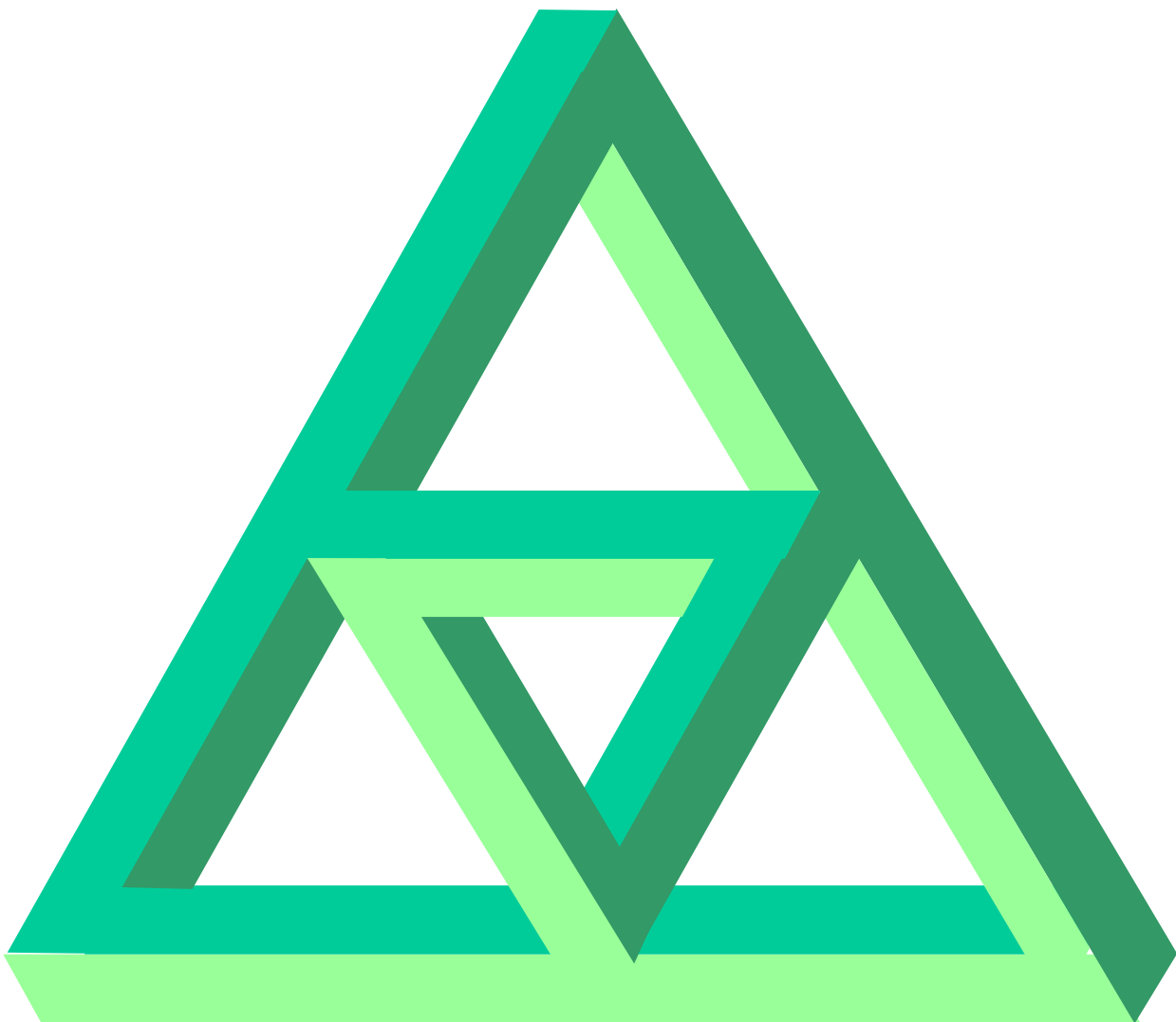


Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden (MO) werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben¹ thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen aus dem MO-Archiv mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10² haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Bezugsnehmend auf die Aufgabe **MO621024** werden (nach Heft 10/2022) weitere Beispiele gezeigt, in denen der Satz des THALES eine wesentliche Hilfe bei der Beweisführung darstellt.

Wir setzen in diesem Heft den Beitrag über geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal fort und stellen Aufgaben vor, in denen Vierecke aus gegebenen Bestimmungsstücken zu konstruieren sind.

In der vierten Serie des diesjährigen KZM der Klassenstufen 9/10 wurden Fragen zum FERMAT-Punkt gestellt. Dabei wurde die Existenz eines solchen Punktes vorausgesetzt. Diese wird im Heft untersucht und es werden Konstruktionsmöglichkeiten des FERMAT-Punktes gezeigt. Das allgemeinere Thema „Summe von Abständen“ finden wir zudem in Aufgaben der Mathematik-Olympiade.

¹ www.mathematik-olympiaden.de

² https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 18.02 – Der Satz des THALES

Im Heft Oktober/2022 wurde mit Bezug zur Aufgabe MO621014 der Satz des THALES thematisiert. Auch in der nachfolgenden Stufe wurde eine Aufgabe gestellt, zu deren Lösung dieser Satz beitragen kann.

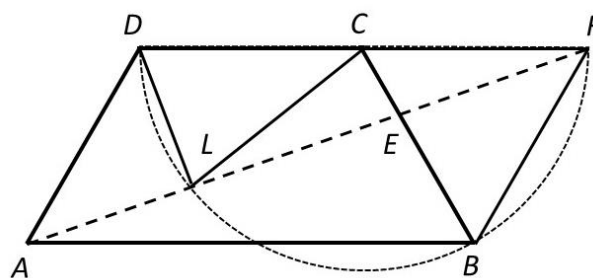
Aufgabe 18.08 – MO621024. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $AB \parallel CD$,
- (2) $|\overline{AB}| > |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{DA}|$,
- (3) $|\sphericalangle CBA| = 60^\circ$.

Weiterhin sei E der Punkt der Strecke \overline{BC} , für den $|\overline{BE}| : |\overline{EC}| = 2 : 1$ gilt. Schließlich sei L der Lotfußpunkt von D auf die Gerade AE , d.h. L liegt auf AE und es gilt $|\sphericalangle ELD| = 90^\circ$.

Zeigen Sie, dass $|\overline{CL}| = |\overline{CD}|$ gilt.

Hinweis: Wie bei allen geometrischen Aufgaben sollte der Lösungsansatz mit einer aussagekräftigen Skizze beginnen, bei der alle gegebenen Stücke zu erkennen sind.



Lösungshinweise: Es sei F der Schnittpunkt der Parallelen zu AD durch B mit der Geraden durch C und D . Das Viereck $ABFD$ ist ein Parallelogramm, also folgt mit (2) $|\overline{BF}| = |\overline{AD}| = |\overline{BC}|$ und $|\overline{DF}| = |\overline{AB}| > |\overline{DC}|$, weswegen F auf der Verlängerung der Strecke \overline{DC} über C hinaus liegt.

Nach dem Wechselwinkelsatz ergibt sich damit $|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle BCF| = 60^\circ$. Folglich ist das Dreieck CBF gleichschenkelig mit Basiswinkel 60° , ist also sogar gleichseitig. Es folgt

$$|\overline{CF}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| \text{ und } |\overline{AB}| = |\overline{DF}| = 2 \cdot |\overline{CF}|.$$

Wir zeigen nun, dass A , E und F auf einer Geraden liegen. Die Dreiecke ABE und FCE sind nach (SWS) ähnlich, denn es ist

$$|\sphericalangle EBA| = |\sphericalangle ECF| = 60^\circ \text{ und } |\overline{CF}| : |\overline{AB}| = 1 : 2 = |\overline{CE}| : |\overline{EB}|.$$

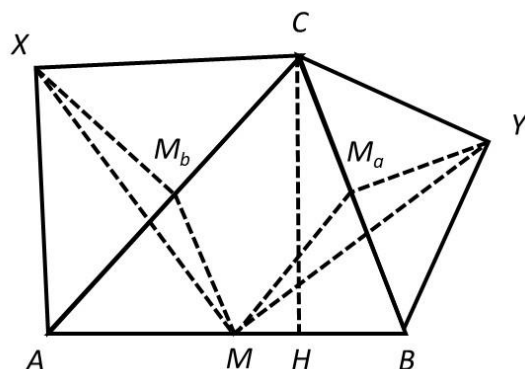
Daher ist $|\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle AEB|$ und folglich liegt F auf der Geraden AE .

Damit hat das Dreieck FDL einen rechten Winkel bei L , weswegen L auf dem zugehörigen THALESkreis mit Durchmesser DF und Mittelpunkt C liegt. Also hat L den gleichen Abstand zum Mittelpunkt C wie der Punkt D , was gerade der Behauptung $|\overline{CL}| = |\overline{CD}|$ entspricht □

Aufgabe 18.09 – MO590946/MO591046. Über den Seiten \overline{AC} und \overline{BC} eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke ACX und BCY mit $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle CYB| = 90^\circ$ errichtet.

Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , der Fußpunkt H des von C auf die Gerade AE gefällten Lotes und die Punkte X und Y auf einem gemeinsamen Kreis liegen.

Lösungshinweise: Die Punkte M, H, Y, X liegen nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes (auch Umfangswinkelsatz genannt)³ auf einem gemeinsamen Kreis, wenn die Größen der Winkel $\sphericalangle YMX$ und $\sphericalangle YHX$ gleich sind.



Einerseits wissen wir, dass die Punkte H und X auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser \overline{AC} liegen. Der Umfangswinkelsatz im Sehnenviereck $AHCX$ liefert über der Seite \overline{CX} die Gleichheit $|\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle CAX| = 45^\circ$. Entsprechend liegen die Punkte Y und H auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser \overline{BC} , womit im Sehnenviereck $BYCH$ die Gleichung $|\sphericalangle YHC| = |\sphericalangle YBC| = 45^\circ$ erfüllt ist. Daraus erhalten wir

$$|\sphericalangle YHC| + |\sphericalangle CHX| = |\sphericalangle YHX| = |\sphericalangle YBC| + |\sphericalangle CAX| = 90^\circ.$$

Damit liegt H auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser \overline{XY} .

Andererseits wollen wir auch $|\sphericalangle YMX| = 90^\circ$ nachweisen. Wenn wir dafür zeigen (jedoch hier nicht ausgeführt), dass die Dreiecke XMM_b und MYM_a kongruent (SWS) sind, finden wir

$$\begin{aligned} |\sphericalangle YMX| &= |\sphericalangle YMM_a| + |\sphericalangle M_aMM_b| + |\sphericalangle M_bMX| = \\ &= |\sphericalangle MXM_b| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle M_bMX| = \\ &= |\sphericalangle MXM_b| + (|\sphericalangle XM_bM| - 90^\circ) + |\sphericalangle M_bMX| = 90^\circ \end{aligned}$$

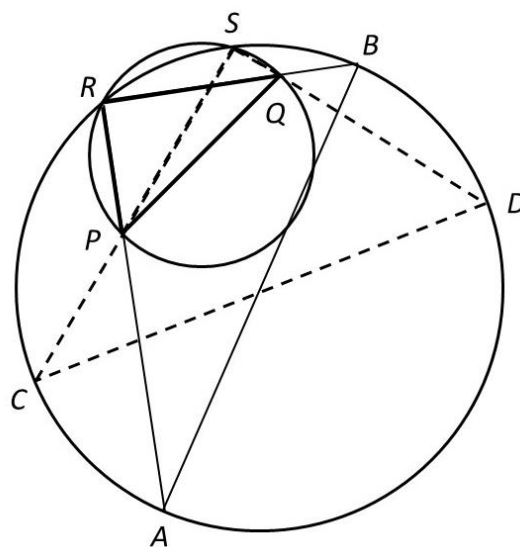
Damit liegt auch M auf dem THALESkreis mit dem Durchmesser \overline{XY} und somit liegen X, Y, M und H auf dem gemeinsamen (Halb-) Kreis. \square

Aufgabe 18.10. Es seien zwei Punkte P und Q innerhalb eines Kreises k gegeben. Konstruiere ein dem Kreis einbeschriebenes rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete durch P und dessen andere Kathete durch Q geht.

Bei welcher Lage von P und Q ist diese Aufgabe nicht lösbar?

³ Werden über einer Strecke \overline{AB} die Punkte C und D so gewählt, dass sie in einer Halbebene liegen und die Winkelgrößen $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ gleich groß sind, dann liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis. Der Satz des THALES ist ein Spezialfall mit $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$.

Lösungshinweise: Der THALESkreis über dem Durchmesser \overline{PQ} schneide den gegebenen Kreis k in den Punkten R und S . Dann sind die Dreiecke PQR und PQS rechtwinklig. Weiterhin schneide die Gerade RP den Kreis k in A , und die Gerade RQ schneide k in B . Dann ist das Dreieck ABR ebenfalls rechtwinklig und erfüllt die gestellten Anforderungen.



In Analogie dazu ist auch das Dreieck CDS eine Lösung der Aufgabe.

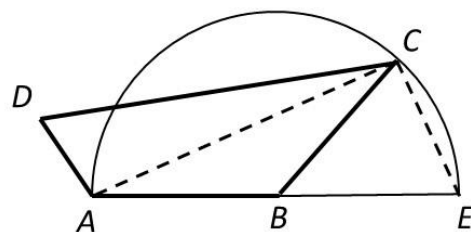
Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn der THALESkreis über dem Durchmesser \overline{PQ} und der gegebene Kreis k gemeinsame Punkte haben (einen Berührungspunkt oder zwei Schnittpunkte). Liegt nämlich dieser Kreis vollständig in k und ist R ein beliebiger Punkt auf der Kreisperipherie, so ist das Dreieck PQR stets spitzwinklig. □

Aufgabe 18.11 – MO060922. In dem Viereck $ABCD$ wird die Seite \overline{AB} über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $|\overline{BE}| = |\overline{AB}|$ ist. Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie notwendig dafür ist, dass der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter ist.

Das Viereck hat

- a) vier gleichgroße Winkel,
- b) vier gleichlange Seiten,
- c) zwei Paar gleichlanger Seiten,
- d) zwei gleichlange Seiten mit gemeinsamem Eckpunkt,
- e) zwei gleichgroße Winkel.

Lösungshinweise: Aus der Umkehrung des Satzes von THALES folgt aus der Gleichheit $|\overline{BE}| = |\overline{AB}|$: Wenn der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter ist, so liegt C auf dem Kreis um B mit dem Radius \overline{AB} . Folglich ist die Bedingung (d) notwendig.



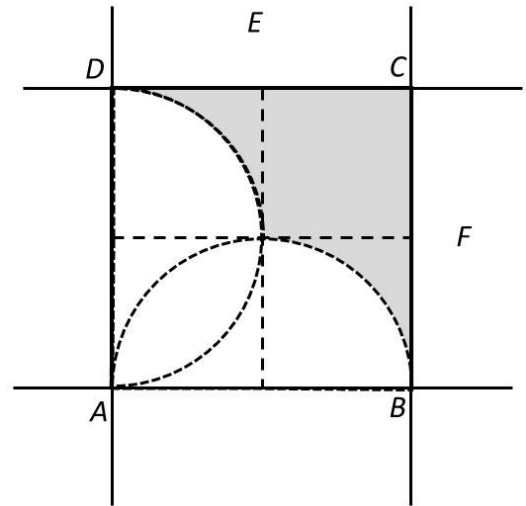
Dagegen sind die anderen genannten Bedingungen nicht notwendig: Da die Lage von Punkt D keinen Einfluss auf den Winkel $\sphericalangle ACE$ hat, können wir wie in der Skizze ein Beispiel angeben, bei dem nur die Bedingungen (d) erfüllt ist. □

Aufgabe 18.12 – MO421024. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a . Die Menge M aller Punkte P der Ebene, für die sowohl das Dreieck ABP als auch das Dreieck ADP spitzwinklig ist, bildet eine Fläche.

- Stellen Sie diese Fläche M (zunächst ohne Begründung) graphisch dar (z. B. für $a = 6$ cm) und berechnen Sie den Flächeninhalt $F(M)$ in Abhängigkeit von a .
- Begründen Sie die Korrektheit der Darstellung von M .
- Beschreiben Sie die Menge M' aller Punkte Q , für die sowohl das Dreieck ABQ als auch das Dreieck ADQ stumpfwinklig ist.

Lösungshinweise zu a): In der Skizze ist die Menge M grau markiert. Die Fläche von M besteht aus einem vollständigen Viertelquadrat und zwei Viertelquadraten, von denen ein Viertelkreis ausgeschnitten ist, also

$$\begin{aligned} F(M) &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot a^2 \approx 0.3573 \cdot a^2. \end{aligned}$$



Lösungshinweise zu b): Liegt ein Punkt R innerhalb des Streifens E , der durch die Geraden AD und BC gebildet wird, so ist das Dreieck ABR stumpfwinklig. Liegt R auf den Geraden AD oder BC , so ist das Dreieck ABR rechtwinklig. Also kann ein gesuchter Punkt nur im Innern des Streifens E liegen.

Analog kann ein gesuchter Punkt P nur im Innern des Streifens F liegen (der durch die Geraden AB und CD gebildet wird) damit das Dreieck ADP spitzwinklig wird. Als Durchschnitt beider Streifen ergibt sich damit die Menge der inneren Punkte des Quadrates $ABCD$. Davon entfallen aber noch die inneren und die Randpunkte der THALESkreise über den Durchmessern \overline{AB} bzw. \overline{AD} , da sonst die Dreiecke ABP bzw. ADP stumpfwinklig oder rechtwinklig wären. Damit bleibt nur die beschriebene und in der Abbildung skizzierte Punktmenge übrig.

Lösungshinweise zu c): Nach den Überlegungen zur Teilaufgabe b) gehören zur Menge M' genau die Punkte, die

- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser \overline{AB} und im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser \overline{AD} liegen.
- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser \overline{AB} und außerhalb des Streifens F liegen
- im Innern des THALESkreises über dem Durchmesser \overline{AD} und außerhalb des Streifens E liegen,
- außerhalb des Streifens E und außerhalb des Streifens F liegen. □

Konstruktion des FERMAT-Punktes⁴

Folgende Aussage gilt als allgemein bekannt und darf ohne Beweis zitiert werden:

Satz von VIVIANI⁵. In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines Punktes P im Innern des Dreiecks zu den Dreiecksseiten unabhängig von der Lage des Punktes P .

Beweis: Der Punkt P zerlegt das Dreieck ABC mit der Seitenlänge a und der Höhe h in drei Teildreiecke ABP , BCP und CAP . Die Abstände des Punktes P zu den Dreiecksseiten \overline{AB} , \overline{BC} und \overline{CA} sind die Höhen h_c , h_a und h_b dieser Teildreiecke. Für die Fläche des Dreiecks ABC gilt:

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = a \cdot h = a \cdot (h_a + h_b + h_c).$$

Also ist – unabhängig von der Lage des Punktes P – die Summe der Abstände konstant $h = h_a + h_b + h_c$. \square

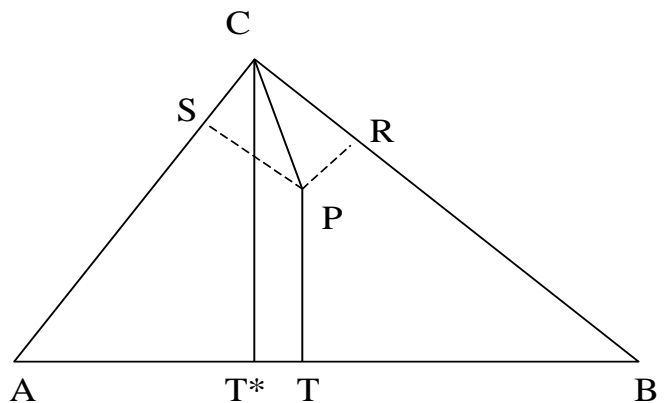
Wir betrachten nun ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basisseite $\overline{AB} = c$ und den Schenkeln der Länge a , dessen Winkel an der Basisseite größer als 60° sind. Gibt es dafür eine ähnliche Eigenschaft?

Für einen beliebigen Punkt P im Innern des Dreiecks und dessen Abstände zu den Dreiecksseiten \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , die wir wieder mit h_c , h_a und h_b bezeichnen, gilt

$$2 \cdot A_{\Delta ABC} = c \cdot h = a \cdot (h_a + h_b) + c \cdot h_c.$$

Wenn $h_c = 0$ gilt, liegt P auf der Seite \overline{AB} . Damit ist für alle Punkte P auf der Basisseite die Summe der Abstände konstant, denn wir finden $h_a + h_b = \frac{c \cdot h}{a}$. Wählen wir dagegen $P = C$, so reduziert sich die Summe der Abstände auf h_c . Wir erkennen also, dass es Dreiecke gibt, bei denen die Summen der Abstände eines Inneren Punktes zu den Dreiecksseiten verschieden sind.

Betrachten wir nun ein beliebiges Dreieck. Seien T^* der Fußpunkt des Lotes von C auf AB , P ein beliebiger Punkt im Innern des Dreiecks ABC und R, S, T die Fußpunkte der Lote von P auf die Dreiecksseiten. Dann ist die Summe der Strecken \overline{PR} und \overline{PS} größer als die



⁴ Nach Engelhaupt, H.: Kürzeste Wege (Teil I). In: Mathematikinformation Nr. 41. Universität Gesamthochschule Kassel, 2004.

⁵ VINCENZO VIVIANI (italienischer Mathematiker, 1622–1703)

Strecke \overline{CP} (als Diagonale im Rechteck $CSPR$). Weiterhin ist $|\overline{CP}| + |\overline{PT}|$ größer als $|\overline{CT^*}|$. Also gilt für jeden Punkt P :

$$|\overline{PR}| + |\overline{PS}| + |\overline{PT}| \geq |\overline{PT}| + |\overline{PC}| \geq |\overline{PT^*}|.$$

Die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten wird also durch die Fußlotpunkte geprägt.

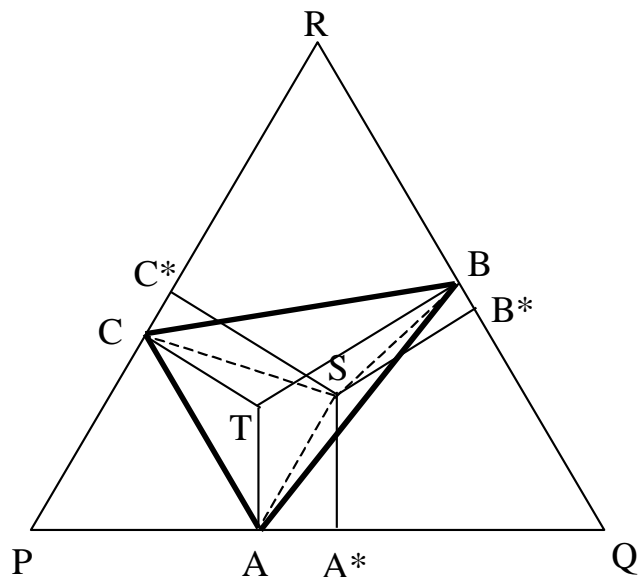
Im Folgenden untersuchen wir nicht die Summe der Abstände zu den Dreiecksseiten, sondern die Summe der Abstände zu den Eckpunkten eines Dreiecks. Wenn es einen Punkt gibt, der diese Summe minimiert, so wird er FERMAT-Punkt genannt (da FERMAT⁶ in seinem Manuskript „MAXIMA ET MINIMA“ die Aufgabe stellte „Gegeben sind drei Punkte, gesucht ist ein vierter Punkt, so dass die Summe seiner Abstände von den drei gegebenen Punkten ein Minimum wird.“, selbst aber keine Lösung veröffentlichte).

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Der Punkt T sei so gewählt, dass die Strecken \overline{TA} , \overline{TB} und \overline{TC} bei T gleiche Winkel bilden (also jeweils 120°). Nun zeichnen wir ein gleichseitiges Dreieck PQR derart, dass dessen Seiten auf TA , TB und TC senkrecht stehen. Dies ist problemlos möglich, da z.B. im Viereck $TBRC$ die gegenüberliegenden Winkel zusammen 180° ergeben (zwei rechte Winkel), folglich beträgt der Innenwinkel bei R $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Fällen wir nun von einem beliebigen, von T verschiedenen inneren Punkt S die Lote auf die Seiten des gleichseitigen Dreiecks PQR , so gilt

$$|\overline{TA}| + |\overline{TB}| + |\overline{TC}| = |\overline{SA^*}| + |\overline{SB^*}| + |\overline{SC^*}|$$

Nun gelten aber im rechtwinkligen Dreieck A^*SA die Ungleichung $|\overline{SA^*}| \leq |\overline{SA}|$ und ebenso die entsprechenden Ungleichungen für die Punkte B, B^* bzw. C, C^* , also minimiert der Punkt T die Summe.

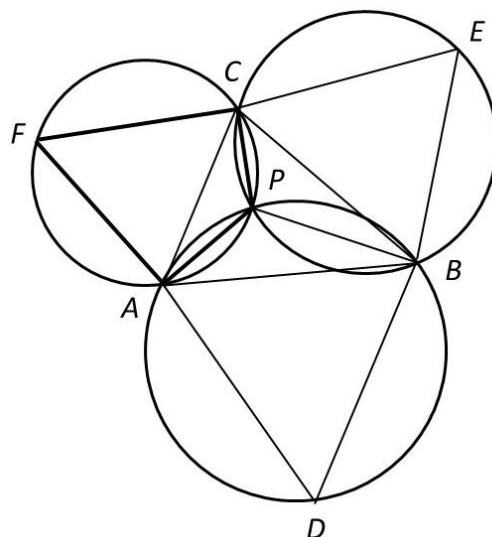


Wir konstruieren nun einen solchen Punkt. Dazu beweisen wir zunächst den

Satz. In einem Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° schneiden sich die Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ABD , BCE und ACF in einem Punkt.

⁶ PIERRE DE FERMAT (französischer Mathematiker; 1601 bis 1665)

Beweis: Die Umkreise der Dreiecke ACF und ABD schneiden sich im Punkt A und in einem weiteren Punkt P . Betrachten wir das Viereck $FAPC$, das laut Konstruktion ein Sehnenviereck ist (weil alle vier Eckpunkte auf dem Umkreis liegen). Da sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu 180° ergänzen und im aufgesetzten gleichseitigen Dreieck ACF der Winkel $\sphericalangle AFC = 60^\circ$ beträgt, finden wir $\sphericalangle CPA = 120^\circ$.



Auch das Viereck $ADBP$ ist ein Sehnenviereck. Deshalb können wir mit ähnlicher Argumentation von $\sphericalangle BDA = 60^\circ$ auf $\sphericalangle APB = 120^\circ$ schließen.

Wegen $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPA + \sphericalangle BPC = 360^\circ$ erhalten wir unmittelbar $\sphericalangle BPC = 120^\circ$.

Nach Umkehrung des Sehnensatzes ist das Viereck $BECP$ ebenfalls ein Sehnenviereck, weil sich die gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle BPC$ und $\sphericalangle CFB$ zu 180° ergänzen. Somit liegt der Punkt P auch auf dem Umkreis des Dreiecks BCF . \square

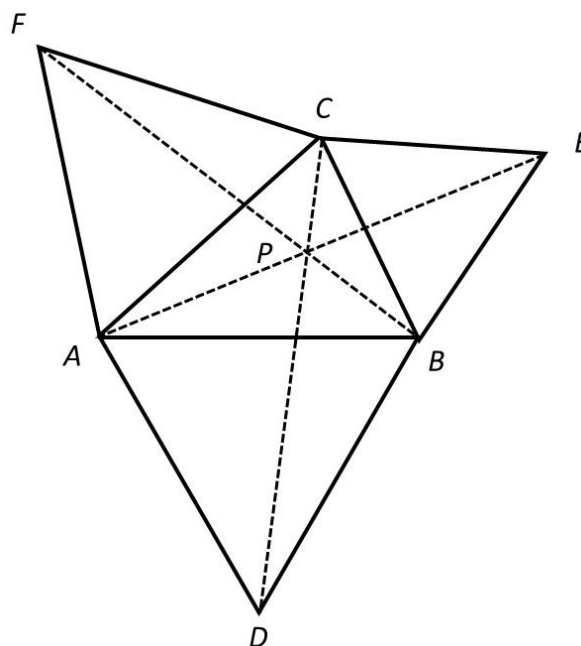
Wir zeigen nun noch, dass sich dieser gemeinsame Punkt P sehr leicht konstruieren lässt.

Satz. In einem Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° sei P der gemeinsame Punkt der Umkreise der auf die Dreiecksseiten aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke ABD , BCE und ACF . Dann liegen A, P, E und B, P, F und C, P, D jeweils auf einer Geraden.

Beweis: Die Dreiecke ADC und ABF sind ähnlich (SWS), denn

- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ACF gilt $|\overline{AC}| = |\overline{AF}|$,
- nach Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ABD gilt $|\overline{AB}| = |\overline{AD}|$ und
- $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC = 60^\circ + \sphericalangle BAC = \sphericalangle FAC + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BAF$.

Damit stimmen auch die Winkel $\sphericalangle AFB$ und $\sphericalangle ACD$ überein. Wenden wir im Dreieck CFP den Innenwinkelsummensatz an, erhalten wir:

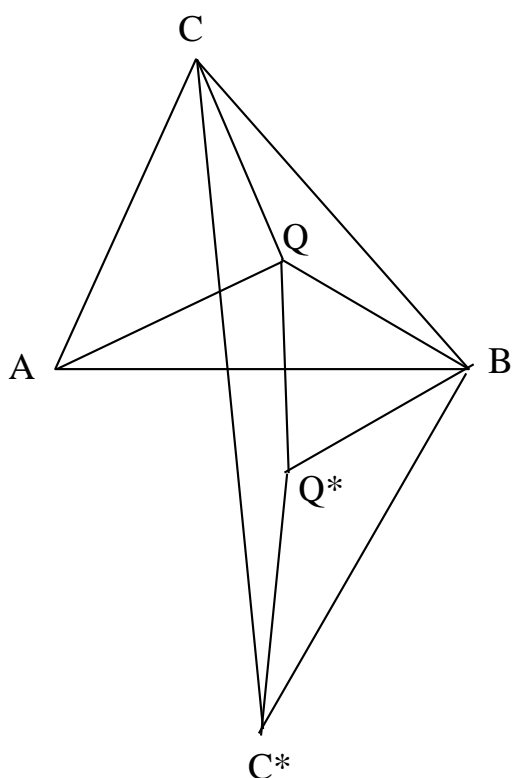


$$\sphericalangle CPF + (60^\circ - \sphericalangle AFB) + (60^\circ + \sphericalangle ACD) = 180^\circ, \text{ also } \sphericalangle CPF = 60^\circ.$$

Mit entsprechender Argumentation zeigen wir, dass auch $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPE = 60^\circ$ gilt.

Da wir die Größen der Winkel $\sphericalangle FPD = \sphericalangle DPE = \sphericalangle EPF = 120^\circ$ kennen, erhalten wir $\sphericalangle APE = \sphericalangle BPF = \sphericalangle CPD = 180^\circ$ und schließen daraus, dass A, P, F und B, P, G und C, P, E jeweils kollinear sind. \square

Aufgrund dieser Überlegung finden wir für ein beliebiges Dreieck ABC mit Innenwinkeln kleiner als 120° folgende Konstruktionsvorschrift für den FERMAT-Punkt: Wir konstruieren die gleichseitigen Dreiecke über den Dreiecksseiten nach außen (z.B. ABC^* über \overline{AB}) und verbinden die neuen Ecken A^* , B^* und C^* mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A , B bzw. C . Diese drei Verbindungsstrecken schneiden sich in einem Punkt P , dem gesuchten FERMAT-Punkt.



Im Jahr 1929 wird von J. E. HOFMANN⁷ die Existenz des FERMAT-Punktes geometrisch begründet: Gegeben sei ein Dreieck ABC , dessen Innenwinkel alle kleiner als 120° sind. Wir wählen im Innern einen Punkt Q und verbinden ihn mit den Ecken des Dreiecks. Drehen wir die Figur um den Punkt B um 60° , so sind die Dreiecke BQQ^* und ABC^* gleichseitig (Bezeichnung wie in nebenstehender Skizze).

Die Streckenzüge $|\overline{CQ}| + |\overline{BQ}| + |\overline{AQ}|$ und $|\overline{CQ}| + |\overline{QQ^*}| + |\overline{QC^*}|$ haben die gleiche Länge, wobei der zweitgenannte Streckenzug unabhängig von Q immer in C^* endet.

Offensichtlich ist die Länge des zweitgenannten Streckenzuges minimal, wenn Q und Q^* auf der Geraden durch C und C^* liegen.

Aus dieser Argumentation lässt sich folgende Konstruktion herleiten:

Wir konstruieren auf \overline{AB} das gleichseitige Außendreieck ABC^* und verbinden C mit C^* . Um auf der Geraden CC^* den Punkt F zu finden, für den $\sphericalangle AFB = 120^\circ$ erfüllt wird, zeichnen wir den Umkreis des Dreiecks ABC^* . Der Schnittpunkt F mit CC^* ist der FERMAT-Punkt, da das Viereck AC^*BF ein Sehnenviereck ist.

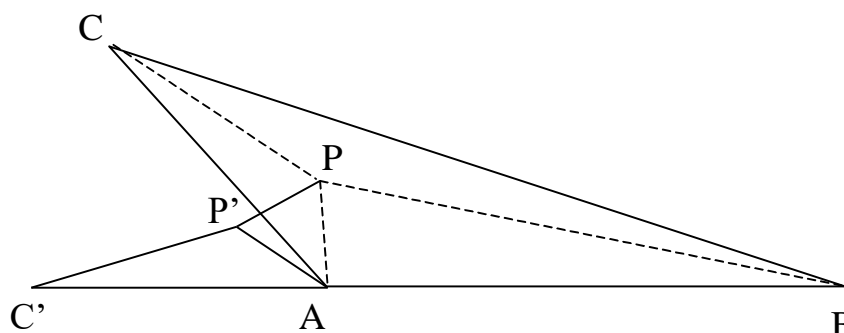
Den FERMAT-Punkt können wir auch experimentell finden: Wir zeichnen das Dreieck ABC auf eine Tischplatte und bohren an den Eckpunkte Löcher durch die Platte. Drei

⁷ JOSEPH EHRENFRIED HOFMANN (deutscher Mathematik-Historiker, 1900 - 1973)

Schnüre werden in einem Punkt P verknotet. Die drei Enden werden durch diese Löcher geführt (möglichst über Rollen, um die Reibungsverluste zu minimieren) und mit gleich schweren Gewichten belastet. Dann werden die drei in P angreifenden Kräfte im Gleichgewicht sein. Dies ist nur möglich, wenn die Richtungen der drei Kräfte jeweils einen Winkel von 120° einschließen.

Gibt es auch in stumpfwinkligen Dreiecken, bei denen der stumpfe Winkel größer als 120° ist, einen FERMAT-Punkt?

Wir nehmen an, im Dreieck ABC mit $\alpha > 120^\circ$ gäbe es einen Punkt P im Innern des Dreiecks, für den die Summe der Abstände zu den Eckpunkten minimal sei.



Wir drehen das Dreieck APC um den Punkt A gegen den Uhrzeiger so, dass der Punkt C' auf die Gerade AB fällt. Der Drehwinkel ist (wegen $\alpha > 120^\circ$) kleiner als 60° . Deshalb ist die Strecke $\overline{PP'}$ kleiner als die Strecke \overline{AP} . Somit gilt:

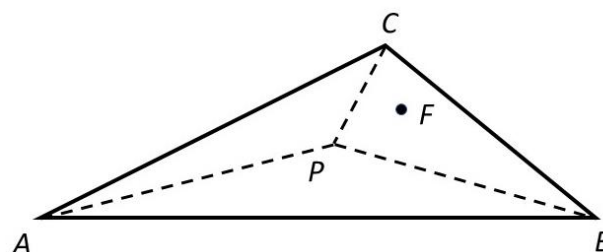
$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| > |\overline{PP'}| + |\overline{PB}| + |\overline{P'C'}| > |\overline{BC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC'}| = |\overline{AB}| + |\overline{AC}|.$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität der Abstandssumme für den Punkt P . \square

Satz. In einem Dreieck mit einem stumpfen Winkel realisiert der Eckpunkt mit dem stumpfen Winkel die kleinste Summe der Abstände zu den Eckpunkten.

Beweis: Wir betrachten dazu ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC > 120^\circ$. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt P im Innern des Dreiecks mit minimaler Summe

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| < |\overline{AC}| + |\overline{AB}|.$$



Da wegen $\sphericalangle BAC > 120^\circ$ erst recht $\sphericalangle BPC > 120^\circ$ gilt, muss mindestens einer der Winkel $\sphericalangle APC$ oder $\sphericalangle BPC$ kleiner als 120° sein. O.B.d.A. nehmen wir an, dass dies im Dreieck ABP erfüllt sei. Dann gibt es im Innern dieses Teildreiecks einen Punkt F mit

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FP}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}|.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt zudem $|\overline{CF}| < |\overline{CP}| + |\overline{PF}|$. Die Addition der beiden Ungleichungen führt zu

$$|\overline{FA}| + |\overline{FB}| + |\overline{FC}| < |\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}|,$$

im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Summe für den Punkt P . Also realisiert C den FERMAT-Punkt im Dreieck mit stumpfem Winkel bei C . \square

In den Aufgaben der Mathematik-Olympiade standen mehrfach die Summe der Abstände eines Punktes zu den Dreiecks-Eckpunkten im Mittelpunkt. So wurde bereits zur 2. Mathematik-Olympiade 1962/63 in der 4. Runde der Klassenstufe 10 folgende Aufgabe gestellt:

MO021045. Es ist zu beweisen: In jedem Dreieck ist die Summe der Längen der Seitenhalbierenden kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Lösungshinweise: Sind A, B, C die Ecken eines Dreiecks und werden die üblichen Bezeichnungen für die Seiten a, b, c und die Seitenhalbierenden s_a, s_b, s_c verwendet (s. nebenstehende Skizze), so ist zu zeigen

$$s_a + s_b + s_c < a + b + c.$$

Diese Ungleichung würde unmittelbar aus den drei Ungleichungen

$$2 \cdot s_a < b + c \quad , \quad 2 \cdot s_b < c + a \quad , \quad 2 \cdot s_c < a + b$$

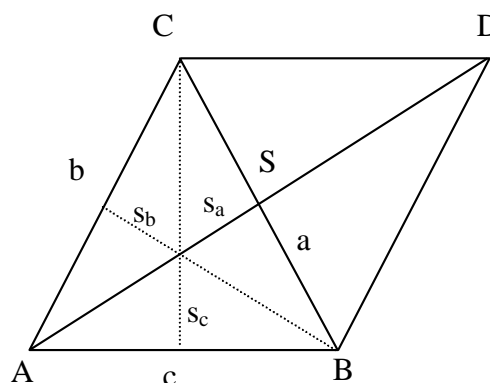
durch deren Addition und anschließender Division durch 2 folgen. Wegen der Symmetrie der Bezeichnungen genügt es, wenn wir eine der drei Relationen beweisen, beispielsweise $2 \cdot s_a < b + c$.

Ist D der Schnittpunkt der Parallelen zu g_{AB} durch C mit der Parallelen zu g_{AC} durch B (der Punkt D existiert, weil die Seiten c und b nicht parallel sind), so ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $|\overline{BD}| = |\overline{CA}| = b$ und der Schnittpunkt S seiner Diagonalen ist sowohl Mittelpunkt von \overline{AD} als auch von \overline{BC} . Folglich ist AS Seitenhalbierende von $\triangle ABC$ und weil sich die Diagonalen in einem Parallelogramm gegenseitig halbieren, gilt:

$$|\overline{AD}| = 2 \cdot |\overline{AS}| = 2 \cdot s_a$$

Somit besteht nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf das Dreieck ABD mit den Seitenlängen c, b und $2 \cdot s_a$ die zu beweisende Ungleichung. \square

Ergänzung: Wir finden in Formelsammlungen über die Zusammenhänge in



allgemeinen Dreiecken für die Seitenhalbierende s_c und die Seiten a, b, c die Gleichung $s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. Durch einfaches Zusammenfassen der drei durch zyklisches Vertauschen der Bezeichnungen entstehenden Gleichungen führt dies zur Formel:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Daraus wegen $s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 < a^2 + b^2 + c^2$ ohne weitere Argumentation auf die gesuchte Ungleichung zu schließen (also nur durch Weglassen der Quadrate), kann nicht korrekt sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Zwar gilt $64 + 64 + 64 < 169 + 9 + 16$,
aber es ist $8 + 8 + 8 > 13 + 3 + 4$.

Wir erkennen jedoch leicht, warum dieses Gegenbeispiel nicht passend ist: 3, 4 und 13 können (wegen der Verletzung der Dreiecksungleichung) nicht Seitenlängen eines Dreiecks sein. Gehen wir aber beispielsweise von der Ungleichung $b < a + c$ aus, so folgt nacheinander:

$$\begin{aligned} |b - a| &< c \\ b^2 - 2ab + a^2 &< c^2 \\ 2 \cdot (b^2 + a^2) - c^2 &< b^2 + 2ab + a^2 = (a + b)^2 \\ s_c &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2} < \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

Aus dieser und den analogen Ungleichungen zu s_a und s_b lässt sich nun unmittelbar auf die behauptete Ungleichung schließen.

Aufgabe MO501023. Im Innern eines Dreiecks ABC ist ein Punkt D beliebig gewählt. Wir bezeichnen die Längen der Strecken \overline{DA} , \overline{DB} , \overline{DC} mit x, y, z und die Länge des Umfangs des Dreiecks ABC mit u . Zeigen Sie, dass stets die Ungleichungskette $\frac{1}{2}u < x + y + z < u$ gilt.

Vorbemerkung: Wählen wir für D den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, so gilt nach dieser Ungleichungskette stets

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(s_a + s_b + s_c) &< u, \\ \text{also } s_a + s_b + s_c &< \frac{3}{2}u. \end{aligned}$$

In Aufgabe MO021045 wurde aber bereits eine strengere Ungleichung bewiesen. Damit stellt sich die Frage, ob die Ungleichung dieser MO-Aufgabe sehr grob ist.

Betrachten wir deshalb beispielsweise ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 und damit mit dem Umfang 3, so beträgt die Abstandsumme zu den Eckpunkten für

den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Wählen wir dagegen einen Eckpunkt als Punkt aus, so ist dessen Abstandssumme 2. In beiden Fällen ist diese Abstandssumme deutlich kleiner als der Umfang des Dreiecks.

Betrachten wir jedoch ein gleichschenkliges Dreieck ABC , dessen Grundseite \overline{AB} sehr klein im Vergleich zu den Dreiecksschenkeln ist, und wählen wir als Punkt P den Eckpunkt C , so ist dessen Abstandssumme zu den Eckpunkten nur wenig kleiner als der Dreiecksumfang. Wir können also die (rechte) Ungleichung aus Aufgabe MO501023 im Allgemeinen nicht verschärfen.

Lösungshinweise: Es sei D ein innerer Punkt und die Abstände zu den Eckpunkten des Dreiecks ABC werden (wie in der Skizze ersichtlich) mit x, y und z bezeichnet.

Dann gelten nach der Dreiecksungleichung:

$$a < y + z$$

$$b < x + z$$

$$c < x + y$$

Zusammenfassend erhalten wir die linke Seite der behaupteten Ungleichung:

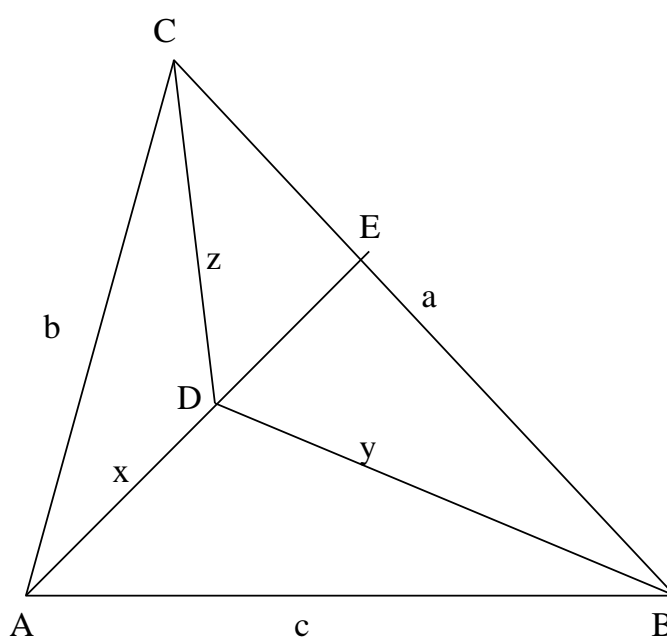
$$\frac{1}{2} \cdot (a + b + c) = \frac{u}{2} < x + y + z.$$

Um die rechte Seite der Ungleichung zu zeigen, bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden durch A und D mit der Seite BC mit E . Wieder mittels Dreiecksungleichung im Dreieck AEC folgt:

$$x + |\overline{DE}| < b + |\overline{CE}|$$

$$\text{also } x + |\overline{DE}| + |\overline{BE}| < b + |\overline{CE}| + |\overline{BE}| = b + a.$$

Wegen $y < |\overline{DE}| + |\overline{BE}|$ ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck BED die Ungleichung $x + y < a + b$. In ähnlicher Weise können die Ungleichungen $x + z < a + c$ und $y + z < b + c$ gezeigt werden. In der Zusammenfassung dieser drei Ungleichungen folgt unmittelbar die rechte Ungleichung der Behauptung. \square

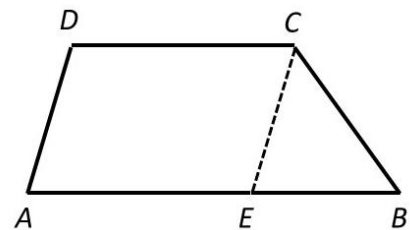


Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil III)

Während aus den drei Seitenlängen eines Dreiecks (sofern die Dreiecksungleichungen erfüllt sind) das zugehörige Dreieck konstruiert werden kann, ist ein Viereck durch Vorgaben der vier Seitenlängen noch nicht eindeutig bestimmt. Es ist eine weitere Bestimmungsgröße erforderlich, also mindestens fünf Angaben. Als Gedankenstütze können wir uns dazu vorstellen, aus drei Bestimmungsstücken ein „halbes“ Viereck (das Teildreieck aus zwei Viereckseiten und einer Diagonalen) konstruieren zu können. Diese nun verfügbare Diagonalenlänge zusammen mit den beiden anderen Bestimmungsstücken genügen, das zweite Teildreieck zu konstruieren. Wenn nicht anders angegeben, werden die Bestimmungsstücke wie im allgemeinen Viereck üblich bezeichnet. Allerdings kann das fünfte Bestimmungsstück durch Eigenschaften der zu konstruierenden Figur implizit gegeben sein.

Aufgabe. Es ist ein Trapez aus den Seitenlängen a, b, c und d zu konstruieren.

Lösungshinweise – Analyse: Aus der Skizze ist leicht zu erkennen, dass sich das Trapez aus einem Parallelogramm $AECD$ mit den Seitenlängen c und d und einem Dreieck EBC mit den Seitenlängen $a - c, b$ und d zusammensetzt. Dabei ist E der Schnittpunkt der zu \overline{AD} parallelen Geraden durch C mit der Grundseite \overline{AB} oder deren Verlängerung.



Wir beginnen mit der *Konstruktion* des Teildreiecks EBC aus den gegebenen drei Seitenlängen, verlängern die Seite \overline{EB} über E hinaus zu A mit $\overline{AB} = a$, zeichnen die Parallele zu \overline{AB} durch C , tragen auf dieser die Länge $\overline{DC} = c$ ab und verbinden A mit D . Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

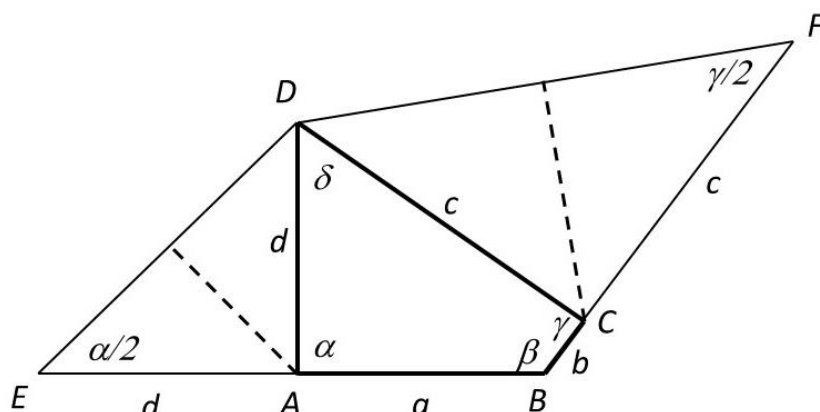
Die Konstruktion ist *eindeutig* ausführbar und die gesuchte Figur *existiert*, wenn das Dreieck EBC konstruierbar ist. Die Seitenlängen $a - c, b$ und d (mit $a > c$) müssen also die Dreiecksungleichungen erfüllen. Gilt $a < c$, ist die Konstruktion entsprechend anzupassen. \square

Aufgabe. Es ist ein Viereck zu konstruieren, wenn⁸ $a + d, b + c$ und die Winkelgrößen α, γ, δ gegeben sind.

Lösungshinweise – Analyse: Es sei $ABCD$ ein Viereck der verlangten Art. Wir verlängern die Seite $\overline{AB} = a$ von A aus um $\overline{AE} = d$ und $\overline{BC} = b$ von C aus um $\overline{CF} = c$. Die entstehenden Dreiecke ADE und DCF sind gleichschenkelig. Damit kennen wir die Innenwinkel am Punkt E , $|\sphericalangle AED| = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ als die Hälfte des

⁸ Diese Schreibweise bedeutet, dass die Summe der Längen gegeben ist, ohne die Einzellängen zu kennen.

Außenwinkels im Punkt A , und am Punkt F , $|\sphericalangle DFC| = \frac{1}{2} \cdot \gamma$ als die Hälfte des Außenwinkels im Punkt C .



Aus diesen Zusammenhängen können wir die *Konstruktion* ableiten:

- An einem beliebigen Punkt B zeichnen wir einen Winkel der Größe $\beta = 360^\circ - (\alpha + \gamma + \delta)$.
- Auf den Schenkeln tragen wir die Längen $\overline{BE} = a + d$ bzw. $\overline{BF} = b + c$ ab.
- Zeichnen wir nun in E einen Winkel der Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$ und in F einen Winkel der Größe $\frac{1}{2} \cdot \gamma$, so schneiden sich die freien Schenkel in einem Punkt D .
- Tragen wir abschließend von D aus Winkel der Größen $\frac{1}{2} \cdot \alpha$ und $\frac{1}{2} \cdot \gamma$ ab, so finden wir mit den Schnittpunkten der freien Schenkel mit \overline{EB} den Punkt A und mit \overline{BF} den Punkt C .

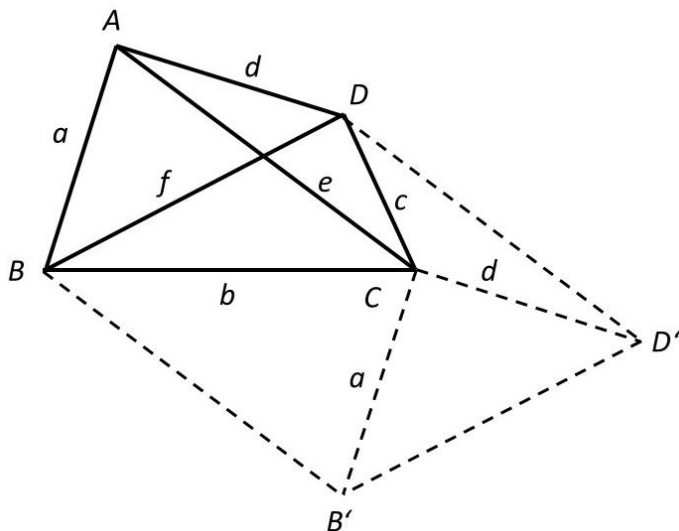
Das Viereck $ABCD$ ist die gesuchte Figur. Der *Beweis* ist in der Analyse gegeben.

Eindeutigkeit: Die Konstruktion ist eindeutig bestimmt (in jedem Konstruktionsschritt wird genau ein neuer Punkt erzeugt).

Existenz: Gilt $180^\circ < \alpha + \gamma + \delta < 360^\circ$, so ist die Konstruktion stets ausführbar. Gilt dagegen $\alpha + \gamma + \delta < 180^\circ$ und damit $\beta > 180^\circ$ ist in einer gesonderten Betrachtung zu erklären, wie die Konstruktionsschritte auszuführen sind. Dieser Sonderfall führt jedoch dazu, dass die Bezeichnung der Bestimmungsstücke nicht der üblichen Reihenfolge entspricht. \square

Aufgabe. Es ist ein Viereck aus den Längen a, c, e und f (wobei e und f die beiden Diagonalen bezeichnen) und der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel zu konstruieren.

Lösungshinweise – Analyse: Es sei $ABCD$ das gesuchte Viereck. Wir tragen die gegebenen Bestimmungsstücke ein, $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ sowie $\overline{AC} = e$, $\overline{DB} = f$ mit dem Schnittpunkt K und eingeschlossenem Winkel $\sphericalangle BKC$. Wir verschieben das Dreieck ABD parallel zur Strecke \overline{AC} und erhalten die Punkte $A' = C$, B' und D' . Das Parallelogramm $BB'D'D$ hat die Seitenlängen e und f mit dem eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle B'BD = \sphericalangle BKC$.



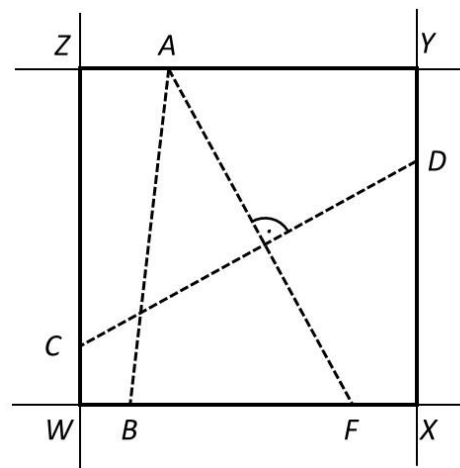
Die *Konstruktion* des Parallelogramms $BB'D'D$ bereitet keine Schwierigkeiten. Den Punkt C erhalten wir als Schnittpunkt des Kreises um B' mit dem Radius a und des Kreises um D mit dem Radius c . Auf der Parallelen zu $\overline{BB'}$ durch C finden wir den Punkt A mit $\overline{AC} = e$.

Eindeutigkeit: Die Konstruktion des Parallelogramms ist stets eindeutig ausführbar. Die beiden Kreise um B' und D schneiden sich in zwei Punkten. Der Punkt A ist dagegen wieder eindeutig konstruierbar. Es sind also zwei Figuren möglich.

Existenz: Für eine erfolgreiche Konstruktion ist die Einhaltung der Dreiecksungleichung $a + c \geq e$ erforderlich. Andernfalls lässt sich der Punkt C nicht ermitteln. Weitere Beschränkungen bestehen nicht. \square

Aufgabe: Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

Lösungshinweise: Es seien die Punkte A, B, C und D vorgegeben. Wir fällen von A das Lot auf die Gerade durch C und D und tragen die Länge der Strecke \overline{CD} von A aus auf \overline{AF} ab. Wir zeichnen die Gerade durch B und F und fällen die Lote von C auf BF (mit dem Fußpunkt W) und von D auf BF (mit dem Fußpunkt X). Die Strecke \overline{WX} ist die gesuchte Quadratseite.



Zur Vervollständigung des Quadrates konstruieren wir die Parallele zu WX durch A . Abschließend errichten wir die Senkrechten in W und X und erhalten die Schnittpunkte Z bzw. Y mit dieser Parallelen. Das Viereck $WXYZ$ erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung. \square

(wird fortgesetzt)

Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22.

Auf einer Digitaluhr werden der Tag, der Monat, die Stunden, die Minuten und die Sekunden jeweils als zweistellige Zahlen dargestellt, also im Format TT.MM.hh:mm:ss.

Wie viele Zeitpunkte gibt es im Jahr, wenn dabei alle zehn Ziffern 0, 1, ..., 9 genau einmal auftreten?

Lösungshinweise: Wir bezeichnen die Ziffern in der angegebenen Reihenfolge mit $T_1, T_2, M_1, M_2, h_1, h_2, m_1, m_2, s_1, s_2$. Aufgrund der Inhalte dieser Variablen müssen wir einige Wertebereiche einschränken:

- E1: $T_1 \in \{0,1,2,3\}, T_2 \in \{0,1\}$ falls $T_1 = 3$,
- E2: $M_1 \in \{0,1\}, M_2 \in \{0,1,2\}$ falls $M_1 = 1$,
- E3: $h_1 \in \{0,1,2\}, h_2 \in \{0,1,2,3\}$ falls $h_1 = 2$,
- E4: $m_1, s_1 \in \{0,1, \dots, 5\}$.

Alle anderen Ziffern können 0,1, ...,9 sein. Wir führen eine Fallunterscheidung unter Berücksichtigung von E1.

- (1) $T_1 = 0$. Dann muss $M_1 = 1$ (weil 0 bereits vergeben ist, E2) und $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3) gelten. Nun gibt es keine zulässige Ziffer für M_2 (weil 0, 1, 2 bereits vergeben sind, E2), d.h. in diesem Fall kann es keine Zeitpunkte geben, die sich mit zehn verschiedenen Ziffern darstellen lassen.
- (2) $T_1 = 1$. Dann muss $M_1 = 0$ (weil 1 bereits vergeben ist, E2), $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3) und $h_2 = 3$ gelten (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E3). Damit verbleiben die zwei Möglichkeiten $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ bzw. umgekehrt $m_1 = 5$ und $s_1 = 4$ (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E4). Auf den vier noch nicht besetzten Stellen können die verbleibenden Ziffern 6 bis 9 beliebig verteilt werden. Dafür gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $2 \cdot 24 = \mathbf{48}$ **Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.
- (3) $T_1 = 2$ und $M_1 = 0$. Dann muss $h_1 = 1$ gelten (weil 0 und 2 bereits vergeben sind, E3). Nun gibt es sechs Möglichkeiten, m_1 und s_1 aus den verbleibenden zulässigen Ziffern 3 bis 5 auszuwählen (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E4). Wurde diese Auswahl getroffen, verbleiben fünf Ziffern zur Verteilung auf die noch fünf nicht besetzten Stellen. Jede Verteilung führt zu einer gültigen Darstellung, also $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also in diesem Fall $6 \cdot 120 = \mathbf{720}$ **Möglichkeiten** für Zeitpunkte der geforderten Art.

- (4) $T_2 = 2$ und $M_1 = 1$. Dann muss $h_1 = 0$ gelten (weil 1 und 2 bereits vergeben sind, E3). Damit lässt sich M_2 mit den verbleibenden Ziffern nicht belegen (weil 0, 1 und 2 bereits vergeben sind, E2).
- (5) $T_1 = 3$ und $T_2 = 0$. Daraus folgt zwingend $M_1 M_2 = 12$, womit aber h_1 nicht mehr korrekt belegt werden kann (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E2).
- (6) $T_1 = 3$ und $T_2 = 1$. Daraus folgt zwingend $M_1 = 0$ (weil 1 bereits vergeben ist, E2) und $h_1 = 2$ (weil 0 und 1 bereits vergeben sind, E3), womit aber h_2 nicht mehr korrekt belegt werden kann (weil 0, 1, 2 und 3 bereits vergeben sind, E3).

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Somit gibt es $48 + 720 = \mathbf{768 \text{ Zeitpunkte}}$, die mit zehn verschiedenen Ziffern dargestellt werden können.

Ergänzung: Es lässt sich nun der erste Zeitpunkt eines Jahres dieser Art leicht ermitteln.

Im Fall (2) kann der kleinste Wert den Monat 04 anzeigen (weil $M_1 = 0$, $T_1 = 1$, $h_1 = 2$ und $h_2 = 3$ bereits vergeben sind).

Da jedoch im Fall (3) der Monat 03 möglich ist, gilt es diesen Ansatz zu verfolgen. Da die Ziffern $M_1 = 0$, $h_1 = 1$, $T_1 = 2$ und $M_2 = 3$ bereits vergeben sind, muss $m_1 = 4$ und $s_1 = 5$ gewählt werden (E4).

Daraus folgt: Das erste Mal in einem Jahr werden alle zehn Ziffern am **26.03. 17:48:59** verwendet.

Ebenso lässt sich der letzte Zeitpunkt eines Jahres ermitteln, bei dem alle zehn Ziffern zu verwenden sind.

Unter Berücksichtigung der Fälle (4), (5) und (6) könnte aus dem Fall (3) der späteste Zeitpunkt mit $T_1 = 2$, $M_1 = 0$ und $h_1 = 1$ möglich sein. Wir suchen deshalb eine Lösung mit $M_2 = 9$ und $T_2 = 8$.

Wir finden: Das letzte Mal in einem Jahr werden alle zehn Ziffern am **28.09. 17:56:43** verwendet.

Monatsaufgabe⁹ 2/23. Einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist ein Dreieck DEF mit minimalem Umfang einzubeschreiben, wobei auf jeder Dreiecksseite des Dreiecks ABC eine Ecke des Dreiecks DEF liegt.

⁹ Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 30.04.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Vorwort.....	2
Thema 18.02 – Der Satz des THALES	3
Konstruktion des FERMAT-Punktes	7
Geometrische Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Teil III).....	15
Lösungsdiskussion zur Monatsaufgabe 11/22.	18
Monatsaufgabe 2/23.....	19

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe ¹⁰	Nr.	Thema	Aufgabe
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des THALES	MO621024
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 9.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des THALES	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931

Impressum

Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
 Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
 E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
 Auflage: digital, auf Anfrage auch Papiaerausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

¹⁰ Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter <http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html> erhältlich.