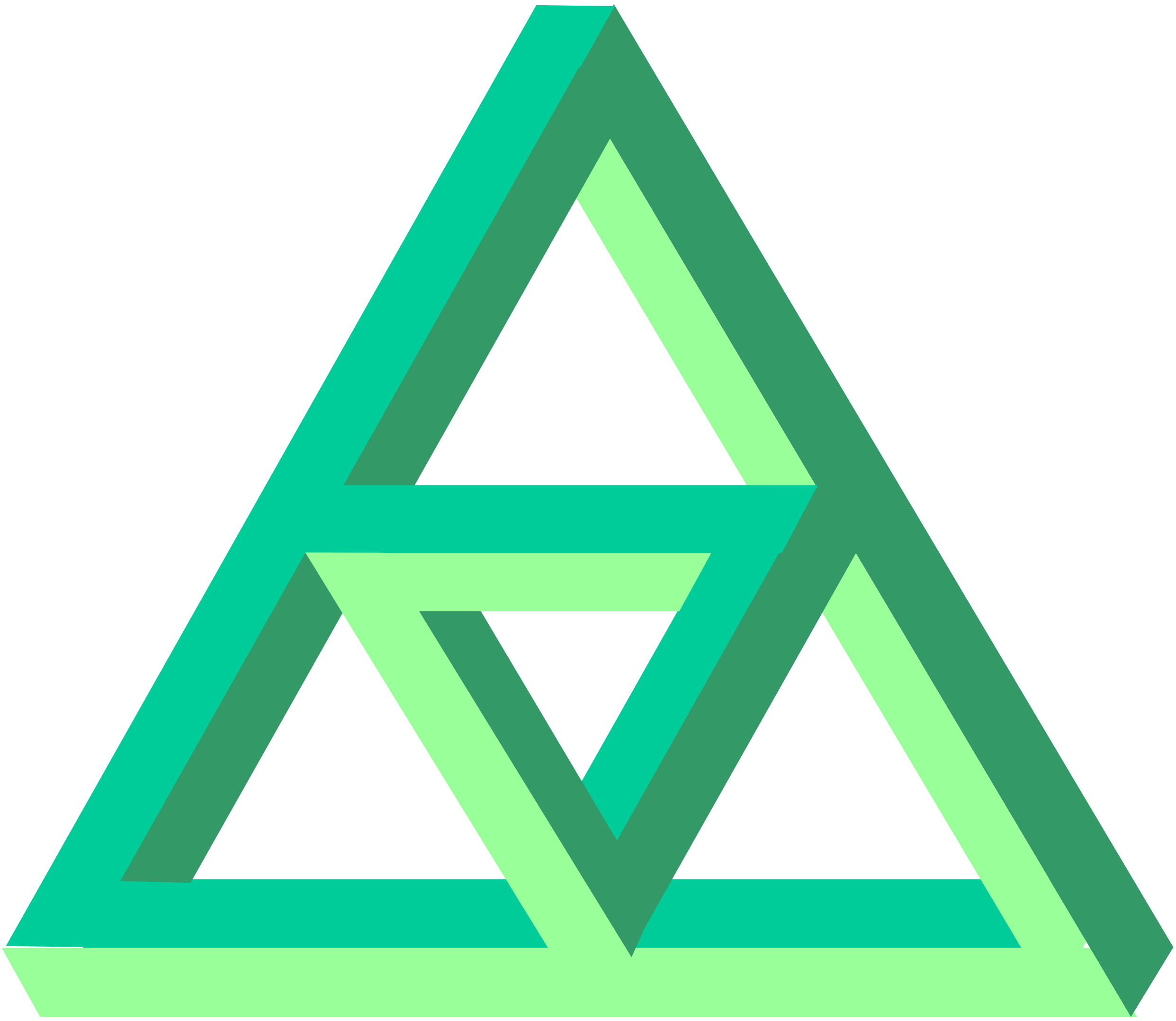
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



September 2022 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen ergänzt die Thematik.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM) der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Zu Beginn des Schuljahres schauen wir auf die Aufgabe **MO610931** zurück. In den Lösungshinweisen wird der größte gemeinsame Teiler von drei Zahlen verwendet. Wir nehmen dies zum Anlass, uns ausführlich mit dieser Thematik zu befassen.

In der **KZM-Aufgabe 1-5A** wird die eindeutige Angabe von Summen mit vielen Summenden thematisiert. Der Gebrauch von „+ … +“ zur abkürzenden Schreibweise kann Missverständnisse hervorrufen. Diese könnten durch die Verwendung des Summenzeichens Σ vermieden werden. Wir zeigen, dass mit dieser Symbolik viele Umformung leicht auszuführen sind.

Mit Freude können wir vom erfolgreichen Abschneiden der deutschen Mannschaft bei der **63. Internationalen Mathematik-Olympiade** berichten.

Im historischen Rückblick erklären wir die Bruchrechnung mit römischen Zahlenzeichen.

---

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 17 – Der größte gemeinsame Teiler

Wir finden den Begriff „größter gemeinsamer Teiler“ in den Lösungshinweisen zu Teil (b) der

Aufgabe - MO610931. Auf einem 2000m langen Rundkurs werden neue Automodelle einem Dauertest mit jeweils gleichbleibender Geschwindigkeit unterzogen. Während eines solchen Tests überqueren die drei Automodelle A, B und C gleichzeitig die Ziellinie der Runde. Als der Wagen A, welcher der schnellste der drei Wagen ist, das nächste Mal diese Linie überquert, hat er 100 m Vorsprung vor B. Als auch B die Ziellinie überquert, hat B 200 m Vorsprung vor C.

a) Berechnen Sie den Vorsprung des Wagens A vor Wagen C zu dem Zeitpunkt, an dem A die Ziellinie erreicht hatte.
b) Nachdem alle drei Wagen gleichzeitig die Ziellinie überquert hatten, müssen viele Runden gefahren werden, bis dieses Ereignis erneut beobachtet werden kann.
   Berechnen Sie, wie viele Runden A, B bzw. C jeweils bis dahin zurücklegen müssen.

Lösungshinweise Teil a) Wir bezeichnen die Geschwindigkeit der Automodelle A, B und C mit v_A, v_B und v_C. Während A 2000 m zurücklegt, schafft B nur 1900 m. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gilt also $\frac{v_B}{v_A} = \frac{19}{20}$ bzw. $v_B = \frac{19}{20} \cdot v_A$. Während B 2000 m zurücklegt, schafft C nur 1800 m. Für das Verhältnis der Geschwindigkeiten gilt also $\frac{v_C}{v_B} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$ bzw. $v_c = \frac{9}{10} \cdot v_B$. Somit gilt $v_C = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{19}{20} \cdot v_A\right) = \frac{171}{200} \cdot v_A$. Während A 2000 m zurücklegt, schafft C somit nur $\frac{171}{200} \cdot 2000 = 1710$ m. Der Vorsprung von A auf C betrug also $2000\ \mathrm{m} - 1710\ \mathrm{m} = 290\ \mathrm{m}$.

Teil b) Um wieder auf der Ziellinie zusammenzutreffen, müssen alle drei Wagen ganzzahlige Rundenzahlen zurückgelegt haben. Das Verhältnis dieser Rundenzahlen entspricht dem Verhältnis der Geschwindigkeiten und dieses wiederum dem Verhältnis der in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege. Hat A zum Beispiel 2000 volle Runden zurückgelegt, dann ist B 1900 Runden und C 1710 Runden gefahren. Der **größte gemeinsame Teiler** von 2000, 1900 und 1710 ist 10. Damit wurde bereits nach 200 Runden von A, 190 Runden von B bzw. 171 Runden von C ein erstes erneutes gemeinsames Passieren der Ziellinie erreicht. ❑

Um den größten gemeinsamen Teiler (abgekürzt mit *ggT*) zweier ganzer Zahlen zu ermitteln, können wir die Primfaktorenzerlegung dieser Zahlen berechnen und aus den Exponenten der Primfaktoren die gemeinsamen Teiler finden. Seien beispielsweise

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}, b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$$

mit Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ $(k \geq 1)$ und mit ganzzahligen Exponenten $a_i, b_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, so ist

$$ggT(a; b) = p_1^{min(a_1, b_1)} \cdot \dots \cdot p_k^{min(a_k, b_k)}$$

der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen a und b. So ist wegen $99 = 3^2 \cdot 11$ und $69 = 3 \cdot 13$ der größte gemeinsame Teiler $ggT(99; 69) = 3$. Dagegen ist die Suche nach $ggT(2021027; 3028009)$ über eine Primfaktorenzerlegung ohne rechentechnische Hilfsmittel schon recht aufwendig.

Anstelle der Primfaktorenzerlegung können wir den EUKLIDischen Algorithmus[3] verwenden. Er basiert auf dem

Satz von der Division mit Rest. Zu zwei positiven natürlichen Zahlen a und b mit $a \geq b$ gibt es natürliche Zahlen q (Quotient) und r (Rest), so dass $a = q \cdot b + r$ gilt. Erfüllt r die Ungleichung $0 \leq r < b$, so sind q und r eindeutig bestimmt.

$Beweis$: Für den Existenz von q und r können wir einfach $q = 1$ und $r = a - b$ setzen. Dann ist $a = 1 \cdot b + a - b$ erfüllt.

Wir nehmen an, es gäbe zwei Zerlegungen $a = q_1 \cdot b + r_1$ und $a = q_2 \cdot b + r_2$ mit $0 \leq r_1, r_2 < b$, dann gilt offenbar

$$(q_1 - q_2) \cdot b = r_2 - r_1.$$

Für $q_1 \neq q_2$ können wir o.B.d.A. die Ungleichung $q_1 > q_2$ und deshalb $q_1 - q_2 \geq 1$ annehmen. Also muss $r_2 - r_1 \geq b$ gelten. Da aber r_2 laut Voraussetzung kleiner als b ist, kann diese Ungleichung nicht erfüllt werden. Wir erhalten deshalb $q_2 = q_1$ und somit auch $r_2 = r_1$, d.h. q und r sind eindeutig bestimmt. ❑

Haben wir für zwei Zahlen a und b einen Quotienten q und den zugehörigen Rest r gefunden, also $a = q \cdot b + r$, so gilt $ggT(a;\ b) = ggT(b;\ r)$.

Diese Beziehung ist erfüllt, denn jeder gemeinsame Teiler von a und b ist auch ein Teiler von r und umgekehrt ist jeder gemeinsame Teiler von b und r auch ein gemeinsamer Teiler von a. Die Mengen der gemeinsamen Teiler von a und b bzw. von b und r stimmen also überein und damit auch der größte gemeinsame Teiler.

Wir berechnen nun $ggT(99;\ 69)$ nach dem EUKLIDischen Algorithmus:

[3] Benannt nach EUKLID VON ALEXANDRIA (im 3. Jh. v. Chr.), der diesen Algorithmus im 7. Buch seines Werkes „Elemente“ beschrieb.

$$
\begin{aligned}
99 &= 1 \cdot 69 + 30; &\quad \text{also gilt} \quad & ggT(99;\ 69) = ggT(69;\ 30),\\
69 &= 2 \cdot 30 + 9; &\quad \text{also gilt} \quad & ggT(69;\ 30) = ggT(30;\ 9),\\
30 &= 3 \cdot 9 + 3; &\quad \text{also gilt} \quad & ggT(30;\ 9) = ggT(9;\ 3),\\
9 &= 3 \cdot 3 + 0; &\quad \text{also gilt} \quad & ggT(9;\ 3) = 3.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun die Aussagen zu den größten gemeinsamen Teilern „von oben nach unten“ zusammen, erhalten wir das Ergebnis $ggT(99;\ 69) = 3$.

Beachten wir, dass in jeder Zeile der Rest r kleiner als in der vorangegangenen Zeile wird, wenn wir den Quotienten q maximal wählen, erreichen wir nach endlich vielen Schritten immer eine Division mit dem Rest 0.

Mit diesem Verfahren finden wir auch für größere Zahlen a und b den größten gemeinsamen Teiler, ohne eine Primfaktorenzerlegung durchführen zu müssen:

$$
\begin{aligned}
3028009 &= 1 \cdot 2021027 + 1006982; & ggT(3028009; 2021027) &= ggT(2021027; 1006982).\\
2021027 &= 2 \cdot 1006982 + 7063; & ggT(2021027; 1006982) &= ggT(1006982; 7063).\\
1006982 &= 142 \cdot 7063 + 4036; & ggT(1006982; 7063) &= ggT(7063; 4036).\\
7063 &= 1 \cdot 4036 + 3027; & ggT(7063; 4036) &= ggT(4036; 3027).\\
4036 &= 1 \cdot 3027 + 1009; & ggT(4036; 3027) &= ggT(3027; 1009).\\
3027 &= 3 \cdot 1009 + 0; & ggT(3027; 1009) &= 1009.
\end{aligned}
$$

Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 2021027 und 3028009 ist somit 1009.

Aufgabe. Untersuche, welchen größten gemeinsamen Teiler die Zahlen $2n + 3$ und $3n + 2$ für verschiedene natürliche Zahlen n haben.

Lösungshinweise: Um eine Vermutung zu finden, berechnen wir zuerst für einige Werte von n den größten gemeinsamen Teiler der zugehörigen Zahlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$2n + 3$	3	5	7	9	11	13	15	17	19
$3n + 2$	2	5	8	11	14	17	20	23	26
ggT	1	5	1	1	1	1	5	1	1

Wir erkennen, dass die beiden Zahlen meist teilerfremd sind, aber manchmal auch einen gemeinsamen Teiler 5 haben, nämlich offenbar, wenn es ganze Zahlen m mit $n = 5m + 1$ gibt. Tatsächlich können wir im Sinne einer vollständigen Induktion[4] bestätigen:

- Ist $2n + 3$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 1$ oder $n = 6$), dann ist auch $2(n + 5) + 3 = 2n + 3 + 10$ durch 5 teilbar.

[4] Es wird in der MO kein vollständiger Beweis mit der Methode der vollständigen Induktion erwartet, wenn deren Prinzipien wie im Folgenden erkennbar sind.

- Ist $3n+2$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n=1$ oder $n=6$), dann ist auch $3(n+5)+2=3n+2+15$ durch 5 teilbar.

Hinweis: Setzen wir $n=5m+1$ in die zu untersuchenden Ausdrücke ein, erhalten wir die Teilbarkeit durch 5 unmittelbar:

$$2\cdot n+3=2\cdot(5\cdot m+1)+3=10\cdot m+5,$$
$$3\cdot n+2=3\cdot(5\cdot m+1)+2=15\cdot m+5.$$

Mithilfe des EUKLIDischen Algorithmus können wir unsere Beobachtung bestätigen:

$$3n+2=1\cdot(2n+3)+(n-1);\quad ggT(3n+2;2n+3)=ggT(2n+3;n-1).$$
$$2n+3=2\cdot(n-1)+5;\quad ggT(2n+3;\ n-1)=ggT(n-1;5).$$

Zusammengefasst bedeutet dies:

$$ggT(3n+2;2n+3)=ggT(n-1;5).$$

Damit wissen wir: Wenn $n-1$ nicht durch 5 teilbar ist, dann sind die beiden Ausgangszahlen teilerfremd. Ist dagegen $n-1$ durch 5 teilbar, so ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler 5. Die Antwort lautet also

$$ggT(3n+2;2n+3)=\begin{cases}5, \text{falls } 5|(n-1)\\ 1, \text{sonst}\end{cases}$$ ❑

Aufgabe MO430945. Untersuchen Sie, ob es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die 2^n-3 und 3^n-2 einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.

Lösungshinweise: Wir berechnen einige Werte beider Zahlen.

n	1	2	3	4	5	6	7
2^n-3	-1	1	5	13	29	61	125
3^n-2	1	7	25	79	241	727	2185

Wir erkennen, dass es Zahlenpaare gibt, die teilerfremd sind (z.B. 13 und 79). Wir vermuten aber, dass die Teilbarkeit durch 5 ein erfolgversprechender Lösungsansatz sein könnte. Berechnen wir in der Tabelle jeweils die Reste bei Division durch 5, so können wir die Tabelle mühelos fortsetzen:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2^n	3	1	2	4	3	1	2	4	3	1	2
2^n-3	0	3	4	1	0	3	4	1	0	3	4
3^n	2	1	3	4	2	1	3	4	2	1	3
3^n-2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1

Da die Reste eine periodische Folge bilden, sind offenbar für alle natürlichen Zahlen n mit $n = 4m - 1$ ($m = 1,2, \ldots$) sowohl $2^n - 3$ als auch $3^n - 2$ durch 5 teilbar.

Tatsächlich können wir im Sinne einer vollständigen Induktion bestätigen:

- Ist $2^n - 3$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 3, 7, 11$), dann ist auch $2^{n+4} - 3 = 16 \cdot 2^n - 3 = 15 \cdot 2^n + (2^n - 3)$ durch 5 teilbar.
- Ist $3^n - 2$ durch 5 teilbar (z.B. laut obiger Tabelle für $n = 3, 7, 11$), dann ist auch $3^{n+4} - 2 = 81 \cdot 3^n - 2 = 80 \cdot 3^n + (3^n - 2)$ durch 5 teilbar.

Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen n, so dass sowohl $2^n - 3$ als auch $3^n - 2$ einen Teiler größer 1 haben. ❑

Lösungsvariante: Die Anwendung des EUKLIDischen Algorithmus führt ebenfalls zum Ziel, erfordert aber für eine erfolgreiche Darstellung bereits die entsprechende Vermutung und führt zu einer aufwändigen Herleitung:

$$3^n - 2 = 1 \cdot (2^n - 3) + (3^n - 2^n + 1)$$
$$ggT(3^n - 2\,;\, 2^n - 3) = ggT(2^n - 3\,;\, 3^n - 2^n + 1).$$

$$2^n - 3 = 1 \cdot (3^n - 2^n + 1) + (2 \cdot 2^n - 3^n - 4)$$
$$ggT(2^n - 3\,;\, 3^n - 2^n + 1) = ggT(3^n - 2^n + 1\,;\, 2 \cdot 2^n - 3^n - 4).$$

$$3^n - 2^n + 1 = 2 \cdot (2 \cdot 2^n - 3^n - 4) + (3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9)$$
$$ggT(3^n - 2^n + 1\,; 2 \cdot 2^n - 3^n - 4) = ggt(2^n - 3^n - 4\,; 3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9).$$

Betrachten wir den zuletzt aufgetretenen Rest

$$3 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n + 9 = 3 \cdot (3^n - 2^n) + 9 - 2^{n+1},$$

so erkennen wir einerseits, dass für eine ungerade Zahl n der Ausdruck $3^n - 2^n$ durch $(3 + 2) = 5$ teilbar ist[5]. Andererseits sehen wir für eine ungerade Zahl $n = 2m + 1$ den Zusammenhang

$$2^{2m+2} - 9 = 2^{(m+1) \cdot 2} - 3^2 = (2^{m+1} - 3) \cdot (2^{m+1} + 3)$$

Untersuchen wir nun zunächst tabellarisch, welche Reste bei Division durch 5 die beiden Klammerausdrücke lassen.

---

[5] Es kann ohne Beweis zitiert werden: Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so gilt: $a^m - b^m = (a + b) \cdot (a^{m-1} - a^{m-2} \cdot b + \cdots + a \cdot b^{m-2} - b^{m-1})$.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
2^{m+1}	4	3	1	2	4	3	1	2
$2^{m+1}-3$	1	0	3	2	1	0	3	2
$2^{m+1}+3$	2	1	4	0	2	1	4	0

Also ist für jede gerade Zahl m entweder $2^{m+1}-3$ oder $2^{m+1}+3$ durch 5 teilbar. Insgesamt ist also das Produkt beider Klammerausdrücke für jede gerade Zahl m durch 5 teilbar. Somit hat dieser Rest für alle $n = 4m + 1$ den Teiler 5 und somit gilt auch für diese natürlichen Zahlen $ggT(2^n - 3; 3^n - 2) \geq 5$.

Aufgabe. Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $p^2 - 1$ mit einer Primzahl $p \geq 5$.

Lösungshinweise: Wir kennen die Faktorenzerlegung $p^2 - 1 = (p-1) \cdot (p+1)$.

- Da p als Primzahl mit $p \neq 2$ eine ungerade Zahl ist, sind $p-1$ und $p+1$ gerade Zahlen. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine dieser Zahlen sogar durch 4 teilbar. Insgesamt ist das Produkt also durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar.
- Da von drei aufeinanderfolgenden Zahlen genau eine dieser Zahlen durch 3 teilbar ist, ist wegen $p \neq 3$ entweder $p-1$ oder $p+1$ durch 3 teilbar. Somit ist das Produkt für jede Primzahl $p \geq 5$ durch $8 \cdot 3 = 24$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form ist folglich mindestens 24.

Weil wir für $p = 5$ den Wert $5^2 - 1 = 24$ erhalten, kann der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form nicht größer als 24 sein. Somit ist der größte gemeinsame Teiler gleich 24. ❑

Lösungsvariante: Wir berechnen für zwei Primzahlen $p \geq 5$ und $q \geq 5$ mit $p > q$ den größten gemeinsamen Teiler mit Hilfe des EUKLIDischen Algorithmus:

$$p^2 - 1 = 1 \cdot (q^2 - 1) + (p^2 - q^2).$$

Zerlegen wir den Rest $p^2 - q^2 = (p+q) \cdot (p-q)$, so finden wir mit ähnlicher Argumentation wie oben, dass dieser Rest durch 24 teilbar ist. Damit ist der größte gemeinsame Teiler mindestens 24. Anhand des Beispiels $p = 5$ überzeugen wir uns, dass er nicht größer als 24 sein kann.

Aufgabe – MO421022. Wir betrachten alle diejenigen Zahlen $u^3 - u$, bei denen u eine ungerade Zahl mit $u > 1$ ist.

a) Beweisen Sie, dass jede dieser Zahlen gerade ist.
b) Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller dieser Zahlen.

Lösungshinweise zu a) Für eine ungerade Zahl u ist auch u^3 ungeradzahlig. Die Differenz zweier ungerader Zahlen ist stets gerade.[6]

Zu b) Wir setzen $z = u^3 - u$. Für $u = 3$ finden wir $z = 3^3 - 3 = 24 = 8 \cdot 3$. Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen der geforderten Form kann also nicht größer als 24 sein. Wir beweisen nun, dass alle diese Zahlen durch 8 und 3 teilbar sind. Wir zerlegen dafür z in ein Produkt von Faktoren[7]:

$$z = u \cdot (u^2 - 1) = (u - 1) \cdot u \cdot (u + 1)$$

- Da u eine ungerade Zahl ist, sind $u - 1$ und $u + 1$ gerade Zahlen. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist eine dieser Zahlen sogar durch 4 teilbar. Insgesamt ist das Produkt also durch $2 \cdot 4 = 8$ teilbar.
- Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist zudem genau eine dieser Zahlen durch 3 teilbar.

Somit ist das Produkt für jede ungerade Zahl $u > 1$ durch $8 \cdot 3 = 24$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen dieser Form ist folglich 24. ❑

Aufgabe MO410943. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $n^4 - 4 \cdot n^2$ mit $n \in \{1,2,3, \dots\}$, welche auf Null enden.

Lösungshinweise: Wir setzen $z = n^4 - 4 \cdot n^2$. Da z auf Null enden soll, ist z geradzahlig. Deshalb muss auch n geradzahlig sein. Außerdem ist 5 ein Teiler aller Zahlen dieser Form. Wir zerlegen z in

$$z = n^2 \cdot (n^2 - 4) = (n - 2) \cdot n^2 \cdot (n + 2).$$

- Von den drei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen $n - 2$, n und $n + 2$ ist genau eine Zahl durch 3 teilbar.
- Ist n durch 4 teilbar, sind sowohl $n - 2$ als auch $n + 2$ durch 2 teilbar. Das Produkt der Faktoren ist also durch $2 \cdot 4^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 4^2$ teilbar. Ist die gerade Zahl n nicht durch 4 teilbar, sind sowohl $n - 2$ als auch $n + 2$ durch 4 teilbar. Das Produkt der Faktoren ist also durch $4 \cdot 2^2 \cdot 4 = 2^2 \cdot 4^2$ teilbar.

Insgesamt ist z stets durch $2^6 \cdot 3 \cdot 5 = 960$ teilbar.

Der größte gemeinsame Teiler ist also mindestens 960. Anhand von Beispielen zeigen wir, dass dieser Wert nicht größer sein kann. Aus der Faktorenzerlegung erkennen wir, dass für gerade Zahlen n mindestens $n = 8$ gelten muss, um z auf Null enden zu lassen. Anstatt die dabei entstehenden recht großen Zahlen schriftlich auszurechnen (rechentechnische Hilfsmittel sind nicht erlaubt!), nutzen wir die Faktorenzerlegung:

[6] Diese Aussage darf ohne Beweis zitiert werden.
[7] Wir nutzen die bekannte Beziehung für reelle Zahlen a und b: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

$$n = 8: \quad z = 6 \cdot 8^2 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 960.$$

Da der kleinstmögliche Wert für z bereits größer als 960 ist, könnte der größte gemeinsame Teiler größer als 960 sein.

$$n = 10: \quad z = 8 \cdot 10^2 \cdot 12 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 5 \cdot 960.$$
$$n = 12: \quad z = 10 \cdot 12^2 \cdot 14 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 960.$$

Da die zusätzlichen Primfaktoren 2^2, $2 \cdot 5$ und $3 \cdot 7$ keine gemeinsamen Teiler haben, kann der größte gemeinsame Teiler aller dieser Zahlen nicht größer als 960 sein. ❑

Aufgabe MO411042. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen $n^8 - n^2$ mit $n \in \{1,2,3, \dots\}$.

Lösungshinweis: Wir setzen $z = n^8 - n^2$.

- Für $n = 1$ erhalten wir $z = 0$, was durch jede positive ganze Zahl teilbar ist.
- Für $n = 2$ berechnen wir $z = 256 - 4 = 252 = 4 \cdot 7 \cdot 9$. Der größte gemeinsame Teiler kann also nicht größer als 252 sein.

Wir zeigen nun, dass z für jede Zahl n durch 4, 7 und 9 teilbar ist. Dazu zerlegen wir z in Faktoren

$$z = n^2 \cdot (n^6 - 1) = n^2 \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^4 + n^2 + 1),$$

also $z = (n-1)n^2(n+1)(n^4 + n^2 + 1)$

- z ist durch 4 teilbar: Ist n gerade, so ist n^2 durch 4 teilbar. Ist n ungerade, so ist $n^2 - 1$ durch 4 teilbar.
- z ist durch 9 teilbar: Ist n durch 3 teilbar, dann ist n^2 durch 9 teilbar. Ist n nicht durch 3 teilbar, so lässt n^2 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit ist in diesem Fall sowohl $n^2 - 1$ als auch $(n^2)^2 + n^2 + 1$ durch 3 teilbar.
- z ist durch 7 teilbar: Lässt n bei Division einen der Reste 0 oder ±1, so ist $(n-1)$, n oder $(n+1)$ durch 7 teilbar. Lässt n bei Division durch 7 einen der Reste ±2 oder ± 3, dann ist $n^4 + n^2 + 1$ durch 7 teilbar.

Insgesamt ist also z für jede Zahl n durch $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$ teilbar. ❑

63. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 6. bis 16. Juli 2022 in Oslo (Norwegen) statt. Mit 68 teilnehmenden Schülerinnen und 521 Schülern aus 104 Ländern wurde die bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern) nicht erreicht.

Insgesamt wurden 285 Medaillen vergeben, somit erhielten 48.4% aller Teilnehmenden einen Preis. Mit einer Gold-, vier Silber- und einer Bronzemedaille schnitten die deutschen Teilnehmer sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 192 Punkten von 252 möglichen Punkten (94.2%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den hervorragenden **7. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2020: 140 Punkte/26. Platz). Insbesondere erreichten alle sechs deutschen Teilnehmer in den Aufgaben 1, 2 und 4 jeweils die volle Punktzahl. Angeführt wird diese Länderliste von der Volksrepublik China (252 Punkte, sechs Goldmedaillen), Republik Korea (208 Punkte, drei Gold- und drei Silbermedaillen) und den USA (207 Punkte, vier Gold-, eine Silber- und eine Bronzemedaille). Von den europäischen Ländern liegt nur Rumänien (194 Punkte) vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org zu finden.

Aufgaben der 63. IMO[8]

Aufgabe 1. Die Osloer Bank gibt Münzen aus Aluminium (mit *A* bezeichnet) und aus Bronze (mit *B* bezeichnet) heraus. Marianne hat n Aluminiummünzen und n Bronzemünzen beliebig in einer Reihe angeordnet. Eine *Kette* sei eine Teilfolge aufeinanderfolgender Münzen aus gleichem Material. Für eine gegebene positive ganze Zahl $k \leq 2n$ führt Marianne wiederholt die folgende Operation durch: Sie identifiziert die längste Kette, die die k-te Münze von links enthält, und verschiebt alle Münzen dieser Kette an das linke Ende der Reihe. Zum Beispiel erhält sie für $n = 4$ und $k = 4$ ausgehend von der Konfiguration *AABBBABA* nacheinander

$$AABBBABA \to BBBAAABA \to AAABBBBA \to BBBBAAAA \to BBBBAAAA \to \cdots$$

Man bestimme alle Paare (n, k) mit $1 \leq k \leq 2n$, sodass für jede Ausgangskonfiguration zu irgendeinem Zeitpunkt im Verlauf des Prozesses die n am weitesten links liegenden Münzen aus dem gleichen Material sind.

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die es zu jedem $x \in \mathbb{R}^+$ genau ein $y \in \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

[8] Es wird nicht erwartet, diese Aufgaben selbständig zu lösen. Jedoch könnte man bei Aufgabe 1 einen Spezialfall mit kleinen Zahlen n und k lösen, bei Aufgabe 2 außer der trivialen Lösung $f(x) = x^{-1}$ weitere Beispiele finden, bei Aufgabe 3 ein Beispiel angeben, bei Aufgabe 4 die Problemstellung in einer Skizze verdeutlichen, bei Aufgabe 5 eine systematische Suche starten und bei Aufgabe 6 am 4×4-Quadrat experimentieren.

Aufgabe 3. Es seien k eine positive ganze Zahl und S eine endliche Menge ungerader Primzahlen. Man beweise, dass es (bis auf Drehung und Spiegelung) höchstens eine Möglichkeit gibt, die Elemente von S entlang eines Kreises so anzuordnen, dass das Produkt zweier beliebiger Nachbarn in der Form $x^2 + x + k$ mit einer geeigneten positiven ganzen Zahl x dargestellt werden kann.

Aufgabe 4. Es sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit $BC = DE$. Weiterhin sei angenommen, dass T ein Punkt im Inneren von $ABCDE$ mit $TB = TD$, $TC = TE$ und $\sphericalangle ABT = \sphericalangle TEA$ ist. Die Gerade AB schneide die Geraden CD und CT in den Punkten P bzw. Q. Wir nehmen an, dass die Punkte P, B, A, Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Die Gerade AE schneide die Geraden CD und DT in den Punkten R bzw. S. Wir nehmen an, dass die Punkte R, E, A, S in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen.

Man beweise, dass die Punkte P, S, Q, R auf einem Kreis liegen.

Aufgabe 5. Man bestimme alle Tripel (a, b, p) positiver ganzer Zahlen mit Primzahl p und

$$a^p = b! + p$$

Aufgabe 6. Es sei n eine positive ganze Zahl. Ein Nordisches Quadrat ist ein Spielbrett der Größe $n \times n$, in dessen Feldern alle Zahlen von 1 bis n^2stehen, wobei jedes Feld genau eine Zahl enthält. Zwei verschiedene Felder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite besitzen. Jedes Feld, das nur benachbarte Felder mit größeren Zahlen hat, heißt Talfeld. Ein ansteigender Pfad ist eine Folge von einem oder mehreren Feldern mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Das erste Feld in der Folge ist ein Talfeld.
(ii) Jedes weitere Feld der Folge ist benachbart zum vorigen Feld.
(iii) Die Zahlen in den Feldern der Folge sind in ansteigender Reihenfolge.

Man bestimme in Abhängigkeit von n die kleinstmögliche Gesamtzahl ansteigender Pfade in einem Nordischen Quadrat.

Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen

Das Summenzeichen **Σ** (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *S*) wird für alle ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \leq n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$.

Die Verwendung des Summenzeichens wie bei Aufgabe KZM 1-5A[9] kann helfen, mathematische Texte übersichtlicher und unmissverständlich zu formulieren. Es wird jedoch nicht erwartet, in einer Lösungsdarstellung selbst das Summenzeichen zu verwenden. Stattdessen können solche Summen ausgeschrieben werden. Allerdings ist darauf zu achten, dass bei abkürzenden Schreibweisen mit „+ … +“ keine Missverständnisse über den Inhalt der Summe möglich sind – so wie es in der Aufgabe KZM 1-5A thematisiert wird.

Mit den folgenden Regeln können wir mit Summenzeichen rechnen. Zur anschaulichen Darstellung dieser Regeln sind Beispiele mit konkreten Zahlenwerten hilfreich:

(1) Freie Wählbarkeit des Summationsindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$

Beispiel: $\sum_{j=3}^{8} j = 3+4+5+6+7+8 = \sum_{k=3}^{8} k$

(2) Ausklammern eines konstanten Faktors: $\sum_{j=m}^{n}\left(c \cdot a_j\right) = c \cdot \sum_{j=m}^{n} a_j$

Beispiel: $\sum_{k=2}^{5}(2 \cdot k) = 4+6+8+10 = 2 \cdot (2+3+4+5) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{5} k$

(3) Zerlegen in Teilsummen ($m < k < n$): $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{k} a_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_j$

Beispiel:

$$\sum_{j=-3}^{3} j^2 = \sum_{j=-3}^{-1} j^2 + \sum_{j=0}^{0} j^2 + \sum_{j=1}^{3} j^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=-3}^{3} j^2 &= (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 2 \cdot \sum_{j=1}^{3} j^2\end{aligned}$$

(4) Zusammenfassen von Summen: $\sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j = \sum_{j=m}^{n}\left(a_j + b_j\right)$

Beispiel für die aufeinanderfolgende Ausführung dieser Regeln:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{4}(10+k) + \sum_{m=1}^{4}(10-m) \\ &= \sum_{j=1}^{4}(10+j) + \sum_{j=1}^{4}(10-j) && \text{(Regel 1)} \\ &= \sum_{j=1}^{4}\left((10+j) + (10-j)\right) && \text{(Regel 4)} \\ &= \sum_{j=1}^{4} 20 \\ &= 20 \cdot \sum_{j=1}^{4} 1 = 20 \cdot 4 = 80 && \text{(Regel 2)}\end{aligned}$$

Dieses Beispiel überprüfen wir durch die ausführliche Summendarstellung:

$$\sum_{k=1}^{4}(10+k) + \sum_{m=1}^{4}(10-j) = (11+12+13+14) + (9+8+7+6) = 80$$

[9] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

(5) Umkehrungsregel: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m}^{n} a_{n+m-j}$

Beispiel:
$$1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 = \sum_{k=1}^{4} k \cdot 10^{4-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{4} (5-k) \cdot 10^{4-(5-k)} = \sum_{k=1}^{4} (5-k) \cdot 10^{k-1}$$
$$= 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$$

(6) Transformation des Summenindex: $\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m+k}^{n+k} a_{j-k}$

Beispiel: $\sum_{j=4}^{8} j = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{j=6}^{10} (j-2)$

Die bekannte Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen, die bereits im 2. Rechenbuch von ADAM RIES (1492 bis 1559) zu finden ist, aber im Allgemeinen mit dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 bis 1855) in Verbindung gebracht wird, d.h.

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

finden wir unter Verwendung der obigen Rechenregeln mit Summenzeichen auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) & \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)\right) & \text{(Regel 5)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \big(k + (n+1-k)\big) & \text{(Regel 4)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (n+1) & \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 & \text{(Regel 2)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n &
\end{aligned}$$

Für allgemeinere Ausdrücke, wie etwa $S(a,d,n) = \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d)$ ergeben sich nun deren Summenformeln als unmittelbare Folgerung:

$$\begin{aligned}
S(a,d,n) &= \sum_{k=0}^{n} (a + k \cdot d) \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 + d \cdot \sum_{k=0}^{n} k \quad \text{(Regel 3)} \\
&= a \cdot (n+1) + d \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Leicht können wir nachprüfen, dass wir – bis auf Regel (2) – in jeder der angegebenen Regeln das Summenzeichen durch das Produktzeichen ersetzen können:

Das Produktzeichen Π (aus dem griechischen Alphabet der Großbuchstabe *P*) wird für alle nichtnegativen ganzen Zahlen *m* und *n* mit $m \le n$ und beliebige reelle Zahlen $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ durch folgende Definition erklärt: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$.

In Analogie muss die Regel des Ausklammerns eines Faktors (Regel 2) für das Produktzeichen lauten:

(2’) $\prod_{j=m}^{n}(c \cdot a_j) = c^{(n-m+1)} \cdot \prod_{j=m}^{n} a_j$
Beispiel: $\prod_{j=1}^{4}(2 \cdot j) = 2^4 \cdot \prod_{j=1}^{4} j = 2^4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 384$

Allerdings können Summen- und Produktzeichen im Allgemeinen nicht innerhalb eines Ausdruckes vertauscht werden können. Um sich dies zu veranschaulichen, betrachten wir folgendes Beispiel:

$\sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2} 1 = \sum_{i=1}^{2}(1 \cdot 1) = 1 + 1 = 2$, aber
$\prod_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} 1 = \prod_{j=1}^{2}(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$

Bezeichnen $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ die Ziffern einer m-stelligen Zahl im Dezimalsystem, so können wir die Aufgabe KZM 1-1 mit Summen und Produktzeichen so formulieren:

Aufgabe KZM 1-1. Man finde alle positiven ganzen Zahlen n mit den Ziffern $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_0$ (häufig als $n = \overline{a_m a_{m+1} \ldots a_1 a_0}$ dargestellt), die folgende Gleichung erfüllen:

$$n = \sum_{i=0}^{m}\left(10^{m-i} \cdot a_i\right) = \sum_{i=0}^{m} a_i + \prod_{i=0}^{m} a_i.$$

In alten Mathe-Büchern geblättert

Der Autor Werner Bergmann analysiert in

Bruchrechnen im Mittelalter
Verlag Henselowsky Boschmann, Bottrop, 2020

die Rechenkunst im Mittelalter und erläutert insbesondere die Bruchrechnung mit römischen Zahlen, jenem Zahlensystem, dass bereits vor unserer Zeitrechnung im antiken Römischen Reich (ab ca. 750 v.u.Z.) verwendet wurde und bis ins 16. Jahrhundert gebräuchlich war. Die römischen Zahlenzeichen I, V, X, L, C, D und M sind noch heute gut bekannt. Aufgrund des additiven Systems zur Darstellung ganzer Zahlen sind Addition und Subtraktion leicht ausführbar. Für die Addition zweier Zahlen, z.B. CCCLXXXVII + CXXXVI, genügt es, alle Zeichen geordnet nebeneinander zu schreiben, also CCCCLXXXXXXVVIII, und die geeignete Anzahl gleicher Zeichen von rechts nach links schrittweise durch das nächsthöhere Zeichen zu ersetzen („elevieren“), also

CCCCLXXXXXX**VV**III → CCCCL**XXXXX**XXIII → CCCC**LL**XXIII → **CCCCC**XXIII → DXXIII

Wir können heute das Ergebnis durch das uns vertraute Dezimalsystem prüfen, also 387 + 136 = 523.

Die Multiplikation wurde auf die wiederholte Addition zurückgeführt, wobei die Werte des zweiten Faktors geschickt verwendet werden können. Das dabei entstehende Schema finden wir in dem heutigen schriftlichen Multiplikationsverfahren wieder. Auch die Division einer Zahl durch einen einstelligen Divisor lässt sich intuitiv durchführen. Um den dritten Teil von CCCLXXXVII zu erhalten, suchen wir von links die passenden Vielfachen der verwendeten Zeichen:

> **CCC**LXXXVII: Da C dreimal vorhanden ist, beginnt der Quotient mit C und wir subtrahieren vom Dividend CCC. Es verbleiben:
>
> LXXXVII: Da L weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir L mit dem nächstkleineren Zeichen X dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> XXXXXXXXVII: Da X mehr als sechsmal und weniger als neunmal vorhanden ist, wird der Quotient mit XX fortgesetzt und wir subtrahieren XXXXXX. Es verbleiben:
>
> XXVII: Da X weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir X mit dem nächstkleineren Zeichen V dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> VVVVVII: Da V mehr als dreimal und weniger als sechsmal vorhanden ist, wird der Quotient mit V fortgesetzt und wir subtrahieren VVV. Es verbleiben:
>
> VVII: Da V weniger als dreimal vorhanden ist, stellen wir V mit dem nächstkleineren Zeichen I dar („resolvieren“). Es entsteht:
>
> IIIIIIIIIIII: Da I zwölfmal vorhanden ist, wird der Quotient mit IIII fortgesetzt und nach Subtraktion von IIIIIIIIIIII ist der Dividend aufgebraucht.
>
> Wir erhalten also das Ergebnis: CXXVIIII (387 : 3 = 129).

Die Division mit einem mehrstelligen Divisor erfordert Übung, gelingt aber nach dem Prinzip, den Divisor so lange zu addieren, bis sich der Dividend ergibt.

Das Rechnen mit römischen Zahlenzeichen beschränkte sich im Allgemeinen auf ganze Zahlen. Dezimalzahlen, wie wir sie heute verwenden, waren noch nicht im Gebrauch. Man war sich dieser Beschränkung bewusst. ADAM RIES (1492 bis 1559) erklärt in seinem dritten Rechenbuch, „Practica“ genannt (1550), im Zusammenhang mit dem Radizieren:

„Es haben alle zahl nicht gar radicem ſondern es bleibt etwas vbrig / ſuch iren radix auff geneheſte alſo / multiplicir die ſelbe zahl mit 1000000 als dann extrahir radicem komen dir eitel tauſent teil von ein gantzen / Auſ 19 ſoltu den Radix ſuchen / ſetz darfur ſechs 0 wirt 19000000 darauſ ſuch radice wie geſagt. ... Iſt alſo Radix 4 gantze und 358 tauſent teil / das vberig tregt wenig auff.“

Ohne es im Dezimalsystem als $\sqrt{19} \approx 4.358$ schreiben zu können, gab Adam Ries das Ergebnis in dieser Genauigkeit an und wusste zudem, dass der Rest vernachlässigbar war.

Um mit gebrochenen Zahlen rechnen zu können, wurden ganzzahlige Brüche verwendet. Entgegen des (um die Fünferwerte erweiterten) Dezimalsystems für die ganzen Zahlen basierte die Bruchrechnung auf der Einteilung in 12 Teile (Dutzend), so wie es in der Kalender- und Zeitenrechnung üblich war und auch in der römischen Währung praktiziert wurde (Römisches Pfund = 12 Unzen).

Für die Brüche $\frac{1}{12}$ bis $\frac{11}{12}$ genügten drei zusätzliche Zeichen ($\frac{1}{12}$: – ; $\frac{2}{12}$: = und $\frac{6}{12}$: S). Die anderen Zwölfer-Brüche konnten damit wie mit römischen Zahlenzeichen gewohnt zusammengesetzt werden, z.B. $\frac{8}{12}$: S=–.

Zusätzlich wurden für die Stammbrüche[10], deren Nenner Vielfache von 12 sind (24, 36, 48, 72, 144 und 288), eigene Zeichen verwendet. So ist für $\frac{1}{288}$ das Zeichen ∋ überliefert. Brüche mit ganzzahligem Zähler größer als 1 werden durch nachgestellte römischen Zahlenzeichen geschrieben, z.B. $\frac{27}{288}$ = ∋XXVII. Mit diesem Repertoire von Zeichen konnten nun die Grundrechenarten für Brüche in gleicher Weise praktiziert werden. In besonders einfacher Weise gelang dies, wenn die Rechnungen mit dem Hauptnenner 288 durchgeführt wurden. So lässt sich die Aufgabe $6 \cdot \frac{1}{24} = 6 \cdot \frac{12}{288}$ so umschreiben: VI · ∋XII = ∋VI·XII = ∋LXXII. Die Rechnungen im Zähler (also in den nachgestellten Zeichen) erfolgte dabei so, wie man es mit römischen Zahlenzeichen gewohnt war. Zur Vereinfachung des Rechenaufwandes waren umfangreiche Additions- und Multiplikationstabellen verfügbar.

Für Kreisberechnungen ist im Mittelalter die Näherung $\pi \approx \frac{22}{7}$ bekannt. Dieser Wert wird mit Archimedes von Syrakus (um 287 bis 212 v.u.Z.) in Verbindung gebracht, der

---

[10] Brüche mit Zähler 1 und ganzzahligem Nenner größer 1 heißen Stammbrüche (vgl. Thema 5, Heft Mai 2022)

die Kreiskonstante durch Einschachtelung des Einheitskreises (Kreis mit Radius 1) mit ein- und umbeschriebenen regelmäßigen Vielecken näherungsweise berechnete. Jedoch muss vermutet werden, dass beim Rechnen mit römischen Zahlenzeichen diese Näherung wohl nicht verwendet wurde, da dieser Bruch nicht direkt darstellbar ist (es gab keine Zeichen für Brüche mit dem Nenner 7) und somit stets die Multiplikation mit 22 und anschließend die Division durch 7 auszuführen wäre. Dagegen fügt sich der Wert $3\,\frac{41}{288} \approx 3.14236111$ in dieses Zahlensystem ein und ist zudem ein besserer Näherungswert für $\pi \approx 3.14159265$ als $\frac{22}{7} \approx 3.14285714$. Das dies auch tatsächlich so angewandt wurde, lässt sich bei SEXTUS JULIUS FRONTINUS (um 40 bis 103) nachweisen. Als „Curator Aquarum“ war er in Rom für die städtische Wasserversorgung verantwortlich und gab nach dem Jahre 97 eine Übersicht über die Maße der Wasserleitungen und -rohre einschließlich ihrer Durchmesser, Umfänge und Fassungsvermögen heraus. Aus diesen Daten lässt sich eindeutig nachweisen, dass bei seinen Berechnungen der Wert $3\,\frac{41}{288}$ verwendet wurde.

Bekannte Sätze - Über die Anzahl der Teiler einer Zahl

Satz. Bezeichnet $T(a)$ die Anzahl der Teiler[11] der positiven natürlichen Zahl a und hat diese Zahl a die Primfaktorenzerlegung $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ mit Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_k$ $(k \geq 1)$ und ganzzahligen Exponenten $a_i \geq 1$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, so gilt

$$T(a) = \prod_{i=1}^{k} (a_i + 1)$$

Beweis: Ist die natürliche Zahl n eine Potenz einer Primzahl p, also $n = p^m$, so besitzt n genau die $m + 1$ Teiler $1, p, p^2, \dots, p^m$. Ist n eine zusammengesetzte Zahl der Form $n = p^m \cdot b$ mit der Primzahl p und den ganzen Zahlen m und b (wobei b und p teilerfremd sind, also $ggT(b; q) = 1$, dann gilt für die Anzahlen der Teiler $T(n)$ und $T(b)$:

$$T(n) = (m + 1) \cdot T(b).$$

Ist nämlich t ein Teiler von b, so sind auch $t, t \cdot p, t \cdot p^2, \dots, t \cdot p^m$ Teiler von n. Wegen der Teilerfremdheit von p und b sind auch p und t teilerfremd und die aufgelisteten Teiler sind paarweise verschieden und noch nicht als Teiler von b vorhanden. Auf diese Weise finden wir sukzessive

[11] Die Zahl 1 und die Zahl a selbst werden ebenfalls als Teiler von a betrachtet.

$$b_2 = p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}: \quad T(a) = (a_1 + 1) \cdot T(b_2),$$
$$b_3 = p_3^{a_3} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}: \quad T(a) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot T(b_3),$$
…
$$b_k = p_k^{a_k}: \quad T(a) = (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_{k-1} + 1) \cdot T(b_k).$$
❑

Folgerungen: Die maximale Anzahl von Teilern einer zweistelligen Zahl ist 12. Sie wird von den Zahlen 60, 72 und 96 angenommen.

Lösungshinweise: Wir finden diese Zahlen durch eine systematische Suche. Dabei achten wir darauf, dass die höheren Exponenten bei den kleineren Primzahlen gesetzt werden, um möglichst kleine Zahlen zu erzeugen. Wegen $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210 > 99$ kann der Primfaktor 7 (oder größere Primfaktoren) bei dieser Systematik nicht auftreten.

k_1	k_2	k_3	k_4	a	$T(a)$
7	0	0	0	$2^7 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 > 99$	
6	0	0	0	$2^6 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 64$	7
5	1	0	0	$2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 96$	$6 \cdot 2 = 12$
4	2	0	0	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 > 99$	
3	2	0	0	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 = 72$	$4 \cdot 3 = 12$
3	1	1	0	$2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 > 99$	
2	1	1	0	$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 60$	$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

Bei dreistelligen Zahlen sind 32 Teiler das erreichbare Maximum, bei vierstelligen Zahlen 64.

Monatsaufgabe[12] 09/22. Es seien m und n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass die Quersumme der Summe $m+n$ kleiner-gleich der Summe der Quersummen beider Zahlen ist, also dass gilt $Q(m+n)Q(m)+Q(n)$.

[12] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.10.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort ... 2
Thema 17 – Der größte gemeinsame Teiler ... 3
63. Internationale Mathematik-Olympiade ... 10
Das Rechnen mit Summen- und Produktzeichen ... 12
In alten Mathe-Büchern geblättert ... 15
Bekannte Sätze - Über die Anzahl der Teiler einer Zahl ... 18
Monatsaufgabe 09/22 ... 19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[13]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
September 2022	Thema 17	Größter gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz.

[13] Alle Hefte ab Januar 2021 sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.