"Wurzel"
Schülerzeitschrift für Mathematik

65 Aufgaben
aus der Zeitschrift
Wurzel
von 1967

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2023

1 Aufgaben

1.1 Aufgaben 1967

Aufgabe 01 - 1967
Sei a ungerade und nicht durch 3 teilbar. Es ist zu beweisen, dass dann $a^2 - 1$ durch 12 teilbar ist.

Aufgabe 02 - 1967
In ein Dreieck ist ein Kreis einbeschrieben, der die Seiten des Dreiecks in den Punkten L, M, N berührt. Zu beweisen ist, dass das Dreieck $\triangle LMN$ stets spitzwinklig ist.

Aufgabe 03 - 1967
Folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ &\vdots \\ x_{99} + x_{100} + x_1 &= 0 \\ x_{100} + x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Aufgabe 04 - 1967
Zu beweisen ist folgender Satz: Wenn $|x| < 1$ und $|y| < 1$, so ist

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| < 1$$

Aufgabe 05 - 1967
Es sind alle Paare (x,y) der positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50} \qquad \text{ist.}$$

Aufgabe 06 - 1967
Es ist zu beweisen, dass für alle ganzen n $(n \geq 2)$ mit $|x| < 1$ die Ungleichung

$$2^n > (1 - x)^n + (1 - x)^n$$

erfüllt ist.

Aufgabe 07 - 1967
Welche der beiden Zahlen ist größer

$$\frac{10^{1965} + 1}{10^{1966} + 1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{10^{1966} + 1}{10^{1967} + 1}$$

Aufgabe 08 - 1967
$[a]$ ist die größte ganze Zahl, die nicht größer ist als a. Man löse:

$$\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$$

Aufgabe 09 - 1967
Es ist zu beweisen:
Wenn die Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen durch 7 teilbar ist, so ist jede der Zahlen durch 7 teilbar.

Aufgabe 10 - 1967
Der Winkel von $19°$ ist mit Hilfe von Zirkel und Lineal in $19°$ gleiche Teile zu teilen!

Aufgabe 11 - 1967
Drei Freunde wollen von A nach B. Ihnen steht dabei ein Motorrad mit Sozius zur Verfügung, das mit der Geschwindigkeit v_1 fährt. Ein Fußgänger läuft mit der Geschwindigkeit v_0.
Welches ist die kürzeste Zeit, in der die Freunde von A nach B gelangen können?

Aufgabe 12 - 1967
Innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt O ist ein Punkt $A \neq O$ gegeben. Man finde den Punkt M auf der der Peripherie so, dass der Winkel $\angle AMO$ maximal wird.

Aufgabe 13 - 1967
Es sind die positiven ganzen Zahlen $a_0, a_1, ..., a_{100}$ gegeben, Weiter ist bekannt, dass

$$\begin{aligned} a_1 &> a_0 \\ a_2 &= 3a_1 - 2a_0 \\ a_3 &= 3a_1 - 2a_1 \\ &\vdots \\ a_{100} &= 3a_{99} - 2a_{98} \end{aligned}$$

ist. Man beweise, dass $a_{100} > 2^{99}$ ist.

Aufgabe 14 - 1967
Man bestimme den Radius eines Kreises, der 3 gegebene kreise, die sich untereinander von außen berühren und die Radien $v_1 = 1$ LE, $v_2 = 2$ LE, $v_3 = 3$ LE besitzen, umschließt.

Aufgabe 15 - 1967
Seien die Seiten a und b eines Dreiecks gegeben. Man konstruiere ein Dreieck so, dass sich die Seitenhalbierenden von a uns b unter einen rechten Winkel schneiden.

Aufgabe 16 - 1967
Ein Schwimmer schwimmt gegen die Strömung der Newa. In der Nähe der "Republikanischen Brücke" verliert er eine leere Flasche. Nachdem er noch 20 Minuten gegen die Strömung geschwommen ist, bemerkt er seinen Verlust und kehrt um, um die Flasche einzuholen. Er holt sie in der Nähe der "Leutnant-Schmitt-Brücke" ein.
Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit der Newa, wenn die Entfernung zwischen den beiden Brücken zwei Kilometer beträgt?

Aufgabe 17 - 1967
Welche Lage muss ein Quader im Raum haben, damit der Flächeninhalt seiner Projektien auf eine horizontale Ebene möglichst groß ist?

Aufgabe 18 - 1967
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für welche die Ungleichung

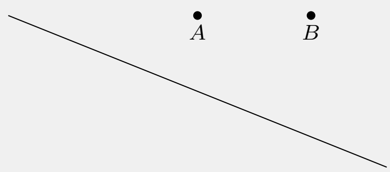
$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geq \frac{8}{3}$$

gilt.

Aufgabe 19 - 1967
Ein Fahrgast der Straßenbahn entdeckt seinen Freund, der die Straße entgegengesetzt zur Fahrtrichtung entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen.
Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn.
Nach insgesamt wieviel Minuten holt er der Freund ein?

Aufgabe 20 - 1967
Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, der außerhalb des Kreises liegt?

Aufgabe 21 - 1967
Gegeben sei eine Gerade g und zwei Punkte A und b, die auf der gleichen Halbebene von g liegen (siehe Skizze).



Auf g ist ein Punkt C so zu konstruieren, dass $\overline{AC} + \overline{CB}$ ein Minimum ergibt.

Aufgabe 22 - 1967
Beweisen Sie, dass die Zahl $53^{103} + 103^{53}$ durch 73 teilbar ist!

Aufgabe 23 - 1967
Es ist zu beweisen, dass der Ausdruck

$$n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$$

für beliebige natürliche n durch 5040 teilbar ist.

Aufgabe 24 - 1967
In 10 m Entfernung von einer senkrechten Hauswand ist ein Strahlrohr installiert, Unter welchen Winkel muss das Strahlrohr gehalten werden, wenn das Haus in maximaler Höhe bespritzt werden soll?
(Wasser $\approx$ 25 ms^{-1})

Aufgabe 25 - 1967
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte A und b verläuft und eine gegebene Gerade g berührt.

Aufgabe 26 - 1967
Es ist zu beweisen, dass $12^{2n} - 5^{3n}$ für alle natürlichen n durch 19 teilbar ist.

Aufgabe 27 - 1967
Man beweise, dass die Summe der Seitenhalbierenden im Dreieck kleiner ist als der Umfang.

Aufgabe 28 - 1967
Beweisen Sie, dass das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, wobei die mittlere die Kubikzahl einer natürlichen Zahl ist, stets durch 504 teilbar ist.

Aufgabe 29 - 1967
Von einer quadratischen Funktion sind die Wertepaare $(0; -14)$ und $(2; 0)$ bekannt. Die erste Ableitung an der Stelle $x_T = -\frac{1}{3}$ beträgt $y' = -1$.
Wie lautet die Punktion?

Aufgabe 30 - 1967
Für welche natürlichen Zahlen n ist der Ausdruck $20^n + 16^n - 3^n - 1$ durch 323 teilbar?

Aufgabe 31 - 1967
Es ist zu zeigen, dass die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender ungerader Zahlen durch 4 teilbar ist. Gilt das gleiche für gerade Zahlen?

Aufgabe 32 - 1967
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck gleichschenklig ist, wenn zwei seiner Seitenhalbierenden gleich sind.

Aufgabe 33 - 1967
Man löse folgende Gleichung:

$$|1-x|+|1+x|=x$$

Aufgabe 34 - 1967
a) a, b seien Seiten eines Dreiecks. Es ist zu zeigen, dass die Fläche des Dreiecks nicht größer ist als

$$\frac{a \cdot b}{2}$$

b) a, b, c, d seien die Seiten eines Vierecks, wobei a der Seite c und b der Seite d gegenüberliegen. Man beweise, dass die Fläche des Vierecks

$$\frac{(a+c)\cdot(b+d)}{4}$$

nicht überschreitet.

Aufgabe 35 - 1967
Man berechne folgende Summe:

$$1^2-2^2+3^2\mp ...+99^2-100^2=?$$

Aufgabe 36 - 1967
In einem Kreis seien zwei Radien gegeben. Wie ist eine Sehne zu legen, damit sie von diesen Radien in drei gleiche Abschnitte geteilt wird?

Aufgabe 37 - 1967
Man teile einen Winkel von $54°$ mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile.

Aufgabe 38 - 1967
$[a]$ ist die größte ganze Zahl, die a nicht überschreitet. Man bestimme alle x, für die gilt:

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\left[\frac{15x-7}{5}\right]$$

Aufgabe 39 - 1967
Zwei Kreise schneiden sich in den Punkten A und B. Durch A und B sei je eine Gerade gezogen. Diese Geraden schneiden den Kreis k_1 in den Punkten C und D, den Kreis k_2 in den Punkten E und F.
Es ist zu zeigen, dass $CD \parallel EF$ gilt!

Aufgabe 40 - 1967
Die Zahl $a+\frac{1}{a}$ sei ganz. Man beweise, dass dann gilt: Für beliebiges, natürliches n ist

$$a^n+\frac{1}{a^n}$$

ganz.

Aufgabe 41 - 1967
Man beweise: Sind bei den Zahlen a und b die letzten m Ziffern gleich, so sind auch bei den Potenzen a^n und b_n (n nat.) die letzten m Ziffern gleich.

Aufgabe 42 - 1967
Wie groß ist die maximale Fläche des Dreiecks, für dessen Seiten folgende Beziehung gilt:

$$0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$$

Aufgabe 43 - 1967
Beweisen Sie, dass das Produkt der Ziffern einer mehrstelligen Zahl immer kleiner als die Zahl selbst ist.

Aufgabe 44 - 1967
Es seien $x,y > 0$ und $x + y = 5$. Man bestimme den kleinsten Wert für $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$!

Aufgabe 45 - 1967
Im Viereck $ABCD$ sei M der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$ und N der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{BD}$. Die Gerade, die durch M und N verläuft, schneide die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in den Punkten M' und N'.
Man beweise: Wenn $MM' = NN'$, dann gilt $AB \parallel BC$!

Aufgabe 46 - 1967
Man löse folgende Gleichung:

$$|1 - x| + (x - 1) = x$$

Aufgabe 47 - 1967
Man beweise ohne Tafel, dass

$$\frac{1}{\log_a \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$$

gilt.

Aufgabe 48 - 1967
Auf der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABO mit den gegebenen Seiten $\overline{AO} = a$ und $\overline{OB} = b$ konstruiere man das gleichseitige Dreieck ABC. Bei welcher Größe des Winkels $\angle AOB$ hat der Abschnitt $\overline{OC}$ die größte Länge ?

Aufgabe 49 - 1967
Man zeige, dass $n^2(n^4 - 1)(n^4 - 16)$ durch 1800 teilbar ist.

Aufgabe 50 - 1967
Man löse die Gleichung:

$$x^2 + 3|x| - 4 = 0$$

Aufgabe 51 - 1967
Man löse im Bereich der ganzen Zahlen folgende Gleichung:

$$x \cdot y = x + y$$

Aufgabe 52 - 1967
a) Man löse die Gleichung $|x^2 - 4| = |2x|$.
b) Man löse die Ungleichung $|x^2 - 4| > |2x|$.

Aufgabe 53 - 1967
Man zeige, dass in der Zahlenfolge

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

jede vierte Zahl durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 54 - 1967
Es ist zu beweisen, dass

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

ist, wenn $ab > 0$ gilt.

Aufgabe 55 - 1967
Gegeben seien 5 Blatt Papier. Davon werden einige in 5 Teile zerrissen. Von diesen werden wieder einige in 5 Teile zerrissen usw. Ist es möglich, dass man auf diese Weise 1967 Teile Papier erhält?

Aufgabe 56 - 1967
Man konstruiere ein Dreieck aus h_c, s_c und dem Umkreisradius r.

Aufgabe 57 - 1967
Man bestimme alle Funktionen f, die folgenden Bedingungen genügen:

$$f(xy) = f(x) \cdot f(x), \qquad f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(x) \neq 0$$

Aufgabe 58 - 1967
Man beweise, dass für alle natürlichen n

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

gilt.

Aufgabe 59 - 1967
Dem Einheitskreis sei ein regelmäßiges 10-Eck einbeschrieben. Man bestimme die Summe der Quadrate der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Peripherie zu den Eckpunkten des 10-Ecks.

Aufgabe 60 - 1967
Der Punkt A des Parallelogramms $ABCD$ sei mit den Mitten E und F der Seiten BC und CD verbunden. Man zeige, dass die Diagonale BD durch AE und AF in drei gleiche Teile geteilt wird.

Aufgabe 61 - 1967
Es seien a, b ganze Zahlen. Es ist zu zeigen, dass die kleinste positive Zahl der Form $ax + by = d$ (x, y ganz) gleich dem größten gemeinsamen Teiler von a und b ist.

Aufgabe 62 - 1967
Man zeige, dass

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

Aufgabe 63 - 1967
Man löse das Gleichungssystem

$$x - y = 90 \quad (1)$$
$$\lg x + \lg y = 3 \quad (2)$$

Aufgabe 64 - 1967
Man beweise folgenden Satz:
In einem regelmäßigen Tetraeder ist die Summe der Entfernungen eines beliebigen inneren Punktes zu den Seitenflächen konstant.

Aufgabe 65 - 1967
Man zeige, dass man unter $n+1$ ganzen Zahlen zwei finden kann, deren Differenz durch n teilbar ist.