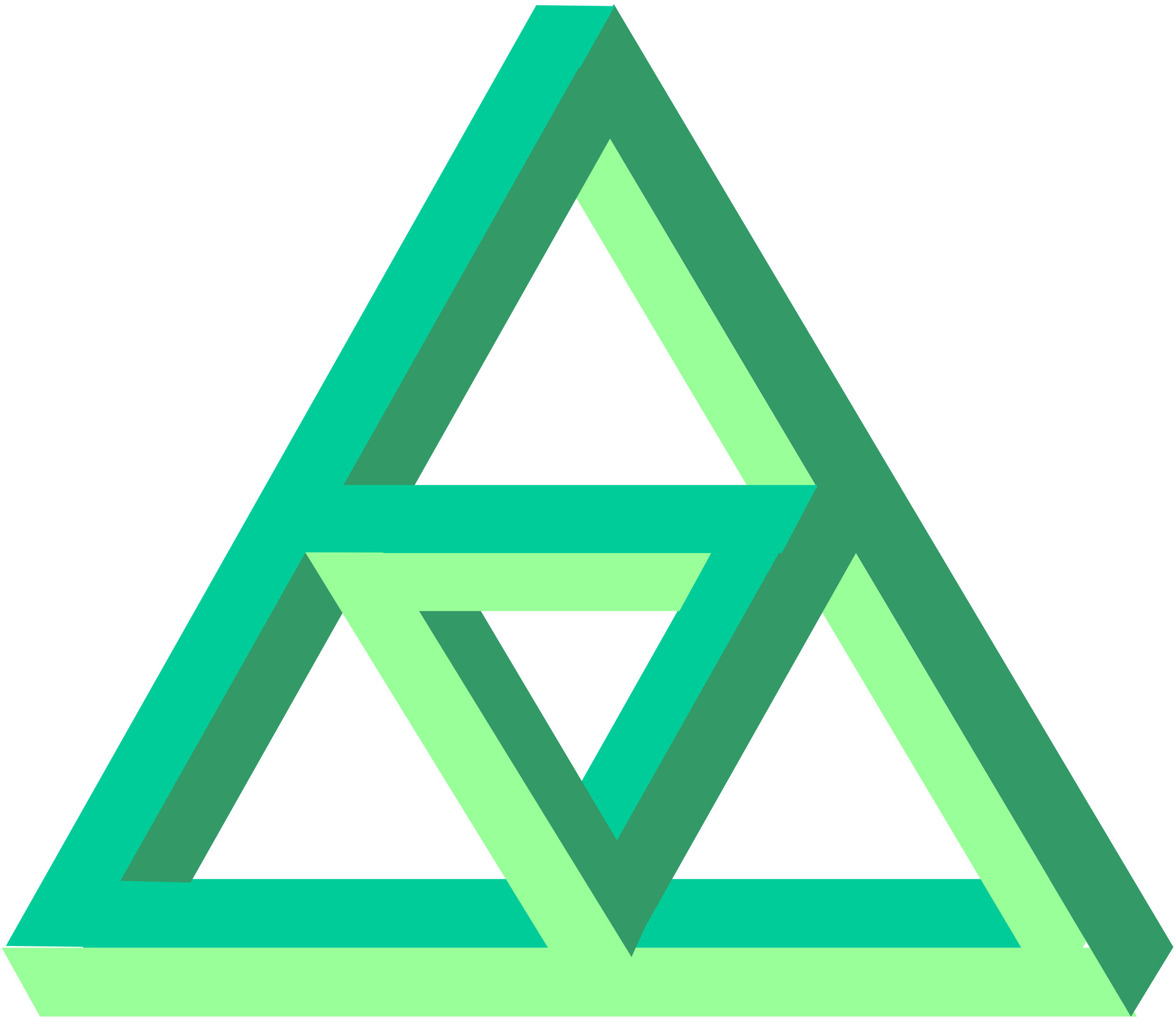
Mathematatische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 12/2022 (Dezember 2022) 21. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO620924** werden Flächenberechnungen diskutiert, wenn die Lage der zu untersuchenden Figuren nicht eindeutig festgelegt ist. Ein Lösungsansatz besteht darin, die Figuren so lange zu vergrößern, bis eine Situation erreicht ist, bei der sich der (nun vergrößerte) Flächeninhalt aus gegebenen Bestimmungsstücken berechnen lässt. Aber auch der Versuch, die allgemeine Lage durch zusätzliche Bestimmungsstücke zu quantifizieren, kann ein erfolgversprechender Lösungsansatz sein

Der Beitrag zu geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal wird fortgesetzt. Zudem beginnen wir einen Beitrag über die Anwendung des Schubfachprinzips. Damit soll die **KZM-Aufgabe 2-5B** vertieft werden.

Ein Auszug aus dem Buch „Anweisung zur Geometrie für Anfänger“ von Dr. J. N. Müller aus dem Jahre 1790 zeigt, wie bereits damals Dreiecks-Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zur mathematischen Ausbildung gehörten.

Mit Hinweisen zum Bundeswettbewerb Mathematik ist die Aufforderung verbunden, an diesem Wettbewerb teilzunehmen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 19 – Maximale Flächeninhalte

Wettbewerbsaufgaben mit Berechnungen von Flächeninhalten beruhen meist auf exakt beschriebenen Figuren. Die erforderliche Ermittlung von geeigneten Bestimmungsstücken, mit denen Flächeninhalte berechnet werden können, kann sich dennoch als schwierig erweisen. Sind die zu betrachtenden Figuren jedoch mit Freiheitsgraden versehen, sind

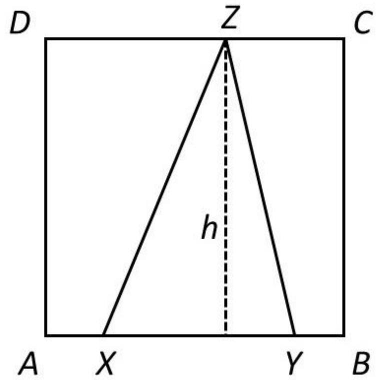
- entweder Hilfsgrößen zur Beschreibung dieser Figuren einzuführen, mit denen dann Flächenberechnungen möglich werden,
- oder Vergrößerungen dieser Figuren zu konstruieren, mit denen Flächenabschätzung geführt werden können.

Aufgabe 19.01 – MO620924. Zeigen Sie: Liegen die Eckpunkte eines Dreiecks XYZ alle auf dem Rand oder im Inneren eines Quadrats $ABCD$, so ist der Flächeninhalt des Quadrats mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösungshinweise: Wir beweisen zunächst einen einfacheren Hilfssatz.

Behauptung: Liegen die drei Eckpunkte eines Dreiecks XYZ alle auf zwei einander gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks $ABCD$, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks mindestens doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks.

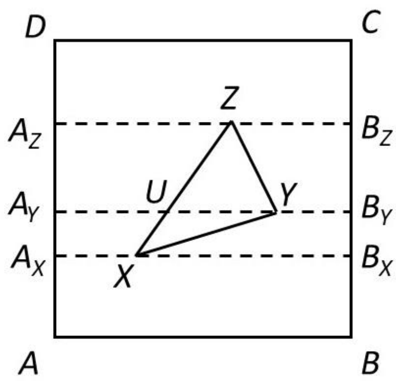
Beweis: Seien die Bezeichnungen der Punkte o.B.d.A.[3] so gewählt, dass X und Y auf der Seite $\overline{AB}$ und Z auf der Seite $\overline{CD}$ liegt. Betrachten wir $\overline{XY}$ als Grundseite des Dreiecks XYZ, dann hat die Höhe die Länge $|\overline{AD}|$ und es ist offensichtlich $|\overline{XY}| \leq |\overline{AB}|$. Folglich gilt für die Flächeninhalte wie behauptet



$$A_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{XY}| \cdot |\overline{AD}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$$

Wir betrachten nun die allgemeine Lage des Dreiecks XYZ. Seien die Eckpunkte des Dreiecks so bezeichnet, dass für die Abstände d_X, d_Y, d_Z der Punkte X, Y, Z von der Geraden AB gilt: $d_X \leq d_Y \leq d_Z$. Wir zeichnen die Parallelen p_X, p_Y, p_Z zur Gerade AB durch die Eckpunkte des Dreiecks XYZ. Die Schnittpunkte der Geraden p_X, p_Y, p_Z mit den Geraden AD bzw. BC bezeichnen wir mit A_X, A_Y, A_Z bzw. mit B_X, B_Y, B_Z.

[3] o.B.d.A. – ohne Beschränkung der Allgemeinheit: Diese Bemerkung kann z.B. stets ohne weitere Erläuterungen verwendet werden, wenn die beschriebene Situation durch eine geeignete Bezeichnung erreicht werden kann.



Das Dreieck XYZ liegt somit vollständig im Rechteck $A_XB_XB_ZA_Z$, welches seinerseits vollständig im Quadrat $ABCD$ liegt (einschließlich der Gleichheit von Rechteck und Quadrat), insbesondere gilt für die Flächeninhalte $A_{A_XB_XB_ZA_Z} \leq A_{ABCD}$. Fallen zwei der drei Parallelen p_X, p_Y, p_Z zusammen, dann folgt die Behauptung direkt aus dem Hilfssatz.

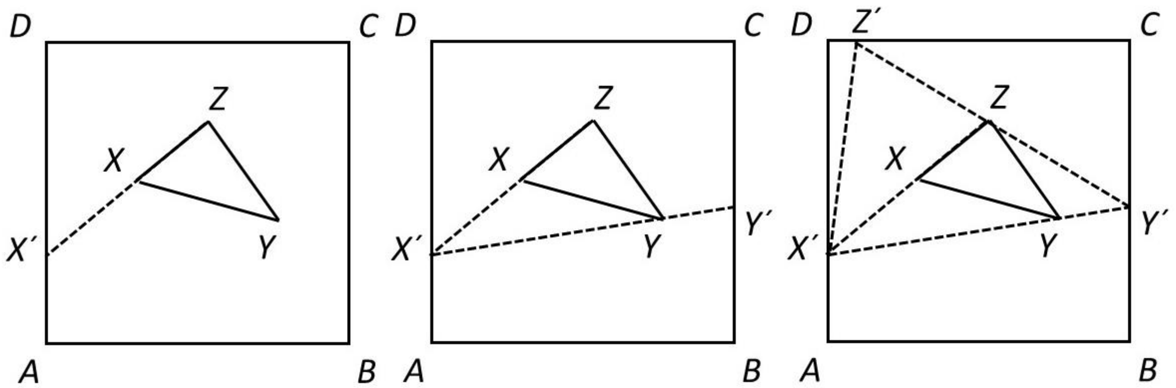
Sind die drei Parallelen p_X, p_Y, p_Z paarweise verschieden (d.h. es gilt $d_X < d_Y < d_Z$), dann schneidet die Gerade p_Y die Seite $\overline{XZ}$ des Dreiecks XYZ im Punkt U und teilt es in genau zwei Teildreiecke XYU und UYZ, wobei das Dreieck XYU ganz im Rechteck $A_XB_XB_YA_Y$ und das Dreieck UYZ ganz im Rechteck $A_YB_YB_ZA_Z$ liegt. Für die beiden Teildreiecke folgt mit dem Hilfssatz

$$A_{XYU} \leq \frac{1}{2} \cdot A_{A_XB_XB_YA_Y} \quad \text{bzw.} \quad A_{UYZ} \leq \frac{1}{2} \cdot A_{A_YB_YB_ZA_Z}$$

Zusammengefasst erhalten wir wegen $A_{XYZ} = A_{XYU} + A_{UYZ}$, dass der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ den halben Flächeninhalt des Rechtecks $A_XB_XB_ZA_Z$, nicht überschreitet, und damit gilt erst recht $A_{XYZ} \leq A_{ABCD}$, also die Behauptung. ❑

Lösungsvariante: Das Dreieck XYZ liege im Quadrat $ABCD$. Liegt der Punkt X auf dem Rand von $ABCD$, so benennen wir ihn aus formalen Gründen um in X‘. Liegt der Punkt X im Innern von $ABCD$, so hat der Strahl von Z über X hinaus einen Schnittpunkt mit dem Rand von $ABCD$, den wir X‘ nennen. Wir betrachten nun das Dreieck $X'YZ$. Es hat einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck XYZ, weil die Höhe auf XZ unverändert blieb und $|\overline{X'Z}| \leq |\overline{XZ}|$ gilt. In Analogie setzen wir dieses Verfahren fort und vergrößern die Dreiecke über Y‘ und Z‘, so dass die Eckpunkte X‘, Y‘ und Z‘ auf dem Rand von $ABCD$ liegen. Für die Flächeninhalte gilt

$$A_{XYZ} \leq A_{X'YZ} \leq A_{X'Y'Z} \leq A_{X'Y'Z'}.$$

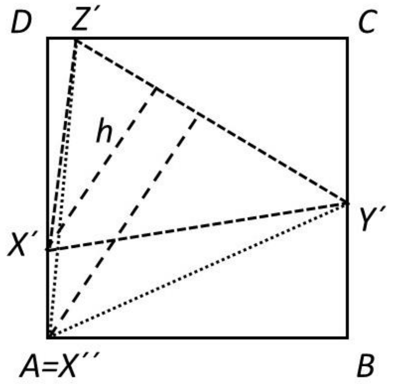


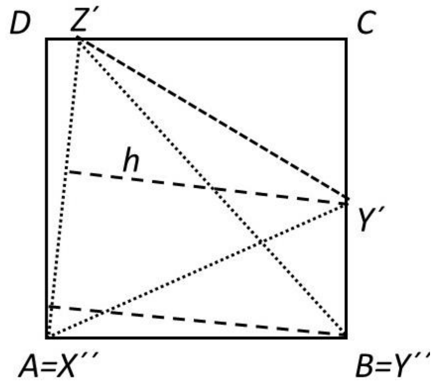
Im Weiteren unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: Zwei der drei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Quadratseite. O.B.d.A. seien dies die Punkte X′ und Y ′, die beide auf der Seite AB liegen. Dann gilt für die

Grundseite $\overline{X'Y'}$ des Dreiecks $\left|\overline{X'Y'}\right| \leq |\overline{AB}|$ und ebenso für die entsprechende Höhe $h_{Z'} \leq |\overline{AB}|$ und damit $A_{X'Y'Z'} \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}|^2 = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD}$, also die Behauptung.

Fall 2: Keine zwei Punkte liegen auf einer gemeinsamen Seite des Quadrates. O.B.d.A. seien die Punkte des Quadrates und des Dreiecks $X'Y'Z'$so benannt, dass X' auf $\overline{AD}$, Y' auf $\overline{BC}$ und Z' auf $\overline{CD}$ liegen. Ist h die Höhe des Dreiecks auf $Y'Z'$, so ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $X'' = A$ erreicht. Dann gilt: $A_{X'Y'Z'} \leq A_{AY'Z'}$. Betrachten wir nun das Dreieck $AY'Z'$. Ist nun h die Höhe dieses Dreiecks auf AZ', so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AY'Z'$ am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $Y'' = B$ erreicht. Dann gilt: $A_{AY'Z'} \leq A_{ABZ'}$.





Das Dreieck ABZ' hat die Grundseite $\overline{AB}$ und die Höhe der Länge $|\overline{AD}|$, also finden wir insgesamt

$$A_{X'Y'Z'} \leq A_{ABZ'} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| = \frac{1}{2} \cdot A_{ABCD} \,.$$

❑

Diese Fragestellung hatte einen sehr ähnlich klingenden Vorläufer.

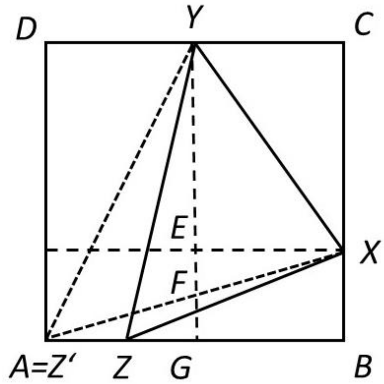
Aufgabe 19.02 – MO401016. Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 4 cm. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, dessen Ecken auf dem Rand dieses Quadrates liegen, einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm² beträgt.

Lösungshinweise: Es sei $ABCD$ das Quadrat und XYZ ein einbeschriebenes Dreieck. O.B.d.A. liegt X auf $\overline{BC}$ und Y auf $\overline{CD}$. Liegt Z ebenfalls auf $\overline{BC}$, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks A_{XYZ}:

$$A_{XYZ} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{XZ}| \cdot |\overline{CY}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{CD}| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

In ähnlicher Weise überzeugen wir uns von der Richtigkeit der Behauptung, wenn Z auf $\overline{CD}$ liegt.

Untersuchen wir nun den Fall, dass Z auf $\overline{AB}$ liegt.



Ist h die Höhe des Dreiecks auf XY, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ am größten, wenn h maximal ist. Dies wird mit $Z' = A$ erreicht. Dann gilt: $A_{XYZ} \leq A_{XYZ'}$. Die zu den Quadratseiten parallelen Geraden durch X und Y schneiden sich in E, die Parallele durch Y schneidet zusätzlich AX in F und AB in G. Dann finden wir für den Flächeninhalt:

$$A_{XYZ'} = A_{XYF} + A_{YZ'F} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{EX}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{AG}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot (|\overline{AG}| + |\overline{EX}|) = \frac{1}{2} \cdot |\overline{FY}| \cdot |\overline{AB}| \leq \frac{1}{2} \cdot |\overline{GY}| \cdot |\overline{AB}| = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

Für den Fall Z auf AD trifft diese Argumentation analog zu. Damit ist insgesamt gezeigt, dass der Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks höchstens 8 cm² beträgt[4]. ❑

Diese Aufgabe diente als Vorbereitung für eine Aufgabe der Bundesrunde, in der ausdrücklich auf die Schulrunde Bezug genommen wurde.

Aufgabe 19.03 – MO400946/401046. Im Inneren eines Quadrates der Seitenlänge 12 cm seien 20 Punkte beliebig, aber so gewählt, dass keine drei auf derselben Geraden liegen. Beweisen Sie, dass es mindestens ein Dreieck gibt, dessen Ecken mit solchen Punkten übereinstimmen und dessen Flächeninhalt höchstens 8 cm² beträgt.

Lösungshinweise: Wir teilen das Quadrat, in dem die 20 Punkte verteilt sind in neun kongruente Quadrate der Seitenlänge 4 cm,

20 Objekte: beliebig gewählte Punkte
9 Schubfächer: Teilquadrate des Ausgangsquadrates

Wenden wir für die Zerlegung $20 = 2 \cdot 9 + 2$ das Schubfachprinzip[5] an, so liegen in mindestens einem dieser Teilquadrate 3 der 20 Punkte.

Wir müssen nun noch beweisen, dass jedes Dreieck in einem solchen Teilquadrat einen Flächeninhalt hat, der höchstens 8 cm² beträgt. Zeigen wir dafür zunächst, dass zu jedem Dreieck innerhalb des Quadrates ein flächenmäßig größeres Dreieck existiert, dessen Eckpunkte auf den Quadratseiten liegt (wie in Aufgabe MO620924), so können wir darauf den Beweis aus Aufgabe MO401016 übertragen. ❑

Sind die abzuschätzenden Figuren Dreiecke, lassen sie sich oft durch geeignete rechtwinklige Dreiecke flächenmäßig vergrößern.

[4] Es ist zulässig, in der Herleitung auf die Angabe der Maßeinheiten zu verzichten. Jedoch sollte der Schlusssatz wieder vollständig sein.
[5] siehe Beitrag über das Schubfachprinzip in diesem Heft.

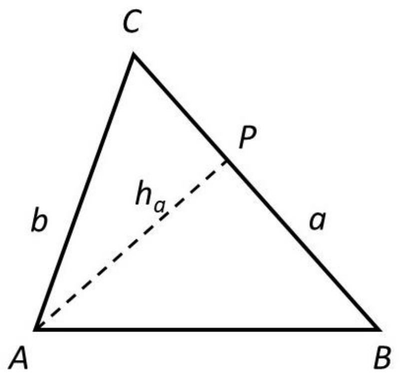
Aufgabe 19.04 – MO560924. Gegeben sind vier Stangen, die an ihren Enden durch Gelenke beweglich miteinander zu einem konvexen Viereck (einem Gelenkviereck) verbunden sind.

a) Bestimmen Sie den größten Flächeninhalt, den ein solches Gelenkviereck haben kann, wenn zwei seiner Stangen die Länge 6 und die beiden anderen die Länge 8 haben.
b) Beweisen Sie, dass im allgemeinen Fall der Flächeninhalt F des Vierecks die Ungleichung $F \leq \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}$ erfüllt. Hierbei bezeichnen a, b, c und d die Längen der Stangen (in dieser Reihenfolge).

Hinweis: Ein Viereck heißt konvex, wenn beide Diagonalen innerhalb des Vierecks liegen.

Lösungshinweise: Wir zeigen zunächst, dass für die Längen a und b die Längen zweier Seiten eines Dreiecks seinen Flächeninhalt stets $F \leq \frac{a \cdot b}{2}$ gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn diese Seiten senkrecht aufeinander stehen.

Beweis: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit den Seitenlängen $a = |\overline{BC}|$ und $b = |\overline{AC}|$ ergibt sich als Produkt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, wobei h_a die Länge der Höhe $\overline{AP}$ auf der Geraden BC ist und P den Höhenfußpunkt bezeichnet. Da a vorgegeben ist, hängt der Flächeninhalt nur von h_a ab. Steht die Seite $\overline{AC}$ senkrecht auf der Seite $\overline{BC}$, dann gilt $h_a = b$. Steht die Seite $\overline{AC}$ nicht senkrecht auf $\overline{BC}$, dann ist das Dreieck APC rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{AC}$ und es gilt $h_a < b$. Damit ist die Behauptung bewiesen.



Lösungshinweise zu Teil a) Für die Stangen im Viereck gibt es zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten: ihre Längen sind der Reihe nach gleich 6, 8, 6, 8 oder gleich 6, 6, 8, 8. Im ersten Fall erhalten wir ein Parallelogramm und im zweiten ein Drachenviereck.

Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ergibt sich aus der Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke wird maximal, wenn sie rechtwinklige Dreiecke sind. Damit ist der Flächeninhalt des Parallelogramms maximal, wenn es ein Rechteck ist. Der maximale Flächeninhalt beträgt daher $6 \cdot 8 = 48$.

Der Flächeninhalt des Drachenvierecks ist dann am größten, wenn zwei aneinanderstoßende Seiten mit den Längen 6 und 8 einen rechten Winkel einschließen. Dann zerlegt die Symmetrieachse das Drachenviereck in zwei Dreiecke, die beide rechtwinklig sind. Auch hier beträgt der maximale Flächeninhalt daher wieder $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 48$.

Lösungshinweise zu Teil b) Das Viereck wird durch eine Diagonale der Länge l in zwei Teildreiecke mit den Seitenlängen a, b, l bzw. c, d, l zerlegt. Der Flächeninhalt des Vierecks ist gleich der Summe der Inhalte dieser beiden Teildreiecke. Nach der einleitenden Bemerkung ist der Flächeninhalt jedes der beiden Teildreiecke höchstens gleich $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ bzw. $\frac{1}{2} \cdot c \cdot d$. Somit ergibt sich für den Flächeninhalt F des Vierecks

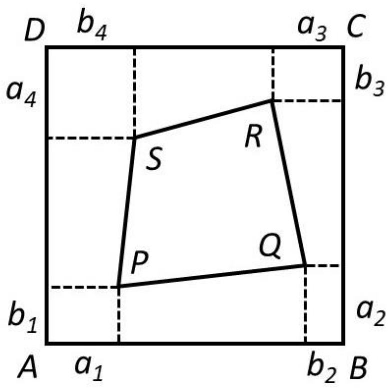
$$F \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2}.$$

❑

In folgender Aufgabe wird demonstriert, wie aufgrund der Nebenbedingungen die Figur über Hilfsstrecken charakterisiert werden kann.

Aufgabe 19.05 – MO571046. Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit Seitenlänge 3. In seinem Inneren liegt ein Viereck $PQRS$ mit $|\overline{AP}| = |\overline{BQ}| = |\overline{CR}| = |\overline{DS}| = 1$.

<Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ kleiner als 5 ist.



Lösungshinweise: Die Abstände der Punkte P, Q, R und S zu den jeweils nächstliegenden Quadratseiten seien wie in der Skizze mit $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4$ bezeichnet. Das Viereck $ABQP$ setzt sich aus zwei Dreiecken und einem Trapez zusammen, und die Anwendung bekannter Formeln ergibt unter Ausnutzung von $0 < a_1, a_2, b_1, b_2 < 1$:

$$A_{ABQP} = \frac{1}{2} \cdot (a_1 \cdot b_1 + (b_1 + a_2) \cdot (3 - a_1 - b_2) + a_2 \cdot b_2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot (b_1 + a_2) - a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2)$$
$$> \frac{1}{2}(3 \cdot (b_1 + a_2) - a_2 - b_1) = b_1 + a_2 > b_1^2 + a_2^2$$

Durch Addition entsprechender Ungleichungen für die übrigen Quadratseiten ergibt sich

$$A_{ABCD} - A_{PQRS} = A_{ABQP} + A_{BCRQ} + A_{CDSR} + A_{DAPS}$$
$$> a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2 + a_4^2 + b_4^2$$

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt im Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AP}$ die Gleichung $a_1^2 + b_1^2 = |\overline{AP}|^2 = 1$ und entsprechend

$$a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = a_4^2 + b_4^2 = 1$$

womit sich die Ungleichung $A_{ABCD} - A_{PQRS} > 4$ ergibt. Wegen $A_{ABCD} = 9$, folgt die Behauptung der Aufgabenstellung. ❑

Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil II)

In den 1980-er Jahren wurde eine Reihe von Konstruktionsaufgaben in der Mathematik-Olympiade begonnen, in der alle Aspekte dieses Aufgabentyps berücksichtigt wurden.

Aufgabe – MO261035. Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm und $s = 16.8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:

(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlängen $c = |\overline{AB}|$ und $a = |\overline{BC}|$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe γ.

I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Zahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenannten Fall diese Zahl!

Aufgabe – MO301036. Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite $\overline{AB}$ ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 60° hat.

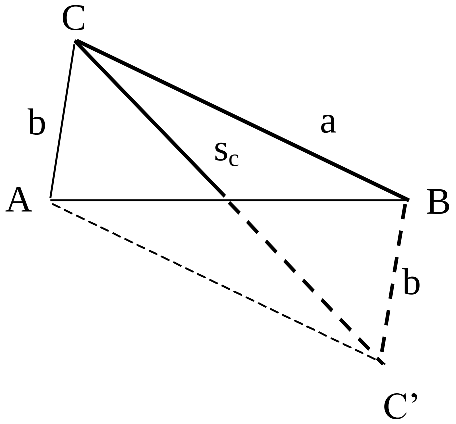
(a) Beweisen Sie, Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden;
(b) beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
(d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

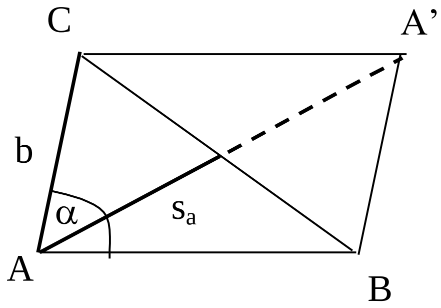
Die vier Schritte Analyse – Konstruktion – Beweis – Eindeutigkeit wurden also explizit als Aufgaben formuliert (der Nachweis der Existenz beschränkt sich hier auf die vorgegebenen Werte der Bestimmungsstücke). Bevor wir dazu Lösungshinweise diskutieren, beschränken wir uns weiter auf Bestimmungsstücke mit Seitenlängen, Winkelgrößen sowie Längen von Ecktransversalen[6] Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und Höhen.

Sind Längen von Seitenhalbierenden gegeben, so führen oft die Verdopplung dieser Größen zu nützlichen Hilfsfiguren (Parallelogramme mit der doppelten Seitenhalbierenden als eine Diagonale), zum Beispiel bei

Aufgabe K3. (a, b, s_c)



Aufgabe K4. (b, s_a, α)



Wir erkennen mittels Analyse, dass in den durch Verlängerung der Seitenhalbierenden entstehenden Parallelogrammen die Dreiecke $CC'B$ bzw. $AA'C$ leicht konstruierbar sind. In Aufgabe K3 konstruieren wir das Hilfsdreieck aus den drei Seitenlängen a, b und $2 \cdot s_c$. Ergänzen wir dieses Dreieck zu einem Parallelogramm, finden wir den Punkt A. In Aufgabe K4 zeichnen wir zunächst eine Gerade g, auf der wir den Punkt A beliebig festlegen. Dann konstruieren wir in A den Winkel α und tragen auf dem Schenkel die Länge b ab und finden so den Punkt C. Konstruieren wir nun die Parallele zu g durch C und schlagen einen Kreisbogen um A mit dem Radius $2 \cdot s_a$. Dessen Schnittpunkt mit der Parallelen bezeichnen wir mit A'. Die Parallele zu AC durch A' schneidet g in B.

Für die Existenz müssen in Aufgabe K3 die Dreiecksungleichungen für die Seitenlängen $(a,\ b,\ 2 \cdot s_c)$ erfüllen. In Aufgabe K4 muss das Doppelte der Seitenhalbierenden mindestens so groß sein wie die Höhe auf AB im Dreieck ABA', d.h. es muss die Ungleichung $2 \cdot s_a \geq b \cdot \sin \alpha$ erfüllt sein.

Die Konstruktion ist in Aufgabe K3 eindeutig, weil die Lagebeziehung von a und b durch die Bezeichnung bereits vorgegeben ist. Mit gleicher Argumentation ist auch in

[6] Eine Ecktransversale (auch Cevane genannt) ist eine Gerade oder Strecke, die einen Eckpunkt eines Dreiecks mit der gegenüberliegenden Seite oder ihrer Verlängerung verbindet.

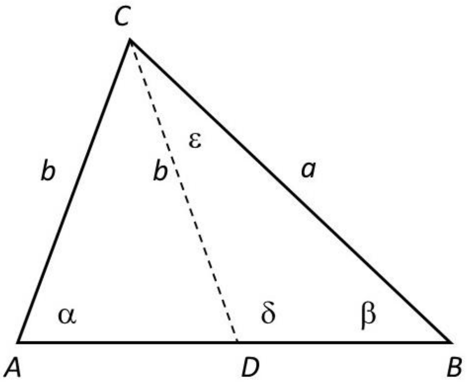
der Aufgabe K4 die Konstruktion für $\alpha \leq 90°$ eindeutig. Im Fall $\alpha > 90°$ ist die Konstruktion für $2 \cdot s_a > b$ eindeutig, andernfalls existieren zwei Lösungen, da der Kreisbogen um A mit der Parallelen zwei verschiedene Schnittpunkte rechts von B hat.

Allerdings ist für beide Aufgaben ein Beweis (oder ein geeigneter Hinweis in der Analyse) erforderlich: Wir müssen erläutern, dass die Hilfskonstruktionen der Punkte C' und A' tatsächlich zu Parallelogrammen führen und nicht nur anschaulich richtig sind. Dafür genügt die Anwendung des aus dem Unterricht bekannten Satzes:

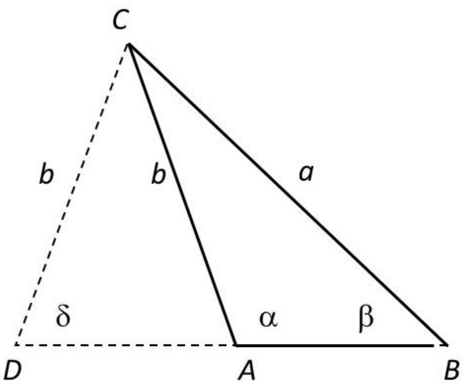
In einem Viereck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig genau dann, wenn das Viereck ein Parallelogramm ist.

Einen besonderen Reiz in der Wettbewerbsmathematik bieten Konstruktionsaufgaben mit Summen und Differenzen in den Bestimmungsstücken. Wir dürfen dabei annehmen, dass die Differenzen stets nichtnegativ sind, auch wenn negative Winkelangaben beim Abtragen gegen den Uhrzeigersinn definiert sind. Dagegen sind negative Streckenlängen nicht anwendbar, da mit Strecken keine Richtungsangaben festgelegt sind.

Aufgabe K5. Man konstruiere ein Dreieck aus den Bestimmungsstücken a, b und der Differenz $\alpha - \beta$.



Lösungshinweise: Für die Analyse sei ABC das geforderte Dreieck (s. Skizze). Wegen $\alpha > \beta$ gilt auch $a > b$ (dem größeren Winkel liegt die größere Seite gegenüber). Wie nehmen zunächst $\alpha \leq 90°$ an. In diesem Fall liegt der Punkt D mit $|\overline{CD}| = b$ zwischen A und B. Im gleichschenkligen Dreieck ADC gilt $\sphericalangle CDA = \alpha$ und somit $\delta = 180° - \alpha$ (Nebenwinkel).



Im Fall $\alpha > 90°$ liegt der Punkt D mit $|\overline{CD}| = b$ links von A. Im gleichschenkligen Dreieck ADC gilt $\sphericalangle CAD = 180° - \alpha$ (Nebenwinkel) und somit $\delta = 180° - \alpha$ (Basiswinkel).

In beiden Fällen erhalten wir im Dreieck BCD die Innenwinkelsumme

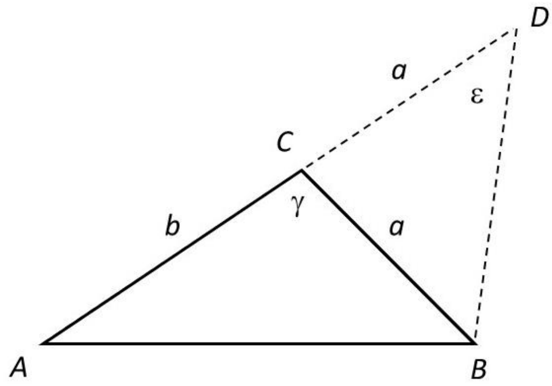
$$180° = \delta + \beta + \varepsilon = 180° - a + \beta + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \alpha - \beta$$

Damit kennen wir vom Dreieck BCD die Seitenlängen a und b sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel $\varepsilon = \alpha - \beta$. Dieses Hilfsdreieck können wir nun ohne Schwierigkeiten konstruieren.

Wie in der Analyse erkennbar, existiert für $a > b$ stets eine Lösung, die zudem eindeutig ist. ❑

Aufgabe K6 – MO080932. Man konstruiere ein Dreieck aus der Winkelgröße γ, der Seitenlänge von c und der Summe $a + b$.

Lösungshinweise: Angenommen ABC sei das gesuchte Dreieck (s. Skizze). Verlängern wir die Seite $\overline{AC}$ über C hinaus um a zum Punkt D, so ist das Dreieck BCD gleichschenklig und für den Winkel ε bei D gilt als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck und wegen des Außenwinkelsatzes:

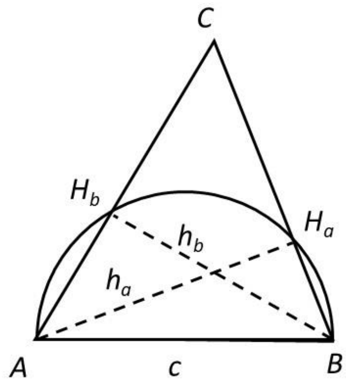


$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot (180° - |\sphericalangle BCD|) = \frac{1}{2} \cdot \gamma$$

Damit können wir das Hilfsdreieck ABD aus zwei gegebenen Seiten und einem anliegenden Winkel konstruieren. Tragen wir nun den Winkel ε an $\overline{BD}$ ab, finden wir den Punkt C. ❑

Aufgabe K7. Man konstruiere ein Dreieck aus der Seitenlänge von c und den Längen der Höhen h_a und h_b.

Lösungshinweise: Betrachten wir in der Analyse ein Dreieck ABC. Wie bezeichnen die Fußpunkte der Höhe h_a auf BC mit H_a bzw. der Höhe h_b auf AC mit H_b, so erkennen wir: Da die Dreiecke ABH_a und ABH_b rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse c sind, liegen die Punkte H_a und H_b nach Umkehrung des Satzes von THALES auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$.



Wir können also zunächst einen Halbkreis über c zeichnen. Ein Kreisbogen um A mit dem Radius h_a schneidet diesen Halbkreis in H_a, ein Kreisbogen um B mit dem Radius h_b schneidet diesen Halbkreis in H_b. Gilt $h_a^2 + h_b^2 > c^2$, so liegen die Punkte H_a und H_b in der Reihenfolge wie in der Skizze dargestellt. Zudem müssen die Fälle noch diskutiert werden, wenn die Punkte H_a oder H_b auf dem unteren Halbkreis unter c gewählt werden.

(wird fortgesetzt)

DIRICHLETsches Schubfachprinzip (Teil I)

Das DIRICHLETsche Schubfachprinzip (engl. pigeon-hole principle) wurde zuerst von PETER GUSTAV DIRICHLET (1805 – 1859) explizit formuliert:

Werden $n \cdot k + 1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, so gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als k Objekte.

So einfach dieses Prinzip auch erscheinen mag, es wird dennoch von Schülern nur selten vollständig zur Beweisführung bei Olympiade- und KZM-Aufgaben genutzt. Dabei ist seine Anwendungsvielfalt enorm, man muss „nur“ die geeigneten Objekte und Schubfächer definieren können, was sich aber durchaus als schwierig erweisen kann. Häufig sind Aufgabenstellungen des Typs *„Man zeige: Bei beliebiger Anordnung ... gibt es mindestens ...“* mit dem Schubfachprinzip lösbar, insbesondere dann, wenn eine vollständige Fallunterscheidung für die „beliebigen Anordnungen“ nicht möglich oder nur sehr komplex erscheint. So auch in folgender Aufgabe.

Aufgabe – MO570935[7]. In einem Verkehrsverbund in Bayern gibt es zwischen je zwei Städten eine Busverbindung in beiden Richtungen oder eine Zugverbindung in beiden Richtungen (möglicherweise auch beides).

a) Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens eine Rundreise durch drei dieser Städte gibt, die sich mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lässt.
b) Zeigen Sie, dass es zu fünf Städten nicht notwendigerweise eine Rundreise wie in a) gibt.

Lösungshinweise Teil a): Eine der betrachteten Städte bezeichnen wir mit A. Wir definieren

5 Objekte: 5 weitere Städte,
2 Schubfächer: Verbindungen mit Bus oder Zug,

Nach dem Schubfachprinzip gibt es unter Beachtung der Zerlegung $5 = 2 \cdot 2 + 1$ mindestens drei Städte, die von der Stadt A aus mit dem gleichen Verkehrsmittel erreichbar sind; drei solche Städte bezeichnen wir mit B, C und D. Verbindet dieses Verkehrsmittel auch zwei dieser drei Städte untereinander, dann gibt es eine Rundreise durch A und diese zwei Städte. Andernfalls gibt es eine Rundreise mit dem anderen Verkehrsmittel durch B, C und D.

Lösungshinweise Teil b) Wir stellen uns die Städte in einem Fünfeck angeordnet vor. Auf dem Umfang des Fünfecks liegt eine Bahnstrecke, jede Stadt ist durch eine Zugverbindung mit ihren beiden Nachbarstädten verbunden. Auf den Diagonalen des

[7] In Aufgabe **MO571035** wurde noch Teil c) ergänzt: Zeigen Sie, dass es zu je sechs Städten immer mindestens zwei verschiedene Rundreisen durch je drei Städte gibt, die sich jeweils mit nur einem Verkehrsmittel durchführen lassen. Dabei dürfen die beiden Rundreisen verschiedene oder gleiche Verkehrsmittel benutzen. Zwei Rundreisen gelten dann als verschieden, wenn sie nicht dieselben drei Städte besuchen.

Fünfecks liegen Straßen, zwischen den Enden jeder Diagonalen besteht eine Busverbindung. Dann gibt es keine Rundreisen durch drei Städte mit nur einem Verkehrsmittel:

Fall 1. Wir betrachten drei aufeinanderfolgend benachbarte Eckpunkte (Städte). Sie sind nacheinander durch Zugverbindungen erreichbar, aber der Rundweg (zurück zum Ausgangspunkt) kann nur durch eine Busverbindung (Diagonale) geschlossen werden.

Fall 2. Wir betrachten drei Eckpunkte (Städte), die nicht aufeinanderfolgend benachbart sind. Dann sind aber von diesen 2 Eckpunkte benachbart, zwischen denen nur eine Zugverbindung besteht. Zum dritten dieser Eckpunkte führen aber nur Busverbindungen (über Diagonalen). ❑

Aufgabe. Jede natürliche Zahl n hat ein Vielfaches der Form 1111...1100...0000.

Lösungshinweise: Wir definieren

$n + 1$ *Objekte:* paarweise verschiedene Zahlen $1, 11, 111, \ldots, \underbrace{111 \ldots 111}_{n+1}$

n *Schubfächer:* Reste $0, 1, \ldots, n - 1$ bei Division durch n

In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch n) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Zahlen der Form 111...11). Die Differenz dieser zwei Zahlen hat die geforderte Form und ist durch n teilbar ist. ❑

Aufgabe – MO361045. Beweisen Sie, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl z gibt, die im dekadischen System unter (gegebenenfalls mehrfacher) Verwendung von genau zwei verschiedenen Ziffern geschrieben wird und durch n teilbar ist!

Lösungshinweise: Wir können die Lösung der vorhergehenden Aufgabe übernehmen und sogar statt der Ziffer 1 eine beliebige Ziffer $a \neq 0$ wählen. ❑

Aufgabe. Gegeben seien 100 beliebige natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Man zeige, dass man aus diesen stets eine Auswahl treffen kann, sodass deren Summe durch 100 teilbar ist!

Lösungshinweise: Wir definieren

100 Objekte: Summen S_n der jeweils ersten n ($n = 1, \ldots, 100$) Zahlen, also
$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$$

99 Schubfächer: Reste 1 bis 99 bei Division durch 100.

Ist einer der Summen $S_1, \dots, S_{100}$ bereits durch 100 teilbar, ist nichts mehr zu beweisen. Wir nehmen also an, dass die 100 Summen alle nicht durch 100 teilbar sind In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 100) befinden sich dann nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Summen S_m und S_n mit $m > n$). Die Differenz $S_m - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_m$ ist eine Summe der geforderten Art und durch 100 teilbar. ❑

Aufgabe – MO440942/MO441042. Die Menge M bestehe aus 15 verschiedenen natürlichen Zahlen, die alle größer als Null und kleiner als 2005 sind. Zeigen Sie, dass es stets möglich ist, aus einer solchen Menge zwei teilerfremde nicht leere Teilmengen so auszuwählen, dass die Summe der Elemente der einen Menge gleich der Summe der Elemente der anderen ist.

Lösungshinweise: Für die Summe S der 15 Zahlen gilt

$$S \leq 2004 + 2003 + 2002 + \cdots + 1990 = 29955.$$

Die Menge M hat $2^{15} - 1 = 32767$ nicht leere Teilmengen. Für jede dieser Teilmengen gilt ebenfalls, dass die Summe ihrer Elemente nicht größer als 29955 ist. Deshalb können wir

32767 Objekte: nichtleere Teilmengen der Menge M
29955 Schubladen: Mögliche Summen der Elemente der Teilmengen von M

In mindestens einem Schubfach (Summen der Teilmengen von M) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (Teilmengen von M). Diese zwei Mengen seien T_1 und T_2. Dabei kann keine dieser Mengen eine Teilmenge der anderen Menge sein, denn wären beispielsweise alle Elemente von T_1 auch Elemente von T_2, so müsste mindestens eine weitere Zahl in T_2 enthalten sein. Da aber die Null nicht zu M gehört, wäre die Summe der Elemente von T_2 größer als die Summe der Elemente von T_1. Somit sind die Teilmengen $T_1/T_1 \cap T_2$ und $T_2/T_1 \cap T_2$ (d.h. aus den beiden Mengen T_1 und T_2 wurden die gemeinsamen Elemente gestrichen) nichtleere teilerfremde Mengen, für die die Summe der Elemente der einen Menge gleich der Summe der Elemente der anderen ist. ❑

Aufgabe – MO430942. Beweisen Sie: Aus jeder Menge M von 1003 positiven ganzen Zahlen, die alle kleiner als 2004 und paarweise verschieden sind, können stets zwei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe in M liegt.

Lösungshinweise: Es sei $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{1003}\}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen mit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{1003} < 2004$. Wir bilden aus diesen Zahlen die 1002 Differenzen $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_1$, …, $d_{1003} = a_{1003} - a_1$, für die ebenfalls $0 < d_2 < d_3 < \cdots < d_{1003} < 2004$ gilt. Nun können wir definieren

2004 Objekte: die Zahlen $a_2, \dots, a_{1003}$ und $d_2, \dots, d_{1003}$.
2003 Schubfächer: ganze Zahlen von 1 bis 2003.

In mindestens einem Schubfach (Zahlen 1 bis 2003) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (aus $a_2, \dots, a_{1003}$,$d_2, \dots, d_{1003}$.). Diese zwei Objekte sind folglich gleich groß. Weil sowohl die a_i als auch die d_i jeweils paarweise verschieden sind, gibt es ein Paar (a_m, d_n) mit $d_n = a_m$. Wegen $d_n = a_n - a_1$ liegt die Summe $a_m + a_1 = a_n$ in M. ❑

Aufgabe – MO431042. Man bestimme die größte natürliche Zahl N, für die folgende Aussage gilt: Aus jeder Menge M von 2004 positiven ganzen Zahlen, die alle kleiner als N und paarweise verschieden sind, können stets zwei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe in M liegt.

Lösungshinweise: Die größte natürliche Zahl dieser Art ist $N = 4006$.

Beweis Teil I: Für $N > 4006$ können wir die Menge $M = \{2003, 2004, \dots, 4006\}$ der Zahlen 2003 bis 4006 wählen. Für je zwei verschiedene Zahlen aus M ist ihre Summe größer als $2003 + 2003 = 4006$ und liegt folglich nicht in M. Deshalb gilt $N \leq 4006$.

Beweis Teil II: Es sei $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{2004}\}$ eine Menge positiver ganzer Zahlen mit $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2004} < 4006$. Wir bilden aus diesen Zahlen die 2003 Differenzen $d_2 = a_2 - a_1$, $d_3 = a_3 - a_1$, …, $d_{2004} = a_{2004} - a_1$, für die ebenfalls $0 < d_2 < d_3 < \cdots < d_{2004} < 4006$ gilt. Nun können wir definieren

4006 Objekte: die Zahlen $a_2, \dots, a_{2004}$ und $d_2, \dots, d_{2004}$.
4005 Schubfächer: ganze Zahlen von 1 bis 4005.

In mindestens einem Schubfach (Zahlen 1 bis 4006) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte (aus $a_2, \dots, a_{2004}$,$d_2, \dots, d_{2004}$.). Diese zwei Objekte sind folglich gleich groß. Weil sowohl die a_i als auch die d_i jeweils paarweise verschieden sind, gibt es ein Paar (a_m, d_n) mit $d_n = a_m$. Wegen $d_n = a_n - a_1$ liegt die Summe $a_m + a_1 = a_n$ in M. Also gilt $N \geq 4006$.

Zusammenfassend erhalten wir aus Teil I und Teil II die Aussage $N = 4006$. ❑

Aufgabe. Man zeige: Wählt man aus den natürlichen Zahlen 1 bis 200 auf beliebige Weise 101 Zahlen aus, so sind unter diesen wenigstens zwei Zahlen, von denen die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

Lösungshinweise: Wir definieren

101 Objekte: die jeweils größten ungeradzahligen Teiler der ausgewählten 101 Zahlen
100 Schubfächer: alle ungeraden Zahlen von 1 bis 199

In mindestens einem Schubfach (ungerade Zahlen) befinden sich nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei verschiedene Objekte (größte ungerade Teiler). Diese zwei Objekte haben folglich den gleichen größten ungeraden Teiler, haben also die Form $2^m \cdot t$ und $2^n \cdot t$ mit $m > n$. Also gilt $2^m \cdot t = 2^{m-n} \cdot (2^n \cdot t)$ wie gefordert. ❑

Diese Fragestellung wurde in einer MO-Aufgabe umschrieben:

Aufgabe – MO370943/MO371043. Andreas experimentiert mit einem Computerprogramm. Das Programm wählt aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 zufällig 101 Zahlen aus und sucht unter diesen nach einem Zahlenpaar, für welche die eine Zahl Teiler der anderen ist. Stets erfolgt die Ausgabe eines solchen Zahlenpaares. Andreas wundert sich darüber.

Birgit behauptet, dass es immer ein solches Zahlenpaar gibt. Das könne sie auch ohne Computerprogramm beweisen, z.B. unter geschickter Verwendung der Tatsache, dass es unter den Zahlen ja nur 100 gerade Zahlen gibt. Welchen Beweis könnte Brigitte für ihre Behauptung führen?

Aufgabe. Kann man aus 100 beliebig gegebenen ganzen Zahlen stets 15 derart auswählen, dass die Differenz zweier beliebiger dieser 15 Zahlen durch 7 teilbar ist?

Lösungshinweise: Wir definieren

100 Objekte: 100 beliebige Zahlen
7 Schubfächer: Reste $0, 1, \ldots, n - 1$ bei Division durch n

In mindestens einem Schubfach (gleicher Rest bei Division durch 7) müssen wegen $14 \cdot 7 = 98 < 100$ mehr als 14 Objekte (Zahlen) enthalten sein. Diese Zahlen lassen bei Division durch 7 jeweils den gleichen Rest, sodass deren paarweisen Differenzen stets durch 7 teilbar sind. ❑

Aufgabe. Gegeben sei ein 3×3-Quadrat. Auf jedem Feld steht eine der Zahlen -1, 0 oder 1. Man zeige, dass unter den Zeilen-, Spalten und Diagonalensummen mindestens zwei denselben Wert haben.

Lösungshinweise: Die möglichen Summen aus drei dieser Zahlen betragen $-3, \ldots, 3$, es gibt also

8 Objekte: 3 Zeilen-, 3 Spalten und 2 Diagonalensummen
7 Schubfächer: mögliche Summen aus drei der Zahlen -1, 0 oder 1.

Folglich gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens zwei Objekte in einem dieser Schubfächer. Diese haben dieselbe Summe. ❑

Aufgabe. Wir wählen beliebige $n+1$ Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Man zeige:

a) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, welche keinen gemeinsamen Teiler (größer als 1) haben.
b) In dieser Teilmenge gibt es immer zwei Zahlen, sodass eine der Zahlen die andere teilt.

Lösungshinweise zu Teil a) Zwei Zahlen, die sich um eins unterscheiden, sind relativ prim zueinander. Wir betrachten

$n+1$ *Objekte:* ausgewählte Zahlen,
n *Schubfächer:* Zahlenpaare $\{1,2\}, \{3,4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$.

Von den $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) befinden sich mindestens zwei in einem der Schubfächer.

Lösungshinweise zu Teil b) Man schreibe die Zahlen in der Form $2^k \cdot u$, wobei k größtmöglich und u somit ungerade ist. Der Faktor u kann nur Werte zwischen 1 und $2n-1$ annehmen, also können wir definieren

$n+1$ *Objekte:* ausgewählte Zahlen,
n *Schubfächer:* alle ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$.

Zwei der $n+1$ ausgewählten Zahlen (Objekte) haben also denselben ungeraden Anteil und erfüllen somit die Bedingung. ❑

Aufgabe (IMO 1972). Aus einer Menge S von 10 höchstens zweistelligen verschiedenen Zahlen lassen sich immer zwei disjunkte Teilmengen S_1 und S_2 auswählen, deren Summe gleich ist.

Lösungshinweise: Es gibt $2^{10}-1 = 1024 > 1000$ Möglichkeiten (Objekte), eine nichtleere Teilmenge aus 10 Zahlen zu wählen, aber nur $99 + 98 + \ldots + 90 < 1000$ verschiedene Summen (Schubfächer) aus nicht mehr als 10 zweistelligen Zahlen. Somit kommt mindestens eine Summe zweimal vor. Entfernen der Summanden, die in beiden Summen vorkommen, liefert die disjunkten Teilmengen. ❑

(wird fortgesetzt)

Bundeswettbewerb Mathematik 2023

Der Bundeswettbewerb Mathematik wurde 1970 vom Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft, einer Gemeinschaftsaktion der deutschen Wirtschaft zur Förderung der Wissenschaft und des wissenschaftlichen Nachwuchses, ins Leben gerufen. Träger des Wettbewerbes ist der Verein Bildung und Begabung e.V. mit Sitz in Bonn – die zentrale Anlaufstelle für die Talenteförderung in Deutschland. Förderer sind das Bundesministerium für Bildung und Forschung, die Kultusministerkonferenz und der Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft. Unterstützt wird Bildung & Begabung e.V. von einem Netzwerk von Unternehmen, Stiftungen und Privatpersonen. Als Projekt von Bildung & Begabung steht der Bundeswettbewerb Mathematik unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten. Die Kultus- und Schulbehörden der Länder unterstützen ihn und befürworten die Teilnahme. Partner des Wettbewerbs 2021 war die LEPPER Stiftung.

Unter www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik finden sich aktuelle Informationen. So auch die folgende Kurzcharakteristik:

„Der Bundeswettbewerb Mathematik ist ein Schülerwettbewerb für alle, die sich für Mathematik interessieren. Er besteht aus zwei Hausaufgabenrunden und einem mathematischen Fachgespräch in der abschließenden dritten Runde. Neben dem mathematischen Schulwissen musst Du zur Teilnahme also vor allem Motivation und Ausdauer mitbringen.

Die erste Runde steht Schülerinnen und Schülern aller Klassenstufen offen, die eine Schule in Deutschland besuchen, die zur Hochschulreife führt. Auch Schülerinnen und Schüler an deutschen Auslandsschulen können sich beteiligen. Alle Preisträgerinnen und Preisträger der ersten Runde sind berechtigt, an der zweiten Runde teilzunehmen. Die ersten Preisträgerinnen und Preisträger der zweiten Runde qualifizieren sich für die Teilnahme an der dritten Runde.

In *zwei Hausaufgabenrunden* werden jeweils vier Aufgaben aus unterschiedlichen Bereichen der Elementarmathematik (Geometrie, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebra) gestellt. Sie müssen pro Runde in zwei bis drei Monaten in Hausarbeit selbstständig gelöst und schriftlich ausgearbeitet werden.

In der ersten Runde ist auch Gruppenarbeit zugelassen: Maximal drei Teilnehmende können sich dabei zu einer Gruppe zusammenschließen und gemeinsam eine Arbeit einreichen. Wird eine Gruppenarbeit mit einem Preis ausgezeichnet, erlangt damit jedes Mitglied dieser Gruppe die Teilnahmeberechtigung für die zweite Runde. In der zweiten Runde sind dann nur noch Einzelarbeiten zugelassen.

In der dritten Runde, dem *Kolloquium*, geht es nicht mehr um das Lösen von Aufgaben. Hier führen die Teilnehmenden ein knapp einstündiges Fachgespräch mit Mathematikerinnen und Mathematikern aus Universität und Schule. Auf der Basis dieser Gespräche werden die Bundessiegerinnen und Bundessieger ausgewählt."

Die Teilnehmerzahlen[8] in der ersten Runde lagen in den letzten 10 Jahren zwischen 1142 (im Schuljahr 2016/17) und 1886 (im Jahr 2021/22).

---

[8] Ausführliche Statistiken sind unter http://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik veröffentlicht.

Schuljahr	Einsender 1. Runde	davon Kl. 9/10*	Einsender aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2019/20	1177	417 (35.4%)	55 (4.7%)	30 (54.5%)
2020/21	1182	366 (31.0%)	45 (3.8%)	17 (37.8%)
2021/22	1886	591 (31.3%)	66 (3.5%)	36 (54.5%)

* prozentual bezogen auf alle Teilnehmer
** prozentual bezogen auf die Teilnehmeranzahl aus Sachsen

Der Anteil der Teilnehmer aus den Klassenstufen 9 und 10 lag im Schuljahr 2021/22 in Sachsen wieder weit über dem Durchschnitt!

Unter den 66 sächsischen Teilnehmern wurden 7 erste, 5 zweite und 18 dritte Preise vergeben – über zwei Fünftel der sächsischen Teilnehmer gehörte zu den Preisträgern (45.5%, bundesweit 30.5%). Dazu kamen noch 29 Anerkennungsurkunden (43.9%, bundesweit 52.4%).

Alle Preisträger sind für die 2. Stufe startberechtigt – aber nicht alle der 30 sächsischen Qualifizierten nahmen diese Chance wahr!

Schuljahr	Teilnehmer 2. Runde	davon Kl. 9/10*	Teilnehmer aus Sachsen*	davon Kl. 9/10**
2019/20	277	99 (35.7%)	10 (3.6%)	4 (40.0%)
2020/21	193	57 (29.5%)	9 (4.7%)	3 (33.3%)
2021/22	262	88 (33.6%)	17 (6.5%)	11 (64.7%)

* prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl
** prozentual bezogen auf die Teilnehmerzahl aus Sachsen

In der 2. Runde 2021/22 wurden insgesamt 113 Preise vergeben (43.1% aller Teilnehmer), darunter 1 erster, 1 zweiter und 3 dritte Preise an sächsische Teilnehmer (29.4% aller sächsischen Teilnehmer, darunter 2 Starter aus den Klassenstufen 9/10).

Nehmen auch Sie (wieder) am Bundeswettbewerb Mathematik 2023 teil.

Der Wettbewerb ist bereits eröffnet. Die Ausschreibung und Aufgaben der 1. Stufe können Sie bei Ihrer Fachlehrerin oder Ihrem Fachlehrer für Mathematik oder unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/bundeswettbewerb-mathematik erhalten.

Die Aufgaben und Lösungen des Bundeswettbewerbs Mathematik 1972 bis 1997 erschienen in bislang 4 Bänden beim Ernst-Klett-Schulbuchverlag (Stuttgart 1987, 1988, 1994 und 1998), herausgegeben von R. Löffler.

Zudem erschien 2016 ein Sammelband der schönsten Aufgaben aus den Jahren von 1970 bis 2015. H.-H. Langmann, E. Quaisser, E. Specht: Bundeswettbewerb Mathematik. Springer Verlag Berlin Heidelberg 2016 (ISBN 978-3-662-49539-1).

Anlässlich „50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik“ wurde 2020 die 2. erweiterte Auflage unter diesem Titel von E. Specht, E. Quaisser und P. Bauermann herausgegeben (ISBN 978-3-662-61165-4, auch als eBook verfügbar). Dieses Buch enthält alle 396 Aufgaben von 1970 bis zur 1. Runde 2020, davon 40 Aufgaben mit ausführlichen Lösungsdiskussionen.

In alten Mathe-Büchern geblättert

In einem Projekt der Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg werden historische Schriften des 16. bis 18. Jahrhundert digitalisiert und für die Öffentlichkeit zugänglich gezeigt. Das 288-seitige Buch von JOHANN NICOLAUS MÜLLER[9] bietet unter

https://digitale.bibliothek.uni-halle.de/vd18/content/titleinfo/11428278

interessante Einblicke in Geometrie des 18. Jahrhunderts. Bezugnehmend zum Beitrag „Geometrische Konstruktionen“ wurde folgender Auszug ausgewählt. Dabei wurde die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift weitgehend beibehalten. In Anlehnung an den Schrifttyps des Originals wird die Schrift Bertholdr Mainzer Fraktur genommen. Wie hier geschrieben finden wir auch im Original für die Bezeichnungen von Punkten und Strecken bzw. Bögen eine „geradlinigen“ Schrift.

Dr. Johann Nicolauſ Müller.

Anweiſung zur Geometrie für Anfänger.
Vandenhoek und Ruprecht, Göttingen, 1790.

(Seiten 152 – 154)

Ein und dreyſigſtes Capitel

Dreyecke zu zeichnen

§. 118. I.

Bißher haben wir allerley krumme Linien und krummlinichten Figuren zeichnen lernen. Jetzt wollen wir auch mit den geradlinichten Figuren den Anfang machen, worunter die Dreyecke zuerſt folgen ſollen.

(Fig. 126) Erſtens auf eine gegebene gerade Linie a b, ein gleichſeitiges Dreyeck zu ſetzen, verfahret ſo:

---

[9] JOHANN NICOLAUS MÜLLER (geb. 1754 in Zweibrücken – gest. 1797 in Göttingen), Theologe, Mathematiker, Physiker, Privatlehrer in Göttingen.

Nehmet die gerade Linie a b in den Zirkel, und beschreibet mit dieser Oefnung des Zirkels, aus den Endpuncten, a und b oberhalb von a b zween Bogen, die sich in c schneiden:

Hierauf ziehet auf dem Durchschnittspunct c, nach den Endpuncten, a und b, die geraden Linien, c a und c b; so wird auf die Weise das gleichseitige Dreyeck gezeichnet seyn.

(Fig. 127) Zweitens aus zwo gegebenen geraden Linien, a b und c d, wovon die eine c d allemal größer ist, als die Hälfte von der andern a b, ein gleichschenklichtes Dreyeck zu machen:

Dieses kann auf folgende Weise gemacht werden:

Ziehet eine gerade Linie a b just so lang wie die gegebene a b:

Fasset alsdann die gerade Linie c d in den Zirkel, und beschreibet auf den Puncten, a und b, mit der Weite c d, aufwärts zween Bogen, die sich in c schneiden:

Ziehet hierauf, aus a und b, nach dem Durchschnittspunct c, die geraden Linien, a c und b c; so wird das Dreieck a b c gleichschenklicht seyn.

(Fig. 128) Drittens aus drey gegebenen geraden Linien, a b, c d, e f, davon immer zwo und zwo, welche man auch zusammen nehmen will, größer sind, als die noch übrige dritte, läßt sich auf folgende Weise ein Dreyeck machen:

Ziehet eine gerade Linie a b eben so lang wie die gegebene a b:

Nehmet hierauf die gegebene c d in den Zirkel, und beschreibet aus dem Punct a, aufwärts einen Bogen:

Ferner nehmet auch die e f in den Zirkel, und machet mit dieser Weite, aus b einen andern Bogen aufwärts, welcher den ersten, in dem Punct c durchschneidet:

Auf dem Durchschnittspunct c, ziehet nach den Endpuncten, a und b, die geraden Linien, c a und c b; so werden sie das ungleichseitige Dreyeck a b c bilden, welches man verlangt hat.

§. 119. II.

(Fig. 129) Viertens aus zwo gegebenen geraden Linien, a b und c d, und einem gegebenen Winkel e f g ein Dreyeck zu zeichnen; das kann so geschehen:

Ziehet eine gerade Linie a b eben so lang, wie die gegebene a b;

Setzet den Zirkel mit der einen Spitze in den Scheitelpunct f des Winkels e f g, öfnet die andere auf dem Schenkel f g, ohngefähr bis in h, und beschreibet mit der Weite f h auf f, zwischen den Schenkeln, f g und f e, den Bogen h i:

Mit eben der Weite f h, bringet den Zirkel in den Punct b, und machet aus b, über b a den Bogen m q ziemlich groß:

Hierauf fasset die Weite i h in den Zirkel, und machet mit dieser Oefnung des Zirkels, auf m in dem Bogen m q, einen Durchschnitt in n; so wird der Bogen m n so groß seyn, wie der Bogen i h:

Ziehet ferner durch die Puncte, b und n, die gerade Linie b c, eben so lang wie die gegebenen c d; So wird der Winkel a b c, oder m b n, dem Winkel e f g, gleich seyn;

Endlich ziehet von a nach dem Endpunct c, die gerade Linie a c; so wird das Dreyeck a b c, aus den zwo geraden Linien, a b und c d, und dem gegebenen Winkel e f g, gezeichnet sein.

(Fig. 130) Fünftens aus einer gegebenen Seite oder Linie a b, und aus zween gegebenen Winkeln, d c e und f g h, ein Dreyeck a b c zu machen: dieses läßt sich auf die Weise verrichten:

Mit einerley beliebigen Oefnung des Zirkels, beschreibet auf den Scheitelpuncten, c und g, der Winkel d c e und f g h, die Bogen p q und m n:

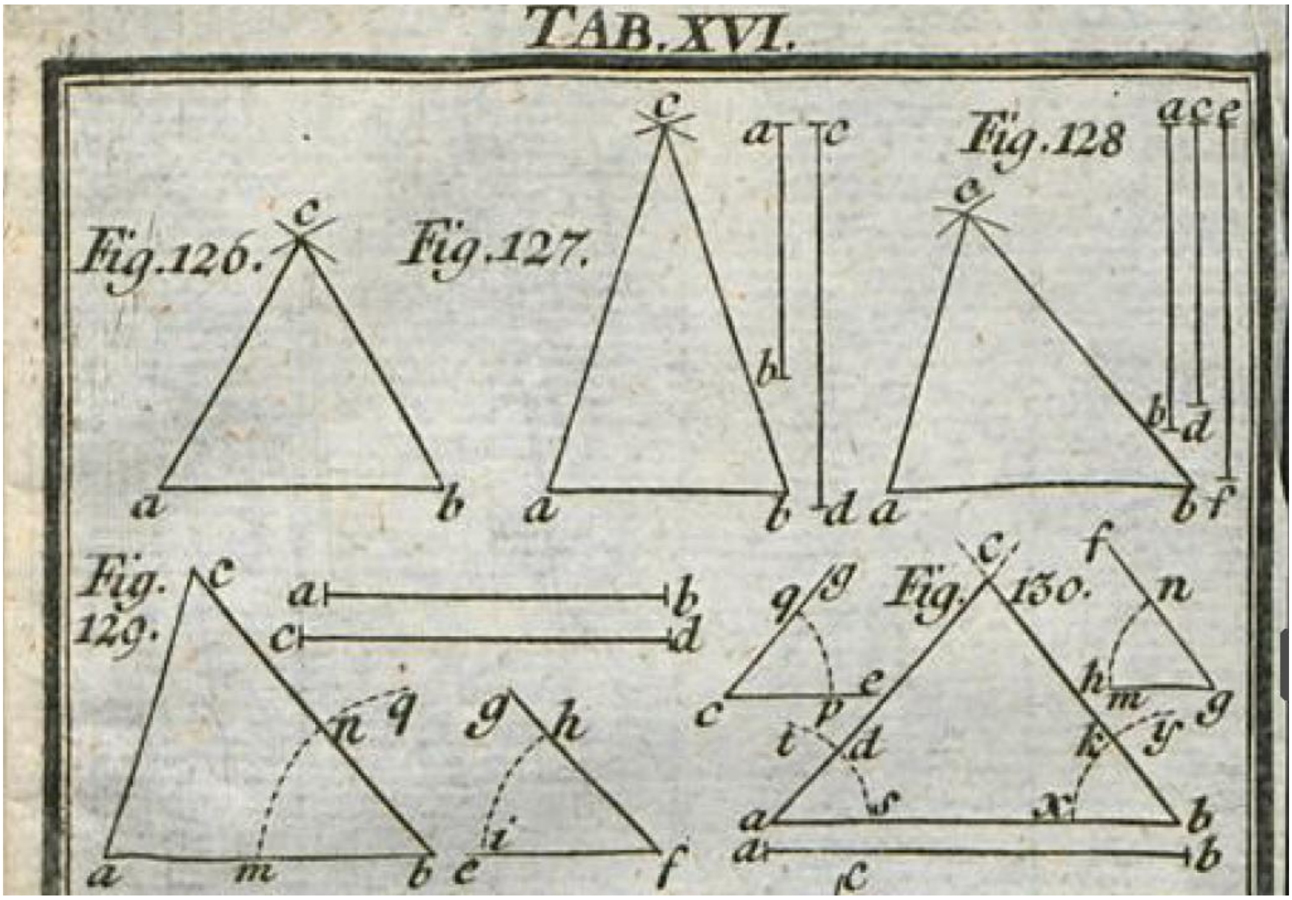
Jetzt ziehet eine gerade Linie a b so lang, wie die gegebene a b:

Mit der nämlichen Oefnung des Zirkels, womit ihr die Bogen, p q und m n, in den Winkeln, d c e, f g h, beschrieben habt, beschreibet jetzt auch aus den Eckpunkten, a und b, über a b, die Bogen, s t und x y:

Hierauf bringet die eine Zirkelspitze in den Punct m, öfnet die andere bis in den Punct n, und machet mit der Weite m n, aus x, in dem Bogen x y, bey k einen Durchschnitt:

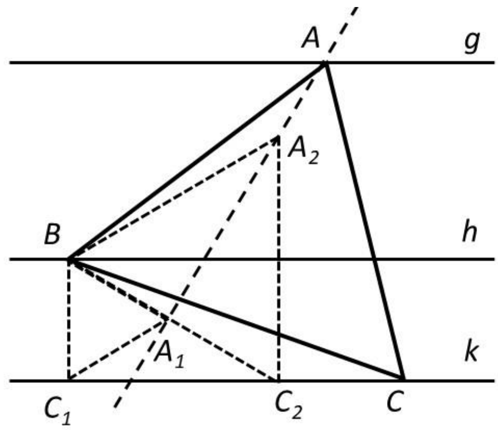
Eben so fasset auch die Weite p q in den Zirkel, und machet mit der Entfernung p q, aus dem Punct s, in dem Bogen s t, bey o einen Durchschnitt:

Ferner ziehet auf den Endpuncten, a und b, und durch die Durchschnittspuncte, o und k, die geraden Linien a o c und b k c. die einander in dem Punct c schneiden; so wird das Dreyeck fertig sein.



Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 10/22

Gegeben seien in der Ebene drei parallele Geraden g, h und k. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$.



Lösungshinweise: Wir nehmen an, die drei parallelen Geraden liegen in der Ebene vor. Dabei liege h zwischen g und k. Wir wollen die Versuch-und-Irrtum-Methode anwenden, d.h. wir konstruieren Beispiele von gleichseitigen Dreiecken, bei denen $B \in h$ und $C \in k$ erfüllt wird. Im Allgemeinen ist vor der Verwendung von Spezialfällen zu warnen, weil möglicherweise Zusammenhänge sichtbar, die sich nicht verallgemeinern lassen. Wir wollen dennoch einfachheitshalber folgende zwei gleichseitige Dreiecke konstruieren:

a) A_1BC_1: $\overline{BC_1} \perp h$,
b) A_2BC_2: $\overline{A_2C_2} \perp h$.

Für die Seitenlängen beider Dreiecke gilt

$$|\overline{BC_1}| = \frac{1}{2} \cdot [\overline{A_2C_2}]$$

Somit liegt A_1 tatsächlich wie in der Skizze erkennbar auf der Strecke $\overline{BC_2}$ und die Gerade A_1A_2 ist die Mittelsenkrechte auf BC_2. Somit erkennen wir die Winkelgleichheit $[\sphericalangle A_1XC_1] = |\sphericalangle C_1A_1X| = 30°$ und finden $|\sphericalangle C_2XA_1| = 60°$. Den Schnittpunkt der Geraden A_1A_2 (oder ihrer Verlängerung) mit g bezeichnen wir mit A. Konstruieren wir nun den Punkt C auf k mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

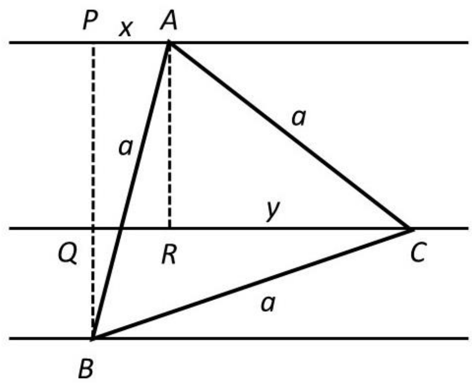
Um dies zu zeigen, drehen wir das Dreieck ABA_2 im Punkt B um 60°, so dass der Punkt A_2 auf C_2 fällt. Weil die Gerade A_1A_2 bei dieser Drehung mit k zusammenfällt und A auf dieser Geraden liegt, fällt auch der Punkt A auf C. Somit sind die Dreiecke ABC und A_2BC_2, weil sie in ihren Winkeln übereinstimmen. Also ist das Dreieck ABC tatsächlich gleichseitig und es gilt wie gefordert $A \in g$, $B \in h$ und $C \in k$. ❑

Die Fragestellung der Monatsaufgabe 10/22 wurde wiederholt als MO-Aufgabe gestellt, wobei Zusatzinformationen den Zugang erleichtern sollten.

Aufgabe – MO281045. In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.

Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.



Lösungshinweise: Wir nehmen an, es existiere ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art und habe die Seitenlänge a. Wir fällen das Lot von B auf g (den Fußpunkt nennen wir P und den Schnittpunkt mit k nennen wir Q) und das Lot von A auf k (den Fußpunkt nennen wir R). Dabei seien B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und R. Mit den Bezeichnungen $|\overline{PA}| = x$ und $|\overline{RC}| = y$ finden wir aufgrund des Satzes von PYTHAGORAS

- im Dreieck APB mit Hypotenuse $\overline{AB}$: $x^2 + 8^2 = a^2$ (1),
- im Dreieck ARC mit Hypotenuse $\overline{AC}$: $y^2 + 5^2 = a^2$ (2),
- im Dreieck BCQ mit Hypotenuse $\overline{BC}$: $(x+y)^2 + (8-5)^2 = a^2$ (3).

Wir formen Gleichung (3) um und ersetzen x^2 und y^2 mithilfe der Gleichungen (1) und (2)

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2 \qquad (4)$$

Quadrieren wir beide Seiten und ersetzen wiederum x^2 und y^2, erhalten wir

$$4 \cdot (a^2 - 64) \cdot (a^2 - 25) = (80 - a^2)^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 \cdot (3 \cdot a^2 - 196) = 0$$

Wegen $a > 0$ finden wir die Maßzahl $a = \frac{14}{3}\sqrt{3}$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass mit der gefundenen Maßzahl stets ein gleichseitiges Dreieck der geforderten Art konstruierbar ist. Wegen $196 > 3 \cdot 64$ gilt $a > 8$ und erst recht $a > 5$. Es existieren also positive Zahlen x, y, die (1) und (2) erfüllen. Wegen $196 < 3 \cdot 80$ ist auch $80 > a^2$, so dass auch (4) und damit (3) erfüllbar ist.

Wir konstruieren zunächst als Hilfsfigur ein rechtwinkliges Dreieck RST mit der Hypotenuse $\overline{RS}$ der Länge 28 cm und der Kathete $\overline{RS}$ der Länge 14 cm, indem wir über $\overline{RS}$ einen Halbkreis zeichnen und den Schnittpunkt mit dem Kreisbogen um R mit dem

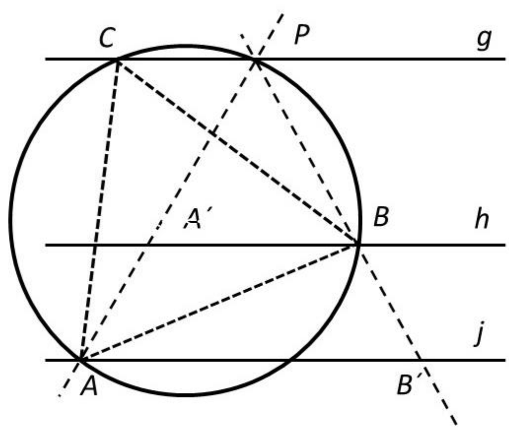
Radius 14 cm konstruieren. Diesen Schnittpunkt bezeichnen wir mit T. Nach dem Satz des PYTHAGORAS im Dreieck RST beträgt die Seitenlänge

$$|\overline{ST}| = \sqrt{(2\cdot 14)^2 - 14^2} = \sqrt{3\cdot 14^2} = 14\cdot\sqrt{3}$$

Wenn wir die Länge der Kathete $\overline{ST}$ (mittels Strahlensatz) dritteln, haben wir die Maßzahl von a konstruiert. Wählen wir nun auf h einen beliebigen Punkt B und konstruieren jeweils rechts von B die Punkte A auf g mit $|\overline{AB}| = a$ und C auf k mit $|\overline{BC}| = a$, so leistet das Dreieck ABC das geforderte. ❑

Aufgabe – MO350943. Über drei Geraden g, h und j wird vorausgesetzt. dass sie zueinander parallel sind, wobei h zwischen g und j liegt. Durch einen Punkt P auf g werden die beiden Geraden gezeichnet, die mit g Winkel von 60° einschließen. Diese Geraden schneiden h und j in insgesamt vier Punkten.

Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Man kann aus den zuletzt genannten vier Schnittpunkten zwei Punkte A und B so auswählen, dass auf g ein Punkt C existiert, für den ABC ein gleichseitiges Dreieck ist.



Lösungshinweise: Wir wählen wie in der Skizze dargestellt die zwei Punkte so, dass A auf j und B auf h liegen. Wir zeigen, dass es den gesuchten Punkt C gibt. Dazu zeichnen wir den Umkreis k zum Dreieck ABP. Dieser Umkreis hat mit g einen weiteren Schnittpunkt $C \neq P$. Wäre nämlich $C = P$, so wäre g eine Tangente an k. Dann läge der Umkreismittelpunkt auf der in P auf g errichteten Senkrechte. Folglich wäre diese Senkrechte zugleich Mittelsenkrechte im gleichseitigen Dreieck $A'BP$ und der Umkreis würde auch durch A' gehen (weil er durch B geht). Dies ist aber nicht möglich, weil P, A' und A drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden sind.

Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AC}$ gilt: $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CPA = 60°$.
Nach dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne $\overline{AB}$ gilt: $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BPA = 60°$.

Somit haben alle Innenwinkel des Dreiecks ABC die Größe 60°, das Dreieck ist also gleichseitig. ❑

Monatsaufgabe[10] 12/22

Auf einer Digitaluhr werden der Tag, der Monat, die Stunde, die Minuten und die Sekunden jeweils als zweistellige Zahlen dargestellt, also im Format tt.mm.hh.mm.ss. Wie viele Zeitpunkte gibt es im Jahr, wenn dabei alle zehn Ziffern 0, 1, …, 9 genau einmal auftreten?

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[11]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalt	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

---

[10] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.01.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.
[11] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.