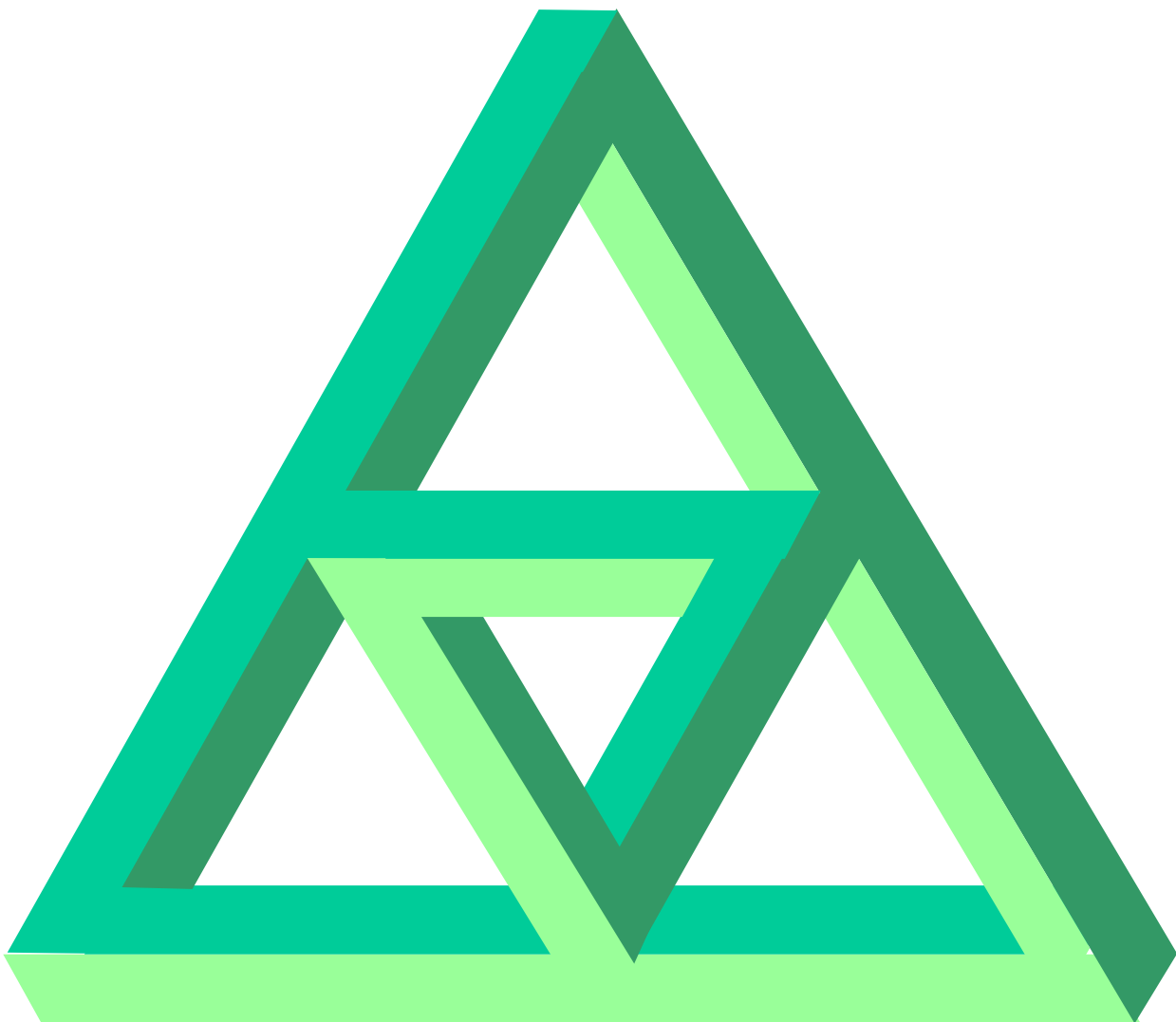


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgaben **MO621014** wird der Satz des THALES thematisiert. Auch wenn er in geometrischen Aufgabenstellungen nur einen Zwischenschritt zur vollständigen Lösung darstellt, lässt er in komprimierter Form die Rechtwinkligkeit von Dreiecken nachweisen. Die gleiche Aufgabe gibt auch Anlass, die Methode Versuch-Irrtum bei geometrischen Konstruktionen zu diskutieren. Dem ist auch die aktuelle Monatsaufgabe gewidmet.

Ausführlich werden Verteilungen von mehreren Punkten in einem Quadrat diskutiert, bei denen der Mindestabstand zwischen zwei dieser Punkte maximal ist. Damit soll die **KZM-Aufgabe 1-5B** vertieft werden. Die Ermittlung der Abstände erweist sich dabei als Übung für die Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS.

Im Zusammenhang mit dem Satz des THALES zitieren wir den Beweis aus dem Buch „Elemente“ von EUKLID.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 18 – Der Satz des THALES

Der Satz des THALES („Alle von einem Halbkreis umschriebenen Dreiecke sind rechtwinklig.“) und seine Umkehrung („Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks liegt immer in der Mitte der Hypotenuse.“) sind oft wichtige Hilfsmittel, um Kreislinien zu definieren bzw. die Rechtwinkligkeit von Dreiecken zu zeigen. Auch wenn dies meist nur Zwischenergebnisse sind, so kann wie in der Runde 1 der diesjährigen Mathematik-Olympiade dieser Satz erfolgreich eingesetzt werden, um einen Lösungsansatz zu finden.

Aufgabe 18.01 - MO621014. In einem Halbkreis mit Mittelpunkt M über dem Durchmesser \overline{UV} mit $|\overline{UV}| = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei A und B auf dem Durchmesser sowie C und D auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei B zwischen M und E auf dem Durchmesser UV , F auf dem Halbkreis und G auf der Strecke \overline{BC} liegen.

- Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt A_{ABCD} des Quadrats $ABCD$.
- Zeigen Sie, dass $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{BEFG}$ gilt.

Hinweis: Die Zeichnung darf auch mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms angefertigt werden.

Lösungshinweise zu Teil b): Wir nehmen an, das Quadrat $ABCD$ erfülle alle Anforderungen. Dann liegt der Punkt D auf dem Halbkreis und nach **Satz des THALES** ist das Dreieck UVD rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Punkt D . Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck UVD gilt folglich mit den abkürzenden Schreibweisen $s = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|$ und $x = |\overline{UA}|$

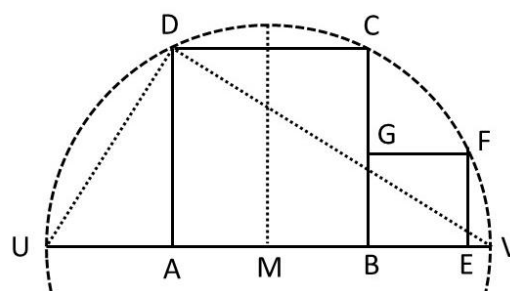
$$|\overline{UA}| \cdot |\overline{AV}| = x \cdot (2 \cdot s + x) = 4 \cdot s^2 = |\overline{AD}|^2$$

und $x + s = 6$.

Aus diesem Gleichungssystem können wir die quadratische Gleichung

$$(6 - s) \cdot (s + 6) = 36 - s^2 = 4 \cdot s^2$$

herleiten und für s den Betrag³ $s = \frac{6}{5}\sqrt{5} \approx 2.7$ berechnen. Somit finden wir für den Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ den Wert $(2 \cdot s)^2 = 4 \cdot s^2 = \frac{144}{5} = 28.8$.



³ Es ist zulässig, in Formel die Maßeinheiten wegzulassen, wenn Missverständnisse auszuschließen sind. Wenn wie in der Aufgabenstellung keine Maßeinheit angegeben ist, wird eine normierte Längeneinheit angenommen, die im Folgenden nicht genannt werden muss.

Lösungshinweise zu Teil c): Auch für das zweite Quadrat $BEFG$ nutzen wir die Argumentation von Teil b. Weil F auf dem Halbkreis liegt, ist das Dreieck UVF nach **Satz des THALES** rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F . Nach dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck UVF gelten mit $t = |\overline{EF}|$ und $y = |\overline{EV}|$ die Gleichungen

$$|\overline{UE}| \cdot |\overline{EV}| = (6 + s + t) \cdot y = t^2 = |\overline{EF}|^2$$

und $s + t + y = 6$.

Aus diesem Gleichungssystem finden wir die quadratische Gleichung

$$(6 + s + t) \cdot (6 - s - t) = 36 - (s + t)^2 = t^2,$$

also

$$t^2 + st + \frac{1}{2}s^2 - 18 = 0.$$

Da t als Streckenlänge einen positiven Wert annimmt, nutzen wir aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen nur den positiven Teil

$$t = -\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{2} + 18} = -\frac{s}{2} + \sqrt{18 - \frac{s^2}{2}}.$$

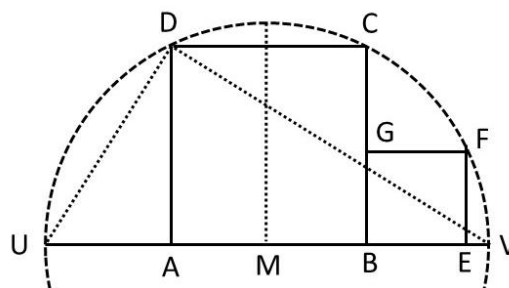
Setzen wir den Wert für $s = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ ein, erhalten wir $t = \frac{6}{5}\sqrt{5} = s$, woraus unmittelbar die Behauptung $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{BEFG}$ folgt.

Lösungshinweise zu Teil a): Haben wir die Werte von s und t wie oben berechnet, können wir diese Längen zur Konstruktion der Quadrate verwenden. Dafür müssen wir aber zum Beispiel die Streckenlänge $s = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ tatsächlich konstruieren (und dürfen nicht stattdessen nur den Rundungswert 2.7 als Zirkelspanne wählen!).

Wegen $\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 6^2$ ist s die längere Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten s und $2 \cdot s$ und der Hypotenuse 6.

Anstatt der direkten Konstruktion von s aus den gegebenen Zahlenwerten können wir auch folgende Konstruktion ausführen: Wir konstruieren ein rechtwinkliges Dreieck MNO mit dem rechten Winkel bei M und den (lt. Aufgabenstellung gegebenen) Streckenlängen $|\overline{MN}| = 12$ und $|\overline{MO}| = 6$. Wir markieren auf der Hypotenuse dieses Dreiecks den Punkt S mit $|\overline{OS}| = 6$ und fällen von S das Lot auf MO mit dem Fußpunkt T . Die Strecke \overline{ST} hat die geforderte Länge.

Diese Länge tragen wir auf dem Durchmesser \overline{UV} des gegebenen Halbkreises von M in Richtung U ab und finden den Punkt A . Die Konstruktion des Quadrates $ABCD$ ist nun einfach:



- Wir errichten die Senkrechte in A und erhalten einen Schnittpunkt mit der Halbkreislinie, den wir D nennen.
- Wir konstruieren die Parallele zu UV durch D und erhalten einen zweiten Schnittpunkt mit der Halbkreislinie, den wir C nennen.
- Wir fällen das Lot von C auf UV , dessen Fußpunkt wir B nennen.

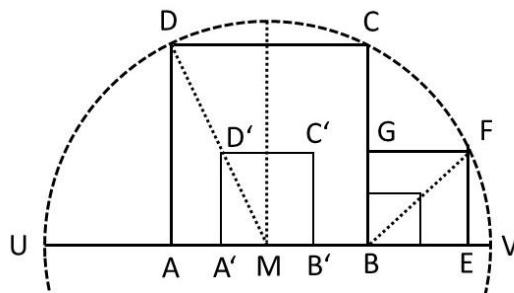
Das Viereck $ABCD$ erfüllt alle Bedingungen, denn es ist laut Konstruktion ein Rechteck und die Seitenlängen sind laut der obigen Herleitung alle gleich lang.

In Analogie konstruieren wir das Quadrat $BFGC$, indem wir auf UV von B aus in Richtung V den Punkt E mit $|\overline{BE}| = t$ und auf BC den Punkt G mit $|\overline{BG}| = t$ markieren. Sowohl die Parallele zu UV durch G als auch die Senkrechte zu UV in E schneiden die Halbkreislinie in dem gleichen Punkt, den wir F nennen. Das Quadrat $BFGC$ erfüllt alle Bedingungen, da es laut Konstruktion ein Rechteck ist, dessen Seitenlängen aufgrund der Herleitung alle gleich lang sind. \square

Lösungsvariante zu Teilaufgabe a): Konstruktionen, bei denen die gesuchte Figur mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllen muss, lassen sich mit der Methode „Versuch und Irrtum“ lösen, wenn sich eine ähnliche Figur bei Weglassen einer dieser Bedingungen leicht konstruieren lässt und durch Streckung oder Stauchung die zunächst weggelassene Bedingung erfüllt werden kann. Der MO-Aufgabe entnehmen wir für das Quadrat $ABCD$ die zwei Bedingungen

- (1) die Seite AB liegt auf UV und
- (2) die Eckpunkte C und D liegen auf dem Halbkreis.

Aus Symmetriegründen erkennen wir, dass die Punkte A und B symmetrisch zum Halbkreismitelpunkt M liegen, weil andernfalls die Punkte C und D nicht beide auf dem Halbkreis liegen könnten.



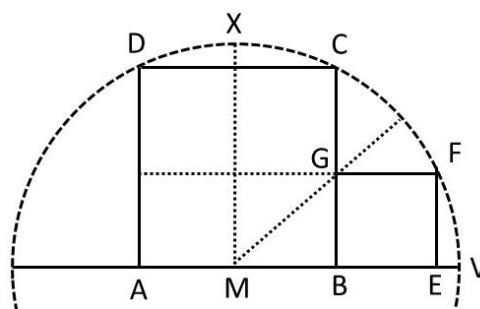
Lassen wir zunächst die Bedingung (2) außer Acht und konstruieren ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit einem frei wählbaren Betrag $|\overline{A'M}| = |\overline{MB'}|$. Nun zeichnen wir die Strecke $\overline{MD'}$ und verlängern diese ggf. über D' hinaus, so dass ein Schnittpunkt mit dem Halbkreis entsteht (den wir mit D bezeichnen). Dieser Punkt erweist sich als der gesuchte Eckpunkt des Quadrates $ABCD$. Wir erhalten die anderen drei Eckpunkte, indem wir

- den Punkt A als Fußpunkt des Lotes von D auf UV ,
- den Punkt C als Schnittpunkt der Parallel zu UV durch D und schließlich
- den Punkt B als Fußpunkt des Lotes von C auf UV

konstruieren. In gleicher Weise konstruieren wir das Quadrat $BEFG$, indem wir zunächst ein Quadrat $BE'F'G'$ konstruieren und den Punkt F als Schnittpunkt der Strecke BF' (bzw. deren Verlängerung über F' hinaus) mit dem Halbkreis finden.

Lösungsvariante für Teilaufgabe b): Aufgrund der Symmetrie im Quadrat $ABCD$ gilt $|\overline{BC}| = 2 \cdot |\overline{MB}|$. Weil der Radius \overline{MC} die Länge 6 hat, erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck MBC mit dem rechten Winkel in B nach Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS die Länge $|\overline{MB}| = \frac{6}{5}\sqrt{5}$, woraus wir für den Flächeninhalt den Wert $4 \cdot |\overline{MB}|^2 = \frac{4 \cdot 36}{5} = \frac{144}{5}$ erhalten.

Lösungsvariante zu Teilaufgabe c): Aufgrund von Symmetriebetrachtungen erkennen wir, dass wir die im Viertelkreis XMV enthaltene Lösungsfigur an der Geraden durch M und G spiegeln können. Dann geht X in E und C in F über. Daraus folgt unmittelbar, dass der Flächeninhalt A_{ABCD} das Vierfache des Flächeninhalts A_{BEFG} ist.

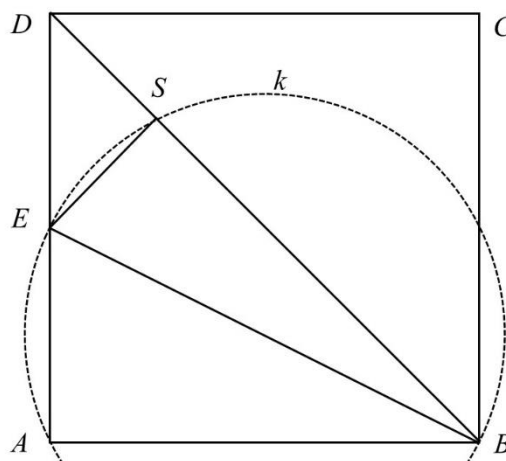


Bereits in den letzten Jahren wurde der Satz des THALES wiederholt in den Lösungsdarstellungen verwendet. In den folgenden drei Beispielen beschränken wir uns bei den Lösungshinweisen auf die Anwendung dieses Satzes, ohne den Beweis zu vervollständigen.

Aufgabe 18.02 – MO601023⁴. Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Es sei E der Mittelpunkt der Strecke \overline{AD} . Die Strecke \overline{BE} ist der Durchmesser eines Kreises k . Der Kreis k schneidet die Diagonale \overline{BD} in S .

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks EBS .

Lösungsansatz: Das Dreieck BSE ist wegen des **Satzes des THALES** rechtwinklig im Punkt S . Da auch das Dreieck DES laut Konstruktion rechtwinklig ist, können wir die Längen \overline{ES} und \overline{BS} explizit mit Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS in den entsprechenden rechtwinkligen Dreiecken berechnen.



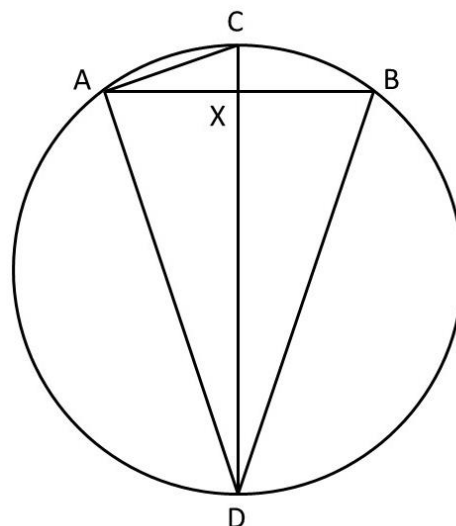
Aufgabe 18.03 – MO570932. Eine hölzerne Scheibe hat die Form eines geraden Zylinders mit einer Grundfläche vom Radius r und einer Höhe von 5 mm. Von dieser

⁴ S. Thema 4 (III) Heft 03/2021

Scheibe wird durch einen ebenen Schnitt senkrecht zur Grundfläche ein Stück abgesägt. Die Schnittfläche beträgt 4 cm^2 . Stellt man das Holzstück auf die Schnittfläche, so ist es 1 cm hoch.

Wie groß ist r ?

Lösungsansatz: Wir betrachten nur die Grundfläche der Ausgangsscheibe. Auf diesem Kreis seien A und B die Endpunkte der Schnittkante. Durch diese Punkte wird der Kreis in zwei Kreisbögen zerlegt. Einer dieser Kreisbögen gehört zum betrachteten Holzstück; der Mittelpunkt dieses Bogens werde mit C bezeichnet. Der auf dem Kreis dem Punkt C gegenüberliegende Punkt D ist der Mittelpunkt des anderen Kreisbogens. Die Gerade CD ist die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} , schneidet sie also senkrecht im Mittelpunkt X von \overline{AB} .

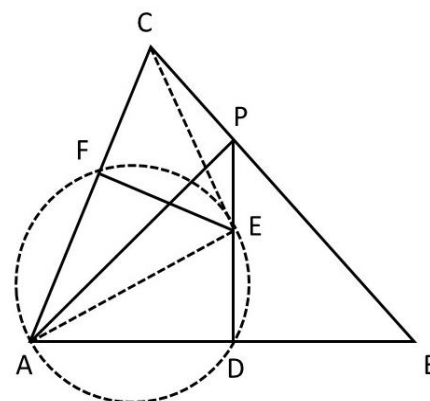


Das Dreieck ACD hat nach dem **Satz des THALES** einen rechten Winkel bei A . Der Punkt X ist der Höhenfußpunkt der von A auf CD gefällten Höhe. Nun können wir den Höhensatz anwenden, um den Radius $|\overline{CD}|$ berechnen.

Aufgabe 18.04 – MO560945. Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P der Fußpunkt des Lotes von A auf die Seite BC . Der Fußpunkt des von P auf die Seite AB gefällten Lotes sei D . Auf der Strecke (\overline{PD}) sei weiter ein innerer Punkt E gegeben, für den $|\sphericalangle CEA| = 90^\circ$ gilt. Der Fußpunkt des von E auf die Seite AC gefällten Lotes sei mit F bezeichnet.

Beweisen Sie, dass die Geraden DF und BC parallel sind.

Lösungsansatz: Zeichnen wir die Skizze zur Aufgabenstellung, so erkennen wir, dass sowohl das Dreieck AEF rechtwinklig im Punkt F als auch das Dreieck ADE rechtwinklig im Punkt D sind. Nach Umkehrung des **Satzes des THALES** liegen also sowohl F als auch D auf der Kreislinie über dem Durchmesser \overline{AE} , d.h. sie liegen auf einem gemeinsamen Kreis und das Viereck $ADEF$ ist folglich ein Sehnenviereck.



Weitere Aufgaben aus länger zurückliegenden Olympiaden bestätigen, dass der Satz des THALES ein geeignetes Mittel ist, die Rechtwinkligkeit von Dreiecken nachzuweisen.

Aufgabe 18.05 – MO491023. In einem Drachenviereck $ABCD$ haben die Seiten \overline{AB} und \overline{AD} die Länge a und die Seiten \overline{BC} und \overline{CD} die Länge b . Das Drachenviereck besitze einen Umkreis k (d. h. alle Eckpunkte A, B, C und D liegen auf diesem Kreis k) mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r .

- Beweisen Sie, dass die Winkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CMD$ gleich groß sind.
- Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Umkreisradius aus den Längen a und b her.
- Es wird ein spezielles Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC und dem Umkreis k betrachtet. Der Punkt B soll so auf dem Umkreis k liegen, dass eine Parallele zu AC durch diesen Punkt B die Tangente t in B an den Umkreis k ist. Ein Punkt E liege auf der Verlängerung von \overline{AC} über C hinaus so, dass der Flächeninhalt des Vierecks $ABED$ doppelt so groß ist wie der Inhalt des Vierecks $ABCD$.

Berechnen Sie die Länge der Strecke \overline{BE} in Abhängigkeit von r .

Lösungshinweise Teil a): Da das Viereck $ABCD$ nach dem **Satz des THALES** zwei rechte Innenwinkel mit der Summe 180° besitzt und da AC die Symmetrieachse ist, gilt für die anderen beiden Winkel

$$|\sphericalangle BAD| = 180^\circ - |\sphericalangle DCB| = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle DCM|.$$

Weil \overline{CM} und \overline{DM} Umkreisradien sind, ist das Dreieck DCM gleichschenkelig und es gilt

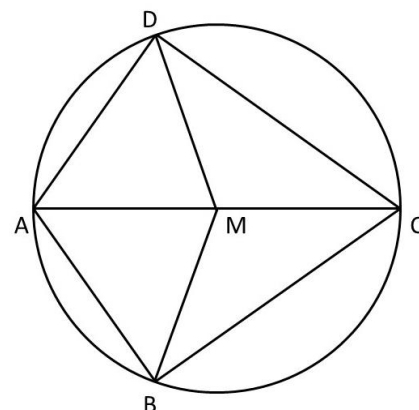
$$|\sphericalangle CMD| = 180^\circ - (|\sphericalangle DCM| + |\sphericalangle MDC|) = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle DCM|.$$

Also sind die Winkel $\sphericalangle CMD$ und $\sphericalangle BAD$ gleich groß.

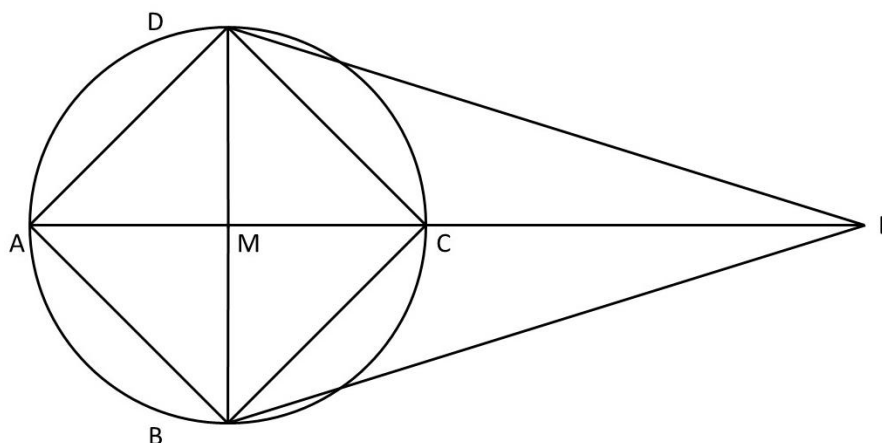
Lösungshinweise Teil b): Die Diagonale \overline{AC} ist der Umkreisdurchmesser (mit der Länge $2r$). Damit ist das Dreieck ACD nach dem **Satz des THALES** rechtwinklig. Also gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das Dreieck ACD mit der Hypotenuse \overline{AC} , die Gleichung $a^2 + b^2 = (2r)^2$. Für den Umkreisradius gilt daher nach Umformung

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Lösungshinweise Teil c): Unter den beschriebenen Bedingungen stehen der Berührungsradius und die Tangente an B senkrecht aufeinander, $MB \perp t$, und damit wegen der Parallelität von t und AC gilt auch $MB \perp AC$. Die Strecke \overline{MB} ist somit Höhe auf \overline{AC} im Dreieck ABC sowie Höhe auf \overline{CE} im Dreieck CBE .



Wenn sich die Viereckfläche verdoppelt hat, muss die Länge der Diagonale \overline{AE} im Vergleich zu \overline{AC} doppelt so groß sein. Also gilt auch $|\overline{CE}| = |\overline{AC}| = 2 \cdot r$. Aus dem Satz des PYTHAGORAS, angewandt auf das rechtwinklige Dreieck EMB mit dem rechten Winkel im Punkt M , folgt $|\overline{BE}|^2 = r^2 + (r + 2r)^2$.



Damit erhalten wir $|\overline{BE}| = r \cdot \sqrt{10}$. □

Aufgabe 18.06 – MO430946. In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ von der Seitenhalbierenden \overline{CM} und der Höhe \overline{CD} in drei gleich große Teile geteilt.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC .

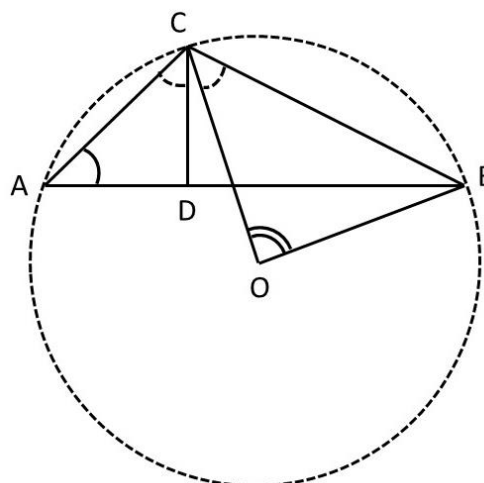
Hilfssatz. In einem Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O und dem zur Höhe von C gehörigen Höhenfußpunkt D gilt die Winkelgleichheit $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BCO|$.

Lösungshinweise: Sei O der Umkreismittelpunkt eines (beliebigen⁵) Dreiecks ABC . Dann gilt $|\overline{OC}| = |\overline{OB}|$ als Radien des Umkreises und $|\sphericalangle COB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$ nach Peripherie-Zentri-Winkelsatz über der Sehne \overline{BC} .

Weiter gilt im gleichschenkligen Dreieck BCO stets der Zusammenhang

$$|\sphericalangle BCO| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - |\sphericalangle COB|) = 90^\circ - |\sphericalangle CAB|.$$

Zudem gilt im rechtwinkligen Dreieck ADC die Beziehung $|\sphericalangle DCA| = 90^\circ - |\sphericalangle CAD|$. Somit gilt wegen $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB|$ auch die Gleichheit $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle BCO|$. □



Lösungshinweise zur Aufgabe 18.06: Nach dem Hilfssatz folgt im konkreten Fall der Aufgabenstellung, die diese Winkelgleichheit laut Konstruktion realisiert, dass der

⁵ Auch wenn in der konkreten Aufgabe $M = O$ zu zeigen sein wird, sollte die Skizze den allgemeinen Fall widerspiegeln, um nicht nur (scheinbar) einen Sonderfall zu betrachten.

Umkreismittelpunkt O auf der Seitenhalbierenden \overline{CM} liegt. Außerdem liegt der Umkreismittelpunkt O stets auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks. Im konkreten Fall der Aufgabestellung kann aber die Mittelsenkrechte von \overline{AB} nicht mit der Seitenhalbierenden \overline{CM} zusammenfallen, denn dann wäre das Dreieck ABC gleichschenkelig und die Höhe DC würde ebenfalls mit der Seitenhalbierenden zusammenfallen (und der Winkel $\sphericalangle BCA$ würde nicht in drei Teile geteilt).

Also finden wir $M = O$, d.h. die Seite \overline{AB} ist der Durchmesser des Umkreises. Nach **Satz des THALES** ist das Dreieck ABC rechtwinklig und es gilt somit $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$. Damit erhalten wir mit

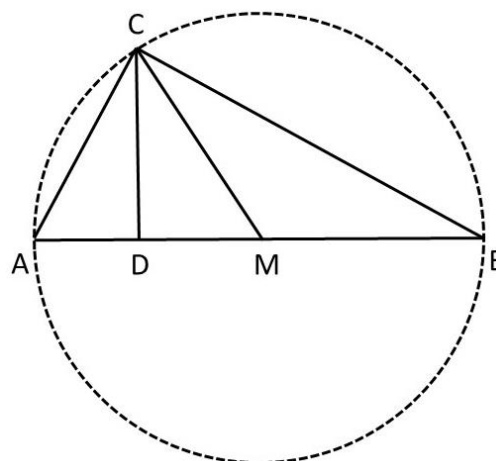
$$|\sphericalangle DCA| = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$$

die Größe des Innenwinkels

$$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CAD| = 90^\circ - |\sphericalangle DAC| = 60^\circ$$

und folglich

$$|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \quad \square$$



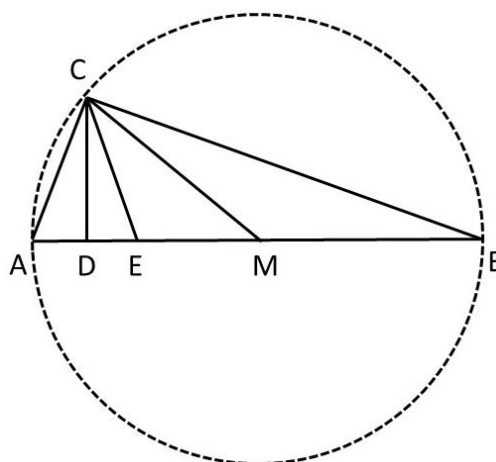
Aufgabe 18.07 – MO431045. In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ durch die Höhe \overline{CD} , die Winkelhalbierende \overline{CE} und die Seitenhalbierenden \overline{CM} in vier gleich große Teilwinkel zerlegt.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC .

Lösungshinweise: Nach dem Hilfssatz finden wir wie bei Aufgabe 18.06, dass der Punkt M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC ist. Nach **Satz des THALES** ist also das Dreieck rechtwinklig im Punkt C , d.h. $|\sphericalangle BCA| = 90^\circ$. Jeder der vier Teilwinkel hat somit die Größe 22.5° . Damit liegt der Höhenfußpunkt D zwischen A und E , weil im Dreieck AEC der Winkel bei C 45° beträgt. Folglich finden wir

$$|\sphericalangle DAC| = 90^\circ - |\sphericalangle DAC| = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ.$$

Mittels des Satzes über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks erhalten wir schließlich $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ. \quad \square$



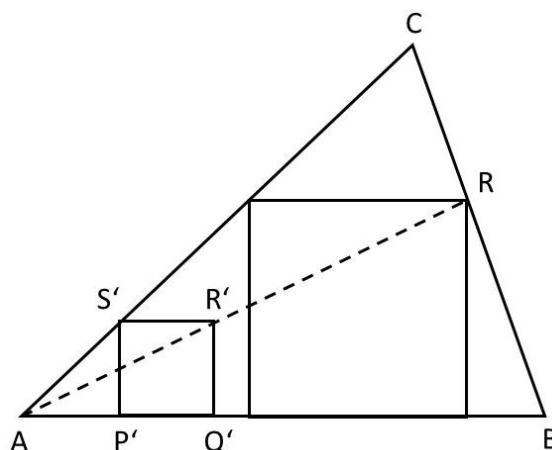
Versuch-Irrtum-Methode bei geometrischen Konstruktionen

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Dreieck ABC . Konstruiere ein Quadrat $PQRS$, so dass \overline{PQ} auf der Seite \overline{AB} , R auf \overline{BC} und S auf \overline{CA} liegt.

Lösungshinweise: An das gesuchte Quadrat werden drei Bedingungen gestellt

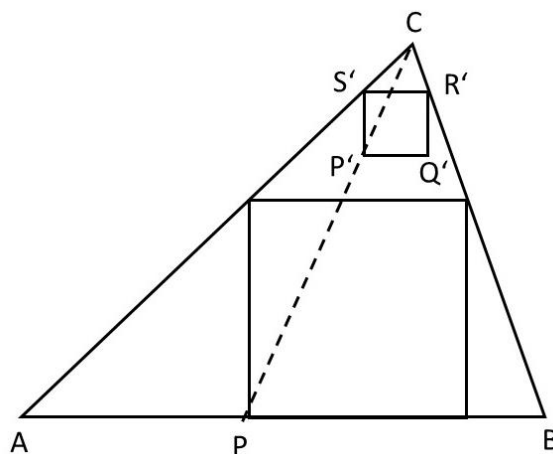
- (1) $P \in \overline{AB}$ und $PQ \parallel AB$
- (2) $S \in \overline{AC}$
- (3) $R \in \overline{BC}$

Wir konstruieren zunächst eine Figur, die nur die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, ohne auf die Bedingung (3) zu achten. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt S' auf der Dreiecksseite \overline{AC} und fällen das Lot von S' auf die Dreiecksseite \overline{AB} . Den Fußpunkt des Lotes nennen wir P' . Nun konstruieren wir ein Quadrat $P'Q'R'S'$ mit der Seitenlänge $|\overline{P'S'}|$.



Mit Hilfe dieser Figur zeichnen wir nun eine Gerade g durch A und R' . Den Schnittpunkt von g und \overline{BC} bezeichnen wir mit R . Mit diesem Punkt finden wir ohne Probleme konstruktiv das gesuchte Quadrat $PQRS$.

Wir können aber auch zunächst eine Figur konstruieren, die nur die Bedingungen (2) und (3) erfüllt, ohne auf die Bedingung (1) zu achten. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt S' auf der Dreiecksseite \overline{AC} und ziehen die Parallele zu \overline{AB} durch S' . Den Schnittpunkt der Parallelen mit \overline{BC} nennen wir R' . Nun konstruieren wir ein Quadrat $P'Q'R'S'$ mit der Seitenlänge $|\overline{R'S'}|$.



Mit Hilfe dieser Figur zeichnen wir nun eine Gerade h durch P' und C . Den Schnittpunkt von h mit \overline{AB} bezeichnen wir mit P . Damit finden wir ohne Probleme konstruktiv das gesuchte Quadrat $PQRS$. □

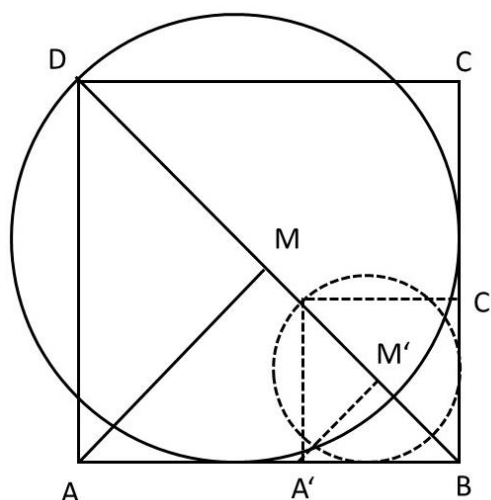
Aufgabe 2. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Konstruieren Sie einen Kreis k durch D , der die Seiten \overline{AB} und \overline{BC} berührt.

Lösungshinweise: An den gesuchten Kreis werden drei Bedingungen gestellt.

- (1) AB ist Tangente am Kreis,
- (2) BC ist Tangente am Kreis,
- (3) D liegt auf der Kreislinie.

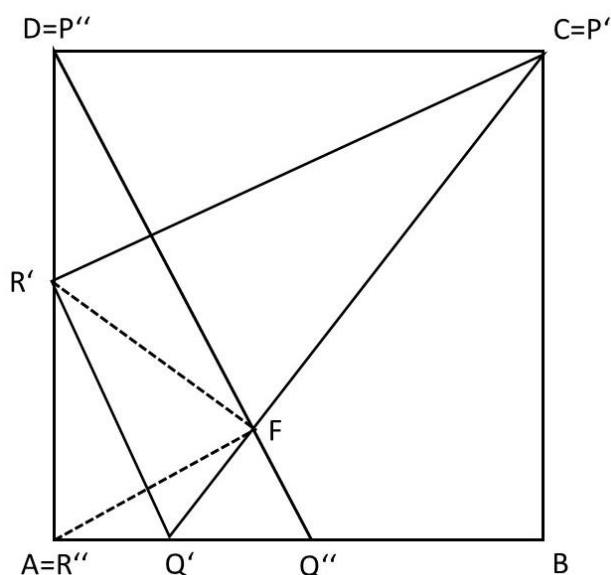
Aus Symmetriegründen liegt der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises auf der Diagonalen \overline{BD} .

Wir wählen einen beliebigen Punkt M' auf der Geraden BD , fällen das Lot auf AB mit dem Fußpunkt A' und zeichnen den Kreis k' mit Mittelpunkt M' und Radius $|\overline{A'M'}|$. Laut dieser Konstruktion berührt die Kreislinie die Quadratseiten \overline{AB} und \overline{BC} . Nun konstruieren wir die Parallele zu $\overline{A'M'}$ durch A . Deren Schnittpunkt mit der Diagonalen \overline{BD} ist der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises. □



Aufgabe⁶ 3. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Auf der Seite \overline{AB} sei ein Punkt Q markiert, der $\frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1) < |\overline{AQ}| < \frac{1}{3}\sqrt{3}$ erfüllt⁷. Es ist diesem Quadrat ein rechtwinkliges Dreieck QPR mit $\sphericalangle RQP = 60^\circ$ und $\sphericalangle QPR = 30^\circ$ so einzubeschreiben, dass auch die Punkte P und R auf Quadratseiten liegen.

Lösungshinweise: Wir analysieren zunächst die zwei Spezialfälle Q' mit $|\overline{AQ'}| = \frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1) \approx 0.244$ und Q'' mit $|\overline{AQ''}| = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.577$. Im ersten Fall fällt P' mit C zusammen, im zweiten Fall fällt P'' mit D zusammen. Füllen wir die Lote von R' auf $Q'P'$ und von $A = R''$ auf $Q''P''$, so stimmen deren Fußpunkte überein, den wir mit F bezeichnen. Diese Beobachtung bedarf natürlich eines Beweises. Dieser gelingt uns aber, weil wir die Längen aller eingezeichneten Teilstrecken mit wiederholter Anwendung des Satzes des PYTHAGORAS berechnen können.



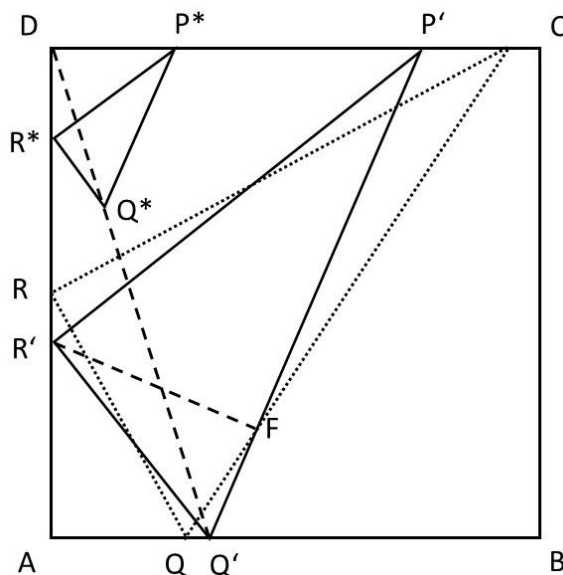
Wir könnten aufgrund dieser Beobachtung die Lage des Punktes F berechnen und dann damit das gesuchte Dreieck QPR konstruieren. Wir wenden aber die Versuch-

⁶ nach: Träger, Walter. Ein Dreieck im Quadrat. In: \sqrt{WURZEL} Heft 7 (2001), S. 146-148.

⁷ Für $|\overline{AQ}| < \frac{1}{3}(\sqrt{3} - 1)$ gibt es ein Lösungsdreieck mit $P \in \overline{BC}$. Für $|\overline{AQ}| > \frac{1}{3}\sqrt{3}$ existiert kein solches Lösungsdreieck.

Irrtum-Methode an und konstruieren zunächst ein dem gesuchten Dreieck ähnliches kleines Dreieck $Q^*P^*R^*$ in der Nähe des Quadrateckpunktes D . Dies gelingt uns, indem wir auf \overline{AD} einen Punkt R^* und auf \overline{CD} einen Punkt P^* markieren und an dieser Strecke $\overline{R^*P^*}$ die vorgegebenen Winkel antragen. Den Schnittpunkt der beiden Winkelschenkel nennen wir Q^* .

Verlängern wir die Strecke $\overline{DQ^*}$ über Q^* hinaus, so finden wir auf \overline{AB} einen Schnittpunkt, den wir Q' nennen⁸. Die Parallele zu R^*Q^* durch Q' schneidet die Seite \overline{AD} ; den Schnittpunkt bezeichnen wir mit R' . Die Parallele zu P^*Q^* durch Q' schneidet die Seite \overline{CD} ; den Schnittpunkt bezeichnen wir mit P' . Das Dreieck $Q'P'R'$ ist ähnlich dem Dreieck $Q^*P^*R^*$, stimmt also insbesondere in den Innenwinkeln überein und die Eckpunkte liegen auf Quadratseiten. Wir fällen das Lot von R' auf $Q'P'$. Den Fußpunkt bezeichnen wir mit F .



Um das gesuchte Dreieck zu finden, zeichnen wir die Gerade durch Q und F . Den Schnittpunkt mit \overline{CD} bezeichnen wir mit P . Schließlich errichten wir die Senkrechte auf \overline{QP} im Punkt F . Deren Schnittpunkt mit \overline{AD} bezeichnen wir mit R . Das Dreieck QPR erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe. \square

Hinweis: Eine Lösung der Aufgabe im Rahmen einer praktikablen Zeichengenauigkeit ist iterativ möglich. Wir setzen $R_1 = A$ (dann liegt P_1 innerhalb des Quadrates) und $R_2 = D$ (dann liegt P_1 außerhalb des Quadrates). Wir nennen die Strecke $\overline{R_{k-2}R_{k-1}}$ ($k > 2$) Lösungsintervall, weil der gesuchte Punkt R in dieser Strecke zu finden ist. Wir wählen R_k als Mittelpunkt des Lösungsintervalls und konstruieren das zum gesuchten Dreieck ähnliche Dreieck mit den Eckpunkten R_k, Q, P_k . Liegt P_k innerhalb des Quadrates, verändern wir das Lösungsintervall zu $\overline{R_kR_{k-1}}$, andernfalls $\overline{R_{k-2}R_k}$. Ein solches Verfahren ist aber als Konstruktionsvorschrift nicht zulässig, da die Anzahl der Konstruktionsschritte möglicherweise nicht endlich ist. Wäre nämlich der Abstand von R zu A eine irrationale Zahl, kann diese durch fortwährendes Halbieren des Lösungsintervalls nicht erreicht werden. Bei der Versuch-Irrtum-Methode wird gefordert, dass nach einer vorab bestimmten Anzahl von Versuchen die Möglichkeit besteht, die Lösungsfigur zu konstruieren. Es ist dann ein Beweis erforderlich, dass die gefundene Figur tatsächlich alle Bedingungen erfüllt.

⁸ Liegt Q' nicht im geforderten Intervall auf \overline{AB} , so müssen wir die Lage des Punktes R^* variieren. Es wird uns nach wenigen Versuche gelingen, das Intervall zu treffen,

Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat

In der **KZM-Aufgabe A1-5B**⁹ sind n Punkte ($n > 1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2} \cdot (n - 1) \cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Eine Verteilung, die den maximal möglichen Mindestabstand realisiert, nennen wir im Weiteren „beste Verteilung“.

Für $n = 2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und wir finden eine beste Verteilung, indem wir die zwei Punkte in gegenüberliegende Eckpunkte platzieren. Der Abstand $d_2 = \sqrt{2}$ kann von keiner Konfiguration übertroffen werden, da die Diagonale eines Quadrates die längste Strecke innerhalb des Quadrates ist. Diese intuitiv anschauliche Lösung basiert auch auf dem

Hilfsatz. Bei einer Verteilung von zwei und mehr Punkten mit maximalem Mindestabstand in einem Quadrat befindet sich auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt¹⁰.

Lösungshinweise: Wir nehmen an, wir haben im Quadrat $ABCD$ eine Verteilung gefunden, bei der auf der Seite \overline{AB} kein Punkt platziert ist. Dann gibt es (mindestens) einen Punkt X dieser Verteilung mit minimalem Abstand zur Seite \overline{AB} . Wir fällen das Lot von diesem Punkt X auf \overline{AB} und verschieben den Punkt entlang dieses Lotes, bis er \overline{AB} erreicht. Bei dieser neuen Verteilung ist der Mindestabstand nicht kleiner als vor der Verschiebung:

- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X nicht enthält, bleibt bei dieser Verschiebung unverändert.
- Jeder Abstand eines Punktpaars, das X enthält, vergrößert sich bei dieser Verschiebung.

Dieses Verfahren wiederholen wir mit den anderen Quadratseiten. □

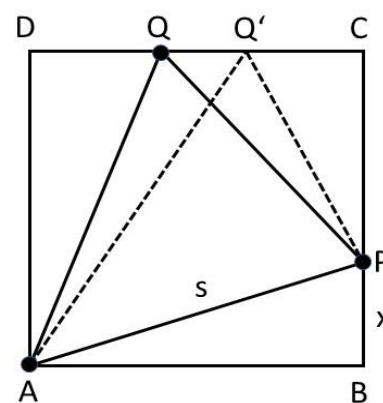
Mit dem Hilfssatz kann die beste Verteilung von zwei Punkten formal begründet werden.

$n = 3$. Wir erhalten aus dem Hilfssatz für eine beste Verteilung von drei Punkten die Aussage, dass ein Punkt in einer Quadratecke platziert werden muss und sich die beiden anderen Punkte auf den gegenüberliegenden benachbarten Quadratseiten befinden.

⁹ https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

¹⁰ Ein Punkt auf einem Eckpunkt des Quadrates gilt als zugehörig zu den beiden anliegenden Quadratseiten.

Die drei Punkte der gesuchten Verteilung bilden die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks APQ mit $|\overline{AQ}| = |\overline{PQ}|$. Betrachten wir nämlich ein Dreieck APQ' mit $|\overline{AQ'}| > |\overline{PQ'}|$ und verschieben wir den Punkt Q' in Richtung des Eckpunktes D , so vergrößert sich die Streckenlänge $\overline{PQ'}$, während sich gleichzeitig die Streckenlänge $\overline{AQ'}$ verringert. Solange bei dieser Verschiebung $|\overline{AQ'}| > |\overline{PQ'}|$ gilt, hat sich der Mindestabstand nicht verkleinert (denn entweder realisierte die Verbindungsstrecke $\overline{PQ'}$ den Mindestabstand, dann wird dieser bei der Verschiebung größer, oder \overline{AP} realisierte den Mindestabstand, dann bleibt dieser bei der Verschiebung unverändert). Da wir aber in gleicher Weise argumentieren können, dass im Dreieck APQ auch $|\overline{AP}| = |\overline{PQ}|$ gelten wird, ist das gesuchte Dreieck sogar gleichseitig.



Wir können für die Seitenlänge d_3 des gleichseitigen Dreiecks APQ durch zweimalige Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS (im Dreieck ABP mit Hypotenuse \overline{AP} bzw. im Dreieck PCQ mit Hypotenuse \overline{PQ}) den Betrag der Strecke $x = |\overline{BP}|$ aus der Gleichung

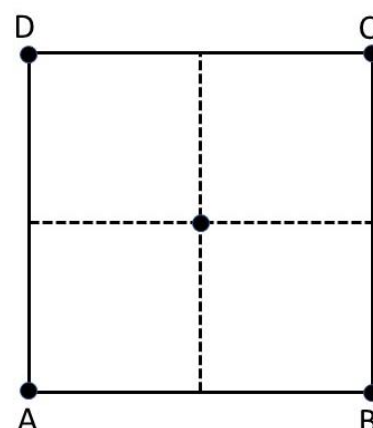
$$x^2 + 1 = d_3^2 = 2 \cdot (1 - x)^2$$

berechnen. Wir erhalten daraus die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$ und finden mit der Lösungsformel $x = 2 - \sqrt{3}$ (die zweite Lösung entfällt wegen $x > 1$). Setzen wir diesen Wert für x in $x^2 + 1 = s^2$ ein, erhalten wir

$$d_3 = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1.035.$$

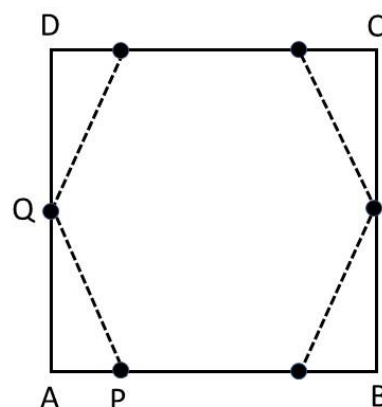
$n = 4$. Bei einer besten Verteilung von vier Punkten befinden sich aufgrund der Aussage des Hilfssatzes mindestens zwei Punkte in den Eckpunkten des Quadrates. Damit finden wir unmittelbar, dass alle Punkte dieser Verteilung Eckpunkte des Quadrates sind und somit $d_4 = 1$ gilt.

$n = 5$. Die vier Eckpunkte des Quadrates und der Schnittpunkt seiner Diagonalen bilden eine beste Verteilung für 5 Punkte. Zum Beweis unterteilen wir das Quadrat in vier kongruente Teilquadrate. Nach dem Schubfachprinzip existiert davon mindestens ein Teilquadrat, in dem sich zwei (oder mehr) Punkte von den 5 Punkten befinden müssen. Der maximale Abstand dieser zwei kann aber die halbe Diagonallänge $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Die beschriebene Verteilung von 5 Punkten realisiert damit den Mindestabstand von $d_5 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



$n = 6$. Es gibt verschiedene Verteilungen von 6 Punkten, die einen großen Mindestabstand haben.

Wir können beispielsweise die Punkte als Eckpunkte eines Sechsecks in das Quadrat so wie in nebenstehender Abbildung legen, dass alle Seitenlängen gleich lang sind. (*Hinweis:* Dieses Sechseck ist nicht regelmäßig, denn die horizontale Diagonale ist kleiner als die beiden anderen Diagonalen.) Betrachten wir das rechtwinklige Dreieck APQ mit der Hypotenuse $d_6 = |\overline{PQ}|$ und wenden den Satz des PYTHAGORAS an, so erhalten wir



$$|\overline{AP}| = \sqrt{d_6^2 - |\overline{AQ}|^2} = \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}}$$

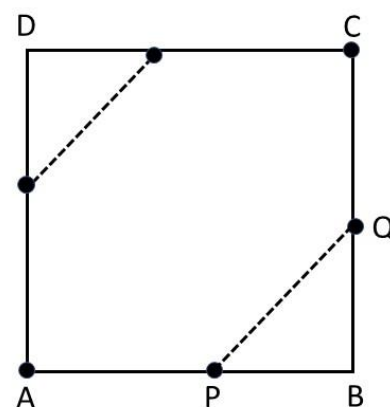
Somit können wir aus $2 \cdot \sqrt{d_6^2 - \frac{1}{4}} + d_6 = 1$ die quadratische Gleichung

$$d_6^2 + \frac{2}{3} \cdot d_6 - 2 = 0$$

herleiten und finden mit der Lösungsformel

$$d_6 = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{7} - 1) \approx 0.549.$$

Platzieren wir die 6 Punkte so wie in nebenstehender Abbildung, wobei alle Seiten des Sechsecks gleichlang sind (*Hinweis:* Auch dieses Sechseck ist nicht regelmäßig), so finden wir leicht, dass in diesem Fall wegen

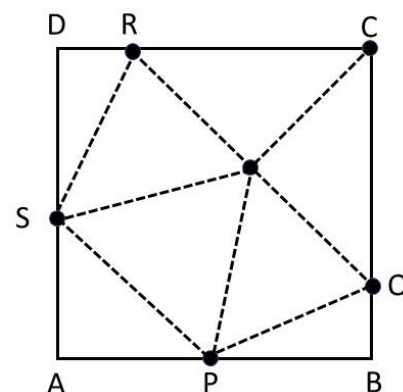


$$|\overline{PB}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6$$

(als Kathete im gleichschenkelig-rechtwinkligem Dreieck BQP mit der Hypotenuse \overline{PQ}) gilt:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot d_6 + d_6 = 1, \text{ also } d_6 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.585.$$

Für die nebenstehende Verteilung seien alle eingezeichneten Punktverbindungen gleichlang. Das Dreieck CRQ ist gleichschenkelig-rechtwinklig mit der Hypotenuse \overline{RQ} mit $|\overline{RQ}| = 2 \cdot d_6$ und daraus folgend $|\overline{QC}| = \sqrt{2} \cdot d_6$. Auch das Dreieck APS ist gleichschenkelig-rechtwinklig mit der Hypotenuse \overline{PS} mit $|\overline{PS}| = d_6$, woraus $|\overline{AP}| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot d_6$ folgt. Wenden wir nun den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck PBQ an, so

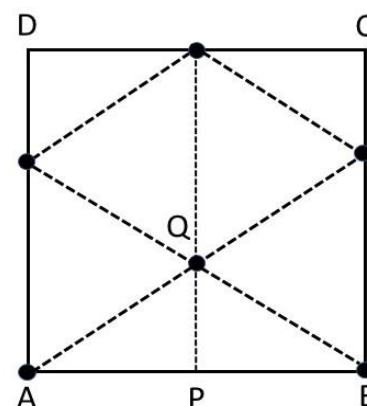


finden wir für diese Verteilung den Mindestabstand von $d_6 = \sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0.597$ aus

$$\sqrt{2} \cdot d_6 + \sqrt{d_6^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot d_6\right)^2} = 1$$

Der maximale Mindestabstand wird für die nebenstehende Verteilung erreicht. Er berechnet sich als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks APQ mit den Kathetenlängen $|\overline{AP}| = \frac{1}{2}$ und $|\overline{PQ}| = \frac{1}{3}$, also

$$|\overline{AQ}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{13} \approx 0.601.$$



Diese Verteilung hat eine alltägliche Realisierung: Wenn einander fremde Personen in einem Fahrstuhl stehen, werden sie sich etwa in der Verteilung für $n = 5$ aufstellen, um sich nicht gegenseitig zu belästigen. Tritt eine weitere Person herein (in der Abbildung von oben kommend), rücken die bereits im Fahrstuhl stehenden Personen ein Stück nach hinten (in der Abbildung nach unten) und die hinzu gekommene Person bleibt an der Türmitte (in der Abbildung in der Mitte von \overline{CD}) stehen.

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Argumentation „ausgehend von einer (scheinbar) besten Verteilung verschlechtert sich der maximale Mindestabstand, wenn wir Punkte verschieben“ nicht ausreicht. Vermuten wir nämlich, dass die beste Verteilung eingenommen wird, wenn die Punkte ein konvexes Sechseck bilden, so verschlechtert sich der Mindestabstand tatsächlich, wenn wir die Lage der Punkte nur wenig „stören“. Verändern wir aber die Lage wesentlich, ist eine Verbesserung zu erreichen!

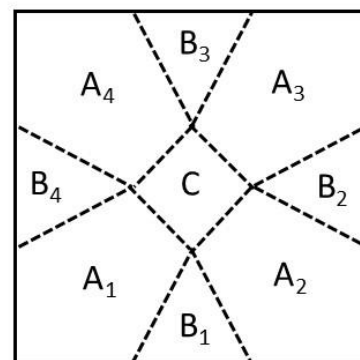
Beweise zum Fall mit sechs Punkten wurden erst in den 1960-er Jahren veröffentlicht. Ein erster Beweis wird RONALD LEWIS GRAHAM (1935 – 2020, US-amerikanischer Mathematiker) zugeschrieben. Wir skizzieren hier einen Beweis von HANS MELISSEN¹¹ (geb. 1949).

Er konstruierte eine Hilfsfigur, indem er die Quadratseiten jeweils in drei Strecken teilte und die langen Diagonalen der Gebiete A_1, \dots, A_4 der Länge d_6 aus der obigen, vermutlich besten Verteilung entsprechen. An dieser Figur führt er die Annahme, dass es eine Verteilung mit größerem Mindestabstand gäbe, zum Widerspruch.

Zunächst stellte er fest: Liegen drei Punkte in den benachbarten Gebieten der Form ABA , so ist deren Mindestabstand nicht größer als d_6 .

¹¹ Melissen, Hans. Densest Packing of Six Equal Circles in a Square. In: Elemente der Mathematik, Jahrgang 49 (1994), S. 27-31.

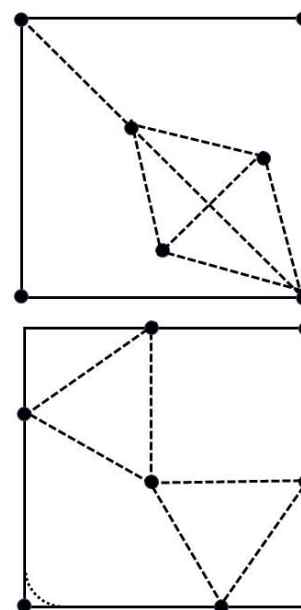
Nun untersuchte er den Fall, dass kein Punkt der Verteilung im Gebiet C liegt. Liegen in drei oder vier Gebieten der Form A jeweils ein Punkt, kann alles mit Situationen der Form ABA erklärt werden und der Mindestabstand ist nicht größer als d_6 . Liegen jedoch nur in zwei Gebieten der Form A Punkte, müssen in jedem Gebiet der Form B jeweils ein Punkt enthalten sein. Nun lässt sich zeigen, dass dann der Abstand zweier Punkte in benachbarten Gebieten der Form B nicht größer als d_6 sein kann.



Abschließend untersuchte er den Fall, dass genau ein Punkt im Gebiet C liegt. Entweder gibt es für die anderen 5 Punkte wieder die Situationen ABA , oder die Punkte liegen beispielsweise¹² in A_2, A_3, A_4, B_1, B_4 . Doch bei einer solchen Aufteilung zeigte er rechnerisch durch Abschätzungen, dass der Mindestabstand den Wert d_6 nicht übertreffen kann.

Für $n = 7, 8, 9$ fand JONATHAN SCHAEER beste Verteilungen mit maximalem Mindestabstand.

Wählen wir eine Verteilung von 7 Punkten, indem 4 Punkte in die Eckpunkte gelegt werden und die verbleibenden 3 Punkte im Innern ein gleichseitiges Dreieck bilden, erreichen wir nicht den maximal möglichen Mindestabstand!



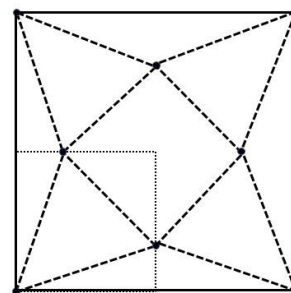
Die Lage wie nebenstehend dagegen bietet eine beste Verteilung. Erstaunlicherweise kann der siebente Punkt in einer Umgebung des (linken unteren) Eckpunktes verschoben werden, ohne den Mindestabstand zu verkleinern. Aus der Skizze ist die Konstruktion leicht zu erkennen (die markierten Dreiecke sind gleichseitig) und die Berechnung des Mindestabstandes ist nicht schwer:

$$d_7 = 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) \approx 0.536$$

¹² Andere Indizes können durch Umbenennung aus dieser Situation gewonnen werden.

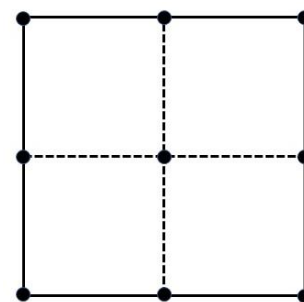
Eine vermutlich beste Anordnung für 8 Punkte finden wir durch Probieren, wenn wir 4 Punkte in die Quadrátecken legen und die verbleibenden 4 Punkte als Eckpunkte eines Quadrates im Inneren anordnen. Wir erkennen die Verteilungsstruktur vom Fall $n = 3$ wieder. Es ergibt sich deshalb ein Mindestabstand von

$$d_8 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot d_3 \approx 0.518$$



der auch tatsächlich als maximal möglicher Mindestabstand bewiesen werden kann. Jedoch erweist sich der Beweis¹³ als vergleichbar aufwändig wie im Fall $n = 6$. Es ist jedoch nicht verallgemeinerungsfähig, dass durch Zusammensetzung verkleinerter bester Verteilungen mit weniger Punkten wieder eine beste Verteilung mit maximalem Mindestabstand erreicht werden kann.

Schließlich¹⁴ betrachten wir $n = 9$. Teilen wir das Quadrat in vier gleichgroße Teilquadrate, wissen wir mit Hilfe des Schubfachprinzips, dass in (mindestens) einem dieser Teilquadrate drei Punkte liegen. Mit dem Ergebnis für $n = 3$ folgt daraus, dass der Mindestabstand nicht größer als $\frac{1}{2}d_3$ sein kann. Dies kann aber nicht der größte Mindestabstand sein, weil in der Anordnung für acht Punkte kein weiterer Punkt eingefügt werden kann. J. SCHAER wies nach, dass $d_9 = 0.5$ der größte Mindestabstand ist und bei der Anordnung im 3×3 -Gitter realisiert wird.



Unter <http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/packing/csq/csq.html> hat ECKARD SPECHT (Universität Magdeburg) die besten Verteilungen für $n = 1, \dots, 10000$ beschrieben, illustriert und mit Literaturhinweisen untersetzt.

Die besondere Aufgabe

Wettbewerbstraining mit Aufgaben vergangener Mathematik-Olympiaden beruht auf der Erfahrung, dass sich trotz der Vielfalt von Aufgabenstellungen Lösungsstrategien übertragen lassen. Damit kann es uns gelingen, für neue Aufgaben effizient geeignete Lösungsansätze zu finden und diese zum Erfolg zu führen. In der ersten Runde der diesjährigen MO sehen wir jedoch den Ausnahmefall, eine Aufgabe fast wortgleich in der Vergangenheit wiederzufinden.

¹³ Schaer J. and Meir A. On a geometric extremum problem. In: Can. Math. Bull. 8 (1965), 21-27.

¹⁴ Schaer, J. The Densest Packing of 9 Circles in a Square. In: Can. Math. Bull. vol. 8 (1965), p. 273-277.

Aufgabe MO621005. In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien u die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und d die Summe der Diagonalenlängen.

- Zeigen Sie, dass stets $d < 2u$ gilt.
- Zeigen Sie, dass stets $u < d$ gilt.

Hinweis: Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

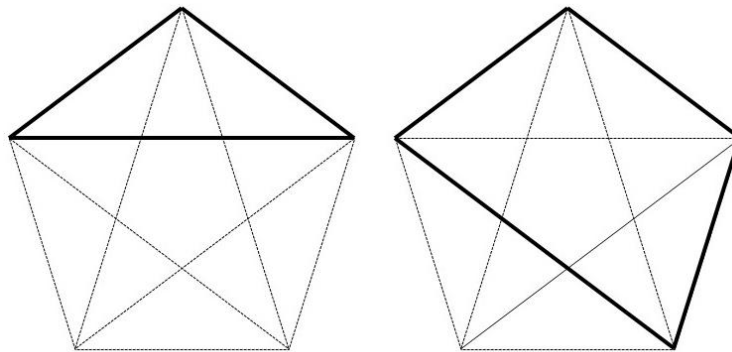
Aufgabe MO390933. Beweisen Sie: In jedem konvexen Fünfeck gilt die Ungleichung

$$u < s < 2u$$

Dabei bezeichne u den Umfang des Fünfecks und s die Summe der Diagonalenlängen.

Lösungshinweise: Wir zeichnen in ein Fünfeck die fünf Diagonalen ein und erkennen, dass wir

- einerseits fünf verschiedene Dreiecke finden, die jeweils aus zwei benachbarten Fünfeckseiten und einer Diagonalen bestehen (linke Abbildung), und
- andererseits fünf verschiedene Vierecke finden, die jeweils aus drei aufeinanderfolgende Fünfeckseiten und einer Diagonalen bestehen (rechte Abbildung).



Im ersten Fall verwenden wir in jedem dieser Dreiecke die Dreiecksungleichung, d.h. die Summe zweier Fünfeckseiten ist größer als die zugehörige Diagonale. Summiert über alle fünf Dreiecke, erhalten wir $2u > s$.

Im zweiten Fall verwenden wir die Eigenschaft in jedem konvexen Viereck, dass die Summe der Diagonallängen größer als die Hälfte des Umfangs ist. Die Summe der fünf Umfänge der Vierecke beträgt $3u + s$, die Summe der paarweisen Diagonallängen beträgt $2s$. Also muss $2s > \frac{1}{2}(3u + s)$ gelten. Daraus folgt $4s > 3u + s$ und wir erhalten die zweite zu beweisenden Ungleichung $s > u$. \square

In alten Mathe-Büchern geblättert

Euclids Elemente¹⁵

Fünfzehn Bücher
auf dem griechischen übersetzt
von Johann Friedrich Lorenz

Halle 1781
Im Verlag der Buchhandlung des Waisenhauses¹⁶

[Es werden zunächst die Textstellen aus dem ersten und dritten Buch zitiert, auf die im Beweis hingewiesen wird.]

(1, 10. Def.) Erstes Buch, Definition 10 (Seite 2): Steht eine gerade Linie auf einer anderen so, daß die Nebenwinkel gleich sind; so heißt sie senkrecht (perpendikular) auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein rechter.

(1, 15. Def.) Erstes Buch, Definition 15 (Seite 2): Ein Cirkel ist eine ebne Figur, von einer einigen Linie, Peripherie genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu derselben, auf Einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich sind;

(1, 1. Axi.) Erstes Buch, 1. Axiom (Seite 3): Zwey Dinge, so Einem Dritten gleich, sind selbst einander gleich.

(1, 2. Axi.) Erstes Buch, 2. Axiom (Seite 3): Wenn zu Gleichem Gleiches hinzukommt, so sind auch die Aggregate gleich.

(1, 5. S.) Erstes Buch, 5. Satz (Seite 7): In jedem gleichschenkligen Triangel, ABC, sind die Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, einander gleich; auch sind, wenn man die Schenkel AB, AC verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.

(1, 13. S.) Erstes Buch, 13. Satz (Seite 10): Ist eine gerade Linie, AB, auf einer andern, CD, aufgestellt: so sind die Winkel, die sie macht, was für welche es auch sind, CBA, ABD, entweder zwey rechte, oder zweyen rechten gleich.

(1, 32. S.) Erstes Buch, 32. Satz (Seite 18): In jedem Triangle, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der Außenwinkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkel, CAB, ABC, gleich. Auch sind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

¹⁵ Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet. Die Nummerierungen und die Gleichungen wurden auch im Original in einer geradlinigeren Schrift gesetzt.

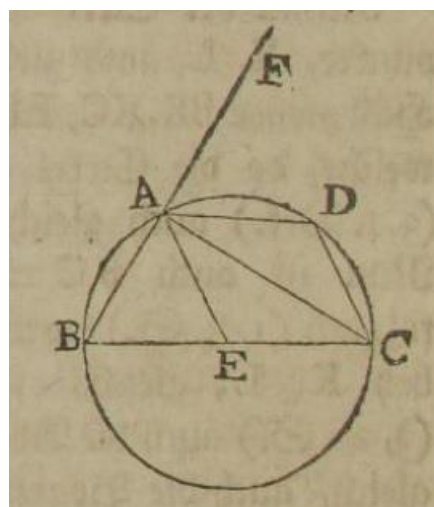
¹⁶ Digitalisiert zugänglich in der Sächsischen Landesbibliothek – Staats- und Universitätsbibliothek Dresden (SLUB) unter <https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/5>, zitiert am 26.02.2022.

(3, 22. §.) Drittes Buch, 22. Satz (Seite 46): Die Gegenwinkel einer vierseitigen Figur im Cirkel, ABCD, sind zweyen rechten gleich.

Drittes Buch

Der 31. Satz¹⁷

Der Winkel im Halbkreis, BAC, ist ein rechter; aber der im grössern Abschnitt, ABC, kleiner als ein rechter, und der im kleinern Abschnitt, ADC, grösser als ein rechter. Auch ist der Winkel des grössern Abschnitts, CBAC, grösser, des kleinern Abschnitts, CDAC, aber kleiner, als ein rechter.



Es sey ein Cirkel, ABCD, dessen Mittelpunkt, E, und dessen Durchmesser, BC. Nimm in der Peripherie über BC willkürlich zwey Punkte A, D, und ziehe BA, AC, AD, DC, so ist BADC, ein Halbkreis; der Abschnitt CABC, grösser als ein Halbkreis, und der Winkel im grössern Abschnitt, ABC; der Abschnitt CADC, kleiner als ein Halbkreis, und der Winkel im kleinern Abschnitte, ADC. Der Winkel des grössern Abschnitts wird von dem Bogen CBA und der geraden Linie AC eingeschlossen; und der Winkel des kleinern Abschnitts, wird von dem Bogen CDA und der geraden Linie AC eingeschlossen. Nun ist zu beweisen

- 1.) daß $BAC = \mathcal{R}$. Ziehe EA, und verlängere BA nach F. Da (1, 15. Def.) $EB = EA$, und $EA = EC$, so ist (1, 5. §.) $EAB = EBA$, und $EAC = ECA$, folglich (1, 2. Ur.) $BAC = EBA + ECA$. Nun ist (1, 32. §.) $EAC = EBA + ECA$, folglich (1, 1. Ur.) $BAC = FAC$, folglich (1, 10. Def.) FAC sowohl, als BAC, ein rechter Winkel. Oder: Da (1, 32. §.) $AEC = 2 BAE$, und $AEB = 2 EAC$, so ist $AEC + AEB = 2 BAC$. Nun ist (1, 13. §.) $AEC + AEB = 2 \mathcal{R}$, folglich $2 BAC = 2 \mathcal{R}$, folglich $BAC = \mathcal{R}$.
- 2.) daß $ABC < \mathcal{R}$. Da im $\triangle ABC$ (1, 32. §.) $ABC + BAC < 2 \mathcal{R}$, aber $BAC = \mathcal{R}$, so ist $ABC < \mathcal{R}$,
- 3.) daß $ADC > \mathcal{R}$. Da in der vierseitigen Figur ABCD, (3, 22. §.) $ABC + ADC = 2 \mathcal{R}$, aber $ABC < \mathcal{R}$, so ist $ADC > \mathcal{R}$.
- 4.) daß der Winkel $CBAC > \mathcal{R}$. Denn er ist offenbar grösser, als der rechte Winkel BAC.
- 5.) daß der Winkel $CDAC < \mathcal{R}$. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel FAC.

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen zusammen gleich, daß er alsdenn ein rechter sey, weil sein Nebenwinkel diesen beyden übrigen, und daher ihm selbst gleich, folglich (1, 10. Def.) jeder der beyden Nebenwinkel ein rechter ist.

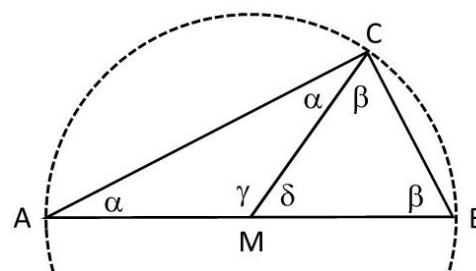
¹⁷ Seiten 50-51

Bekannte Sätze der Mathematik: Satz des Thales

„Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke \overline{AB} , dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.“ Der erste Beweis wird dem antiken griechischen Mathematiker THALES VON MILET (ca. 624 v.u.Z. bis ca. 545 v.u.Z.) zugeschrieben. Jedoch finden sich keine Aufzeichnungen von ihm. Von EUKLID VON ALEXANDRIA (im 3. Jahrhundert v.u.Z.) ist ein Beweis in seinem Buch „Elemente“ angegeben¹⁸. Die Aussage des Satzes war aber bereits früher in Ägypten und Babylonien bekannt.

Beweis mit gleichschenkligen Dreiecken.

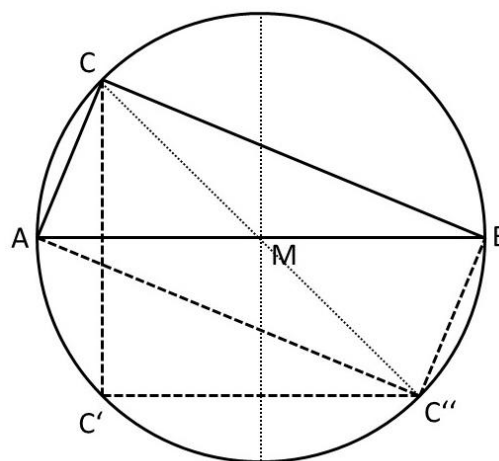
Wir zerlegen das Dreiecks ABC unter dem Halbkreis mit dem Durchmesser \overline{AB} in zwei Dreiecke AMC und BCM , wobei mit M der Kreismittelpunkt bezeichnet ist. Die Streckenlängen \overline{AM} , \overline{BM} und \overline{CM} sind alle gleich dem Radius des Halbkreises. Deshalb sind die Dreiecke AMC und BCM gleichschenkelig.



Die Winkel $\sphericalangle AMC = \gamma$ und $\sphericalangle CMB = \delta$ sind Nebenwinkel und ergänzen sich zu 180° . Nach dem Peripherie-Zentri-Winkelsatz gilt über der Sehne \overline{BC} die Beziehung $\sphericalangle CAM = \alpha = \frac{1}{2}\delta$ und über der Sehne \overline{AC} die Beziehung $\sphericalangle MBC = \beta = \frac{1}{2}\gamma$, also ergänzen sich die Winkel α und β zu 90° , d.h. das Dreieck ABC ist rechtwinklig. \square

Beweis mit Vervollständigung zum Rechteck.

Wird der Punkt C am Durchmesser \overline{AB} (Punkt C') und anschließend an der Mittelsenkrechten von \overline{AB} (Punkt C'') gespiegelt, dann liegt der Bildpunkt C'' wegen Symmetrie auf dem unteren Halbkreis über der Seite \overline{AB} . Die zweimalige Spiegelung kann als Punktspiegelung am Kreismittelpunkt M ausgeführt werden. Daher sind die Seiten \overline{AC} und $\overline{BC''}$ sowie $\overline{AC''}$ und \overline{BC} parallel und das Viereck $ACBD$ ist ein Parallelogramm. Weil die Diagonalen \overline{AB} und $\overline{CC''}$ Durchmesser des Kreises und daher gleich lang sind, ist das Parallelogramm ein Rechteck und der Winkel bei C ein rechter Winkel. \square



¹⁸ s. In alten Mathe-Büchern geblättert.

Monatsaufgabe¹⁹ 10/22.

Gegeben seien in der Ebene drei parallele Geraden g, h und k . Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g, B \in h$ und $C \in k$.

Inhalt

Vorwort.....	2
Thema 18 – Der Satz des THALES	3
Versuch-Irrtum-Methode bei geometrischen Konstruktionen	11
Punktverteilungen mit maximalem Mindestabstand im Quadrat.....	14
Die besondere Aufgabe.....	19
In alten Mathe-Büchern geblättert	21
Bekannte Sätze der Mathematik: Satz des Thales	23
Monatsaufgabe 10/22.....	24

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe ²⁰	Nr.	Thema	Aufgabe
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹⁹ Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

²⁰ Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter <http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html> erhältlich.