei weitere Rechtecke bedeckt werden, wenn bei B und C eine durchgehende Schnittlinie entsteht. Auch in diesem Fall ist die Zerlegung sequentiell.



Lösungshinweise Teil b) Eine primäre Zerlegung eines Quadrates in fünf Teilrechtecke ist beispielsweise wie in nebenstehender Abbildung möglich. Da keine Linie im Ausgangsquadrat gegenüberliegende Seiten verbindet, kann es keine sequentielle Schnittfolge geben.

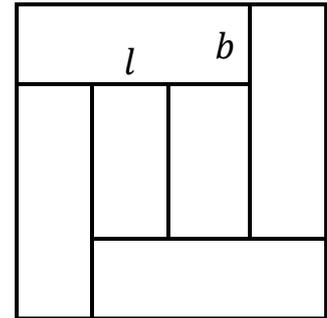


\square

¹⁰ Eine Erweiterung der Einteilung in „primär“ und „sequentiell“ könnte in der „sequentiellen Zerlegung k -ter Ordnung“ bestehen, wobei mit einem geraden Schnitt maximal k zusammenhängende Rechtecke abgeschnitten werden dürfen. Dann wäre hier keine sequentielle Zerlegung 1. Ordnung möglich, wohl aber 2. Ordnung.

Die entstandenen Teilrechtecke sind offenbar nicht kongruent. Die Schnitte können aber so erfolgen, dass alle Teilrechtecke flächengleich sind. Legen wir dafür die Seitenlänge¹¹ des Ausgangsquadrates mit 1 fest, so beträgt der Flächeninhalt des mittleren Quadrates 0.2 und dessen Seitenlänge $\frac{1}{5}\sqrt{5}$. Die anderen vier Teilrechtecke sind gemäß Konstruktion kongruent und haben ebenfalls den Flächeninhalt 0.2 . Wir können die Seitenlängen dieser Teilrechtecke berechnen: Bezeichnen wir mit b die Breite und mit l die Länge, so hängen diese Werte über das Gleichungssystem $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{5}$ zusammen. Die Werte sind also die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{5} = 0$. Wir erhalten:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{5}\sqrt{5}\right).$$



Natürlich können wir aus einer primären Teilung in fünf Rechtecke eine Teilung in sechs Rechtecke erzeugen, wenn wir beispielsweise das mittlere Teilquadrat in zwei Rechtecke zerlegen. Dabei entsteht offensichtlich keine Schnittlinie, die gegenüberliegende Seiten des Ausgangsquadrates verbindet. Wählen wir das mittlere Quadrat so, dass dessen Flächeninhalt zwei Sechstel des Ausgangsquadrates hat, so gilt für die Länge l und Breite b der umrahmenden kongruenten vier Teilrechtecke $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{6}$. Die quadratische Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\right).$$

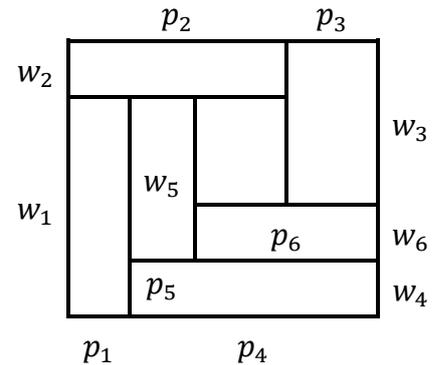
Damit haben wir eine primäre Zerlegung in sechs flächengleiche Teilrechtecke gefunden. Da es mit der einfachen Definition einer primären Zerlegung zugelassen ist, dass ab einem Schritt die Zerlegung sequentiell fortgesetzt werden darf, können wir die Argumentation für $n = 6$ auf $n \geq 6$ verallgemeinern. Wählen wir das mittlere Quadrat so, dass dessen Flächeninhalt $\frac{n-4}{n}$ des Ausgangsquadrates umfasst, so gilt für die Länge l und Breite b der umrahmenden kongruenten vier Teilrechtecke $b + l = 1$ und $b \cdot l = \frac{1}{n}$. Die dazu passende quadratische Gleichung $x^2 - x + \frac{1}{n} = 0$ besitzt die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2n}\sqrt{(n-4) \cdot n}\right)$$

¹¹ Die Längen- oder Flächeneinheiten werden im Folgenden weggelassen, da Missverständnisse auszuschließen sind.

Damit haben wir also auch für alle $n \geq 5$ eine primäre Zerlegung in n flächengleiche Teilrechtecke gefunden.

Anstelle dieser trivialen Verallgemeinerung suchen wir nun nach einer „kreativen“ primären Zerlegung eines Quadrates in sieben flächengleiche Rechtecke. Wir geben uns eine geometrisch mögliche Zerlegung vor, unabhängig davon, ob dies tatsächlich für diese Konfiguration flächengleich gelingt. Wir bezeichnen einige Teilstrecken wie in der Skizze ersichtlich¹², mit denen die Zerlegung vollständig beschrieben ist:



Setzen wir $w_1 = x$, so ist $p_1 = \frac{1}{7x}$, um eine Fläche von $\frac{1}{7}$ der Ausgangsfläche einzunehmen. Nacheinander ergeben sich dann folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 1 - x \quad , \quad p_2 = \frac{1}{7 \cdot (1 - x)} \\
 p_3 &= 1 - p_2 = \frac{6 - 7x}{7 \cdot (1 - x)} \quad , \quad w_3 = \frac{1}{7p_3} = \frac{7x - 1}{7x} \\
 p_4 &= 1 - p_1 = \frac{7x - 1}{7x} \quad , \quad w_4 = \frac{1}{7p_4} = \frac{x}{7x - 1} \\
 w_5 &= w_1 - w_4 = \frac{x \cdot (7x - 2)}{7x - 1} \quad , \quad p_5 = \frac{1}{7w_5} = \frac{7x - 1}{7x \cdot (7x - 2)} \\
 p_6 &= p_4 - p_5 = \frac{(7x - 1)(7x - 3)}{7x \cdot (7x - 2)} \quad , \quad w_6 = \frac{1}{7p_6} = \frac{x \cdot (7x - 2)}{(7x - 1)(7x - 3)}
 \end{aligned}$$

Nun gilt $w_3 + w_4 + w_6 = 1$. Setzen wir die oben gefundenen Terme ein und formen um, finden wir die kubische Gleichung

$$196 \cdot x^3 - 294 \cdot x^2 + 128 \cdot x - 15 = 0$$

Eine Lösung¹³ dieser Gleichung ist $x_1 = \frac{1}{2}$, denn es gilt $\frac{196}{8} - \frac{294}{4} + \frac{128}{2} - 15 = 24,5 - 73,5 + 64 - 15 = 0$. Daraus folgt $w_1 = w_2$ und $p_1 = p_2$ und wir können beide Teilrechtecke mit einem geraden Schnitt abtrennen – aber die vorgesehene geometrische Struktur ist damit nicht mehr realisierbar.

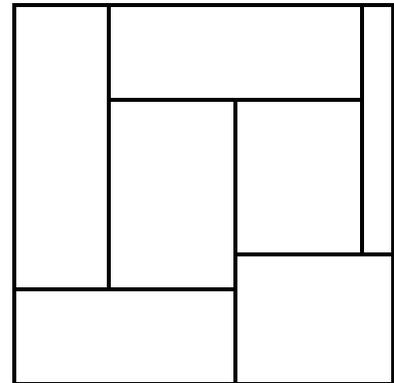
Die anderen Lösungen der kubischen Gleichung erhalten wir nach Polynomdivision der kubischen Funktion und dem Linearfaktor $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ aus der quadratischen Funktion $x^2 - x + \frac{30}{196} = 0$. Wir finden $x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{14}$. Allerdings muss $x > \frac{3}{7}$ gelten, denn anderenfalls wäre p_6 negativ. Wenn es also eine Zerlegung der geforderten Art gibt,

¹² Um nicht durch Anschauung falsche Schlüsse zu ziehen, dürfen in der Skizze optische Gleichheiten bewusst vermieden werden.

¹³ Diese Lösung können wir aus einer grafischen Darstellung der kubischen Funktion erraten.

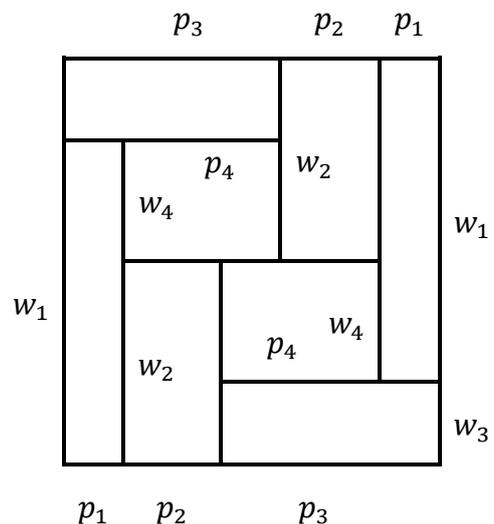
so gilt $x = \frac{7+\sqrt{19}}{14} \approx 0,81$. Damit gelingt tatsächlich die geforderte Zerlegung, wie eine Probe bestätigt.

Für nebenstehenden Zerlegungsansatz gibt es jedoch keine primäre Zerlegung des Quadrates in sieben flächengleiche Rechtecke. Die nahezu symmetrisch aussehende Zerlegung der Figur erweist sich als trügerisch. Berechnen wir wie oben die Teilstrecken, so ist die Flächengleichheit der Teilrechtecke nur möglich, wenn die beiden unteren Rechtecke kongruent sind. Dann gibt es aber eine erste durchgehende Schnittlinie und es fällt nicht schwer, eine vollständige sequentielle Zerlegung anzugeben.



Für die Zerlegung eines Quadrates in acht flächengleiche Rechtecke versuchen wir eine punktsymmetrische Lage der Teilrechtecke. Wir bezeichnen wieder einige Teilstrecken, die die Zerlegung vollständig beschreiben. Dafür genügen vier Höhen- und Breitenangaben.

Aufgrund der Symmetrie gilt bereits (falls die Quadratseite die Länge 1 hat) $w_2 = \frac{1}{2}$ und damit $p_2 = \frac{1}{4}$. Setzen wir $w_1 = x > \frac{1}{2}$, so ergibt sich nacheinander:



$$p_1 = \frac{1}{8x}$$

$$w_3 = 1 - x \quad , \quad p_3 = \frac{1}{8 \cdot (1 - x)}$$

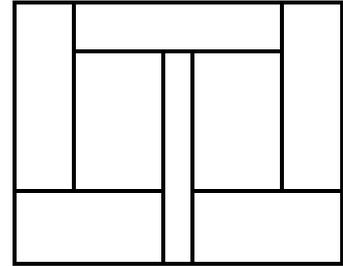
$$w_4 = x - \frac{1}{2} \quad , \quad p_4 = \frac{1}{8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

Nun gilt aber $p_4 = p_3 - p_1$. Setzen wir hier die gefundenen Ausdrücke ein und formen um, so finden wir die quadratische Gleichung

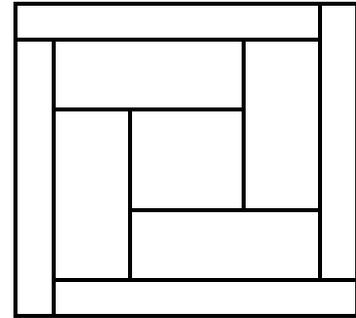
$$6 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 1 = 0.$$

Von den beiden Lösungen dieser Gleichung, nämlich $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$, kann wegen $x > \frac{1}{2}$ nur die größere die gesuchte Lösung sein. Rechnen wir damit alle Rechteckseiten aus, wird die Lösung bestätigt.

Auch die nebenstehend skizzierte Zerlegung des Quadrates ist in acht inhaltsgleiche Rechtecke als primäre Zerlegung möglich.



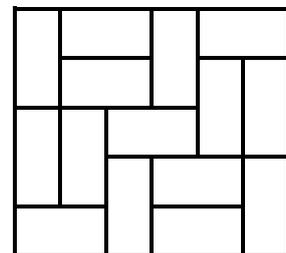
Ausgehend von $n = 5$ finden wir leicht eine primäre Zerlegung für $n = 9$, indem wir einen weiteren „Rahmen“ mit vier Teilrechtecken um die Figur mit fünf Teilrechtecken legen:



Diesen Zerlegungsansatz können wir aber verallgemeinern: Haben wir eine primäre Zerlegung für $n = k$ gefunden, so können wir auch eine primäre Zerlegung für $n = k + 4$ angeben. Weil wir für $n = 5, 6, 7, 8$ bereits primäre Zerlegungen konstruiert haben, existieren für alle $n \geq 5$ primäre Zerlegungen eines Quadrates in n flächengleiche Teilrechtecke.

Diese Problematik ist eng verbunden mit der vom ROBERT ISRAEL JEWETT (geb. 1937, Mathematiker) formulierten Fragestellung, ein Rechteck so mit Domino-Steinen vollständig und überdeckungsfrei zu bedecken, dass dabei weder eine waagerechte noch eine senkrechte Gerade entsteht, die gegenüberliegende Seiten des Rechtecks miteinander verbindet¹⁴. Eine solche Gerade wäre, wenn man sich die Domino-Steine als Ziegelsteine vorstellt, eine strukturell schwache Stelle, eine so genannte „Bruchlinie“. Primäre Zerlegungen sind bruchlinienfrei – jedoch haben wir gesehen, dass es für 5×5 -Rechtecke (und kleinere) keine Zerlegung in kongruente Teilrechtecke geben kann.

Nun wird sogar gefordert, dass die Teilrechtecke Domino-Steine in Form von 2×1 -Rechtecke sind. Somit kommen nur Rechtecke in Frage, die eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (1×1 -Rechtecke) enthalten. Tatsächlich finden wir für 5×6 -Rechtecke eine bruchlinienfreie Bedeckung mit Domino-Steinen.

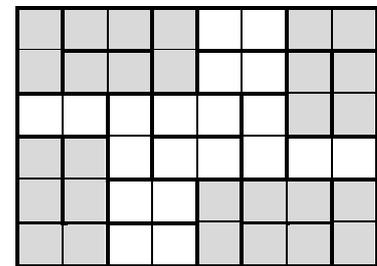


Es gibt jedoch keine bruchlinienfreie Bedeckung eines 6×6 -Rechtecks mit 18 Domino-Steinen. Denken wir uns das Rechteck durch 5 waagerechte und 5 senkrechte (innere) Geraden in 36 Einheitsquadrate zerlegt. Wenn das Gesamtquadrat bruchlinienfrei bedeckt werden soll, muss jede dieser Geraden

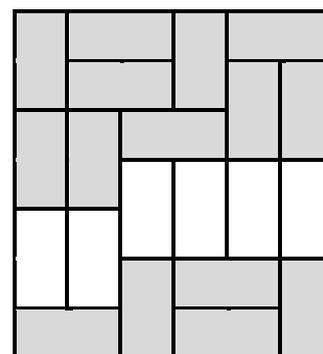
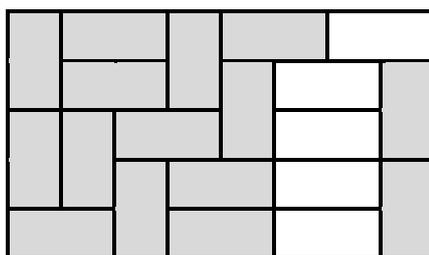
¹⁴ Nach: Martin Gardner. Mathematische Klobeleien. Vieweg-Verlag, 1973.

wenigstens einen Domino-Stein halbieren. Wir stellen nun fest, dass in diesem Fall jede dieser Geraden sogar eine gerade Anzahl von Domino-Steinen halbieren muss. Betrachten wir nämlich eine beliebige senkrechte (oder waagerechte) Gerade, dann liegen links (bzw. oberhalb) von ihr eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (6, 12, 18, 24 oder 30). Die ungeteilten Domino-Steine links (bzw. oberhalb) von der Geraden bedecken natürlich auch eine gerade Anzahl von Einheitsquadraten (je Domino-Stein zwei). Also verbleiben links (bzw. oberhalb) von der Geraden noch eine gerade Anzahl einzelner Einheitsquadrate, die zu den durch die Gerade geteilten Domino-Steinen gehören. Da aber ein Domino-Stein nur von einer Geraden halbiert werden kann, und jede der 10 Geraden mindestens zwei Domino-Steine halbiert, müssten mindestens 20 Domino-Steine für die Bedeckung vorhanden sein – im Widerspruch zur Größe des 6×6 -Rechtecks.

Mit dieser Überlegung können wir auch begründen, dass in einem 6×8 -Rechteck jede der 5 waagerechten und 7 senkrechten (inneren) Geraden genau zwei Domino-Steine halbieren. Es sind also $12 \cdot 2 = 24$ Domino-Steine erforderlich, die aber auf den Flächeninhalt $6 \cdot 8 = 48$ passen würden. Damit ist aber noch nicht gezeigt, dass es eine bruchlinienfreie Bedeckung auch gibt – ein solches Beispiel muss konkret angegeben werden.



Die eingefärbten Einheitsquadrate ergeben (zusammengeschoben) das schon bekannte bruchlinienfreie 5×6 -Rechteck. Wir können also aus bekannten Bedeckungen neue Bedeckungen für größerer Rechtecke erstellen. Dabei gibt es verschiedene Rekursionsmöglichkeiten, beispielsweise vom 5×6 -Rechteck zum 5×8 -Rechteck oder vom 5×6 -Rechteck zum 7×6 -Rechteck:



Die in der Abbildung erkennbare Rekursionsvorschrift ist verallgemeinerungsfähig. Wir erhalten die Aussage: Wenn der Flächeninhalt eines Rechtecks aus einer geraden Anzahl von Einheitsquadraten besteht und die Länge bei beiden Seiten mehr als vier Einheiten beträgt, lässt sich immer (mit dem 6×6 -Rechteck als Ausnahme) eine bruchlinienfreie Bedeckung durch Domino-Steine finden.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Die Sächsische Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) stellt eine Vielzahl von historischen Dokumenten öffentlich zur Verfügung. Der folgende Auszug steht im Zusammenhang mit der Aufgabe **KZM-7.5B**¹⁵ über magische Sechsecke. In der Teilaufgabe c) waren alle natürlichen Zahlen $n > 0$ gesucht, für die es magische Sechsecke geben kann. Eine Lösung für $n = 3$ wurde 1889 von ERNST VON HASELBERG (1827 – 1905, Architekt und Baubeamter in Stralsund) veröffentlicht (s. <https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/df/101875/1>, letzter Abruf: 30.06.22).

Zeitschrift

für

mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht

Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation
der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen,
Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen.

herausgegeben

von

J. C. V. Hoffmann.

Zwanzigster Jahrgang.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1889.

[S. 262ff]

Zum Aufgaben-Repertorium

Auflösungen

801. (Gestellt von v. Haselberg XIX₆, 429.)¹⁶ An der Stelle der in das nachfolgend abgebildete Sechseck¹⁷ eingeschriebenen Buchstaben sind die Zahlen von 1 bis 19 so zu setzen, daß die Summe der auf einer und derselben geraden Linie stehenden Zahlen, gleichviel ob sie aus drei, vier oder fünf Gliedern zusammengesetzt ist, nach allen Richtungen hin gleich 38 ist.

¹⁵ https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

¹⁶ Gestellt wurde die Aufgabe im 19. Jahrgang der Zeitschrift auf Seite 429.

¹⁷ Abbildungen nachgestellt

Auflösung. Bezeichnet man die Summe der sechs Zahlen an den äußeren Ecken mit $\sum a$, diejenige der sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten mit $\sum b$ und diejenige der sechs Zahlen, welche die Kernzahl k umgeben mit $\sum c$, so ist

$$\sum a + \sum b + \sum c = 5 \cdot 38 - k,$$

$$2 \sum a + \sum b = 6 \cdot 38$$

und

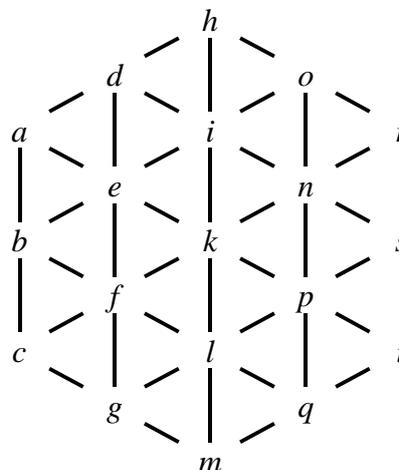
$$2 \sum b + 2 \sum c = 6 \cdot 38.$$

Hieraus ergibt sich

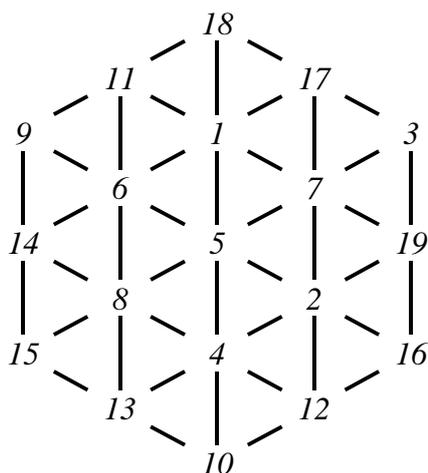
$$\sum a = 2 \cdot 38 - k \quad (1);$$

$$\sum b = 2(38 + k) \quad (2);$$

$$\sum c = 38 - 2k \quad (3).$$



Aus (3) ergibt sich, dass k nicht größer als 8 sein kann; wäre $k = 9$, so würde $\sum c = 20$ sich nicht mehr aus den sechs niedrigsten Zahlen bilden lassen. Die kleinste Zahl, welche an einer äußeren Ecke stehen kann, ist 3; wollte man z.B. $r = 2$ setzen, so würde sich $h + n + s + t = 2(38 - 2) = 72$ auch aus den vier höchsten Zahlen nicht mehr darstellen lassen. – Aus der Aufgabe lassen sich dreizehn Gleichungen bilden, welche je drei, vier oder fünf Unbekannte enthalten, deren Summe gleich 38 ist. Von diesen sind die zur Lösung wichtigsten $b = k + o + p$, $g = k + i + o$, u. s.



w., da man hierdurch nach versuchsweiser Anordnung der inneren Zahlen die sechs Zahlen in den Mitten der äußeren Seiten findet. – Für $k = 8$ ist nun $\sum c = 22$; man findet für $\sum c$ eine, jedoch nicht brauchbare Gruppe von Zahlen für die Umgebung von k . Für $k = 7$ ergeben sich zwei, für $k = 6$ drei Gruppen solcher Zahlen, mit denen man ebenfalls nicht zum Ziel gelangt. Für $k = 5$ ist $\sum c = 28$; man erhält dann die einzige überhaupt mögliche Lösung in beistehender Anordnung. Für $k < 5$ enthält man keine passende Lösung.

v. HASELBERG (Stralsund)

Inhalt

Vorwort.....	2
Thema 16 – Betragszeichen: Gleichungen und Gleichungssysteme.....	3
Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion	12
Primäre und sequentielle Zerlegungen von Rechtecken	19
In alten Mathe-Büchern geblättert	26

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2021/22)

Ausgabe ¹⁸	Nr.	Thema	Aufgabe
06/2022 (Jul. 2022)	Thema 16	Betragszeichen	MO610941 MO611041
05/2022 (Jun. 2022)	Thema 06.3	Einbeschriebene Figuren (Kreise)	MO610945
04/2022 (Mai 2022)	Thema 15	Stammbrüche	MO610933 MO611032
03/2022 (Apr. 2022)	Thema 12.2	Bedeckungen	MO610932 MO611031
02/2022 (März 2022)	Thema 14	Wettbewerbsaufgaben mit Primzahlen	MO610923 MO611022
01/2022 (Jan. 2022)	Thema 13	Bewegungsaufgaben	MO610921
11/2021 (Dez.2021)	Thema 12.1	Bedeckungen	MO610922 MO611021 MO581021
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 11	Streckenberechnungen	MO611014
10/2021 (Nov. 2021)	Thema 10	Beschränkte und kürzbare Brüche	MO611013
09/2021 (Okt. 2021)	Thema 09	Pythagoreische Zahlentripel	MO600945 MO601046
08/2021 (Sept. 2021)	Thema 08	Sekanten-Tagenten-Winkelsatz Sekanten-Tagenten-Satz	MO601045

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹⁸ Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter <http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html> erhältlich.