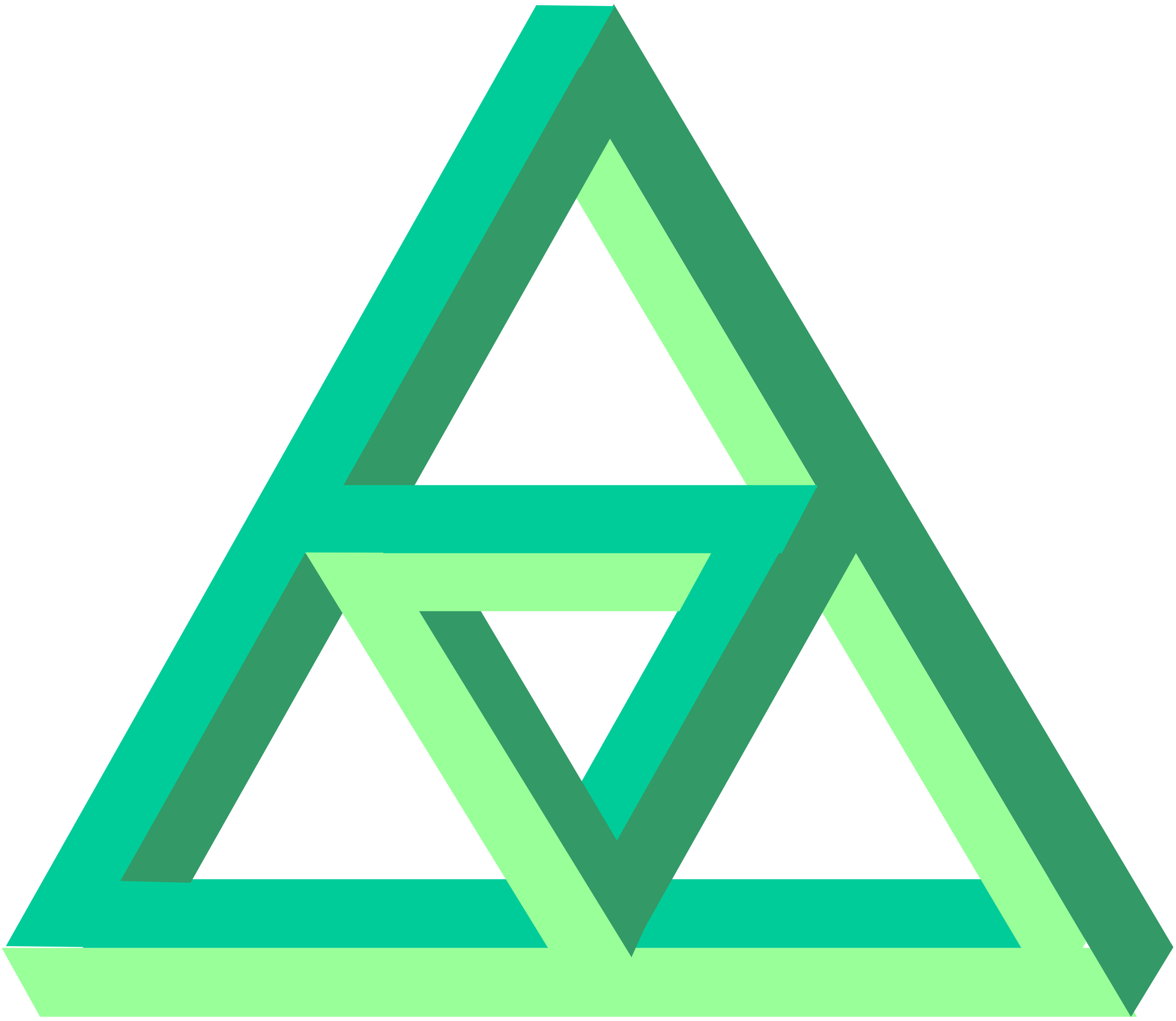
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 11/2022 (November 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Nachdem in den vergangenen Jahren bereits MO-Aufgaben mit Summen von Quadratzahlen gestellt wurden, wird diese Thematik mit der Aufgabe **MO621012** wieder aufgegriffen. Wir erweitern deshalb mit Thema 9.02 die Diskussion um pythagoreische Zahlentupel (s. Thema 9.01 in Heft 09/2021).

Wir zeigen zudem in Bezug zu Aufgabe **MO621011** weitere Beispiele zu Aufgaben, bei denen Quersummen zur Abschätzung der Stellenzahl genutzt wird.

Wir beginnen in diesem Heft einen mehrteiligen Beitrag zu geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Im historischen Rückblick schauen wir – passend zum Thema 9.02 – in eine Ausgabe des Archivs der Mathematik und Physik aus dem Jahr 1874. Der Autor beschäftigt sich auf 37 Seiten mit „Rationalen Dreiecken“. Aus Platzgründen können wir hier nur Auszüge aus dem Vorwort und allgemeine Eigenschaften zitieren.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 9.2 – Pythagoreische Zahlentupel

Nach den Aufgaben MO600945/MO601046[3] waren auch in der 1. Runde der 62. MO wieder Summen von Quadratzahlen zu untersuchen.

Aufgabe 9.07 - MO621012. In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 \,.$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

Hinweis: Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

Lösungshinweise zu Teil a):

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 \\
&= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \,.
\end{aligned}$$

Somit finden wir

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 0 \,.$$

Lösungshinweise zu Teil b): Da nur die Angabe eines korrekten Beispiels gefordert ist, können wir die Lösung durch (zufälliges) Suchen finden. Für ein systematisches Probieren wäre eine computer-gestützte Analyse der Summen von drei Quadratzahlen möglich (und in einer Heimarbeit zulässig, ohne darauf Bezug nehmen zu müssen). In der Lösungsdarstellung ist darauf zu achten, dass zur Probe die erforderlichen Rechenschritte ersichtlich sind, also das Ausrechnen der Quadrate und die Darstellung der Addition. Es gilt beispielsweise:

[3] s. Thema 9.01 – Pythagoreische Zahlentripel (Heft 09/2021), es wird die Aufgabennummerierung fortgesetzt.

$$1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9 = 3^2\ ,$$
$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 4 + 9 + 36 = 49 = 7^2\ .$$

In Anlehnung an bekannte pythagoreische Zahlentripel finden wir ebenfalls geeignete Tupel, beispielsweise:

Wegen $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$; $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
gilt auch $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$.

Wegen $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$; $13^2 + 84^2 = 169 + 7056 = 7225 = 85^2$
gilt auch $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$.

Beachten wir, dass die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen wegen $(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$ eine ungerade Zahl ist, können wir auch suchen, welche ungerade Zahl sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt.

Wegen $3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$ gilt $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$.
Wegen $7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ gilt $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$.
Wegen $9^2 - 8^2 = 81 - 64 = 17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$ gilt $1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$.

Mit Bezug zu Teilaufgabe a) finden wir ebenfalls Lösungstupel. Wir setzen zum Beispiel $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$ und erhalten

$$(1^2 + 1^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1)^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$
$$= (1^2 + 1^2 + 1^2)^2 = 3^2$$

oder für $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$

$$(3^2 + 2^2 - 1^2)^2 + (2 \cdot 3 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 12^2 + 6^2 + 4^2$$
$$144 + 36 + 16 = 196 = (3^2 + 2^2 + 1^2)^2 = 14^2 \cdot$$

Lösungshinweise zu Teil c): Da in der Aufgabenstellung ausdrücklich die mehrfache Verwendung von Quadratzahlen zugelassen wird, untersuchen wir die Möglichkeiten, möglichst oft die Quadratzahl 1^2 einzusetzen. Die Summe aller 2022 Quadratzahlen ist somit mindestens 2022. Die nächstgrößere Quadratzahl ist $45^2 = 2025$. Wir finden dafür folgende Zuordnung:

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2021-mal} + 2^2}_{2022\ Summanden} = 2021 + 4 = 2025 = 45^2$$

Wir können aber auch für $46^2 = 2116$ geeignete Zuordnungen finden:

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2018-mal} + 2^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2}_{2022\ Summanden} = 2018 + 4 + 9 + 36 + 49 = 2116 = 46^2$$

oder

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2018-mal} + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2}_{2022\ Summanden} = 2018 + 9 + 9 + 16 + 64 = 2116 = 46^2$$

Auch folgende Herleitung ist möglich:

$$(1010+1)^2 = 1010^2 + 2 \cdot 1010 \cdot 1 + 1^2 = 1010^2 + \underbrace{1^2 + \cdots + 1^2}_{2020\ Summanden} + 1^2\,.$$

❑

Um Summen mit paarweise verschiedenen Summanden zu erzeugen, verwenden wir den Ansatz über die Pythagoreischen Zahlentripel. Wir wissen aus der Aufgabe MO601033 (s. Thema 9.01), dass ein Tripel (a, b, c) genau dann ein primitives pythagoreisches Zahlentripel mit gerader Zahl b ist, wenn es zwei teilerfremde positive ganze Zahlen m, n gibt mit $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ und $c = m^2 + n^2$.

Wir beginnen mit $(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5)$ und erzeugen für $n > 0$ aus einem Tripel (a_n, b_n, c_n) ein neues Tripel $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ mit $a_{n+1} = c_n$. Da im primitiven pythagoreischen Zahlentripel die Summe c_n eine ungerade Zahl ist, können wir stets

$$a_{n+1} = c_n = \left(\frac{c_n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{c_n-1}{2}\right)^2$$
$$b_{n+1} = \frac{c_n+1}{2} \cdot \frac{c_n-1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (c_n^2 - 1)$$
$$c_{n+1} = \left(\frac{c_n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_n-1}{2}\right)^2$$

wählen und erhalten ein neues pythagoreisches Zahlentripel. Dann gilt aber auch

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1^2 + b_1^2}_{=c_1^2=a_2^2} + b_2^2}_{=c_2^2=a_3^2} + b_3^2}_{\dots} \dots + b_{2021}^2 = c_{2021}^2$$

denn wir wissen $a_1^2 + b_1^2 = c_1^2 = a_2^2$, $a_2^2 + b_2^2 = c_2^2 = a_3^2$, …, $a_{2021}^2 + b_{2021}^2 = c_{2021}^2$.

Berechnen wir auf diese Weise die ersten Zahlentripel erhalten wir

$(a_1, b_1, c_1) = (3, 4, 5)$ mit $m = 2$ und $n = 1$,
$(a_2, b_2, c_2) = (5, 12, 13)$ mit $m = \frac{5+1}{2} = 3$ und $n = \frac{5-1}{2} = 2$,
$(a_3, b_3, c_3) = (13, 84, 85)$ mit $m = \frac{13+1}{2} = 7$ und $n = \frac{13-1}{2} = 6$.

Einen erfolgversprechenden Ansatz[4] finden wir auch, wenn wir die Summe der ersten n Quadratzahlen untersuchen. Setzen wir $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 \dots + n^2$, so müssen wir entscheiden, ob es zwei ganze Zahlen a und b gibt, so dass die Gleichung

[4] Nach Aufgabe KZM 5-5B, Heft 03/2021.

$S_n + a^2 = b^2$ erfüllbar ist. Wir wissen, dass jede ungerade Zahl größer als 1 als Differenz zweier Quadratzahlen dargestellt werden kann, denn jede ungerade Zahl $k > 1$ kann in der Form $k = 2m + 1$ geschrieben werden und wir können die Quadratzahlen $(m+1)^2$ und m^2 wählen.

Ist S_n eine ungerade Zahl[5] mit $n > 2$, so gilt $S_n = 2m + 1 > n^2 + (n-1)^2$. Also erhalten wir

$$2m + 1 > 2 \cdot n^2 - 2n + 1\,,$$
$$m > n(n-1) \geq 2n > n + 1\,.$$

Somit sind in der Summe $1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + \left(\frac{S_n - 1}{2}\right)^2$ alle Summanden paarweise verschieden und es gilt

$$1^2 + 2^2 \ldots + n^2 + \left(\frac{S_n - 1}{2}\right)^2 = S_n + \frac{S_n^2 - 2S_n + 1}{4} = \frac{S_n^2 + 2S_n + 1}{4} = \left(\frac{S_n + 1}{2}\right)^2$$

Für $n = 2021$ sind in der Summe $1^2 + 2^2 \ldots + n^2$ insgesamt 1010 gerade Summanden und 1011 ungerade Summanden. Die Summe S_{2021} ist folglich eine ungerade Zahl und wir haben mit diesem Ansatz 2022 paarweise verschiedene Quadratzahlen gefunden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist.

Für eine besonders elegante Generierung von 2022 paarweise verschiedenen Quadratzahlen können wir die Umformung aus Teilaufgabe a) verallgemeinern. Es gilt nämlich auch

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2021}^2 - c^2)^2 + (2a_1c)^2 + \cdots + (2a_{2021}c)^2 \\ = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2021}^2 + c^2)^2.\end{aligned}$$

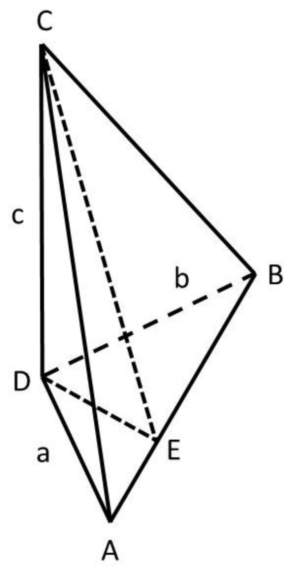
Mit dieser Gleichung finden wir für $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_{2021} = 2021$ und $c = 1$ eine geforderte Auswahl.

Ein Beispiel zu Teilaufgabe b) finden wir in der räumlichen Version des Satzes von PYTHAGORAS, die zur 41. Mathematik-Olympiade als Aufgabe gestellt wurde:

Aufgabe[6] 9.08 – MO410941/MO411041.
Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide $ABCD$ gilt: Sind die Dreiecke ABD, ACD und BCD sämtlich bei D rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

---

[5] Ist S_n eine gerade Zahl, so betrachten wir S_{n+1} und streichen den Summanden $2^2 = 4$, so dass wir insgesamt n Summanden mit ungerader Summe ihrer Quadratzahlen betrachten können.
[6] s. Heft 03/2021



Lösungshinweise: Wir betrachten die Quaderecke $ABCD$ in nebenstehender Skizze. Insgesamt hat die „abgeschnittene“ Ecke drei rechtwinklige Dreiecke als Seitenflächen. Laut obiger Aufgabe ist zu beweisen:

$$F_{\Delta ABD}^2 + F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta BCD}^2 = F_{\Delta ABC}^2.$$

Wir legen eine Ebene durch die Gerade CD, die senkrecht auf AB steht. Diese Ebene schneidet die Gerade AB in einem Punkt E, so dass $\overline{DE}$ die Höhe auf AB im Dreieck ABD ist und die $\overline{CE}$ die Höhe auf AB im Dreieck ABC ist.

Weil CD senkrecht auf AD und senkrecht auf BD steht, steht CD auch senkrecht auf jeder Geraden in der Ebene des Dreiecks ABD. Somit ist das Dreieck DEC ebenfalls rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Durch Anwendung des Satzes von PYTHAGORAS im Dreieck DEC mit der Hypotenuse $\overline{CE}$ finden wir

$$|\overline{CE}| = \sqrt{|\overline{DE}|^2 + |\overline{DC}|^2}$$

Im Dreieck ABD finden wir über die Formeln für den Flächeninhalt

$$F_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{DE}| = \frac{ab}{2} \quad \Rightarrow \quad |\overline{DE}| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wobei wir im Nenner den Satz des PYTHAGORAS im rechtwinkligen Dreieck ABD mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ anwenden ($|\overline{AB}|^2 = a^2 + b^2$). Nun können wir den Flächeninhalt der Seitendreiecke berechnen:

$$F_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CE}|}{2}\right)^2 = \frac{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{CE}|^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2) \cdot \left(c^2 + \frac{(ab)^2}{a^2 + b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot (c^2 \cdot (a^2 + b^2) + (ab)^2) = \frac{1}{4} \cdot ((ac)^2 + (bc)^2 + (ab)^2)$$
$$= \left(\frac{ac}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2 = F_{\Delta ACD}^2 + F_{\Delta BCD}^2 + F_{ABD}^2 .$$

❑

In Ergänzung der oben ausgeführten Erzeugung von pythagoreischen Zahlentripel verweisen wir auf folgende Zusammenfassung[7].

Aufgabe 9.09 – Satz. Jedes pythagoreische Tripel kann vier verschiedene pythagoreische Tripel durch zweidimensionale Parameterdarstellungen erzeugen.

[7] Fritzsch K.-H. „Parameterdarstellungen der pythagoreischen Tripel“. In: Mathematisch-Naturwissenschaftlicher Unterricht, Jahrgang 45 (1992) Heft 5, S. 259-261.

Die Parameter sind Linearkombinationen der Zahlen des erzeugenden Tripels (a, b, c) mit $a < b$:

$$(a_d, b_d, c_d) = (|c^2 - d^2|, 2 \cdot c \cdot d, c^2 + d^2)$$

mit $d = \pm a \pm b \pm c$, wobei in diesem Ausdruck höchstens ein Minuszeichen zu verwenden ist.

Beweis: Um das erzeugte Tripel als pythagoreisches Zahlentripel nachzuweisen, berechnen wir den Ausdruck

$$(c^2 - d^2)^2 + (2 \cdot c \cdot d)^2 - (c^2 + d^2)^2.$$

Setzen wir zum Beispiel $d = a + b + c$, so erhalten wir

$$((a + b + c)^2 - c^2)^2 + 4 \cdot (ac + bc + c^2)^2 - ((a + b + c)^2 + c^2)^2.$$

Dies formen wir um und finden für jeden der drei Terme:

$$a_d^2 = (a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2 = a^4 + b^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2$$
$$+2a^2b^2 + 4a^3b + 4a^3c + 8a^2bc + 4ab^3 + 8ab^2c + 4b^3c + 4abc^2\ ,$$

$$b_d^2 = 4 \cdot (ac + bc + c^2)^2 = 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4c^4 + 8abc^2 + 8ac^3 + 8bc^3\ ,$$

$$c_d^2 = (a^2 + b^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc)^2$$
$$= a^4 + b^4 + 4c^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^2bc + 4b^2c^2$$
$$+4ab^3 + 4ab^2c + 4b^3c + 8abc^2 + 8ac^3 + 8bc^3 + 8a^2bc + 8ab^2c + 8abc^2\ .$$

Wir erkennen, dass sich die Summanden aufheben und wir tatsächlich

$$((a + b + c)^2 - c^2)^2 + \left(2 \cdot (ac + bc + c^2)\right)^2 - ((a + b + c)^2 + c^2)^2 = 0$$

erhalten. In gleicher Weise können wir nachweisen, dass wir auch mit $d = a + b - c$, $d = a - b + c$ oder $d = -a + b + c$ pythagoreische Tripel erhalten. ❑

Wir nennen Dreiecke mit $|a - b| = 1$ *fast-gleichschenklige* Dreiecke, weil sie für große Werte von a und b tatsächlich wie gleichschenklig wahrgenommen werden. Betrachten wir nun die Differenz

$$2(ac + bc + c^2) - ((a + b + c)^2 - c^2) = 2c^2 - 2ab - a^2 - b^2,$$

finden wir wegen $a^2 + b^2 = c^2$, dass für $a + 1 = b$ das so erzeugte pythagoreische Zahlentripel ebenfalls die Seitenlängen eines fast-gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks repräsentiert:

$$2(ac + bc + c^2) - ((a + b + c)^2 - c^2) = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

Für $(3, 4, 5)$ führt $d = a + b + c$ zu $(119, 120, 169)$.

Auch wenn wir $d = a + b - c$ einsetzen, erhalten wir in gleicher Weise die Seitenlängen eines fast-gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, zum Beispiel aus $(3, 4, 5)$ das Tripel $(21, 20, 29)$.

Aufgabe 9.10 – MO291036.

a) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder -) derart zu wählen, dass mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm m^2 = k$$

gilt.

b) Man beweise, dass es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen die Gleichung aus Teil a) gilt[8].

Lösungshinweise zu Teil a): Das Auffinden geeigneter Summen für kleine k gelingt durch Probieren. Wir finden beispielsweise:

$$\begin{aligned}
&1 = 1^2\,,\\
&2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = -1 - 4 - 9 + 16\,,\\
&3 = -1^2 + 2^2 = -1 + 4\,,\\
&4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = 1 - 4 - 9 + 16\,.
\end{aligned}$$

Aufwändig (zumindest unter Klausurbedingungen) erscheint dagegen das Finden einer solchen Summendarstellung für $k = 0$ (dies ist aber erforderlich, weil im Allgemeinen 0 zu den natürlichen Zahlen gezählt wird):

$$0 = 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 1 + 4 - 9 + 16 - 25 - 36 + 49.$$

Bezeichnen wir den letzten Summanden in der Darstellung für k mit m_k, können wir die Aufgabenstellung auch so schreiben:

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm m_k^2 = k\,.$$

Das Beispiel für $k = 4$ verallgemeinern wir:

$$\begin{aligned}
&(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2\\
&= m^2 + 2m + 1^2 - m^2 - 4m - 2^2 - m^2 - 6m - 3^2 + m^2 + 8m + 4^2 = 4\,.
\end{aligned}$$

Damit können wir „Vierer“-Schritte begründen und schreiben dafür die Zahl k als $k = 4q + r$ mit geeigneten natürlichen Zahlen q und r $(r < 4)$. So können wir für jde Zahl $k > 0$ eine geeignete Darstellung der geforderten Form angeben:

$$\begin{aligned}
&\pm 1^2 \pm \cdots \pm m_r^2 + (m_r + 1)^2 - (m_r + 2)^2 - (m_r + 3)^2 + (m_r + 4)^2\\
&+(m_r + 4 + 1)^2 - (m_r + 4 + 2)^2 - (m_r + 4 + 3)^2 + (m_r + 4 + 4)^2
\end{aligned}$$

[8] siehe auch: Erzeugung von (Gegen-) Beispielen mittels Rekursion. Heft 06/2022.

$$\begin{aligned}
&\dots\\
&+(m_r+4\cdot(q-1)+1)^2-(m_r+4\cdot(q-1)+2)^2\\
&\qquad\qquad -(m_r+4\cdot(q-1)+3)^2+(m_r+4\cdot(q-1)+4)^2\\
&=r+\underbrace{4+\cdots+4}_{q\ Mal}=r+4\cdot q=k\ .
\end{aligned}$$

Lösungshinweise zu Teil b): Wenn wir für eine natürliche Zahl k eine Darstellung nach Teilaufgabe a) mit dem letzten Summanden l^2 gefunden haben, können wir diese Summe mit den Summanden

$$\underbrace{(l+1)^2-(l+2)^2-(l+3)^2+(l+4)^2}_{=4}\underbrace{-(l+5)^2+(l+6)^2+(l+7)^2-(l+8)^2}_{=-4}$$

(beliebig oft wiederholt) fortsetzen. ❑

Quersummen in Wettbewerbsaufgaben[9]

In den folgenden Aufgaben werden die Aussagen über die Quersummen vor allem dafür genutzt, die Stellenzahl der ursprünglichen Zahl zu schätzen.

Aufgabe MO621011.

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.
b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl z, für die sowohl z als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

Lösungshinweise Teil a): Da z und $Q(z)$ durch 2, 3 und 5 teilbar sind und das kleinste gemeinsame Vielfache $kgV(2,3,5)=30$ ist, müssen z und die Quersumme $Q(z)$ beide durch 30 bzw. durch 3 und durch 10 teilbar sein. Damit haben die Zahlen z und $Q(z)$ beide die Endziffer Null und sind Vielfache von 30.

Die Zahl z muss mindestens fünfstellig sein, da die größtmögliche Quersumme einer vierstelligen Zahl mit einer Null am Ende $9+9+9+0=27$ ist. Die gesuchte kleinste Zahl ist daher mindestens fünfstellig.

Bei der kleinstmöglichen Zahl sind bei einer festen Quersumme die ersten Ziffern so klein und die letzten Ziffern demzufolge so groß wie möglich zu wählen. Die gesuchte Zahl ist daher 39 990. Sie und auch ihre Quersumme 30 sind durch 2, 3 und 5 teilbar.

Lösungshinweise Teil b): Es gilt $kgV(2,3,4,5)=60$. Wie in Teil a) schließen wir auf die Teilbarkeit von z und $Q(z)$ durch 60 und Null als letzte Ziffer von beiden Zahlen. Wegen $6\cdot 9+0<60$ muss z mindestens achtstellig sein. Wegen der Teilbarkeit von z durch 4 ist die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildet wird, durch 4

[9] s. auch Heft 10/2021 und Heft 11/2021

teilbar. Die Zahl z endet also auf 00, 20, 40, 60 oder 80. Damit die erste Ziffer von z so klein wie möglich ist, wählen wir als letzte Ziffern 80. Die kleinste Zahl ist somit 79 999 980. Diese Zahl ist durch 2, 3, 4 und 5 teilbar und ihre Quersumme 60 auch. ❑

Aufgabe MO571013. Es gibt positive ganze Zahlen n, für die sowohl n als auch deren Quersumme $Q(n)$ durch 57 teilbar ist. Solche Zahlen n werden in dieser Aufgabe betrachtet.

a) Geben Sie zwei Beispiele für solche Zahlen n an und weisen Sie nach, dass diese Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.
b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft und weisen Sie nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

Lösungshinweise Teil a): Da die Zahl 57 die Primfaktorenzerlegung $57 = 3 \cdot 19$ besitzt, ist eine Zahl genau dann durch 57 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 19 teilbar ist.

Die Zahl 57 hat die Quersumme $5 + 7 = 12$. Durch 19-maliges Aneinanderfügen von 57 entsteht eine Zahl mit der Quersumme $19 \cdot 12 = 57 \cdot 4 = 228$, die durch 57 teilbar ist. Die Zahl selbst $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}$ ist auch durch 57 teilbar. Somit ist ein Beispiel gefunden. Durch Anfügen von Nullen bleibt die Teilbarkeit durch 57 erhalten und die Quersumme ändert sich nicht. Deshalb erfüllen auch $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}0$ oder $\underbrace{57 \ldots 57}_{19\,Mal}00$ und weitere derartiger Zahlen alle Bedingungen.

Lösungshinweise zu Teil b): Jede Zahl n mit $Q(n) = 57$ hat wenigstens 7 Stellen, denn die höchstens 6-stellige Zahl mit der größten Quersumme ist 999 999 und hat die Quersumme $6 \cdot 9 = 54 < 57$. Die kleinste Zahl mit $Q(n) = 57$ ist 3 999 999.

Die Zahl 3 999 999 ist wie alle anderen Zahlen mit der Quersumme 57 zwar durch 3 teilbar, aber sie ist kein Vielfaches von 19.

Die nächstgrößeren Zahlen mit der Quersumme 57 sind 4 899 999, 4 989 999, 4 998 999, 4 999 899, 4 999 989, 4 999 998 (alle jedoch nicht durch 19 teilbar); es folgen 5 799 999, 5 889 999, 5 898 999 und 5 899 899. Von denen wiederum ist nur 5 899 899 durch 57 teilbar (es gilt $5\,899\,899 = 57 \cdot 103\,507$). Diese Zahl ist somit die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft. ❑

Aufgabe MO281021. Gesucht ist die kleinste positive natürliche Zahl, deren Zifferndarstellung (im Dezimalsystem) nur aus den Ziffern 0 und 1 besteht und durch 450 teilbar ist.

Lösungshinweise: Ist eine Zahl durch 450 teilbar, dann ist sie durch 50 und durch 9 teilbar (weil 50 und 9 teilerfremd sind).

Ist eine Zahl durch 50 teilbar, so endet die Zahl auf 00 oder 50. Weil nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen, endet die gesuchte Zahl auf 00.

Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist auch ihre Quersumme durch 9 teilbar. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist gleich der Anzahl der Ziffern 1.

Die gesuchte Zahl besteht folglich aus 9 Ziffern 1 und endet auf 00, lautet also 11 111 111 100. ❑

Aufgabe. Es bezeichnet $Q(n)$ die Quersumme der positiven ganzen Zahl n. Berechnen Sie $Q\left(Q\big(Q(2022^{2022})\big)\right)$.

Lösungshinweise: Wir schätzen die Anzahl der Ziffern von $z = 2022^{2022}$ ab.

$$z < 2048^{2022} = 2^{2022} \cdot (2^{10})^{2022} = 2^{22242} < (2^{13})^{1711} < (10^4)^{1711}$$

Dabei verwenden wir $2^{13} = 8\,192$ und $22\,242 < 13 \cdot 1711 = 22\,243$ Deshalb hat die gesuchte Zahl z höchsten $4 \cdot 1711 = 6844$ Ziffern. Somit können wir die Quersumme abschätzen: $Q(z) \leq 6\,844 \cdot 9 = 61\,596$.

Dann finden wir aber $Q\big(Q(z)\big) \leq 6 + 4 \cdot 9 = 42$.

Somit gilt sogar $Q\left(Q\big(Q(z)\big)\right) \leq 12$.

Die Zahl 2022 lässt bei Division durch 9 den Rest 6. Deshalb ist 2022^2 durch 9 teilbar. Dann ist auch $(2022^2)^{1011} = 2022^{2022}$ durch 9 teilbar. Also sind auch die Quersummen durch 9 teilbar. Da die Quersummen von positiven Zahlen nicht Null sein können, finden wir $Q\left(Q\big(Q(z)\big)\right) = 9$. ❑

Aufgabe. Geben Sie die kleinste 2022-stellige Zahl z an, für die $Q\left(Q\big(Q(z)\big)\right)$ größtmöglich ist.

Lösungshinweise: Die größte Quersumme einer 2022-stelligen Zahl besteht nur aus Ziffern 9 und kann deshalb $2\,022 \cdot 9 = 18\,198$ nicht übertreffen. Es gilt also $z_1 = Q(z) \leq 18198$. Weiter finden wir $Q\big(Q(z)\big) \leq 36$, denn wäre z_1

- fünfstellig, dann liefert 17999 die größte Quersumme,
- vierstellig, dann liefert 9999 die größte Quersumme.

Folglich erhalten wir die Abschätzung $Q\left(Q\big(Q(z)\big)\right) \leq 11$. Um die Zahl 11 als Quersumme zu realisieren, muss $Q\big(Q(z)\big) = 29$ gelten. Die kleinste Zahl mit Quersumme 29 ist 2999. Wir suchen also eine Zahl z mit $Q(z) = z_1 = 2999$.

Wegen $2999 = 333 \cdot 9 + 2$ erhalten wir die kleinste 2022-stellige Zahl als

$$z = 1\underbrace{00\ldots00}_{1687}1\underbrace{9\ldots9}_{333}$$ ❑

Aufgabe 5-2: Es seien p_1 eine einstellige, p_2 eine zweistellige und p_3 eine dreistellige Primzahl. Mit $Q(n)$ werde die Quersumme von der natürlichen Zahl n bezeichnet. Man finde die kleinste natürliche Zahl n mit

$Q(n) = p_3$, $Q(p_3) = p_2$ und $Q(p_2) = p_1$.

Lösungshinweise: Um die kleinste Zahl n zu finden, gehen wir zunächst von der kleinstmöglichen Primzahl $p_1 = 2$ aus. Mit $p_2 = 11$ finden wir die kleinstmögliche zweistellige Primzahl mit $Q(p_2) = p_1$.

Nun suchen wir die kleinste dreistellige Primzahl p_3 mit $Q(p_3) = 11$. Wegen $119 = 7 \cdot 17$ und $128 = 2 \cdot 64$ ist dies $p_3 = 137$. Die kleinste natürliche Zahl mit der Quersumme 137 besteht aus 15-mal der Ziffer 9 mit einer vorangestellten 2. Folglich erfüllt die Zahl 2 999 999 999 999 999 alle Bedingungen der geforderten Quersummen.

Wir zeigen noch, dass mit anderen einstelligen Primzahlen keine kleinere Zahl erzeugt werden kann.

Für $p_1 = 2$ gibt es aber keine weitere Lösung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, weil jede zweistellige Primzahl größer als 11 eine Quersumme größer als 2 besitzt.

Der Fall $p_1 = 3$ kann nicht auftreten, da dann p_2 die Quersumme 3 hätte und somit durch 3 teilbar wäre (im Widerspruch zur Primzahleigenschaft).

Im Falle $p_1 = 5$ gibt es nur die zweistelligen Primzahlen 23 bzw. 41 mit entsprechender Quersumme. Allerdings kann p_2 als Quersumme einer dreistelligen Zahl höchstens 27 sein, so dass nur $p_2 = 23$ in Frage kommt. Die kleinste dreistellige Zahl mit Quersumme 23 lautet 599 (Primzahl!). Die zugehörige Zahl n wäre aber 67-stellig und damit größer als die oben gefundene Lösung.

Der Fall $p_1 = 7$ entfällt sofort, da keine Primzahl unter 27 eine Quersumme von 7 besitzt.

Damit ist bewiesen, dass die oben gefundene Zahl n die kleinste Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist. ❑

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal [10]

Zur Lösung von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene nutzt man *elementare* Konstruktionen (Grundkonstruktionen), die durch folgende Axiome[11] abgesichert sind, d.h. es gilt als vereinbart, dass mit Zirkel und Lineal in der Ebene folgende Konstruktionen ausgeführt werden können:

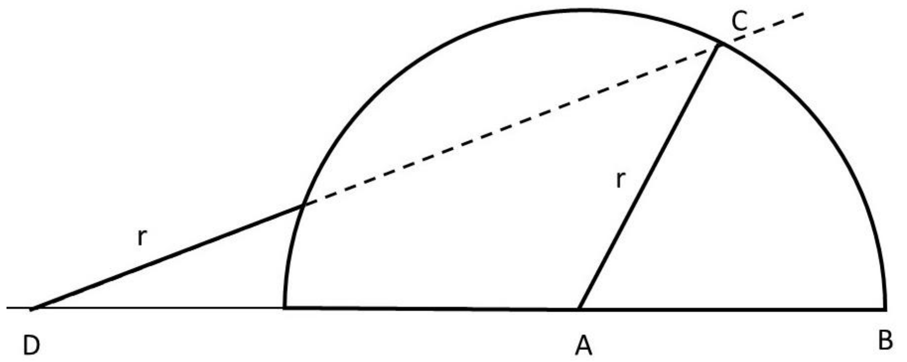
1. (Lineal-Axiom) Es ist stets möglich, durch 2 gegebene Punkte genau eine Gerade zu ziehen, d.h. jeder Punkt dieser Geraden ist gegeben.
2. (Schnittpunkt-Axiom I) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets konstruieren.
3. (Zirkel-Axiom) Es lässt sich genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und wenigstens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind, d.h. dass damit alle Punkte der Peripherie gegeben sind.
4. (Schnittpunkt-Axiom II) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets durch Konstruktion die Schnittpunkte bestimmen.
5. (Schnittpunkt-Axiom III) Es ist stets möglich, die Punkte zu konstruieren, die zwei sich schneidenden Kreise gemeinsam haben.

Lässt sich eine Aufgabe nicht auf diese Axiome zurückführen, so heißt sie *nichtelementar*. Allerdings ist hierbei zwischen der Möglichkeit der Aufgabe und der Lösbarkeit der Aufgaben zu unterscheiden. Eine Aufgabe heißt möglich, wenn es eine Lösung gibt. Dabei kann es aber durchaus sein, dass diese Lösung nicht mit den oben genannten Axiomen ausführbar ist, aber mit speziellen Instrumenten eine Lösung praktisch gelingt. Solche Aufgaben nennen wir *elementar nicht lösbar*. Ein Beispiel ist die Dreiteilung des Winkels mit einem *Einschiebelineal*:

Bereits ARCHIMEDES VON SYRAKUS (geb. um 287 v.u.Z., gest. 212 v.u.Z.) schlug eine Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels vor: Es sei $\sphericalangle CAB = \alpha$ der dreizuteilende Winkel wie in untenstehender Zeichnung. Schlage einen Halbkreis um A mit beliebigem Radius r. Bringe am Lineal zwei Markierungen im Abstand $|\overline{AB}| = r$ an. Lege das Lineal so an C, dass eine der beiden Markierungen auf der Geraden AB im Punkt D und die andere auf der Kreislinie liegt, und zeichne die Gerade CD. Der Winkel $\sphericalangle CDA$ ist der gesuchte Drittelwinkel.

[10] Nach: Hameister, E. Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1970.

[11] Ein Axiom ist ein Grundsatz, der weder begründet noch deduktiv abgeleitet, sondern als Grundlage gesetzt wird.



Wir bemerken: Eine Markierung am Lineal und ein geschicktes Anlegen des Lineals entsprechen keinen klassischen Konstruktionsmethoden. Es wurde also statt des klassischen Zirkels und Lineals ein abweichendes Instrument verwendet. Somit ist diese Konstruktionslösung kein Widerspruch zur Unlösbarkeit des klassischen Konstruktionsproblems.

Doch betrachten wir nun wieder die klassische Fragestellung. Für eine Konstruktionsbeschreibung ist es streng genommen erforderlich, jeden (Konstruktions-) Schritt durch eines oder mehrere dieser Axiome zu begründen. Die *Halbierung eines Winkels* mit Zirkel und Lineal könnte ausführlich so beschrieben werden: Gegeben sei ein Winkel durch die zwei Halbgeraden (Schenkel des Winkels) mit dem gemeinsamen Anfangspunkt *S* (Scheitelpunkt).

- Im Scheitel *S* des gegebenen Winkels wird der Zirkel eingesetzt und mit einer beliebigen Öffnung ein Kreisbogen gezeichnet (Axiom 3),
- der jeden Schenkel in einem Punkt *A* bzw. *B* schneidet (Axiom 4).
- Dann wird um jeden der Punkte *A* und *B* mit einem festen, ausreichend großen, aber beliebig gewählten Radius ein Kreis geschlagen (Axiom 3).
- Beide Kreise schneiden sich in einem von *S* verschiedenen Punkt *T* (Axiom 5).
- Abschließend wird durch *S* und *T* eine Gerade gezeichnet (Axiom 1).

Die Gerade *ST* ist die gesuchte *Winkelhalbierende*.

Nun ist es natürlich zur Verkürzung von Konstruktionsbeschreibungen zulässig, häufig wiederkehrende Konstruktionen als bekannt vorauszusetzen. Dazu gehören beispielsweise:

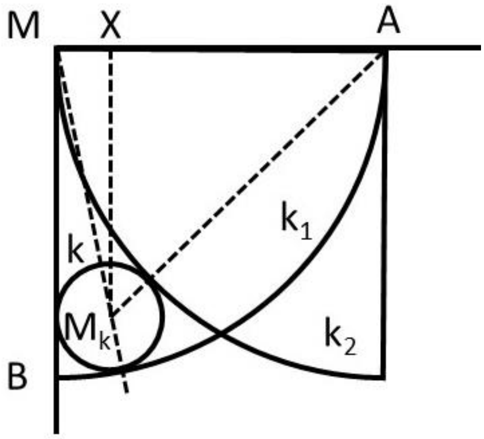
- Halbierung eines Winkels $\sphericalangle BSA$,
- Errichten der Mittelsenkrechten auf einer Strecke $\overline{AB}$,
- Fällen des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g,
- Konstruktion einer Parallelen zu einer Geraden g durch einen Punkt P.

Von der platonischen Schule (PLATON, um 428 bis 348 v.u.Z.), an deren Eingangstür die Worte „μηδειζ αγεωμετρητοζ εισιτω“ [12] prangten, wurde die Methodik der

[12] „Keiner soll ohne Kenntnisse der Geometrie hereinkommen“

Durchführung von Konstruktionsaufgaben streng vorgegeben. Jede, auch die einfachste Aufgabe sollte mit einer **Analyse** beginnen. Dazu wird die vorgelegte Aufgabe an einer angenommenen Figur unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bestimmungsstücke so aufgelöst, dass die Konstruktionsschritte ersichtlich werden. Eine Skizze, in der alle benötigten Punkte eingetragen sind, ist eine hervorragende Grundlage für die Analyse. Hier schließt sich die eigentliche **Beschreibung** der Konstruktionsschritte an. Ist die Konstruktionsaufgabe gelöst, muss anschließend der **Beweis** geführt werden, dass die gefundene Figur tatsächlich die geforderte ist. Oft genügt es, hierbei auf die Analyse zu verweisen. Wenn aber gewisse Hilfskonstruktionen notwendig sind, wird dies als Nachweis nicht ausreichen und ein gesonderter Beweis ist erforderlich. Abschließend ist stets die Diskussion zu führen, ob die Konstruktion bei jeder konkreten Wertvorgabe der gegebenen Bestimmungsstücke ausführbar ist (**Existenz**) bzw. welche Beschränkungen zu beachten sind (**Nebenbedingungen**). So kann zwar die Konstruktion eines Dreiecks aus den gegebenen Seitenlängen beschrieben werden, die Konstruktion ist aber nur ausführbar, wenn diese Seitenlängen die Dreiecksungleichungen erfüllen. Schließlich ist auch die **Eindeutigkeit** zu untersuchen, also ob die Konstruktion eindeutig ausführbar ist. Ergeben sich beispielsweise in einem Schritt zwei (oder mehr) Schnittpunkte und es ist zur Fortsetzung der Konstruktion einer davon auszuwählen, ist darzulegen, welche Konsequenzen sich aus der Auswahl für die Figur ergeben. Diese Elemente der Konstruktionsbeschreibung finden wir auch in Wettbewerbsaufgaben wieder.

Aufgabe MO411032. Es sei ABM ein Viertelkreisbogen eines Kreises k_1 mit dem gegebenen Radius r und Mittelpunkt M. Ein zweiter Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt A und dem Radius r teilt die Viertelkreisfläche in zwei Teilflächen. In die kleinere Teilfläche soll ein dritter Kreis k einbeschrieben werden, d.h. er soll die Gerade durch M und B, den Kreis k_1 von innen und den Kreis k_2 von außen berühren.



a) Wie groß ist der Radius des Kreises k?
b) Konstruieren Sie den Kreis k nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Lösungshinweise: Die Teilaufgabe a) ist die Aufforderung zur Analyse, denn wenn wir den Radius r_k des Kreises k ermitteln können, finden wir wesentliche Aussagen zur Lage des Kreises, auf denen dann die Konstruktionsbeschreibung beruht. Die Herleitung dieses Radius dient gleichzeitig dem Beweis, dass der gefundene Kreis der gesuchte ist.

Für die *Analyse* nehmen wir an, wir haben den Mittelpunkt M_k des Kreises k gefunden. Wir fällen das Lot von M_k auf $\overline{MA}$ (mit dem Fußpunkt X). Wir verbinden M_k mit A und M_k mit M. Nun wissen wir im rechtwinkligen Dreieck AXM_k mit der Hypotenuse $\overline{AM_k}$ mittels Satz des PYTHAGORAS:

$$|\overline{M_kX}|^2 = (r + r_k)^2 - (r - r_k)^2$$

Außerdem gilt im rechtwinkligen Dreieck MM_kX mit der Hypotenuse $\overline{MM_k}$ mittels Satz des PYTHAGORAS:

$$|\overline{M_kX}|^2 = (r - r_k)^2 - r_k^2$$

Aufgrund der Drittengleichheit erhalten wir nach Ausmultiplizieren und Zusammenfassen (wegen $r > 0$)

$$6rr_k = r^2 \quad \Rightarrow \quad r_k = \frac{r}{6}.$$

Nun können wir die *Konstruktionsbeschreibung* angeben. Dabei ist darauf zu achten, dass auch der sechste Teil des Radius r konstruiert werden muss (Teilung einer Strecke in sechs Teile mithilfe des Strahlensatzes) und nicht numerisch aus dem Radius r berechnet werden darf. Mit der Zirkelspanne der Weite r_k konstruieren wir von M aus den Punkt X, errichten die Senkrechte auf $\overline{MA}$ in X. Nun schlagen wir um M einen Kreisbogen mit dem Radius $r - r_k$. Den Schnittpunkt mit der Senkrechten bezeichnen wir mit M_r. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius r, der *Beweis* ist in der Analyse enthalten.

Wie die Herleitung zeigte, gibt es für jeden Radius r einen Radius r_k. Damit ist die *Existenz* eines Kreises gesichert. Dies wurde laut einem Korrekturhinweis in der Musterlösung auch aufgrund der Anschaulichkeit auch ohne Beweis akzeptiert. Sowohl die Länge des Radius r_k als auch jeder Konstruktionsschritt war eindeutig. Somit gibt es genau eine Lösung (*Eindeutigkeit*). ❑

Im Weiteren werden die Bestimmungsstücke für die zu konstruierende Figur (soweit Missverständnisse nicht zu erwarten sind) entsprechend der üblichen Bezeichnungsweisen benannt. Es sollten aber prinzipiell Skizzen oder Zeichnungen dargestellt und alle benannten Punkte, Strecken und Figuren eingetragen werden. So können Missverständnisse aus der textlichen Beschreibung vermieden werden. Eine sorgfältig gezeichnete Skizze kann zudem wesentlich zur Lösungsfindung beitragen!

Besteht die Aufgabenstellung darin, aus drei gegebenen Seitenlängen ein Dreieck zu konstruieren, so wird auch ohne detaillierte Analyse eine geeignete Konstruktionsbeschreibung möglich sein. Für den Existenznachweis genügt der Hinweis auf die Dreiecksungleichungen: Es existieren nur dann Lösungen, wenn die Summen aus je zwei Seitenlängen größer als die jeweilige dritte Seitenlänge sind. (*Hinweis:* Bei solch einer allgemeinen Aufgabenstellung ist es nicht gerechtfertigt, die

Seitenlängen mit a, b und c zu benennen und damit die vordefinierten Lagebeziehung entsprechend der üblichen Bezeichnungen anzunehmen.) Die Eindeutigkeit ist leicht zu erklären (zwei spiegelbildliche, kongruente Lösungen).

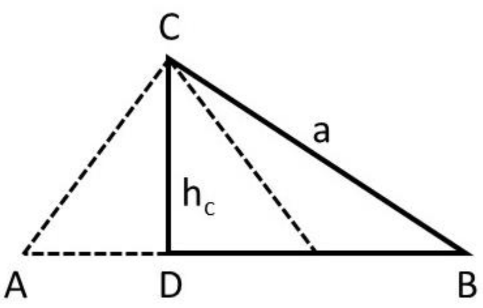
Auch die Aufgabe, ein Dreieck aus den Seitenlängen a und c und dem Winkel $\alpha = 30°$ zu konstruieren, erscheint einfach. Jedoch sind die Diskussionen zur Eindeutigkeit (es können zwei verschiedene, nicht kongruente Dreiecke konstruiert werden) und zur Existenz (es muss $a \geq \frac{c}{2}$ gelten) sorgfältig zu führen.

Betrachten wir die Seitenlängen (a, b, c) Winkelgrößen (α, β, γ) sowie die Längen der Höhen (h_a, h_b, h_c), Seiten- (s_a, s_b, s_c), und Winkelhalbierenden (w_a, w_b, w_c) als mögliche Bestimmungsstücke für Dreieckskonstruktionen, so lassen sich insgesamt $\binom{15}{3} = 455$ Aufgaben formulieren. Sollen Aufgaben, die durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen ineinander überführt werden können, als unwesentlich verschieden angesehen werden, verbleiben insgesamt 95 wesentlich verschiedene Konstruktionsaufgaben. Von diesen sind die Vorgaben (α, β, γ) und (a, β, h_c) unterbestimmt, d.h., bereits zwei der gegebenen Größen bestimmen die dritte Angabe eindeutig und somit lassen sich die Dreiecke nicht eindeutig konstruieren (es fehlt eine dritte unabhängige Bestimmungsgröße, um das Dreieck zu konkretisieren). Während 63 Aufgaben allein mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, sind die restlichen 30 Aufgaben im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal lösbar.

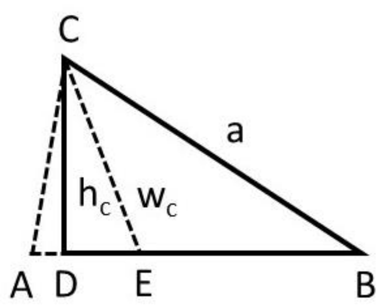
Im Folgenden seien Lösungsansätze für einige (unkomplizierte) Konstruktionsaufgaben für Dreiecke diskutiert. Zur Übung sollten die Konstruktionen ausgeführt und dabei die Analyse, die Konstruktionsbeschreibung, der Beweis sowie die Diskussion zur Existenz und Eindeutigkeit angegeben werden.

Befinden sich Höhenangaben unter den Bestimmungsstücken, lassen sich häufig zunächst rechtwinklige Hilfsdreiecke aus der Höhe und einer weiteren gegebenen Größe konstruieren, hier die rechtwinkligen Dreiecke DBC jeweils aus der Seitenlänge a und der Höhe h_c.

Aufgabe K1. (a, b, h_c)



Aufgabe K2. (a, h_c, w_c).



In beiden Aufgabenstellungen ist für $a > h_c$ die Konstruktion des Hilfsdreiecks BCD stets (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Wir zeichnen dafür den THALESkreis über der Seite $\overline{BC}$ und schlagen um C einen Kreis mit dem Radius h_c. Der (eindeutige) Schnittpunkt beider Kreise ist der Punkt D.

Nun können wir für $b \geq h_c$ bzw. $w_c \geq h_c$ die Konstruktion fortsetzen, indem wir die Strecke $\overline{DB}$ verlängern und die Punkte A bzw. E als Schnittpunkte der Geraden durch D und B mit einem Kreis um C mit den Radien b bzw. w_c finden. Gilt in der Voraussetzung die Gleichheit, fällt der Punkt A bzw. E mit D zusammen, andernfalls ist die Konstruktion nicht eindeutig, es existieren zwei verschiedene Lösungen mit einem Schnittpunkt rechts von D bzw. links von D.

Hinweis zu Aufgabe K1: Für $b \geq a$ ist jedoch nur die linksseitige Lösung gültig, da sonst A rechts von B läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht. Wird dagegen die Aufgabenstellung ohne Verwendung der allgemeinen Bezeichnungen formuliert („es ist ein Dreieck aus den Längen zweier Seiten und der Länge der Höhe auf der dritten Seite zu konstruieren“) gilt diese Einschränkung natürlich nicht.

Hinweis zu Aufgabe K2: Für $w_c \geq a$ ist jedoch nur die linksseitige Lösung gültig, da sonst A rechts von B läge und damit der üblichen Bezeichnungsweise widerspricht. Wird dagegen die Aufgabenstellung ohne Verwendung der allgemeinen Bezeichnungen formuliert („es ist ein Dreieck aus der Länge einer Seite und den Längen der Höhe und der Winkelhalbierenden, die von einem Endpunkt dieser Seite ausgehen, zu konstruieren“) gilt diese Einschränkung natürlich nicht. Zusätzlich ist jedoch darauf zu achten, dass bei der Fertigstellung der Konstruktion „Verdopplung des Winkels zwischen a und w_c“ der Winkel bei C kleiner als 180° bleibt bzw. der Schnittpunkt von b und c rechts von B entsteht.

(wird fortgesetzt)

In alten Mathe-Büchern geblättert

ARCHIV
der MATHEMATIK und PHYSIK[13]

mit besonderer Rücksicht
auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Sechsundfunfzigster Teil.

Leipzig.
C. A. Verlagsbuchhandlung, J. Sengbusch.
1874.

[13] s. http://books.google.com. Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten

XVII.
Die rationalen Dreiecke.

Vollständig entwickelt und mit Ausscheidungen aller Wiederholungen
3 systematische Tafeln gebracht
von
Heinrich Rath.

Mathematiklehrer am Realgymnasium in Kaaden.

Vorwort.

Mit der vorliegenden Schrift hatte ich mir die Aufgabe gestellt, ein historisch merkwürdiges und ziemlich umfassendes Problem der rationalen Analysis gründlich und bis in seine Einzelheiten hinaus zu lösen. So weit auch die rationale Analysis im Allgemeinen entwickelt ist; eine vollständig durchgeführte Specialarbeit besitzen wir noch nicht. Und damit fehlt dieser mathematischen Disziplin die eigentliche Anwendung. Denn es kann nicht genügen, die verschiedenen Probleme nur mit einigen Zügen rational zu machen; es müssen auch einzelne Aufgaben durchgearbeitet werden. Und gerade hier zeigen sich erst die zahlreichen und eigenthümlichen Schwierigkeiten der rationalen Analysis, die manchmal selbst des sorgfältigsten Scharfsinns spotten. Das mag denn auch die Ursache sein, warum bisher die Detailarbeiten hinter den grossen Bahnbrecher in dieser Wissenschaft so kümmerlich zurückgeblieben sind.
…

Allgemeine Eigenschaften der rationalen Primdreiecke.

Sind die drei Seiten eines Dreiecks commensurabel, und man misst sie durch die grösste gemeinsame Längeneinheit, so werden die Seitenmasszahlen im Allgemeinen relative Primzahlen, während sie einen gemeinschaftlichen Factor erhalten, oder Brüche werden, wenn man mit einem aliquoten Teil, oder mit einem Vielfachen jener Längeneinheit misst. Solche Dreiecke mit ganzen, relative primären Seitenzahlen kann man Primdreiecke nennen. Jedes seitencommensurable Dreieck lässt sich als ein Primdreieck ausdrücken, wenn man der Messung die grösste Masseinheit zu Grunde legt. Tritt zu den relativ primären Seitenmassen noch eine Inhaltszahl, so hat man ein rationales Primdreieck.

Ein Dreiecke mit drei ganzen, relativ primären Seitenzahlen und einer rationalen Inhaltszahl heisst ein rationales Primdreieck. Ist dasselbe rechtwinklig, so heisst es ein pythagorisches Primdreieck.

Alle ähnlichen rationalen Dreiecke lassen sich numerisch als ein und dasselbe Primdreieck darstellen, indem man jedes mit seiner grössten

Längeneinheit misst; und von jedem rationalen Primdreieck lassen sich alle möglichen, ihm ähnliche rationale Dreiecke ableiten, indem man die Seiten mit einer Zahl und die Fläche mit dem Quadrate dieser Zahl multipilcirt und dividirt. … Mithin repräsentiert die vollständige Gruppe der rationalen Primdreiecke alle möglichen rationalen Dreiecke, weshalb sich die vorliegende Aufgabe auf Herstellung aller rationalen Primdreiecke reducirt.

Sind a, b, c die Seitenmasse und α, β, γ die Masszahlen der durch den inneren Berührungskreis bewirkten „Seitenteile“, so folgt:

$$\frac{a+b+c}{2} = \alpha+\beta+\gamma \,;\; \frac{-a+b+c}{2} = \alpha \,;\; \frac{a-b+c}{2} = \beta \,;\; \frac{a+b-c}{2} = \gamma$$

$$i = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}$$

$$i = \sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)\alpha\beta\gamma}$$

Welche drei Zahlen man auch für α, β, γ setzt, immer wird die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite. …

Setzt man $a = b = c$, so wird die Inhaltszahl irrational:

$$i = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \alpha^2\sqrt{3}$$

Kein rationales Dreieck ist gleichseitig. Mithin kann es nur gleichschenklige und ungleichseitige rationale Dreiecke geben.

Setzt man für a, b, c drei ungerade Zahlen, oder nur Eine, so wird die Umfangszahl u und jeder der vier Zähler in

$$\frac{a+b+c}{2} \,;\; \frac{-a+b+c}{2} \,;\; \frac{a-b+c}{2} \,;\; \frac{a+b-c}{2}$$

eine ungerade Zahl, was gibt

$$\alpha = \frac{2x+1}{2} \,;\; \beta = \frac{2y+1}{2} \,;\; \gamma = \frac{2z+1}{2}$$

$$\begin{aligned} 16i^2 &= [2(x+y+z)+3](2x+1)(2y+1)(2z+1) = [2s+3](4A+2s+1) \\ &= (2s+3)4A + 4s^2 + 6s + 2s + 3 = 4B+3 = 4N-1 \\ 4i &= \sqrt{4N-1} \end{aligned}$$

Erhebt man aber eine gerade und eine ungerade Zahl aufs Quadrat, so folgt

$$(2m)^2 = 4m^2$$
$$(2n+1)^2 = 4(n^2+n)+1 = 4p+1$$

d.h. nur eine 4fache Zahl, sowie eine solche ungerade Zahl, welche um 1 grösser als eine 4fache Zahl ist, kann eine Quadratzahl sein. Deshalb muss

$$\sqrt{4N-1}$$

eine irrationale Zahl sein.

Will man dieses auch umgekehrt beweisen, in der Voraussetzung, dass die ungerade Zahl $4N-1$ doch eine Quadratzahl von der Form $4p+1$ enthalten möchte, so folgt

$$4N-1=4p+1, 4N=4p+2, 2N=2p+1$$

ein Widerspruch, da die gerade Zahl $2N$ einer ungeraden Zahl nicht gleicht.

Daraus folgt nun zunächst der zahlentheoretische Satz:

Multipliziert man die Summe dreier ungerader Zahlen mit dem Producte dieser drei Zahlen, so ist die zweite Wurzel aus dem Product irrational.

Und weiter folgt daraus, dass Dreiecke mit drei ungeraden Seitenzahlen, oder nur mit Einer ungeraden Seitenzahl irrational sind, dass mithin die rationalen Dreiecke nur Ein gerades Seitenmass, oder 3 gerade Seitenmasse haben müssen, so dass für die rationalen Primdreiecke nur Ein gerades Seitenmass möglich ist. daraus ergeben sich eine gerade Umfangs- und Flächenzahl, sowie ganze Seitenteilzahlen.

Jedes rationale Primdreieck hat nur Eine gerade Seitenzahl, gerade Umfangs- und Flächenzahlen, sowie ganze Seitenteilzahlen.

Anm. Es gibt also kein rationales Dreieck mit ganzen Seitenzahlen, das nicht auch eine ganze, und zwar eine gerade Inhaltszahl hat.

Monatsaufgabe 09/22 – Lösungsdiskussion

Aufgabe. Es seien m und n natürliche Zahlen. Beweisen Sie, dass die Quersumme der Summe $m+n$ kleiner-gleich der Summe der Quersummen beider Zahlen ist, also dass gilt $Q(m+n) \leq Q(m)+Q(n)$.

Lösungshinweise: Wir lösen die Aufgabe, indem wir uns an der schriftlichen Addition orientieren. Wir schreiben m, n und $m+n$ in einer Zifferndarstellung, wobei die führende Ziffer $c_k \neq 0$ sei und die Ziffern für m und n gegebenenfalls mit 0 aufgefüllt werden, um die Stellenzahlen anzugleichen.

$$m=\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}, n=\overline{b_k b_{k-1} \dots b_0}, m+n=\overline{c_k c_{k-1} \dots c_0}$$

Wir argumentieren zunächst anschaulich: Wir zerlegen die Addition in die n-malige Addition der Zahl 1. Entsteht bei Addition einer Zahl z mit 1 kein Übertrag, so gilt

$Q(z+1) = Q(z) + 1$. Ein Übertrag entsteht aber, wenn die Zahl z auf die Ziffer 9 endet. Dann erhöht sich der Wert auf der Zehnerstelle um 1 und die Einerstelle wird 0. Also gilt in diesem Fall $Q(z+1) = Q(z) + 1 - 9$, also $Q(z+1) < Q(z) + Q(1)$. Insgesamt erhalten wir also stets $Q(z+1) \leq Q(z) + Q(1)$. Diese Ungleichung setzt sich bei wiederholter Addition mit 1 fort, so dass wir die Behauptung bewiesen haben.

Nun wollen wir diesen Beweis formalisieren. Dafür schreiben wir die Additionsschritte von rechts beginnend auf, wobei wir mit u_j die Überträge der Addition bezeichnen ($u_j \in \{0; 1\}$ für alle $j = 1, \dots, k-1$):

$$
\begin{array}{lcl}
c_0 + u_0 \cdot 10 = a_0 + b_0 & \Rightarrow & c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0 \\
c_1 + u_1 \cdot 10 = a_1 + b_1 + u_0 & \Rightarrow & c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1 \\
c_2 + u_2 \cdot 10 = a_2 + b_2 + u_1 & \Rightarrow & c_2 = a_2 + b_2 + u_1 - 10 \cdot u_2 \\
\dots & & \\
c_{k-1} + u_{k-1} \cdot 10 = a_{k-1} + b_{k-1} + u_{k-2} & & \\
 & \Rightarrow & c_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1} + u_{k-2} - 10 \cdot u_{k-1}
\end{array}
$$

Falls $a_k + b_k + u_{k-1} < 10$ (also kein Übertrag entsteht), gilt

$$c_k = a_k + b_k + u_{k-1}\,.$$

Andernfalls ergibt sich c_k nur aus dem Übertrag der letzten Addition. Dann sind aber $a_k = b_k = 0$ und es gilt ebenfalls

$$c_k = a_k + b_k + u_{k-1} \qquad \Rightarrow \qquad c_k = a_1 + b_k + u_{k-1}\,.$$

Nun addieren wir diese Gleichungen und erhalten:

$$\sum_{j=0}^{k} c_j = Q(m+n) = \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{j=0}^{k} b_j - 9 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} u_j \leq \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{j=0}^{k} b_j = Q(m) + Q(n)$$

Weil die Überträge nichtnegative Zahlen sind, finden wir die Behauptung bestätigt: $Q(m+n) \leq Q(m) + Q(n)$. ❑

Monatsaufgabe[14] 11/22.

Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl z mit den Eigenschaften

- z ist durch 2 teilbar,
- $Q(z)$ ist durch 3 teilbar und
- $Q(Q(z))$ ist durch 5 teilbar.

Hinweis: Mit $Q(n)$ wird die Quersumme von der ganzen Zahl n bezeichnet.

[14] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.11.2022 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[15]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.02	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[15] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.