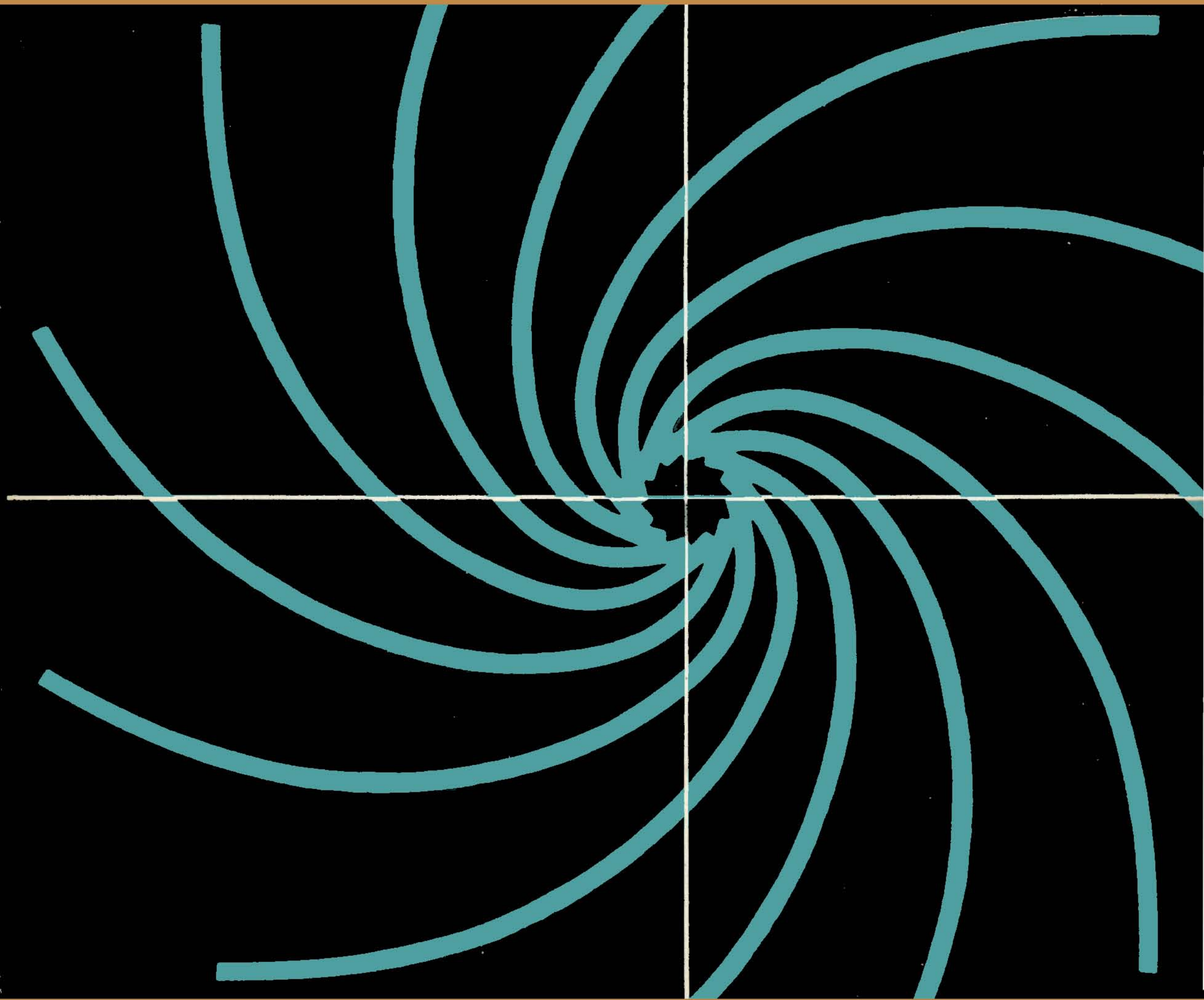
Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Eine Auswahl

Band 1



Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR Band I

Herausgegeben von
Prof. Dr. W. Engel, Universität Rostock
Prof. Dr. U. Pirl, Humboldt-Universität Berlin

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1972

1. Auflage
Lizenz Nr. 203 · 1000/71 (E)
ES 10 C
Redaktion: Karlheinz Martin, Ingrid Fabian
Einband: Manfred Behrendt
Typografie: Atelier vwv
Gesamtherstellung: veb werkdruck leipzig
Gesetzt aus der Extended
Redaktionsschluß: 16. August 1971
Bestell-Nr. 00 21 70-1
Preis: 6,— M

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

In der Deutschen Demokratischen Republik verfügt die Jugend dank der zielstrebigen sozialistischen Bildungspolitik von Partei und Regierung über eine umfangreiche Allgemeinbildung mit hohen mathematisch-naturwissenschaftlichen und technischen Kenntnissen. Aus der Erkenntnis heraus, daß eine umfassende mathematische Bildung immer mehr zu einem wesentlichen Bestandteil der allseitigen Bildung des Menschen der sozialistischen Gesellschaft wird und daß die Bedeutung der Mathematik für das Wachstum der Produktivkräfte der Gesellschaft und für die Weiterentwicklung vieler Wissenschaftsgebiete ständig steigt, faßten das Politbüro des Zentralkomitees der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands und der Ministerrat der Deutschen Demokratischen Republik am 17. Dezember 1962 den bedeutsamen Beschluß „Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR". Dieser Beschluß befaßte sich auch mit der außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet und stellte die große Bedeutung mathematischer Schülerwettbewerbe heraus. Die außerunterrichtliche Tätigkeit der Jugend ist organischer Bestandteil des einheitlichen sozialistischen Bildungssystems, das im Jahre 1965 zum Gesetz erhoben wurde. Auch auf dem VII. Pädagogischen Kongreß der DDR vom 5. bis 7. Mai 1970 wurde auf die Bedeutung der außerunterrichtlichen Arbeit der Schüler hingewiesen.
Im Rahmen der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik spielen die „Olympiaden Junger Mathematiker" eine große Rolle. Nachdem in den Jahren 1960 und 1961 in der Deutschen Demokratischen Republik erstmals Veranstaltungen dieser Art in Berlin und Leipzig durchgeführt worden waren, fand im Schuljahr 1961/62 die I. Olympiade Junger Mathematiker in ihrer jetzigen Form statt. Zu diesem Zeitpunkt gab es in einigen Ländern bereits gute Erfahrungen auf diesem Gebiet und zum Teil sogar feste Traditionen. Als im Jahre 1959 die ersten Schüler aus der Deutschen Demokratischen Republik an der Internationalen Mathematik-Olympiade in der Volksrepublik Rumänien teilnahmen, konnten sie keinen Preis gewinnen. Heute, nach vielen Jahren intensiver Bemühungen zur Hebung des Niveaus des Mathematikunterrichts in unseren Schulen zur Verbesserung der Leistungen unserer Schüler, können wir feststellen, daß die Durchführung der Mathematik-Olympiaden neben anderen Maßnahmen, die nach dem oben genannten Beschluß in die Wege geleitet wurden, von Erfolg gekrönt war.
Die Mathematik-Olympiaden haben sich einen festen Platz in der außerunterrichtlichen Arbeit erobert. Sie werden vom Ministerium für Volksbildung und der Mathematischen Gesellschaft der Deutschen Demokratischen Republik im Zusammenwirken mit dem Zentralrat der Freien Deutschen Jugend und mit Unterstützung des Ministeriums

für Hoch- und Fachschulwesen in jedem Schuljahr für Schüler der zehnklassigen allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen, der Erweiterten Oberschulen, der Berufsschulen, der Volkshochschulen und Abendoberschulen in der DDR durchgeführt.
Die Olympiaden Junger Mathematiker dienen der Erhöhung des Niveaus der sozialistischen Bildung und Erziehung der Schüler und sind Bestandteil des sozialistischen Bildungs- und Erziehungsprozesses unserer Schuljugend.

Sie haben das Ziel:
- dazu beizutragen, daß sich die Schüler innerhalb und außerhalb des Unterrichts ein solides Wissen und Können auf dem Gebiet der Mathematik aneignen;
- allen Schülern die wachsende Bedeutung der Mathematik für die weitere Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft in der DDR bewußtzumachen;
- das Interesse und die Begeisterung für das Fach Mathematik zu wecken und zu vertiefen, die mathematischen Kenntnisse der Schüler zu erweitern, die Mädchen und Jungen zu mathematischem Denken zu erziehen und zur Lösung mathematischer Probleme zu befähigen;
- dazu beizutragen, spezielle Begabungen, Interessen und Talente zu entwickeln sowie mathematisch interessierte und talentierte Schüler zu ermitteln, damit ihre systematische Förderung erfolgen kann.

Schließlich bieten die Aufgaben auch dem Lehrer Gelegenheit zur Weiterbildung, indem er selbst die Aufgaben löst und angeregt wird, die zugehörige Theorie zu studieren.
Die Teilnehmer der Mathematik-Olympiaden werden, ihrer Ausbildung entsprechend, in Olympiadeklassen eingeteilt, die im allgemeinen mit den jeweiligen Klassen der zehnklassigen Oberschulen bzw. Erweiterten Oberschulen übereinstimmen. Die genaue Einteilung wird in einer Ausschreibung des Ministeriums für Volksbildung über die jährliche Durchführung der Olympiade Junger Mathematiker festgelegt.

Der Wettbewerb wird in vier Stufen durchgeführt:
1. Stufe: Schulolympiade (Olympiadeklassen 5 bis 12 bzw. 11.12)
2. Stufe: Kreisolympiade (Olympiadeklassen 5 bis 12 bzw. 11.12)
3. Stufe: Bezirksolympiade (Olympiadeklassen 7 bis 12 bzw. 11.12)
4. Stufe: DDR-Olympiade (Olympiadeklassen 10 bis 12 bzw. 11.12)

Dabei setzt die Teilnahme an der 3. und 4. Stufe eine erfolgreiche Beteiligung an der vorangehenden Stufe voraus. Aus den besten Teilnehmern der DDR-Olympiade werden die Teilnehmer an der Internationalen Mathematik-Olympiade (Abk. IMO), die seit 1959 alljährlich von sozialistischen Ländern veranstaltet und ausgerichtet wird, ausgewählt.
Erfolgreiche Teilnehmer an der DDR-Olympiade können bei der Zulassung zu einem Studium, das mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten erfordert, vorrangig berücksichtigt werden. Von großer Bedeutung für den Erfolg der Olympiade sind die richtige Auswahl der Aufgaben und auch die Bewertung der Lösungen. Die Vorbereitung der Aufgaben liegt in den Händen der Aufgabenkommission, in der Hochschullehrer, wissenschaftliche Mitarbeiter von Hochschulen und Lehrer arbeiten. Jahr für Jahr werden zu diesem Zweck lehrreiche Aufgaben erdacht, ausgewählt und zusammengestellt. Sie bilden einen wertvollen Fundus für den Unterricht, für Arbeitsgemeinschaften, zur Vorbereitung auf Olympiaden sowie zur Begabtenförderung und sollten nicht nur ein einziges Mal in einer Mathematik-Olympiade gestellt werden und dann in Vergessenheit geraten, sondern in der Schule weiterhin verwendet werden. Das vorliegende Buch gibt dem Lehrer die Möglichkeit, die lehrreichsten Aufgaben der vergangenen Mathematik-Olympiaden im Unterricht nutzbar zu machen. In diesem ersten Band sind Aufgaben aus

den Olympiaden Junger Mathematiker der DDR der Jahre 1961/62 bis 1967/68 sowie auch der beiden Vorolympiaden 1960 und 1961 unter fachsystematischen Gesichtspunkten zu Kapiteln zusammengestellt. Es wurden nur Aufgaben aus den Olympiadeklassen 9 bis 12 aufgenommen. Der zweite Band, der sich gegenwärtig in Vorbereitung befindet, wird Aufgaben zur Geometrie enthalten.
Die Autoren der Aufgaben und ihrer Lösungen lassen sich nicht angeben, da Aufgaben und Lösungen häufig mehrfach verändert wurden.
Hinter jeder Aufgabe ist jedoch angegeben, aus welcher Olympiade die betreffende Aufgabe stammt. Es bedeutet in (x/y/z) x die x-te Olympiade (VO 60 und VO 61 bedeuten Vorolympiade 1960 bzw. 1961), y die Olympiadeklasse (9, 10, 11, 12, 11.12) und z die Stufe.
Die nachstehende Tabelle vermittelt einen Überblick über die Numerierung der Olympiaden in den Jahren bzw. Schuljahren:

1. Vorolympiade	1960
2. Vorolympiade	1961
1. Olympiade	1961/62
2. Olympiade	1962/63
3. Olympiade	1963/64
4. Olympiade	1964/65
5. Olympiade	1965/66
6. Olympiade	1966/67
7. Olympiade	1967/68

Für die Bände 1 und 2 wurden die Aufgaben und Lösungen von den wissenschaftlichen Mitarbeitern Dipl.-Math. Ingeborg Bartsch, Dipl.-Math. Dr. paed. Klaus-Dieter Drews (beide Universität Rostock), Liane Tontschew, Edith Wittmann (beide Humboldt-Universität Berlin) überarbeitet und in ein gewisses System gebracht.
Da die Sammlung Aufgaben der Klassenstufen 9 bis 12 enthält, kann es gelegentlich vorkommen, daß ein Beweis eines Lehrsatzes wesentlicher Teil einer Aufgabe ist, z.B. bei Aufgaben der Klassenstufe 9. In einem solchen Fall darf selbstverständlich dieser Satz nicht als bekannt angesehen werden. Außerdem dürfen bei der Lösung der Aufgaben der Klassenstufe 9 nur diejenigen Teile verwendet werden, die keine trigonometrischen Funktionen enthalten, da diese in der Klassenstufe 9 unserer Schulen noch nicht behandelt werden – übrigens trifft dies zum Teil auch für solche Aufgaben der Klassenstufe 10 zu, die zu Beginn des Schuljahres gestellt wurden.
Außer unseren Mitarbeitern danken wir Frau Helga Engel (Rostock) und Herrn Oberstudienrat Herbert Titze (Berlin) für ihre Unterstützung und die wertvollen Hinweise bei der Endredaktion und Frau Ingrid Labrenz (Rostock) für die Herstellung der Reinschrift des Manuskriptes.

Die Herausgeber

VORBEMERKUNGEN

Bei den folgenden Bemerkungen handelt es sich um einige Festlegungen der im Text verwendeten Terminologie; es werden keine strengen Definitionen gegeben.

1. Die Redewendungen „heißen", „bedeuten", „genannt werden", „versteht man" werden stets im Sinne von „genau dann, wenn ..." verwendet.

2. Mit der Formulierung „Wenn das Gebilde g der Bedingung B genügt, so heißt es ein Element der Menge $\mathfrak{M}$" ist gemeint: „g ist dann und nur dann Element von $\mathfrak{M}$, wenn es der Bedingung B genügt."

3. „O. B. d. A." ist die Abkürzung für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit".

4. „Notwendige Bedingung" und „hinreichende Bedingung" werden am Beispiel der Aufgabe A.2.8 erläutert.

5. Alle vorkommenden Zahlen sind, wenn nichts anderes gesagt wird, unter Verwendung des dekadischen Systems dargestellt bzw. darzustellen.

6. $\{a_1, a_2, a_3\}$ bezeichnet die Menge aus den Elementen a_1, a_2, a_3. Es ist also $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_2, a_3, a_1\} = \{a_2, a_1, a_3\}$ usw. Ferner ist $\{a_1, a_1\} = \{a_1\}$.

7. (a_1, a_2) bezeichnet das geordnete Paar, (a_1, a_2, a_3) bezeichnet das geordnete Tripel, (a_1, a_2, a_3, a_4) bezeichnet das geordnete Quadrupel aus den Elementen a_1, a_2, a_3, a_4. Es ist $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ dann und nur dann, wenn $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$ ist usw.

8. Unter einer Lösung einer gegebenen Gleichung oder einer Ungleichung oder eines Systems von Gleichungen oder eines Systems von Ungleichungen mit zwei Variablen (Unbekannten) x, y versteht man ein geordnetes Zahlenpaar (x_0, y_0), dessen Elemente beim Einsetzen in jede der gegebenen Gleichungen bzw. Ungleichungen diese erfüllen. Entsprechend ist jede Lösung einer Gleichung mit drei Variablen ein geordnetes Zahlentripel usw.

9. Zwei Gleichungen (Ungleichungen) heißen gleichwertig oder äquivalent, wenn bei beiden Gleichungen (Ungleichungen) die Mengen ihrer sämtlichen Lösungen dieselben Mengen sind.

10. Der Satz „Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich – bis auf die Reihenfolge der Faktoren – eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben“ wird häufig benutzt, ohne daß besonders auf ihn verwiesen wird.

11. Für ganze Zahlen a, b bedeutet

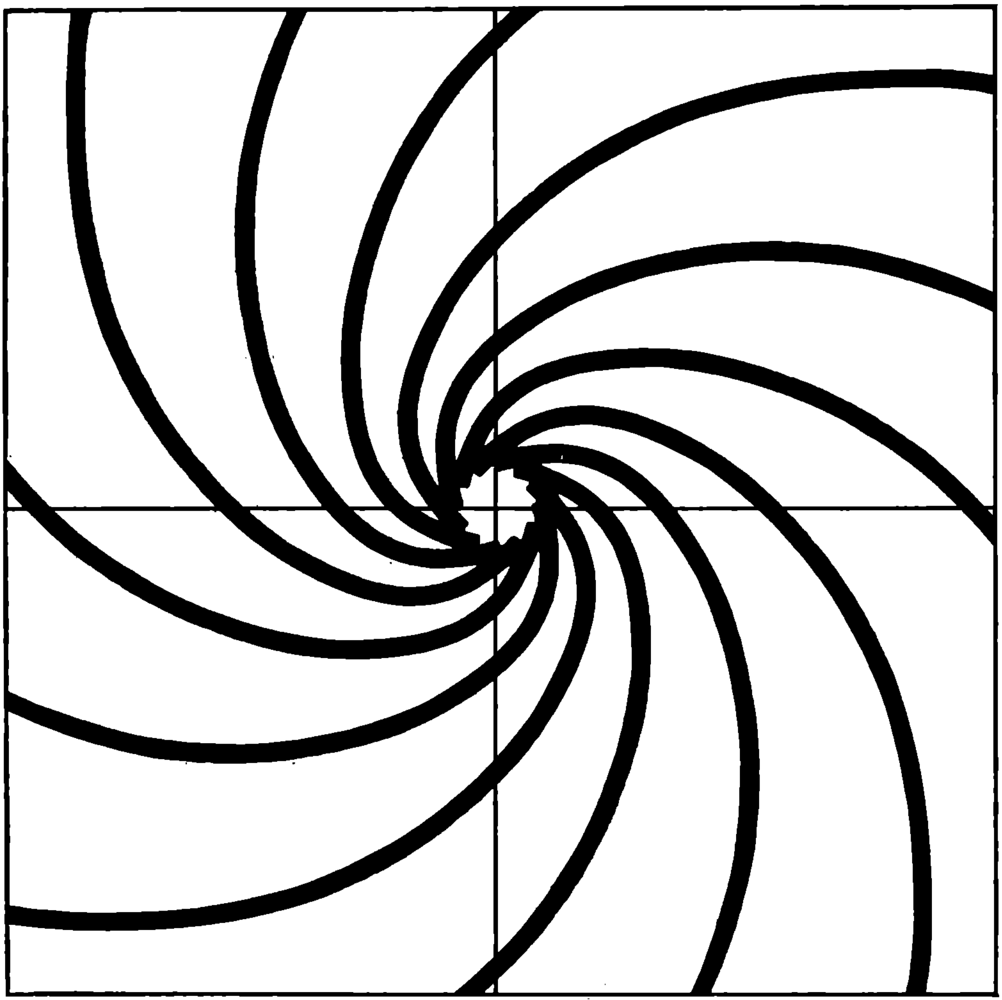
$a|b$: a ist Teiler von b,
a, b teilerfremd: a und b haben den größten gemeinsamen Teiler 1,
$a \equiv b \pmod{n}$: n ist Teiler von $a - b$.

12. Für eine beliebige Zahl m und eine natürliche Zahl k bedeuten

$$k! = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = 1, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k, & \text{falls } k > 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

$$\binom{m}{k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ m, & \text{falls } k = 1, \\ \dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}, & \text{falls } k > 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

AUFGABEN



1. ARITHMETIK

A.1.1 Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

(1)	Er addiert die Faktoren	$95 + 97 = 192$
(2)	Er streicht die erste Stelle der Summe	92
(3)	Er bildet die Differenz aus 100 und dem einen Faktor und die Differenz aus 100 und dem anderen Faktor und multipliziert die Differenzen. Ergibt sich als Produkt eine einstellige Zahl, so schreibt er eine Null davor	$3 \cdot 5 = 15$
(4)	Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält	9215

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!
(4/9/2)*

A.1.2 Das Produkt von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110355024.
Wie lauten die Zahlen?
(3/9/3)

A.1.3 Unter der Zahl „$n!$“, gelesen „n Fakultät“, versteht man das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ aller natürlichen Zahlen von 1 bis n.
So ist z.B. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.
Auf wieviel Nullen endet die Zahl „50!“?
Begründen Sie Ihre Antwort!
(VO 61/10/3)

* Vgl. mit dem Hinweis im Vorwort!

A.1.4 Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$123456789101112131 4 \ldots 979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.
Wie lautet diese?
(7/9/3)

A.1.5 Eine ganze Zahl wird mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl geschrieben.
Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?
(4/10/3)

A.1.6 Es seien $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{100}$ die ersten 100 Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.
Man ermittle die genaue Anzahl der „Endnullen" der Zahl

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdot \ldots \cdot (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdot \ldots \cdot p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1).$$

(3/10/4)

A.1.7 Mit welcher Ziffer endet die Zahl 2^{100}?
(VO 61/9/3)

A.1.8 Mit welcher Ziffer endet die Summe

$$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6?$$

(1/10/3)

A.1.9 Beweisen Sie, daß für jedes natürliche n, $n > 1$, die Zahl

$$2^{2^n} + 1$$

mit der Ziffer 7 endet!
(7/10/2)

A.1.10 Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$3^{999} - 2^{999}?$$

(4/11/1)

A.1.11 Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$7^{7^{7^{7}}} - 7^{7^{7}}\ ?$$

(7/11.12/3)

A.1.12 Es sind alle ganzzahligen Zähler und Nenner eines Bruches zu finden, der die rationale Zahl 0,4 darstellt und bei dem die Summe aus Zähler und Nenner eine zweistellige Quadratzahl ist.
(1/9/3)

A.1.13 Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig, $q \neq 0$ und größter gemeinsamer Teiler von p und q gleich 1). Man beweise, daß dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist.
(6/10/2)

A.1.14 Ist
„Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl“
ein (richtiger) mathematischer Lehrsatz?
(4/9/3)

A.1.15 Weisen Sie nach, daß alle Zahlen der Form

$$1331,\ 1030301,\ 1003003001,\ \ldots,\ 1\underbrace{00\ldots0}3\underbrace{00\ldots0}3\underbrace{00\ldots0}_{\text{jeweils } k \text{ Nullen}}1$$

Kubikzahlen sind!
(5/10/3)

A.1.16 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so stimmen die Quadrate dieser Zahlen in ihren Endziffern überein.
(2/10/1)

A.1.17 Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen m die Zahl

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

eine natürliche Zahl ist!
(2/10/2)

A.1.18 Es seien m, n, p und q ganze Zahlen mit der Eigenschaft $m - p \neq 0$. Man zeige, daß in diesem Falle $m - p$ genau dann Teiler von $mq + np$ ist, wenn $m - p$ Teiler von $mn + pq$ ist.
(5/10/4)

A.1.19 Man untersuche, ob der folgende Satz richtig ist:
Setzt man vor eine beliebige dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so ist die entstehende sechs- oder siebenstellige Zahl durch 23 und 29 teilbar.
(4/9/1)

A.1.20 Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die „letzte Quersumme“ nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.
Berechnen Sie, wieviel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die „letzte Quersumme“ 9 haben!
(6/9/1)

A.1.21 Gegeben sei eine beliebige mehrstellige natürliche Zahl. Man bilde durch eine beliebige Umstellung ihrer Ziffern daraus eine zweite Zahl. Beweisen Sie, daß die Differenz dieser beiden Zahlen stets durch 9 teilbar ist!
(2/10/2)

A.1.22 Suchen Sie eine zweistellige Zahl, die gleich der Summe aus der Zahl an ihrer Zehnerstelle und dem Quadrat der Zahl an der Einerstelle ist!
Weisen Sie nach, daß es nur eine solche Zahl gibt!
(5/10/1)

A.1.23 Man ermittle sämtliche natürlichen Zahlen größer als 1, durch die jedes Produkt aus drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit ungerader Summe teilbar ist.
(3/10/2)

A.1.24 Es sind sämtliche dreistelligen Zahlen z zu finden, die folgende Eigenschaften haben:

a) z ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer von z, so erhält man $\frac{2}{9}z$.

(2/10/3)

A.1.25 Ein Mathematiker hatte den Schlüssel für das Fach eines Gepäckautomaten verloren. Von der Nummer des Faches wußte er allerdings noch, daß sie eine durch 13 teilbare dreistellige Zahl war und daß sich die mittlere Ziffer als arithmetisches Mittel aus den beiden anderen Ziffern ergab. Das Fach konnte schnell ermittelt werden, da nur wenige Zahlen diese Eigenschaften haben.
Geben Sie alle diese Zahlen an!
(7/10/1)

A.1.26 Die positive ganze Zahl m gehe aus der positiven ganzen Zahl n dadurch hervor, daß man die Ziffern von n in entgegengesetzter Reihenfolge aufschreibt. Ist es möglich, daß $m = 6n$ ist?
(1/11/3)

A.1.27 Jemand benutzt, um die Teilbarkeit natürlicher Zahlen durch 7 zu untersuchen, die folgende „Siebenerregel“:
Von der (mindestens zweistelligen) zu untersuchenden Zahl z wird die letzte Ziffer gestrichen. Von der erhaltenen Zahl wird sodann das Doppelte der gestrichenen Zahl subtrahiert. Die so entstandene Zahl z_1 ist dann und nur dann durch 7 teilbar, wenn z durch 7 teilbar ist. Indem er das Verfahren gegebenenfalls wiederholt anwendet, kann er so von jeder natürlichen Zahl z feststellen, ob sie durch 7 teilbar ist.
Man untersuche, ob diese „Siebenerregel“ richtig ist.
(5/11.12/1)

A.1.28 Geben Sie ohne Benutzung eines Tafelwerks alle zweistelligen Zahlen x an, deren dritte Potenz mit den (auch in der Anordnung) unveränderten Ziffern der Zahl x beginnt!
(3/12/2)

A.1.29 Ermitteln Sie ohne Benutzung eines Tafelwerks alle zweistelligen Zahlen x, deren dritte Potenzen mit den beiden Ziffern der Zahl x in derselben Anordnung wie bei x enden!
(3/12/3)

A.1.30 Ermitteln Sie ohne Benutzung eines Tafelwerks alle vierstelligen Quadratzahlen, deren erste zwei und letzte zwei Ziffern jeweils einander gleich sind!
(7/9/3)

A.1.31 Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist eine positive ganze Zahl z durch 99 teilbar, so ist ihre Quersumme nicht kleiner als 18.
(2/12/3)

A.1.32 Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge). Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in bezug auf die Reihenfolge) endet.
(5/9/3)

A.1.33 Ermitteln Sie alle vierstelligen Zahlen, die gleich der 4. Potenz ihrer Quersumme sind!
(VO 61/12/2)

A.1.34 Ermitteln Sie alle n-stelligen natürlichen Zahlen, die gleich der n-ten Potenz ihrer Quersumme sind!
(6/11.12/1)

A.1.35 Beweisen Sie, daß die Summe von 1000 beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Primzahl sein kann!
(3/9/1)

A.1.36 Beweisen Sie, daß das Produkt von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein kann!
(7/11.12/2)

A.1.37 Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.
Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2 mit $p_2 > 3$ die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!
(6/9/3)

A.1.38
a) Man beweise: Dividiert man eine beliebige Primzahl $p > 30$ durch 30, so ist der Rest entweder 1 oder eine Primzahl.
b) Man untersuche, ob diese Aussage auch bei der Division einer beliebigen Primzahl $p > 60$ durch 60 gilt.

(2/12/4)

A.1.39 Dietmar und Jörg sehen bei einem Spaziergang ein Auto, bei dem im Kennzeichen die Zahl 4949 steht.
Die Tatsache, daß 49 eine Quadratzahl ist, führt sie auf die Frage, ob auch die Zahl 4949 eine Quadratzahl ist. Nach kurzer Überlegung sagt Dietmar: „Ich kann sogar beweisen, daß keine vierstellige Zahl, deren erste gleich ihrer dritten Ziffer und deren zweite gleich ihrer vierten Ziffer ist, eine Quadratzahl sein kann. Übrigens läßt sich auch beweisen, daß unter diesen Zahlen genau eine Primzahl ist."
Führen Sie diese Beweise durch!
(Dietmar faßt dabei alle Kennzeichen von 0001 bis 9999 als vierstellige Zahlen auf.)
(7/10/1)

A.1.40 Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!
(6/9/3)

A.1.41 Es ist zu beweisen, daß die Zahl $z = 2^n + 1$ für keine natürliche Zahl n Kubikzahl ist.
(5/11.12/3)

A.1.42 Man wähle zwei beliebige voneinander verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt. Es ist zu beweisen, daß unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbare ist.
(1/9/2)

A.1.43 Beweisen Sie folgenden Satz:
Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl läßt bei Division durch 3 den Rest 1.
(5/9/3)

A.1.44 Man beweise folgenden Satz:
Vermindert man die siebente Potenz einer von Null verschiedenen natürlichen Zahl a um a, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der ersten, zweiten und dritten Potenz von a teilbar.
(2/9/2)

A.1.45 Es ist zu beweisen, daß das Produkt von sechs beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets durch 720 teilbar ist.
(VO 61/12/2)

A.1.46 Man beweise:
Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl
$$z = m \cdot n \cdot (m^4 - n^4)$$
durch 30 teilbar.
(6/10/4)

A.1.47 Beweisen Sie, daß die Summe der Kuben dreier unmittelbar aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch 9 teilbar ist!
(2/10/3)

A.1.48 Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl
$$z = n^3 + 11n$$
durch 6 teilbar ist.
(3/10/3)

A.1.49 Für alle ungeraden Zahlen n ist die Differenz $n^2 - 1$ durch 8 teilbar. Beweisen Sie diesen Satz!
(VO 61/9/3)

A.1.50 Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ für jedes ungerade n durch 48 teilbar ist.
(3/11/2)

A.1.51 Beweisen Sie, daß die Zahl $2^{256} - 1$ keine Primzahl ist! Geben Sie mindestens drei Primfaktoren dieser Zahl an!
(3/10/2)

A.1.52 Es ist zu entscheiden, durch welche der Primzahlen 2, 3, 5, 13, 109, 151, 491 die Zahl
$$z = 1963^{1965} - 1963$$
teilbar ist und durch welche nicht.
(4/11.12/4)

A.1.53 Zeigen Sie, daß die Zahl $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar ist!
(1/12/1)

A.1.54 Beweisen Sie, daß für jede positive gerade Zahl n die Zahl $z = 3^n + 63$ durch 72 teilbar ist!
(2/10/4)

A.1.55 Es ist zu beweisen, daß für jedes natürliche ungerade n die Zahl $73^n + 1049 \cdot 58^n$ durch 1965 teilbar ist.
(4/11.12/2)

A.1.56 Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl $n \geqq 1$ die Zahl
$$f(n) = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$
durch 19 teilbar ist!
(2/11/2)

A.1.57 Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geqq 5$ durch 24 teilbar ist!
(3/11/1)

A.1.58 Man ermittle sämtliche nichtnegativen ganzen Zahlen n, für die die Zahl $z = 5^n - 4^n$ durch 61 teilbar ist.
(5/11.12/2)

A.1.59 Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist
$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
durch 30 teilbar, dann ist auch
$$p = a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5$$
durch 30 teilbar ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ bedeuten natürliche Zahlen).
(6/11.12/2)

A.1.60 Beweisen Sie folgenden Satz:
Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.
(4/10/4)

A.1.61 Untersuchen Sie den folgenden Satz auf seine Richtigkeit!
Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.
(4/10/3)

A.1.62 Man zeige:
Genügen die natürlichen Zahlen x, y, z der Bedingung

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

so ist ihr Produkt durch 60 teilbar.
(1/12/2)

A.1.63 Welchen Rest läßt eine natürliche Zahl a bei Division durch 73, wenn die Zahlen $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind?
(7/10/4)

A.1.64 Es ist zu beweisen, daß es genau ein Paar (x, y) mit natürlichen Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ Primzahl ist.
(2/12/1)

A.1.65 Gesucht sind vier natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, so daß jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3, \quad d_2 = a_3 - a_2, \quad d_3 = a_2 - a_1,$$
$$d_4 = a_4 - a_2, \quad d_5 = a_3 - a_1, \quad d_6 = a_4 - a_1$$

eine Primzahl ist, wobei auch gleiche Primzahlen auftreten dürfen.
(9/10/2)

A.1.66 Man ermittle die Anzahl aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 1000 und die weder durch 3 noch durch 5 teilbar sind.
(6/10/1)

A.1.67 Es ist zu untersuchen, ob es eine natürliche Zahl z gibt, die auf zwei verschiedene Arten in der Form

$$z = x! + y!$$

dargestellt werden kann, wobei x und y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, für die $x \leq y$ gilt.
(4/11.12/3)

A.1.68 Beweisen Sie, daß $\log_2 6$ keine rationale Zahl ist!
(5/10/3)

2. GLEICHUNGEN

A.2.1 Fritz ermittelt als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52. Er macht die Probe und erhält 17380. Das ist falsch; denn er hatte die Ziffern undeutlich geschrieben und bei der Probe an der Zehnerstelle des Divisors eine 6 als 0 gelesen.

Wie lautet die Aufgabe?

(VO 61/10/3)

A.2.2 Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe.

Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ Elle hinunter, solange, bis sich die Tiere in gleicher Höhe befinden.

Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

(2/9/3)

A.2.3 Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei von Null verschiedene natürliche Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren. Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der erste Schüler 575 Rest 227. Der zweite Schüler erhält 572 Rest 308.

Jeder hatte bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der erste Schüler im Ergebnis 100 und der zweite Schüler 1000 zu wenig erhalten.

Wie heißen die Zahlen a und b?

(3/10/3)

A.2.4 Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:
„Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt."
Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!
(4/9/1)

A.2.5 Herr X, der noch nicht 100 Jahre alt ist, stellt am 30. 05. 1967 fest, daß er jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal benutzt, wenn er sein Geburtsdatum in der soeben verwendeten Schreibweise für Terminangaben notiert und sein Alter in Jahren dazusetzt. Außerdem bemerkt er, daß die Anzahl seiner Lebensjahre eine Primzahl ist. Wann ist Herr X geboren, und wie alt ist er?
(7/10/1)

A.2.6 Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:
„Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du ...."

a) Wie alt war da die Schwester?
b) Wieviel mal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

(5/9/2)

A.2.7 Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Renate, Jürgen und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit der Bemerkung, daß sich jeder nach Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.
Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den restlichen den dritten Teil. Als Renate heimkommt, meint sie, daß keines der Geschwister vor ihr nach Hause gekommen sei. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst zwei und von den übrigen den dritten Teil. Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.
Die Mutter stellt danach fest, daß insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden. Wieviel Kirschen befanden sich anfangs in der Schüssel?
(5/9/3)

A.2.8 Man gebe für die reellen Zahlen a, b, c, d Bedingungen an, die folgendes leisten:

a) Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann hat die Gleichung

$$\frac{a(x+1)+b}{c(x+1)+d} = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad (*)$$

(mindestens) eine Lösung.

b) Wenn die Gleichung (*) eine Lösung hat, so sind die Bedingungen erfüllt.

Es sind also Bedingungen aufzustellen, die für die Lösbarkeit von (*) a) notwendig und b) hinreichend sind. Man ermittle, falls die Bedingungen erfüllt sind, alle Lösungen von (*).

(5/10/3)

A.2.9 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0$$

genügen!

(4/11/1)

A.2.10 Geben Sie alle geordneten Paare (a, b) reeller Zahlen an, deren Summe $a + b$, Produkt ab und Quotient $\frac{a}{b}$ untereinander gleich sind!

(3/9/2)

A.2.11 Man ermittle die Anzahl aller geordneten Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die $m + n = 111$ gilt!

(7/9/2)

A.2.12 Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen a, b, c, für die

$$a + bc = (a + b)(a + c)$$

gilt!

(5/10/3)

A.2.13 Gegeben sind zwei reelle Zahlen a und b. Man gebe eine notwendige und eine hinreichende Bedingung (vgl. Aufgabe A.2.8) so an, daß das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 = a$$
$$x_1 \cdot x_2 = b$$

reell lösbar ist.

(1/10/3)

A.2.14 Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0.$$

(5/9/3)

A.2.15 Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

das Quadrat der anderen Wurzel ist.
(6/10/2)

A.2.16 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung

$$x^2 + x + 3 = k\,(x^2 + 5)$$

eine in x quadratische Gleichung ist, die

a) eine Doppellösung,
b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

(6/10/3)

A.2.17 Man ermittle für jede reelle Zahl p alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z, die dem folgenden Gleichungssystem genügen.

$$\begin{aligned} y + z &= px \\ z + x &= py \\ x + y &= pz \end{aligned}$$

(3/12/1)

A.2.18 a) Geben Sie alle Tripel (x, y, z) reeller Zahlen x, y, z an, die dem folgenden Gleichungssystem genügen!

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\} (*)$$

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (*) entweder in genau einem Koeffizienten oder in genau einem absoluten Glied unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen! Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die das jeweilige Gleichungssystem erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (*) entweder in genau zwei Koeffizienten oder in genau zwei absoluten Gliedern oder in genau einem Koeffizienten und genau einem absoluten Glied unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

(4/11.12/2)

A.2.19 Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= b \\ x_2 + ax_3 + x_4 &= b \\ x_3 + ax_4 + x_1 &= b \\ x_4 + ax_1 + x_2 &= b. \end{aligned}$$

Dabei sind a und b reelle Zahlen (Fallunterscheidung!).
(7/11.12/4)

A.2.20 Geben Sie alle reellen Zahlen x an, die die Gleichung

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x$$

erfüllen, wobei p eine beliebige positive reelle Zahl ist!
(4/11.12/4)

A.2.21 Man gebe alle reellen Zahlen x an, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}\,.$$

(7/10/4)

A.2.22 Ermitteln Sie alle Paare (x, y) reeller Zahlen x und y, die dem folgenden Gleichungssystem genügen, wobei p eine beliebige reelle Zahl ist!

$$\left.\begin{aligned} xy + \frac{x}{y} &= 3p\,(x^2 + y^2) \\ xy - \frac{x}{y} &= p\,(x^2 + y^2) \end{aligned}\right\} (*)$$

(3/12/3)

A.2.23 Es sind alle geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen x und y anzugeben, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x\,(ax^2 + by^2 - a) &= 0 \\ y\,(ax^2 + by^2 - b) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Dabei sind a und b reelle Zahlen mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a \neq b$.
(7/11.12/2)

A.2.24 Man beweise, daß es kein Zahlentripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen x, y, z gibt, für das die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$$

(VO 60/11)

A.2.25 Man ermittle alle geordneten Quadrupel reeller Zahlen (x_1, x_2, x_3, x_4), für die das folgende Gleichungssystem erfüllt ist.

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_4 = 2 \qquad (*)$$
$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3 = 2 \qquad (**)$$
$$x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2 = 2$$
$$x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_1 = 2$$

(5/11.12/4)

A.2.26 Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$$

gilt.
(7/9/3)

A.2.27 Man ermittle sämtliche Paare (a, b) rationaler Zahlen a und b, für die

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3$$

gilt.
(5/9/2)

A.2.28 Man ermittle alle Paare (a, b) reeller Zahlen a und b und alle ganzen Zahlen $n \geqq 1$, für die

$$(a + b)^n = a^n + b^n$$

gilt.
(5/11.12/4)

A.2.29 Ermitteln Sie alle Paare (x, y) positiver ganzer Zahlen x und y, für die

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{50}$$

ist!
(2/10/4)

A.2.30 Gesucht sind alle diejenigen geordneten Tripel (a_1, a_2, a_3) natürlicher Zahlen a_i $(i = 1, 2, 3)$, die die Gleichung

$$\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3$$

erfüllen und für die außerdem $1 \leqq a_i \leqq 10$ gilt.
(7/10/3)

A.2.31 Man ermittle alle reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$$

genügen.

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z.B. ist $\left[\frac{13}{2}\right] = 6$, $[-6,5] = -7$ und $[6] = 6$.

(6/11.12/3)

A.2.32 In der Gleichung

$$\sqrt{A-B} = C \qquad (*)$$

bedeutet A eine positive ganze $2n$-stellige Zahl, bei der alle Ziffern einander gleich (etwa gleich x) sind, entsprechend B bzw. C jeweils n-stellige Zahlen, bei denen alle Ziffern gleich y bzw. z sind. Es gelte: $xyz \neq 0$.

Ermitteln Sie alle Zahlentripel (x, y, z), für die (*) für mindestens zwei voneinander verschiedene positive natürliche Zahlen n erfüllt ist!

(4/11.12/4)

A.2.33 Gesucht sind alle aus paarweise voneinander verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen a, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten von a ist.

(3/9/3)

A.2.34 28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1. Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an. Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil.

Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten. Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen starten, ist gerade, aber nicht Null.

Ermitteln Sie für jede der drei Disziplinen die Anzahl der Teilnehmer!

(5/9/2)

A.2.35 Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiiert werden. Es stehen drei verschiedene Sorten Bücher im Werte von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden, und jeder Preisträger soll genau ein Buch erhalten.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämiierung in dieser Form genau 600 M ausgegeben werden sollen?
(4/10/4)

A.2.36 Die 1007 Teilnehmer eines Kongresses sollen auf möglichst wenig Autobusse mit 13, 29 bzw. 41 Plätzen so verteilt werden, daß kein Platz leer bleibt. Ermitteln Sie für jede Art die Anzahl aller Autobusse, die unter diesen Bedingungen zu bestellen sind!
(5/10/2)

A.2.37 Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Laufe des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden. A sagte: „Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter.“
Nach einigem Überlegen gratuliert ihm darauf B zum Geburtstag.
a) Woher wußte B, ohne weitere Angaben erhalten zu haben, das Geburtsdatum?
b) Wann wurde A geboren?
(6/10/1)

A.2.38 Man ermittle zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung

$$5x + 2y + z = 10n.$$

Bemerkung: Die Lösung (x, y, z) heißt ganzzahlig nichtnegativ, wenn jede der Zahlen x, y, z ganzzahlig und nicht negativ ist.
(6/11.12/4)

A.2.39 Geben Sie vier verschiedene ungeordnete Paare $\{a, b\}$ positiver ganzer Zahlen an, bei denen die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen ein und desselben Paares 105 beträgt!
(Je zwei ungeordnete Paare der Form $\{a, b\}$ und $\{b, a\}$ gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)
(6/9/2)

A.2.40 Man ermittle sämtliche Tripel (a, b, c) ganzer Zahlen a, b, c, für die

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (*)$$

gilt und bei denen

$$c = b + 1 \qquad (**)$$

ist.
(1/11/2)

A.2.41 Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen, und es ist zu zeigen, daß es nur eine Lösung gibt.

```
xx xxx xxx : xxx = xx xxx
 x xx
 ----
    xx xx
     x xx
     ----
     x xxx
     8 xxx
     -----
         0
```

Die Buchstaben x stehen für Ziffern, die nicht einander gleich zu sein brauchen.
(2/9/1)

A.2.42 In der Aufgabe

```
A T O M · A T O M
-----------------
X X X X X
  X X X X X
    X X X X X
      X X X X X
-----------------
X X X X A T O M ,
```

in der jeder der Buchstaben A, T, O, M und jedes der Zeichen X eine der Ziffern von 0 bis 9 bedeuten, ermittle man die Werte von A, T, O und M. Die Buchstaben A, T, O, M bedeuten paarweise voneinander verschiedene Ziffern, und es sei $A \neq 0$. Die Buchstaben X stehen für Ziffern, die nicht gleich zu sein brauchen.
Es sind sämtliche Lösungen anzugeben.
(3/11/2)

A.2.43 In der Aufgabe

```
   V A T E R
 + M U T T E R
 -------------
   E L T E R N
```

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Geben Sie sämtliche Lösungen an!
(4/10/1)

A.2.44 In

$$\begin{array}{r} FUENF \\ +\ \ ZWEI \\ \hline SIEBEN \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß die Addition zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten. Untersuchen Sie, wieviel Lösungen die Aufgabe hat!
(7/10/2)

3. UNGLEICHUNGEN

A.3.1 Vergleichen Sie die beiden Zahlen

$$A = \frac{5678901234}{6789012345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5678901235}{6789012347}$$

bezüglich ihrer Größe!
(5/9/1)

A.3.2 Welcher der beiden Brüche

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{und} \quad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$$

ist der größere?
(3/10/1)

A.3.3 Aus einer Zahlentafel entnehmen wir die Näherungswerte

$$\sqrt[3]{636000} \approx 86{,}00 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{389000} \approx 73{,}00\,.$$

Daraus folgt:

$$z = \sqrt[3]{636000} - \sqrt[3]{389000} \approx 13\,.$$

Untersuchen Sie ohne Benutzung einer Zahlentafel oder eines Rechenstabes, ob z größer oder kleiner als 13 oder gleich 13 ist!
(4/12/1)

A.3.4 Ohne Benutzung einer Tafel oder eines Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1620 + 12\sqrt{17457}} + \sqrt[3]{1620 - 12\sqrt{17457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.
(4/11/1)

A.3.5 Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln oder Nachschlagen in einer Zahlentafel fest, welche der beiden Zahlen

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} \quad \text{und} \quad \sqrt{3} + \sqrt{19}$$

die größere ist!
(3/10/4)

A.3.6 Für die drei reellen Zahlen u, v, w gelte

$$0 < u < 1, \quad 0 < v < 1, \quad 0 < w < 1.$$

Beweisen Sie, daß dann nicht jede der Zahlen

$$u(1 - v), \quad v(1 - w), \quad w(1 - u)$$

größer als $\frac{1}{4}$ ist!
(1/12/4)

A.3.7 Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, daß $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen $1, \frac{p}{q}, \frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

(4/9/1)

A.3.8 Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}$$

gilt!
(2/11/3)

A.3.9 Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a und b stets

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqq 2$$

ist!
(2/12/2)

A.3.10 Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}$$

gilt!
(6/10/3)

A.3.11 Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, von denen höchstens eine Null ist,

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqq\frac{3}{2}$$

gilt, und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.
(2/12/4)

A.3.12 Man beweise folgenden Satz:
Ist $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqq\frac{n}{n-1}.$$

(6/11.12/4)

A.3.13 Beweisen Sie, daß für alle positiven ganzen Zahlen a und b stets

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt[a+b]{a^b\cdot b^a}$$

gilt!
(3/11.12/4)

A.3.14 Beweisen Sie, daß für alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c

$$a^3+b^3+c^3\geqq a^2\cdot\sqrt{bc}+b^2\cdot\sqrt{ac}+c^2\cdot\sqrt{ab}$$

gilt!
(7/11.12/2)

A.3.15 Es seien u, v, c reelle Zahlen mit $|u| < |c|$ und $|v| < |c|$. Es ist zu beweisen, daß dann

$$\left|\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}\right|<|c|$$

gilt.
(5/10/1)

A.3.16 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y die Beziehung

$$x+y\leqq a\sqrt{2}$$

gilt, wenn $x^2+y^2=a^2$, $a\geqq 0$, ist.
(1/12/13)

A.3.17 Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}$$

erfüllen.
(7/9/3)

A.3.18 Man ermittle alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl bedeutet.
(4/10/4)

A.3.19 Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > \dfrac{2}{x + \frac{1}{2}}$,

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x + \frac{1}{2}}$,

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{x + \frac{1}{2}}$

gilt.
(3/12/3)

A.3.20 Geben Sie die Anzahl aller ganzzahligen geordneten Zahlenpaare (x, y) an, die der Ungleichung

$$|x| + |y| \leqq 100$$

genügen!
(6/10/4)

A.3.21 Ermitteln Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x > 2,\ y > 2$$

gilt!
(3/10/3)

A.3.22 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{1}{2} \lg (2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} > 1$$

(6/10/3)

A.3.23 Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{2a + x}$$

genügen!
(6/10/4)

A.3.24 Es sind alle reellen Zahlen x zu ermitteln, die die Ungleichung

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen.
(2/11/1)

A.3.25 Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \geq 1$$

erfüllt ist.
(2/12/3)

A.3.26 Eine Ziegelei Z_1 produziert in einer gewissen Zeit 6 Millionen und eine andere Ziegelei Z_2 in der gleichen Zeit 12 Millionen Ziegel. Diese beiden Ziegeleien versorgen vier Baustellen mit Ziegeln, wobei die Baustelle B_1 einen Bedarf von 5,2 Millionen, die Baustelle B_2 einen Bedarf von 3,0 Millionen, die Baustelle B_3 einen Bedarf von 5,7 Millionen und die Baustelle B_4 einen Bedarf von 4,1 Millionen Ziegeln hat.
Die Entfernungen (in km) von jeder der Ziegeleien zu jeder der Baustellen sind aus folgender Tabelle ersichtlich:

	B_1	B_2	B_3	B_4
Z_1	28	30	37	21
Z_2	26	36	18	20

Es ist zu untersuchen, wieviel Ziegel jede Baustelle von jeder Ziegelei erhält, wenn die Gesamttransportkosten möglichst gering sind und B_3 nur von Z_2 beliefert wird. Es wird vorausgesetzt, daß die Transportkosten je Ziegel der Entfernung proportional sind.
(1/12/3)

A.3.27 In einem Betrieb stehen für Fräsarbeiten zur Verfügung:

a) 3 Fräsmaschinen,
b) 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopf-Spannvorrichtung,
c) 1 Automat.

Mit diesen Maschinen werden zwei Sorten von Werkstücken angefertigt. Die Produktion je Arbeitstag beträgt für die oben angegebenen Maschinenarten je Maschine

a) 10 Stück Sorte I oder 20 Stück Sorte II,
b) 20 Stück Sorte I oder 30 Stück Sorte II,
c) 30 Stück Sorte I oder 80 Stück Sorte II,

wobei jede Maschine nicht nur eine Sorte zu produzieren braucht.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Werkstücken, die mit diesen Maschinen pro Tag angefertigt werden können, wenn von jeder Sorte gleich viele Werkstücke produziert werden sollen.
(2/12/2)

A.3.28 Ein Betrieb liefert jährlich 600 t eines von ihm produzierten Erzeugnisses an einen Betrieb B_1 und 400 t des gleichen Erzeugnisses an einen Betrieb B_2. Für den Transport stehen ein LKW L_1 mit einer Nutzlast von 1 t und ein LKW L_2 mit einer Nutzlast von 4 t zur Verfügung. Der LKW L_1 kann jährlich höchstens 300, der LKW L_2 jährlich höchstens 200 Fahrten durchführen. Die Transportkosten in Mark je Fahrt gehen für die LKW L_1 und L_2 aus folgender Tabelle hervor:

	L_1	L_2
zur Fahrt nach B_1 und zurück	10	20
zur Fahrt nach B_2 und zurück	30	60

Dabei soll unberücksichtigt bleiben, ob die Kosten je nach Beladung innerhalb der zulässigen Grenzen variieren.
Man ermittle die Anzahl der Fahrten pro Jahr jedes LKW zu jedem der beiden Betriebe, bei der die gesamten Transportkosten möglichst gering sind.
(4/11/1)

4. FUNKTIONEN, INSBESONDERE TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

A.4.1 Die geordneten Paare (x_n, y_n) reeller Zahlen x_n, y_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ seien wie folgt definiert:

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 0$$
$$x_{n+1} = x_n + 2y_n \qquad y_{n+1} = x_n + y_n \text{ für } n \geqq 0.$$

Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n$$

gilt.
(5/11.12/3)

A.4.2 Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine Folge „F_n" genannt, wenn n paarweise voneinander verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, \ldots, z_n$.
2. Jede der Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.
3. Je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.
4. Keine Teilfolge hat die Form (a, b, a, b) mit $a \neq b$.

Bemerkung:
Als Teilfolge einer gegebenen Folge

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \text{oder} \quad (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_s)$$

bezeichnet man jede Folge der Form

$$(x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots) \quad \text{oder} \quad (x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_t}),\ m_t \leqq s,$$

mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$.

Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Gibt es bei fest gegebenem n beliebig lange Folgen F_n?
b) Wenn Frage a) für ein n zu verneinen ist: Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die bei diesem n eine Folge F_n haben kann?

(6/11.12/4)

A.4.3 Sechzehn im Dezimalsystem geschriebene natürliche Zahlen mögen eine geometrische Folge bilden, von der jedes der ersten fünf Glieder neunstellig ist. Die folgenden fünf Glieder sind je zehnstellig. Das elfte bis vierzehnte Glied haben je elf Stellen, und das fünfzehnte und sechzehnte Glied sind zwölfstellig. Man beweise, daß es genau eine Folge mit diesen Eigenschaften gibt.
(7/11.12/4)

A.4.4 Ermitteln Sie die Menge aller reellen Zahlen x, für die

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{mit } a, b, c, d \text{ reell und } c \neq 0$$

definiert ist, und geben Sie an, unter welchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Koeffizienten a, b, c und d die Funktion $f(x)$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton abnehmend ist!
Bemerkung: Eine Funktion $f(x)$ heißt streng monoton abnehmend, wenn für jedes Wertepaar (x_1, x_2) mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.
(4/11.12/3)

A.4.5 Beweisen Sie:

a) daß der Ausdruck

$$f(x) = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

für alle reellen Zahlen x definiert ist und die durch $y = f(x)$ für alle reellen x definierte Funktion folgende Eigenschaften hat:

b) Sie ist für alle $x \geqq 1$ streng monoton wachsend.

c) Sie hat den Wertevorrat $0 \leqq y < 1$.

d) Ihr Bild ist axialsymmetrisch.

(2/12/1)

A.4.6 Es seien a eine von Null verschiedene reelle Zahl und f eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ist die Funktion f an der Stelle x definiert, so ist sie auch an den Stellen $x + a$ und $x - a$ definiert.
2. Für alle x, für die die Funktion f definiert ist, gilt

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

a) Es ist zu beweisen, daß die Funktion f periodisch ist, d.h., daß es eine von Null verschiedene reelle Zahl b gibt, so daß

$$f(x) = f(x+kb)$$

für alle x des Definitionsbereiches und für alle ganzen Zahlen k gilt.

b) Geben Sie für $f(x)$ einen rechnerischen Ausdruck an, der die obigen Eigenschaften hat!

(5/11.12/2)

A.4.7 Es sei $y = f(x)$ eine für alle positiven reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle derartigen x folgende Gleichung erfüllt:

$$f(x+1) = (x+1) \cdot f(x). \qquad (*)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle positiven reellen x definierte Funktion.
Für alle positiven reellen Zahlen x sei $f(x)$ von 0 verschieden.
Beweisen Sie:
Die Funktion $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle positiven reellen x die Gleichung

$$\varphi(x+1) = (x+1) \cdot \varphi(x), \qquad (**)$$

wenn für alle diese x-Werte $g(x) = g(x+1)$ ist.
(7/11.12/3)

A.4.8 Geben Sie alle Funktionen $y = f(x)$ mit möglichst großem Definitionsbereich (innerhalb des Bereiches der reellen Zahlen) an, die dort der Gleichung

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx$$

genügen, wobei b eine beliebige reelle Zahl, n eine beliebige ungerade natürliche Zahl und a eine reelle Zahl mit $|a| \neq 1$ ist!
(7/11.12/4)

A.4.9 a) Man ermittle sämtliche Funktionen $y = f(x)$, die für alle reellen Zahlen x definiert sind und der Gleichung

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx$$

(a, b, c reelle Zahlen) genügen, falls $|a| \neq |b|$ gilt.
b) Man diskutiere ferner den Fall $|a| = |b|$.
(5/11.12/3)

A.4.10 Für das Polynom

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

ermittle man alle reellen Zahlen ξ mit folgender Eigenschaft:
a) $f(x)$ nimmt an der Stelle $x = \xi$ seinen kleinsten Wert an.
b) $f(x)$ nimmt an der Stelle $x = \xi$ den größten aller Funktionswerte von $f(x)$ im Intervall $1 \leqq x \leqq 4$ an.
(5/11.12/2)

A.4.11 Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer algebraischen Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.
Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln.
(4/11.12/3)

A.4.12 Man beweise, daß

$$\tan 7°30' = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$$

gilt.
(5/11.12/4)

A.4.13 Es ist das Produkt

$$\sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 45° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 75° \cdot \sin 85°$$

in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich durch Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.
(Beispiel dafür: $\sin 30° \cdot \sin 60° = \frac{1}{4}\sqrt{3}$.)
(7/11.12/3)

A.4.14 Berechnen Sie das Produkt

$$x = \cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$$

ohne Benutzung eines Tafelwerks oder eines Rechenstabes!
(4/12/1)

A.4.15 Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x stets

$$\sin x + \cos x \neq 1{,}5$$

ist!
(2/11/2)

A.4.16 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$ die Ungleichung

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0$$

erfüllt ist.
(7/11.12/4)

A.4.17 Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen gelten:

1. $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$
   für alle reellen x mit $\sin x \neq 0$ und
2. $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n-1)x = 0$
   für alle reellen x mit $\sin x = 0$.

(5/11.12/3)

A.4.18 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

gilt!
(2/11/3)

A.4.19 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x mit $0 \leqq x < 2\pi$, für die

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x =$$
$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

gilt!
(2/12/1)

A.4.20 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2$$

ist!
(3/11/2)

A.4.21 Man ermittle für jede reelle Zahl r alle reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{\sin 3x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + r} = 0 .$$

(3/11.12/4)

A.4.22 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6$$

erfüllen!
(4/11.12/3)

A.4.23 Es sind alle diejenigen in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ gelegenen reellen Zahlen x anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

a) positiv,

b) negativ ist.

c) Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist das?
(6/11.12/3)

A.4.24 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die

$$\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$$

ist!
(3/11/1)

A.4.25 Ermitteln Sie alle positiven reellen Zahlen x, für die

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}$$

gilt!
(2/12/3)

A.4.26 Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x des Intervalls $0 < x < \pi$, für die

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2 \cot 2x}{\cot x} \leqq 1$$

gilt!
(2/11.12/4)

A.4.27 Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x aus dem Intervall $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ stets

$$\sin x + \cos x \geqq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x \cdot \cos x}$$

gilt.
(2/11/1)

A.4.28 Man ermittle alle Paare (x, y) von reellen Zahlen x und y, für die die Gleichung

$$\sin(x + y) = \sin x + \sin y$$

erfüllt ist.
(5/11.12/2)

A.4.29 Ermitteln Sie sämtliche Paare reeller Zahlen (x, y), für die die folgenden beiden Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}\,!$$

(3/12/2)

A.4.30 Ermitteln Sie alle Paare reeller Zahlen (x, y), für die

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}$$

und

$$x + y = \frac{\pi}{2}$$

näherungsweise (bis auf zwei Stellen nach dem Komma) gilt!
(4/11.12/2)

A.4.31 Man ermittle sämtliche Paare reeller Zahlen (x, y), die die Gleichung

$$[\sin(x - y) + 1] \cdot [2\cos(2x - y) + 1] = 6$$

erfüllen.
(5/10/4)

5. LOGISCH-KOMBINATORISCHE AUFGABEN

A.5.1 Ein Student und eine Studentin gehen in ein Café. Der Student bestellt für sich ein Glas Milch und für die Studentin eine Tasse Kaffee. Er entnimmt seinem Glas einen Teelöffel voll Milch und gießt diesen in die Tasse mit Kaffee. Sie rührt den Inhalt ihrer Tasse gut um und entnimmt ihrem Kaffee-Milch-Mischgetränk einen Teelöffel voll (gleiches Volumen wie vorher) und gießt ihn in das Glas des Studenten.
Hat sie am Ende mehr, gleichviel oder weniger (Volumenteile) Milch in ihrer Tasse als er (Volumenteile) Kaffee im Glas?
(3/11/1)

A.5.2 Ein Würfel wird aus 27 kleineren, untereinander gleich großen Würfeln derart zusammengesetzt, daß in jeder Reihe 3 dieser kleinen Würfel nebeneinander liegen. Der zusammengesetzte Würfel wird angestrichen (die 27 kleinen Würfel waren vorher nicht angestrichen). Wieviel der kleinen Würfel haben jetzt keine, wieviel haben genau eine, wieviel haben genau zwei und wieviel haben drei angestrichene Flächen?
Man löse dasselbe Problem, wenn in jeder Reihe 4 bzw. n gleiche Würfel nebeneinander liegen.
(1/11/1)

A.5.3 Es ist zu beweisen, daß 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, daß jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.
(5/9/1)

A.5.4 Fünf Gefäße enthalten je genau 100 Kugeln.
In einigen der Gefäße hat jede der Kugeln eine Masse von 10 g, während in den übrigen Gefäßen jede der Kugeln eine Masse von 11 g hat.
Wie kann man durch eine einzige Wägung feststellen, welche Gefäße Kugeln mit einer Masse von 10 g bzw. von 11 g enthalten?
(1/12/2)

A.5.5 Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit fünf Schuß auf einer 10-Ring-Scheibe genau 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuß hat er mindestens 7 Ringe getroffen.
Wieviel Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?
Bemerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z.B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.
(3/9/2)

A.5.6 Beim Fußball-Toto „13 + 1" ist auf dem Tipschein bei 14 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft man mit einem Sieg rechnet oder ob man Unentschieden erwartet. Bei jedem Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder Unentschieden.
Welches ist die kleinste Anzahl ausgefüllter Tipscheine, unter denen sich in jedem Fall ein Tip mit 14 richtigen Voraussagen befindet?
(3/10/1)

A.5.7 Klaus und Dieter vereinbaren das folgende Spiel:
Klaus nimmt genau 6 Bindfäden gleicher Länge in eine Hand, so daß an jeder Seite seiner Faust sechs Bindfadenenden herausragen. Dieter wird aufgefordert, auf jeder Seite jedes Ende mit genau einem der übrigen zusammenzuknüpfen. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, daß die Bindfäden einen einzigen „Ring" bilden, so hat Dieter gewonnen, anderenfalls hat Klaus gewonnen.
Wer von beiden hat die größeren Gewinnchancen?
Stellen Sie dazu folgende Überlegungen an:

a) Wieviel verschiedene Möglichkeiten m, die Bindfadenenden zu verknüpfen, gibt es überhaupt?
b) In wieviel Fällen r erhält man einen einzigen Ring?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w, daß ein einziger Ring entsteht?

Bemerkung: w ist definiert als $\frac{r}{m}$, wobei m und r in a) und b) erklärt sind.
Dieter hat größere Gewinnchancen als Klaus, wenn $w > 0{,}5$ ist. Beide haben gleiche Gewinnchancen, wenn $w = 0{,}5$ ist.
(5/11.12/1)

A.5.8 Wieviel zweistellige, dreistellige und vierstellige Zahlen lassen sich maximal mit den Ziffern

a) 1, 2
b) 1, 2, 3
c) 1, 2, 3, 4
d) 1, 2, 3, 4, ..., n

durch Hintereinanderschreiben bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen und ein Zahlensystem mit einer Basis, die größer als n ist, vorausgesetzt wird?
(1/12/1)

A.5.9 n Schüler seien in einer Reihe angetreten. Sie erhalten in dieser Reihenfolge die Nummern $1, 2, \ldots, n$.
Ein Umordnungsbefehl bestehe darin, daß jeder Schüler entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt.
Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, \ldots, n-1$ entsteht.
(6/11.12/3)

A.5.10 In einer Ebene sind fünf paarweise voneinander verschiedene Punkte gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen. Je zwei dieser Punkte sind entweder durch eine rote oder eine blaue Strecke so verbunden, daß keine drei von diesen Strecken ein Dreieck derselben Farbe bilden.

a) Beweisen Sie:
   1. Von jedem der fünf gegebenen Punkte gehen genau zwei rote und genau zwei blaue Strecken aus.
   2. Die roten Strecken bilden einen geschlossenen Streckenzug, der alle fünf gegebenen Punkte enthält. Dasselbe gilt für die blauen Strecken.

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, die gegebenen fünf Punkte unter den Bedingungen der Aufgabe durch rote und blaue Strecken zu verbinden!

(6/11.12/1)

A.5.11 Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge C B A D. Damit hatte man aber sowohl die Plätze sämtlicher einzelnen Läufer als auch die Paare aller direkt aufeinanderfolgenden Läufer falsch vermutet.
Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge A D B C. Tatsächlich kamen genau zwei Läufer auf diesen erwarteten Plätzen ins Ziel.
In welcher Reihenfolge erreichten die Läufer das Ziel?
(4/9/1)

A.5.12 Von vier Personen hat jede genau einen der Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:

a) Bei keiner der vier Personen stimmt der Vorname mit dem Zunamen überein.
b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.
c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.

Wie heißen die einzelnen Personen mit Vor- und Zunamen?
(3/10/2)

A.5.13 Von sechs Schülern, die an der zweiten Stufe der Mathematik-Olympiade teilnahmen, erreichten genau zwei die volle Punktzahl. Die sechs Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.
Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:
1) A und C; 2) B und F; 3) F und A; 4) B und E; 5) D und A.
Nun ist bekannt, daß in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.
Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?
(4/10/3)

A.5.14 Bei einem Spiel versteckt jede der drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihrer Handtasche genau einen der Gegenstände: Ball, Bleistift, Schere.
Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.
Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß eine wahr, die beiden anderen falsch sind:

1. Anna hat den Ball.
2. Brigitte hat den Ball nicht.
3. Claudia hat die Schere nicht.

Wie kann Dieter das Problem lösen?
(3/9/3)

A.5.15 Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus:	„Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar.“
Inge:	„Die Zahl ist Radius eines Kreises vom Umfang 2“.
Günter:	„Die Zahl ist kleiner als 3.“
Monika:	„Die Zahl ist Diagonalenlänge eines Quadrates der Seitenlänge 2.“
Bärbel:	„Die Zahl ist irrational.“
Peter:	„Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge 2.“

Ferner erfährt er, daß von den beiden Schülern Klaus und Inge bzw. Günter und Monika bzw. Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.
Wie heißt die Zahl?
(4/9/3)

A.5.16 Vier Personen A, B, C, D legten gemeinsam eine positive ganze Zahl fest. Jede der vier gibt über diese Zahl drei Auskünfte, von denen jeweils mindestens eine wahr und mindestens eine falsch ist.

Die Auskünfte lauten:

A: 1. Die Zahl ist durch 4 teilbar;
2. sie ist durch 9 teilbar;
3. das 11fache der Zahl ist kleiner als 1000.

B: 1. Die Zahl ist durch 10 teilbar;
2. sie ist größer als 100;
3. das 12fache der Zahl ist größer als 1000.

C: 1. Die Zahl ist eine Primzahl;
2. sie ist durch 7 teilbar;
3. sie ist kleiner als 20.

D: 1. Die Zahl ist nicht durch 7 teilbar;
2. sie ist kleiner als 12;
3. das 5fache der Zahl ist kleiner als 70.

Wie lautet die Zahl?
(7/11.12/1)

A.5.17 In einer Arbeitsgemeinschaft einigen sich sechs Teilnehmer auf eine reelle Zahl a, die der siebente Teilnehmer, der vorher das Zimmer verlassen hat, ermitteln soll. Nach seiner Rückkehr erhält er folgende Auskünfte:

1. a ist eine rationale Zahl,
2. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 14 teilbar ist.
3. a ist eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich 13 ist.
4. a ist eine ganzrationale Zahl, die durch 7 teilbar ist.
5. a ist eine reelle Zahl, die die folgende Ungleichung erfüllt
$$0 < a^3 + a < 8000.$$
6. a ist eine gerade Zahl.

Er erfährt, daß von den Auskünften 1 und 2, 3 und 4 sowie 5 und 6 jeweils eine wahr und eine falsch ist.
Wie lautet die Zahl a?
(4/12/3)

A.5.18 Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematik-Olympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.
(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.
(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit einzeln Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.
(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.
(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, ist das Eineinhalbfache seines Alters.
(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.
(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.
(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär?
In welchem Raum führt er Aufsicht?
(Die Altersangaben erfolgen in vollen Jahren.)
(4/9/2)

A.5.19 In einem Abteil des Pannonia-Expresses befinden sich sechs Fahrgäste; jeder von ihnen hat in einer der folgenden Städte seinen einzigen Wohnsitz:
Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E und F (die Reihenfolge entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze).
Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

1. Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
2. Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.
3. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
4. B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
5. Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.
6. Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbuser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?
(1/9/3)

A.5.20 Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt, die einer Laienspielgruppe angehören, wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

(1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

(2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

(3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

(4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

(5) Kurt, der weiß, daß Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!
Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, daß sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.
(6/9/2)

A.5.21 In einer IL 18 der Interflug, die von Budapest nach Berlin fliegt, sitzen fünf Fluggäste in einer Reihe nebeneinander. Jeder von ihnen hat genau einen der Berufe: Journalist, Feinmechaniker, Lehrer, Kapitän und Ingenieur und genau eine der folgenden Staatsangehörigkeiten: Polen, DDR, Ungarn, Zypern und UdSSR. Sie sind 21, 24, 32, 40 und 52 Jahre alt, und jeder von ihnen betreibt genau eine der Sportarten: Handball, Schwimmen, Volleyball, Leichtathletik und Fußball.

Jeder von ihnen hat als Reiseziel genau eine der Städte: Berlin, Leipzig, Dresden, Karl-Marx-Stadt und Rostock. Aus den Gesprächen der Fluggäste entnehmen wir die folgenden Angaben:

(1) Der Ingenieur sitzt ganz links.
(2) Der Volleyballspieler hat den mittleren Platz.
(3) Der Pole ist Journalist.
(4) Der Feinmechaniker ist 21 Jahre alt.
(5) Der Lehrer treibt Schwimmsport.
(6) Der Kapitän reist nach Rostock.
(7) Der Handballspieler ist aus der DDR.
(8) Der Fluggast aus der UdSSR hat das Reiseziel Leipzig.
(9) Der nach Berlin reisende Fluggast ist 32 Jahre alt.
(10) Der Leichtathlet hat das Reiseziel Karl-Marx-Stadt.
(11) Der Fluggast aus der DDR sitzt neben dem aus Ungarn.
(12) Der 52jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Dresden fliegt.
(13) Der 24jährige sitzt neben dem Reisenden, der nach Leipzig fliegt.
(14) Der Ingenieur sitzt neben dem Zyprioten.

a) Welche Staatsangehörigkeit besitzt der Fußballspieler?
b) Wie alt ist der Kapitän?
(4/12/1)

A.5.22 Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $^1/_2$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?
(6/9/1)

A.5.23 Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 „Pluspunkte" gegeben. Am Tage nach dem Abschluß des Turniers hört Peter den Schluß einer Radiomeldung: „... Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, daß seine Lieblingsmannschaft, die an dem Turnier

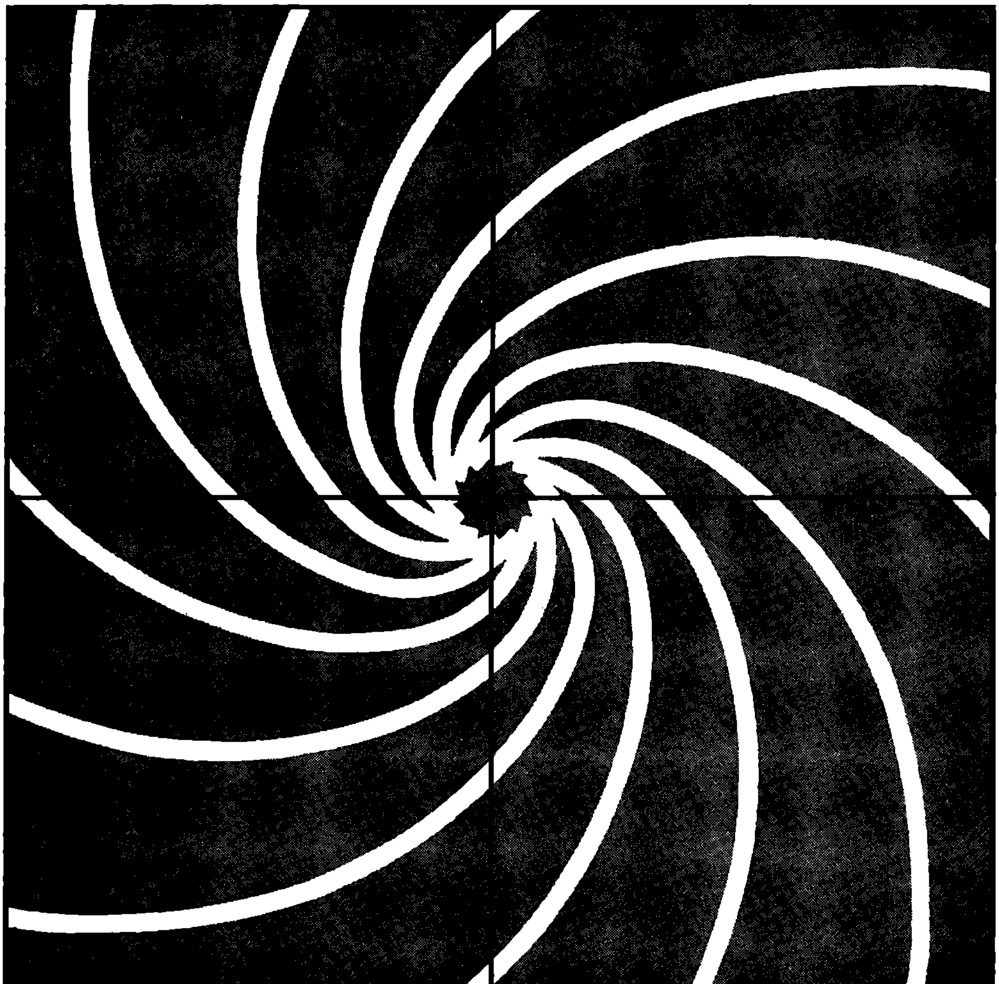
teilgenommen hat, in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben – wenn diese wahr sind – und aus der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Plazierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln.
Wie ist das möglich?
(7/9/1)

A.5.24 An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Dame mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, daß es unter den Anwesenden zwei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, für die folgendes zutrifft: An diesem Abend tanzte jede dieser beiden Damen mit genau einem dieser beiden Herren, und jeder dieser beiden Herren tanzte mit genau einer dieser beiden Damen
(Es wird vorausgesetzt, daß der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h., die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer.)
(5/11.12/4)

A.5.25 Beweisen Sie den folgenden Satz:
Gegeben seien gewisse Gegenstände, von denen jeder eine bestimmte Farbe und eine bestimmte Form hat. Wenn es unter diesen Gegenständen zwei von verschiedener Farbe und zwei von verschiedener Form gibt, dann befinden sich unter den Gegenständen mindestens zwei solche, die sich sowohl in der Farbe als auch in der Form unterscheiden.
(7/11.12/2)

A.5.26 In einer Weberei wird Garn von genau sechs verschiedenen Farben zu Stoffen von je genau zwei verschiedenen Farben verarbeitet. Jede Farbe kommt in mindestens drei verschiedenen Stoffsorten vor. (Dabei gelten zwei Stoffsorten dann und nur dann als gleich, wenn in ihnen dieselben zwei Farben auftreten.)
Beweisen Sie, daß man drei Stoffsorten derart finden kann, daß jede der sechs Farben in einer von ihnen auftritt!
(7/11.12/3)

LÖSUNGEN



1. ARITHMETIK

L.1.1 Die Zahlen seien $100 - a$ und $100 - b$, $0 < a, b < 10$. Nach PATAKI erhält man:

(1) $(100 - a) + (100 - b) = 200 - a - b$.

(2) Die Streichung der 1. Stelle entspricht der Subtraktion von 100:
$(200 - a - b) - 100 = 100 - a - b$.

(3) Man erhält $a \cdot b$.

(4) $$\begin{aligned} 100\,(100 - a - b) + a \cdot b &= 100\,(100 - a) - b\,(100 - a) \\ &= (100 - a)\,(100 - b). \end{aligned}$$

Diese Methode ist also für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig.

L.1.2 Die natürlichen Zahlen seien n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Laut Voraussetzung ist

$$n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3) = 110355024.$$

Daraus folgt

$$n^4 < 111000000, \quad \text{also}$$
$$n < 104.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} (n + 3)^4 &> n\,(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3) \\ (n + 3)^4 &> 100000000 \\ n + 3 &> 100 \\ n &> 97, \end{aligned}$$

also $97 < n < 104$.

110355024 ist nicht durch 5 teilbar, folglich ist auch keine der gesuchten Zahlen durch 5 teilbar.

Also ist $n = 101$.

Die gesuchten Zahlen lauten 101, 102, 103, 104.

L.1.3 Eine Zahl endet dann und nur dann auf Null, wenn sie durch $10 = 2 \cdot 5$ teilbar ist.

50! enthält genau 12mal den Faktor 5 ($5, 10, 15, 20, 25 = 5 \cdot 5, 30, 35, 40$ $45, 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$) und mehr als 12mal die 2, also ist 50! durch 10^{12}, aber nicht durch 10^{13} teilbar.
50! endet also auf genau 12 Nullen.

L.1.4 Die vorgegebene Zahl enthält $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ Ziffern, also insgesamt 192 Ziffern. Genau 92 davon sollen in der zu bildenden Zahl enthalten sein. Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit verschiedener Anzahl von Neunen beginnen, ist diejenige die größere, die mit der größeren Anzahl von Neunen beginnt.
Vor der ersten in der Zahl auftretenden Neun stehen 8 von Neun verschiedene Ziffern, vor der zweiten weitere 19, vor der dritten, vierten und fünften wiederum je weitere 19 von Neun verschiedene Ziffern.
Streichen wir diese, so sind insgesamt 84 Ziffern ($8 + 4 \cdot 19 = 84$) entfernt. Die Zahl beginnt dann so:

$$99999505152535455565758596 0 \ldots$$

Es sind noch 16 Ziffern zu streichen.
Es ist nun nicht mehr möglich, die 19 Ziffern vor der nächsten (ursprünglich sechsten) Neun zu streichen, da dann mehr als 100 Ziffern entfielen.
Von zwei 92stelligen Zahlen, die mit 5 Neunen beginnen und an der sechsten Stelle verschiedene Ziffern haben, ist diejenige größer, die an der sechsten Stelle die größere Zahl enthält. In unserem Fall kommt die Acht dafür nicht in Frage, da dann noch 17 Ziffern zu streichen wären. An der sechsten Stelle kann also höchstens eine Sieben stehen. Das ist auch erreichbar, wenn man die nächsten 15 Ziffern streicht. Entsprechend zeigt man, daß als letzte Ziffer die auf die Sieben folgende Fünf entfernt werden muß.
Die gesuchte Zahl lautet also

$$999997859606162 \ldots 979899100.$$

L.1.5 Die Quersumme der Zahl ist 300. Die Zahl 300 ist durch 3, nicht aber durch 9 teilbar, also ist auch die angegebene Zahl nach dem Satz über die Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung durch 3, nicht aber durch 9 teilbar. Daher kann sie keine Quadratzahl sein.

L.1.6 Die Anzahl der „Endnullen" hängt von der Anzahl der Faktoren $p_1 = 2$ und $p_3 = 5$ ab; denn nur das Produkt der beiden Primzahlen 2 und 5 liefert eine Null.
Im angegebenen Produkt kommt die Zahl 2 genau

$$(1 + 2 + \ldots + 100) \text{ mal},$$

die Zahl 5 genau

$$(1 + 2 + \ldots + 98) \text{ mal}$$

als Faktor vor.
Also hat die Zahl genau

$$1 + 2 + \ldots + 98 = \frac{98 \cdot 99}{2} = 4851 \text{ „Endnullen".}$$

L.1.7 Wir beweisen zunächst den folgenden Hilfssatz:
Die letzte Ziffer jedes Produktes zweier natürlicher Zahlen, deren jede (im Dezimalsystem) die letzte Ziffer 6 hat, ist (im Dezimalsystem) die 6.
Ein Beweis besteht in der folgenden Rechnung:

$$(10a + 6)(10b + 6) = 10(10ab + 6a + 6b + 3) + 6.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} 2^{100} &= 2^{4\cdot 25} = 16^{25} = 16 \cdot 256^{12} = 16 \cdot 256^{2\cdot 6} \\ &= 16 \cdot (10a + 6)^6 = 16 \cdot (10a + 6)^{2\cdot 3} = 16 \cdot (10b + 6)^3 \\ &= 16 \cdot (10b + 6)(10c + 6) = 16 \cdot (10d + 6) = 10e + 6, \end{aligned}$$

wobei a, b, c, d und e natürliche Zahlen bedeuten. Daher endet 2^{100} auf die Ziffer 6.

L.1.8 Die angegebenen Potenzen lassen sich auch in der Form

$$(10 + 1)^6 + (10 + 2)^6 + (10 + 3)^6 + (10 + 4)^6 + (10 + 5)^6 + (10 + 6)^6$$

schreiben. Allgemein gilt

$$(10 + a)^6 = 10^6 + 6 \cdot 10^5 \cdot a + 15 \cdot 10^4 \cdot a^2 + 20 \cdot 10^3 \cdot a^3 + 15 \cdot 10^2 \cdot a^4 + 6 \cdot 10 \cdot a^5 + a^6.$$

Hier tritt bei allen Gliedern außer dem letzten die 10 als Faktor auf. Alle Glieder – außer dem letzten – enden also auf 0, und die Endziffer von $(10 + a)^6$ ist gleich der Endziffer von a^6.

1^6 endet auf 1,
2^6 endet auf 4,
3^6 endet auf 9,
4^6 endet auf 6,
5^6 endet auf 5,
6^6 endet auf 6,

also endet die angegebene Summe auf 1

L.1.9 Für $n \geqq 2$ gilt

$$2^{2^n} = 2^{4\cdot 2^{n-2}} = 16^{2^{n-2}}.$$

Da jede Potenz von 16 mit 6 endet, ist die letzte Ziffer von 2^{2^n} im Falle $n \geqq 2$ stets die 6 und die von $2^{2^n} + 1$ demzufolge die 7.

L.1.10 Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:
Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1, 2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$ überein.
Beweis: Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, daß

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1, 2,$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100\,[100 c_1 c_2 + (10 a_1 + b_1)\, c_2 + (10 a_2 + b_2)\, c_1] + (10 a_1 + b_1)\,(10 a_2 + b_2),$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.
Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1, 2, 3, \ldots, 20$, so erkennt man, daß die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.
Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67.
Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1, 2, 3, \ldots, 22$ erkennt man, daß die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von

$$4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.
Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$. Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

L.1.11 Es ist

$$7^1 \equiv 7 \pmod{100},$$
$$7^2 \equiv 49 \pmod{100},$$
$$7^3 \equiv 43 \pmod{100},$$
$$7^4 \equiv 1 \pmod{100},$$

also

$$7^{4k} \equiv 1 \pmod{100},$$
$$7^{4k-1} \equiv 43 \pmod{100},$$

wobei k eine beliebige natürliche von Null verschiedene Zahl ist.
Nun ist

$$7 \equiv -1 \pmod 4, \text{ also } 7^7 \equiv -1 \pmod 4,$$

d.h.

$$7^7 = 4m - 1,$$

wobei m eine von 0 verschiedene natürliche Zahl ist. Daraus folgt
$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv 43 \pmod{100}$.
Da somit

$$7^{7^7} = 7^{4m-1} \equiv -1 \pmod 4,$$

d.h.

$$7^{7^7} = 4m' - 1 \quad (m' \text{ natürliche von 0 verschiedene Zahl})$$

ist, folgt weiter

$$7^{7^{7^7}} = 7^{7^{4m-1}} = 7^{4m'-1} \equiv 43 \pmod{100}.$$

Daher ist die zu untersuchende Zahl

$$7^{7^{7^7}} - 7^{7^7} \equiv 43 - 43 \equiv 0 \pmod{100},$$

d.h. durch 100 teilbar; jede ihrer letzten beiden Ziffern ist also 0.

L.1.12 Sind p und q Zähler und Nenner eines Bruches der geforderten Art, so ist $q \neq 0$ und $\frac{p}{q} = 0{,}4 = \frac{2}{5}$. Daraus folgt

$$5p = 2q. \tag{1}$$

Folglich ist p gerade und q durch 5 teilbar (wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung), also gilt wegen (1)

$$p = 2r \quad \text{und} \quad q = 5r$$

mit ganzzahligem $r \neq 0$. Außerdem gilt

$$p + q = 7r = s^2 \tag{2}$$

mit natürlichem $s \leqq 9$.
Aus (2) folgt, daß $s > 0$ und durch 7 teilbar und damit gleich 7 ist. Somit muß $r = 7$, $p = 14$ und $q = 35$ sein.
Wegen $14 + 35 = 49 = 7^2$ und $\frac{14}{35} = 0{,}4$ sind 14 und 35 und nur diese die zu findenden Zähler und Nenner.

L.1.13 *Indirekter Beweis:* Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c \neq 0$, $c \neq \pm 1$), dann müßte gelten

$$q - p = c \cdot m \quad (m \text{ ganzzahlig}) \quad \text{und}$$
$$q = c \cdot n \quad (n \text{ ganzzahlig}).$$

Daraus würde folgen

$$p = c\,(n - m).$$

Dann wären jedoch p und q durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

L.1.14 Die erste von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sei n. Dann erhält man folgendes Produkt:

$$n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3).$$

Durch Ausmultiplizieren und Addieren einer 1 ergibt sich

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2,$$

also eine Quadratzahl. Damit ist gezeigt, daß der in der Aufgabe formulierte Satz richtig ist.

L.1.15 Es ist

$$\begin{aligned} 1331 &= 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 = (10 + 1)^3 \\ 1030301 &= 1 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 1 = (10^2 + 1)^3 \\ 1003003001 &= 1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1 = (10^3 + 1)^3. \end{aligned}$$

Folgen bei einer Zahl in der angegebenen Weise jeweils k Nullen direkt aufeinander, so erhält man

$$1 \cdot 10^{3(k+1)} + 3 \cdot 10^{2(k+1)} + 3 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1} + 1)^3.$$

Also ist die angegebene Zahl eine Kubikzahl.

L.1.16 Es seien a und b die beiden ganzen Zahlen.
Da $(a + b)$ nach Voraussetzung durch 10 teilbar ist, ist auch

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

durch 10 teilbar, d.h., diese Differenz endet auf Null. Das ist aber nur möglich, wenn die Endziffern beider Quadrate übereinstimmen.

L.1.17 m sei eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6} = \frac{m(m^2 + 3m + 2)}{6} = \frac{m(m + 1)(m + 2)}{6}.$$

Von den drei unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen m, $m + 1$, $m + 2$ ist wenigstens eine durch 3 teilbar. Mindestens eine dieser drei Zahlen ist durch 2 teilbar, also ist das Produkt $m(m + 1)(m + 2)$ durch 6 teilbar. Da es nicht negativ ist, stellt der zu untersuchende Ausdruck eine natürliche Zahl dar.

L.1.18 *1. Lösung*

Gilt

$$mn + pq = r(m - p), \quad r \text{ ganz,} \tag{1}$$

so folgt wegen

$$(mn + pq):(m - p) = n + \frac{pq + pn}{m - p} \tag{2}$$

aus (1) und (2):

$$pq + pn = s(m - p), \quad s \text{ ganz.} \tag{3}$$

Andererseits gilt

$$(pq + mn):(-p + m) = -q + \frac{mn + mq}{m - p}, \tag{4}$$

und aus (1) und (4) folgt:

$$mn + mq = t(m - p), \quad t \text{ ganz.} \tag{5}$$

Also gilt

$$pq + pn + mn + mq = (s + t)(m - q),$$

woraus wegen (1)

$$mq + np = w(m - p), \quad w \text{ ganz,} \tag{6}$$

folgt. Umgekehrt folgt aus (6) wegen

$$(mq + np):(m - q) = q + \frac{pq + np}{m - p} \tag{7}$$

$$pq + np = u(m - p), \quad u \text{ ganz,} \tag{8}$$

sowie wegen

$$(np + mq):(-p + m) = -n + \frac{mn + mq}{m - p} \tag{9}$$

$$mn + mq = v(m - p), \quad v \text{ ganz.} \tag{10}$$

Also gilt

$$pq + np + mn + mq = (u + v)(m - q),$$

woraus wegen (6)

$$mn + pq = k(m - p), \quad k \text{ ganz,}$$

folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Lösung

Wir setzen $m - p = t$. Dann gilt

$$mq + np = q(t + p) + np = tq + p(n + q),$$
$$mn + pq = n(t + p) + pq = tn + p(n + q).$$

Hieraus folgt, daß jede der beiden linken Seiten genau dann durch t teilbar ist, wenn $p(n + q)$ durch t teilbar ist. Es sind also entweder die beiden linken Seiten durch t teilbar, oder sie sind es beide nicht.

L.1.19 a sei eine beliebige dreistellige Zahl.
Die entstehende sechs- bzw. siebenstellige Zahl lautet dann

$$2a \cdot 1000 + a = 2001 \cdot a = 3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot a.$$

Folglich ist sie durch 23 und 29 teilbar. Daher ist der Satz richtig.

L.1.20 Die Teilbarkeitsregel für die 9 besagt, daß alle und nur diejenigen Zahlen, die durch 9 teilbar sind, eine Quersumme haben, die durch 9 teilbar ist.
Hieraus folgt durch wiederholte Anwendung der Satz: Die letzte Quersumme einer positiven natürlichen Zahl z ist genau dann 9, wenn z durch 9 teilbar ist.
Im Bereich der Zahlen von 1 bis 1000 gibt es genau 111 Zahlen, die durch 9 teilbar sind. Also haben genau 111 Zahlen in diesem Bereich die „letzte Quersumme" 9.

L.1.21 Jede natürliche Zahl läßt bei der Division durch 9 stets den gleichen Rest wie ihre Quersumme. Da die Quersummen der beiden betrachteten Zahlen gleich sind, bleibt bei der Division durch 9 in beiden Fällen dieser gleiche Rest. Bei der Differenzbildung fallen diese Reste weg, so daß die Differenz den Rest 0 läßt, d.h. durch 9 teilbar ist.

L.1.22 Angenommen, es gäbe eine solche Zahl

$$z = 10a + b \text{ mit natürlichen Zahlen } a, b \text{ und } 0 < a < 10,\ b < 10,$$

so gilt die Gleichung

$$10a + b = a + b^2.$$

Dann muß

$$9a = b^2 - b,$$

also

$$a = \frac{b(b-1)}{9}$$

sein.
Da a eine natürliche Zahl ist und b sowie $b - 1$ nicht gleichzeitig durch 3 teilbar sein können, muß entweder b oder $b - 1$ durch 9 teilbar sein. Wegen

$b < 10$ und $a \neq 0$ kann $b - 1$ nicht durch 9 teilbar sein, also muß $b = 9$ sein. a ist dann 8. Also kann nur die Zahl 89 die Bedingungen erfüllen.
Da $89 = 8 + 9^2$ gilt, genügt 89 wirklich den Bedingungen der Aufgabe.

L.1.23 Da die Summe ungerade ist, besteht das Produkt aus zwei geraden und einem ungeraden Faktor. Jede gerade Zahl ist durch 2 teilbar. Von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist genau eine durch 3 teilbar. Von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist genau eine durch 4 teilbar.
Das Produkt ist also durch 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 teilbar und, wie das Beispiel $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ zeigt, nicht immer durch eine weitere natürliche Zahl.

L.1.24 Aus der Eigenschaft a) folgt, daß die gesuchte Zahl ein Vielfaches von 99 ist.
Aus der Eigenschaft b) folgt, daß die letzte Ziffer der gesuchten Zahl kleiner als die erste sein muß. Demnach kommen nur folgende Zahlen in Frage:

$$99 \cdot 6 = 594,$$
$$99 \cdot 7 = 693,$$
$$99 \cdot 8 = 792,$$
$$99 \cdot 9 = 891.$$

Bildet man $\frac{2}{9}$ dieser Zahlen, so erhält man 132, 154, 176 und 198. Nur die letzte Zahl entspricht der Bedingung b). Es gibt also nur eine einzige Zahl mit den geforderten Eigenschaften, und zwar 891.

L.1.25 Laut Aufgabe gilt:

$$100a + 10b + c = 13n \quad (a, b, c, n \text{ ganz})$$
$$0 < a \leqq 9; \quad 0 < b = \frac{a+c}{2} \leqq 9; \quad 0 \leqq c \leqq 9; \quad n > 0. \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$c = 2b - a \tag{2}$$

sowie

$$99a + 12b = 13n$$
$$b = \frac{13n - 99a}{12} = n - 8a + \frac{n - 3a}{12}. \tag{3}$$

Mithin muß

$$n - 3a = 12m \quad (m \text{ ganz})$$

gelten, woraus man

$$n = 12m + 3a \tag{4}$$

erhält. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$b = 13m - 5a. \tag{5}$$

Aus (2) und (5) folgt

$$c = 26m - 11a \tag{6}$$

und aus (5) und (6)

$$16a + b + c = 39m,$$

woraus man unter Berücksichtigung von (1)

$$17 \leqq 39m \leqq 162$$

erhält. Daraus folgt

$$1 \leqq m \leqq 4. \qquad (7)$$

Da $m > 0$ und ganzzahlig sein muß, ergibt sich aus (6) und (1)

$$11a \leqq 26m \leqq 11a + 9. \qquad (8)$$

Mit Hilfe von (7) und (8) ermittelt man aus (5) und (2) als einzig mögliche Zahlen 234, 468, 741 und 975, da jeder Wert von m in (7) genau einen Wert für a in (8) liefert. Da jede dieser vier Zahlen allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie auch Lösung.

L.1.26 Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müßte deren erste Ziffer gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von $m = 6n$ gleich der Ziffernanzahl von n ist. Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.
Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

L.1.27 Nach der gegebenen Regel gilt, wenn a die letzte Ziffer von z bedeutet,

$$z - a = 10\,(z_1 + 2a),$$

also

$$z = 10z_1 + 21a.$$

Daher ist z genau dann durch 7 teilbar, wenn $10z_1$ es ist. Läßt nun z_1 den Rest r bei der Teilung durch 7, wobei $0 \leqq r \leqq 6$ gilt, so läßt z denselben Rest wie $10r$, und dieser Rest ist dann und nur dann Null, wenn $r = 0$ ist ($10p$ ist auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung genau dann durch 7 teilbar, wenn p durch 7 teilbar ist).
Die „Siebenerregel" ist also richtig. Ob sie allerdings schneller zum Ziel führt als die übliche Division durch 7, die bei Nichtteilbarkeit auch den Rest liefert, hängt von der Übung im Umgang mit der Regel ab.

L.1.28 Wenn es eine Zahl x gibt, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ist x^3

1. entweder vierstellig oder
2. fünfstellig oder
3. sechsstellig,

da x eine zweistellige Zahl sein soll.
Da x^3 mit denselben Ziffern in derselben Anordnung wie x beginnt, läßt sich x^3 im ersten Falle in der Form schreiben:

$$x^3 = 100x + y \quad \text{mit} \quad 0 \leqq y \leqq 99,$$

d.h., es gilt

$$100x \leqq x^3 < 100x + 100$$

$$100x \leqq x^3 < 100\,(x + 1). \qquad (1)$$

Der zweite Fall liegt genau dann vor, wenn

$$x^3 = 1000x + y \quad \text{mit} \quad 0 \leqq y \leqq 999, \quad \text{d.h.}$$
$$1000x \leqq x^3 < 1000\,(x + 1), \tag{2}$$

und der dritte Fall, wenn

$$x^3 = 10000x + y \quad \text{mit} \quad 0 \leqq y \leqq 9999, \text{ d.h.}$$
$$10000x \leqq x^3 < 10000\,(x + 1) \tag{3}$$

gilt.
Aus (1) folgt wegen $x \neq 0$

$$100 \leqq x^2 < 100\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

und wegen $x \geqq 10$ gilt daher weiter:

$$100\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqq 100\left(1 + \frac{1}{10}\right) = 110,$$

d.h. $100 \leqq x^2 < 110$. Diese Beziehung ist nur für $x = 10$ erfüllt.
Aus (2) folgt

$$1000 \leqq x^2 < 1000\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leqq 1100. \tag{4}$$

(4) ist nur für $x = 32$ erfüllt.
Aus (3) folgt

$$10000 \leqq x^2.$$

Dies ist nicht möglich, da x zweistellig ist und daher x^2 höchstens 4stellig sein kann.
Folglich sind wegen $10^3 = 1000$ und $32^3 = 32768$ die Zahlen 10 und 32 die einzigen, die der Bedingung der Aufgabe entsprechen.

L.1.29 Wenn es eine Zahl x der geforderten Art gibt, so läßt sie sich in der Form

$$x = 10a + b \tag{1}$$

mit $a = 1, 2, \ldots, 9$ und $b = 0, 1, 2, \ldots, 9$ schreiben, da x eine zweistellige Zahl ist.
$b = 0$ kommt nicht in Frage, da dann die letzten drei Ziffern von x^3 Null wären, was nur für $x = 0$ möglich ist. Laut Aufgabenstellung sind alle Zahlen x gesucht, für die gilt:

$$x^3 = 100n + 10a + b, \tag{2}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist.
Wegen (1) gilt:

$$x^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt, daß $b^3 - b$ durch 10 teilbar ist, sich also in der Form

$$b^3 - b = 10m, \tag{4}$$

wobei m eine natürliche Zahl ist, darstellen läßt.
Weiterhin folgt aus (2) und (3), daß

$$30ab^2 + b^3 - b - 10a$$

durch 100 teilbar ist, sich also in der Form

$$30ab^2 + b^3 - b - 10a = 100k$$

oder

$$3ab^2 + \frac{b^3 - b}{10} - a = 10k \tag{5}$$

darstellen läßt, wobei k eine natürliche Zahl ist. Wegen (4) kommen für b von den Ziffern $1, \ldots, 9$ nur die Ziffern 1, 4, 5, 6 und 9 in Frage. Setzt man diese der Reihe nach in (5) ein, so erhält man:

Für $b = 1$ ergibt sich $a = 5$, d.h.

$$x = 51.$$

Für $b = 4$ ergibt sich: $a = 2$, d.h.

$$x = 24.$$

Für $b = 5$ ergibt sich: $a = 2$ oder $a = 7$, d.h.

$$x = 25 \quad \text{oder} \quad x = 75.$$

Für $b = 6$ folgt: $a = 7$, d.h.

$$x = 76.$$

Für $b = 9$ folgt: $a = 4$ oder $a = 9$, d.h.

$$x = 49 \quad \text{oder} \quad x = 99.$$

Für die Lösung der Aufgabe kommen also nur die Zahlen 24, 25, 49, 51, 75, 76, 99 in Frage.
Durch Bildung der dritten Potenzen dieser Zahlen bestätigt man, daß jede von ihnen allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

L.1.30 Es sei x die erste und y die letzte Ziffer einer derartigen Quadratzahl z. Dann gilt

$$z = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11\,(100x + y)$$
$$\text{mit } 1 \leqq x \leqq 9 \quad \text{und} \quad 0 \leqq y \leqq 9.$$

Daraus folgt $11|z$ und, da z Quadratzahl und 11 Primzahl ist, sogar $11^2|z$. Somit muß gelten

$$11|100x + y.$$

Nun ist

$$100x + y = 99x + x + y,$$

und somit gilt

$$11\,|x + y.$$

Wegen der Einschränkungen für x und y gilt

$$1 \leqq x + y \leqq 18$$

und damit

$$x + y = 11.$$

Daraus folgt

$$100x + y = 99x + x + y = 11\,(9x + 1)$$

und somit

$$z = 11^2(9x + 1).$$

Da z Quadratzahl ist, muß auch $9x + 1$ Quadratzahl sein. Wegen $1 \leqq x \leqq 9$ ist dies (wie man z.B. durch Berechnung der Zahlen $9x + 1$ für $x = 1, 2, \ldots, 9$ feststellen kann) nur für $x = 7$ der Fall.

Umgekehrt führt $x = 7$ in der Tat wegen $9 \cdot 7 + 1 = 64$ auf die Quadratzahl

$$z = 121 \cdot 64 = 7744 = 88^2.$$

Diese ist somit die einzige vierstellige Quadratzahl, die allen geforderten Bedingungen genügt.

L.1.31 Die Zahl z läßt sich im dekadischen System folgendermaßen darstellen:

$$z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 10^0,$$

wobei $a_n, \ldots, a_0$ natürliche Zahlen kleiner als 10 sind und $a_n \neq 0$ ist.
Da z durch 9 teilbar ist, ist die Quersumme

$$q = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

von z durch 9 teilbar, und, da z durch 11 teilbar ist, ist die alternierende Quersumme

$$q' = a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0$$

von z durch 11 teilbar.
Setzt man die Summe der positiven Summanden von q' gleich a und die Summe der übrigen Summanden gleich $-b$, so gilt

$$q' = a - b = 11m \quad \text{und} \quad q = a + b = 9k,$$

wobei a, b nichtnegative, k eine positive ganze Zahl und m eine ganze Zahl bedeuten. Es ist jetzt zu zeigen, daß $k \neq 1$ ist.
Angenommen, es gelte $k = 1$, so folgt

$$a + b = 9 \quad \text{und} \quad a - b = 11m,$$

d.h.

$$a = \frac{9 + 11m}{2} \tag{1}$$

und

$$b = \frac{9 - 11m}{2}. \tag{2}$$

Da a nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus (1), daß $1 \leqq m$ gilt. Da b nichtnegativ und ganzzahlig ist, folgt aus (2), daß $m \leqq -1$ gilt.
Diese beiden Bedingungen für m sind jedoch unvereinbar miteinander. Daher ist die Annahme $k = 1$ nicht richtig, und es ist $k \geqq 2$, d.h., die Quersumme q ist größer als oder gleich 18.

L.1.32 Es sei

$$x = 100c + d, \quad d = 10a + b \quad \text{und } a, b, c \text{ natürliche Zahlen}$$
$$\text{mit } 0 \leqq a \leqq 9, \; 0 \leqq b \leqq 9.$$

Dann gilt:

$$(100c + d)^2 = 100e + d, \; e \text{ natürliche Zahl},$$
$$10000c^2 + 200cd + d^2 = 100e + d$$
$$100e = 10000c^2 + 200cd + d^2 - d$$
$$e = 100c^2 + 2cd + \frac{d^2 - d}{100}.$$

Es ist e genau dann ganzzahlig, wenn $d\,(d-1)$ durch 100 teilbar ist. Da d und $d-1$ nicht gleichzeitig durch 5 teilbar sein können, muß einer der beiden Faktoren durch 25 teilbar sein. Wegen $d < 100$ ergeben sich genau folgende Möglichkeiten dafür:

d	$d-1$	$100 \mid d^2 - d$
0	-1	ja
1	0	ja
25	24	ja
26	25	nein
50	49	nein
51	50	nein
75	74	nein
76	75	ja

Folgende geordneten Paare (a, b) und nur diese erfüllen die gestellte Bedingung: (0,0); (0,1); (2,5) und (7,6).

L.1.33 Da $5^4 = 625$ dreistellig und $10^4 = 10000$ fünfstellig ist, kommen als Lösung der Aufgabe nur die vierten Potenzen der Zahlen 6, 7, 8 und 9 in Frage.

Die Quersumme von $6^4 = 1296$ ist 18.
Die Quersumme von $7^4 = 2401$ ist 7.
Die Quersumme von $8^4 = 4096$ ist 19.
Die Quersumme von $9^4 = 6561$ ist 18.

Daraus folgt, daß die Zahl $2401 = 7^4$ und nur diese den Bedingungen der Aufgabe genügt.

L.1.34

a) Es ist x^n für $x \geqq 10$ und $n \geqq 1$ eine mindestens $(n + 1)$-stellige Zahl, weil $x^n = 10^n + s$ mindestens $(n + 1)$-stellig ist. Daher kommen als Lösung nur solche Zahlen in Frage, deren Quersumme $x < 10$ ist.

b) Ist x^n eine k-stellige Zahl, so ist $x^{n+1} = x^n \cdot x$ wegen $x < 10$ höchstens $(k + 1)$-stellig.

c) Im Fall $n = 1$ erhält man für x^n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

d) Im Fall $n \geqq 2$ sei $r \geqq 2$ die kleinste natürliche Zahl, für die x^r eine höchstens $(r - 1)$-stellige Zahl ergibt. Dann können wir uns auf die Betrachtung der Zahlen $x^2, x^3, \ldots, x^{r-1}$ beschränken.
Für $x = 0, 1, 2, 3$ ist $r = 2$, also gibt es für diese Quersummen keine derartigen Zahlen mit $n \geqq 2$.
Da ferner alle Potenzen von 4 auf 4 oder 6, alle Potenzen von 5 auf 5 und alle Potenzen von 6 auf 6 enden und bei $n \geqq 2$ außer dieser Endziffer mindestens noch eine von Null verschiedene Ziffer vorkommen muß, kann es auch für $x = 4$, 5 und 6 keine derartigen Zahlen geben.
Man braucht daher nur zu untersuchen, ob es für $x = 7$, 8 oder 9 solche n-stelligen Zahlen x^n gibt, deren Quersumme gleich x ist.

Es sei $x = 7$.

Wegen

$$\begin{aligned} 7^2 &\equiv 9 \pmod{10},\\ 7^3 &\equiv 3 \pmod{10},\\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{10},\\ 7^5 &\equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

braucht man nur die Potenzen der Form

$$7^m \text{ mit } m \equiv 3 \pmod 4 \text{ und } m \equiv 0 \pmod 4$$

zu untersuchen. Nun ist

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 \quad (\text{Quersumme } x > 7),\\ 7^4 &= 2401 \quad (\text{Quersumme } x = 7),\\ 7^7 &= 823543 \quad (6\text{stellig}) \text{ und } 7^m \text{ weniger als } m\text{-stellig für } m > 7. \end{aligned}$$

Also ist $7^4 = 2401$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 7.

Es sei $x = 8$.

Wegen

$$\begin{aligned} 8^2 &\equiv 4 \pmod{10},\\ 8^3 &\equiv 2 \pmod{10},\\ 8^4 &\equiv 6 \pmod{10},\\ 8^5 &\equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

braucht man nur die Potenzen

$$\begin{aligned} 8^m \text{ mit } m &\equiv 2 \pmod 4,\\ m &\equiv 3 \pmod 4,\\ m &\equiv 0 \pmod 4 \end{aligned}$$

zu untersuchen. Wegen

$$n \lg 8 < n \cdot 0{,}904 < n - 1 \text{ für } n \geqq 11$$

ist 8^n für $n \geqq 11$ höchstens $(n - 1)$-stellig.* Daher bleiben noch folgende Fälle zu untersuchen:

$$\begin{aligned} 8^2 &= 64 \quad (\text{Quersumme } x > 8)\\ 8^3 &= 512 \quad (\text{Quersumme } x = 8)\\ 8^4 &= \ldots 096 \quad (\text{Quersumme } x > 8)\\ 8^6 &= \ldots 144 \quad (\text{Quersumme } x > 8)\\ 8^7 &= \ldots 152 \quad (\text{Quersumme } x > 8)\\ 8^8 &= \ldots 216 \quad (\text{Quersumme } x > 8)\\ 8^{10} &= \ldots 824 \quad (\text{Quersumme } x > 8). \end{aligned}$$

(Es genügt eine Betrachtung der letzten drei Stellen.) Also ist $8^3 = 512$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 8.

---

* Lösung ohne Verwendung von Logarithmen:
Für $n \geqq 11$ ist 8^{11} eine höchstens $(n - 1)$-stellige Zahl; denn es gilt

$$8^n \leqq 10^{n-11} \cdot 8^{11},$$

also wegen

$$\begin{aligned} 8^{11} &= 2^{33} = 8 \cdot 2^{30} = 8 \cdot (2^{10})^3 = 8 \cdot 1024^3\\ &< 8 \cdot 1{,}03^3 \cdot 10^9 < 8 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}07 \cdot 10^9\\ &< 8 \cdot 1{,}11 \cdot 10^9 < 8{,}88 \cdot 10^9 < 10^{10},\\ 8^n &< 10^{n-11} \cdot 10^{10} = 10^{n-1}. \end{aligned}$$

Es sei $x = 9$.

Wegen

$$9^2 \equiv 1 \pmod{10}$$
$$9^3 \equiv 9 \pmod{10}$$

braucht man nur alle Potenzen der Form

$$9^{2m} \quad \text{mit } m = 1, 2, 3 \ldots$$

zu betrachten.

Analoge Überlegungen wie im Falle $x = 8$ ergeben:

Wegen

$$n \lg 9 < 0{,}9544 \cdot n < n - 1 \quad \text{für } n \geqq 22$$

ist 9^n eine höchstens $(n - 1)$-stellige Zahl.**

Es bleiben also zu untersuchen übrig:

$$\begin{aligned}
9^2 &= 81 && (\text{Quersumme } x = 9)\\
9^4 &= 6561 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^6 &= \ldots 1441 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^8 &= \ldots 6721 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{10} &= \ldots 4401 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{12} &= \ldots 6481 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{14} &= \ldots 4961 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{16} &= \ldots 1841 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{18} &= \ldots 9121 && (\text{Quersumme } x > 9)\\
9^{20} &= \ldots 8801 && (\text{Quersumme } x > 9).
\end{aligned}$$

(Es genügt die Betrachtung der letzten vier Stellen.)

Also ist $9^2 = 81$ die einzige derartige Zahl mit der Quersumme 9.

Die gesuchten Zahlen sind also für

$n = 1$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$n = 2$: 81
$n = 3$: 512
$n = 4$: 2401.

Für $n \geqq 5$ gibt es keine derartigen Zahlen.

L.1.35 Die erste der 1000 natürlichen Zahlen sei k. Dann erhält man folgende Summe:

$$k + (k + 1) + (k + 2) + \ldots + (k + 999) = 1000k + (1 + 2 + \ldots + 999).$$

In der Klammer steht die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 999. Addiert man hier der Reihe nach $1 + 999$, $2 + 998$ usw. bis $499 + 501$ und berücksichtigt den übrigbleibenden Summanden 500, so erhält man auf der rechten Seite

---

** Lösung ohne Verwendung von Logarithmen:

Für $n \geqq 22$ ist 9^n eine höchstens $(n - 1)$-stellige Zahl; denn es gilt

$$9^n \leqq 10^{n-22} \cdot 9^{22},$$

also wegen

$$9^{22} = (0{,}9)^{5 \cdot 4} \cdot 0{,}81 \cdot 10^{22} < (0{,}59^2)^2 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{22} = 0{,}3481^2 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{22}$$
$$< 0{,}35^2 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{22} = 0{,}1225 \cdot 0{,}81 \cdot 10^{22} = 0{,}099225 \cdot 10^{22} < 10^{21},$$
$$9^n < 10^{n-22} \cdot 10^{21} = 10^{n-1}.$$

$$1000k + (1000 \cdot 499 + 500).$$

Dieser Ausdruck ist durch 500 teilbar, also ist auch die ursprüngliche Summe durch 500 teilbar.

Einfachere Lösung:
Die Summe aus 500 geraden und 500 ungeraden Zahlen ist stets gerade.

L.1.36 Jedes in der Aufgabe genannte Produkt hat die Form

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) &= n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n \\ &= (n^2 + 3n + 1)^2 - 1, \end{aligned}$$

wobei n eine positive ganze Zahl ist.

Da

$$(n^2 + 3n)^2 < (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 < (n^2 + 3n + 1)^2$$

gilt, liegt $n(n+1)(n+2)(n+3)$ zwischen den Quadraten von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen, nämlich denen von

$$n^2 + 3n \quad \text{und} \quad n^2 + 3n + 1,$$

und kann daher selbst nicht das Quadrat einer positiven ganzen Zahl sein.

L.1.37 Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$.
Also gilt:

$$p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1).$$

Da jede Primzahl p, $p > 3$, eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar. Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2 = p_1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist. Da p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, ist keine von beiden durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 und damit $p_1 + p_2 = 2(p_2 + 1)$ durch 12 teilbar.

L.1.38 a) p läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$p = 30q + r, \quad q \text{ und } r \text{ natürliche Zahlen mit } 1 \leqq r \leqq 29.$$

Für alle Zahlen r, die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind, ist $30q + r$ keine Primzahl.
Daher kommen nur die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 als Rest r in Frage, d.h., r ist entweder gleich 1 oder eine Primzahl.

b) p läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$p = 60q + r, \quad r \text{ und } q \text{ natürliche Zahlen mit } 1 \leqq r \leqq 59.$$

Da sich die Primzahl 109 in der Form

$$109 = 60 \cdot 1 + 49$$

schreiben läßt und da 49 keine Primzahl und nicht 1 ist, gilt die Aussage von a) nicht für b).

L.1.39 Die vierstellige Zahl sei z, die aus der ersten und zweiten Ziffer gebildete Zahl sei a (a ganz; $0 < a < 100$).
Dann gilt:

$$z = 100a + a = 101a.$$

Das heißt, es gilt $101 | z$. Nur für $a = 1$ ist z Primzahl. Das ergibt das Zeichen 0101.
Da 101 Primzahl ist, so folgte, falls z eine Quadratzahl wäre, aus $101 | z$ auch $101^2 | z$.
Das ist aber nicht möglich, da sonst wegen $101^2 > 10000$ die Zahl z mindestens fünfstellig sein müßte.

L.1.40 Angenommen, p sei eine Primzahl, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist. Dann gilt $2p + 1 = z^3$, wobei z eine natürliche Zahl ist.
Da $2p + 1$ ungerade ist, ist z auch ungerade. Es gilt daher $z = 2n + 1$ (n natürliche Zahl), also

$$2p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$$

und damit

$$2p = 2n\,(4n^2 + 6n + 3)$$

und

$$p = n\,(4n^2 + 6n + 3).$$

Da p Primzahl und der Faktor $4n^2 + 6n + 3$ eine natürliche Zahl größer als 2 ist, muß $n = 1$ sein.
Für $n = 1$ ist

$$p = 1 \cdot (4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3) = 13$$

Primzahl und $2 \cdot 13 + 1 = 27$ tatsächlich Kubikzahl. Die einzige Primzahl p, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist, ist daher die Zahl 13.

L.1.41 $2^0 + 1 = 2$ ist nicht Kubikzahl. Für $n \geqq 1$ ist die Zahl $2^n + 1$ ungerade. Angenommen, $2^n + 1$ sei eine Kubikzahl, so ist sie die dritte Potenz einer ungeraden Zahl, die sich in der Form $2k + 1$ darstellen läßt, wobei k eine natürliche Zahl ist.
Es gilt also

$$2^n + 1 = (2k + 1)^3. \tag{1}$$

Da die Zahl $2^n + 1$ für $n = 1$ nicht Kubikzahl ist, muß man in (1) $n > 1$ und $k > 0$ annehmen.
Nun folgt aus (1)

$$2^n + 1 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1,$$
$$2^n = 2k\,(4k^2 + 6k + 3),$$
$$2^{n-1} = k\,(4k^2 + 6k + 3).$$

Der zweite Faktor der rechten Seite ist eine ungerade natürliche Zahl, die größer als 3 ist. Diese Zahl müßte, da k eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, Teiler von 2^{n-1} sein. Das ist aber wegen der Eindeutigkeit der Zerlegbarkeit jeder natürlichen Zahl $\geqq 2$ in Primfaktoren nicht möglich. Wir erhalten einen Widerspruch, also ist keine der Zahlen z der Form $2^n + 1$ Kubikzahl.

L.1.42 Es seien a und b die Ausgangszahlen, $a \neq b$.

1. Fall: $3|a$ oder $3|b$.
   Dann gilt auch $3|ab$.
2. Fall: a und b lassen bei der Division durch 3 gleiche Reste, d.h. entweder
   $a \equiv 1 \pmod 3$ und $b \equiv 1 \pmod 3$
   oder
   $a \equiv 2 \pmod 3$ und $b \equiv 2 \pmod 3$.
   Dann gilt $3|a - b$.
3. Fall: a und b lassen bei der Division durch 3 verschiedene Reste, d.h. entweder
   $a \equiv 1 \pmod 3$ und $b \equiv 2 \pmod 3$
   oder
   $a \equiv 2 \pmod 3$ und $b \equiv 1 \pmod 3$.
   Dann gilt $3|a + b$.

L.1.43 Die Quadratzahl sei a^2, wobei a ganzzahlig ist. Dann können folgende Fälle eintreten.

1. Fall: $a = 3n$, n ganz.
   Dann ist $a^2 = 9n$ und daher a^2 durch 9 teilbar.
2. Fall: $a = 3n + 1$, n ganz.
   Dann gilt
   $a^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1$.
   a^2 läßt also bei Division durch 3 den Rest 1.
3. Fall: $a = 3n + 2$, n ganz.
   Dann gilt
   $$a^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1.$$
   a^2 läßt also bei Division durch 3 den Rest 1.

Andere Fälle sind nicht möglich.

L.1.44 **a)** Beweis durch Ausführung der Division:
$$(a^7 - a) : (a^3 + a^2 + a) = a^4 - a^3 + a - 1, \quad a \neq 0.$$

b) Beweis durch Umformen des Ausdrucks $(a^7 - a)$:
$$\begin{aligned}(a^7 - a) &= a(a^6 - 1)\\ &= a(a^3 + 1)(a^3 - 1)\\ &= a(a^3 + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)\\ &= (a^3 + 1)(a - 1)(a^3 + a^2 + a).\end{aligned}$$

L.1.45 Da für 720 folgende Primzahlzerlegung gilt:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

ist zu zeigen, daß das Produkt von 6 beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 2^4, 3^2 und 5 teilbar ist.
Von sechs unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind genau drei durch 2, davon mindestens eine durch 4, genau zwei Zahlen durch 3 und mindestens eine durch 5 teilbar.
Demnach ist das Produkt von sechs unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch

$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$$

teilbar.

L.1.46 Die zu untersuchende Zahl ist

$$z = m \cdot n \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2).$$

a) *Behauptung:*

z ist durch 2 teilbar.

Beweis:

Sind m, n nicht beide ungerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.

b) *Behauptung:*

z ist durch 3 teilbar.

Beweis:

Ist eine der Zahlen m, n durch 3 teilbar, so auch z. Lassen m, n, bei der Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar.
Läßt eine der Zahlen m, n bei der Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.

c) *Behauptung:*

z ist durch 5 teilbar.

Beweis:

Ist eine der Zahlen m, n durch 5 teilbar, so auch z. Lassen m, n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 5 teilbar.
Läßt eine der Zahlen m, n bei der Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m + n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m, n den Rest 2, die andere den Rest 3 läßt. Läßt schließlich eine der Zahlen m, n bei der Division durch 5 den Rest 1 oder 4, die andere den Rest 2 oder 3, so läßt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.

d) *Behauptung:*

z ist durch 30 teilbar.

Beweis:

Es ist $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt die Behauptung aus a), b) und c).

L.1.47 n sei eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &= 3\,(n^3 + 3n^2 + 5n + 3) \\ &= 3\,[3\,(n^2+1) + n\,(n^2+5)] \end{aligned}$$

durch 9 teilbar ist.

Wir beweisen die Behauptung dadurch, daß wir zeigen:

$$n\,(n^2 + 5)$$

ist für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar.

1. Fall: n ist durch 3 ohne Rest teilbar:

$n = 3k$.

Dann ist

$n\,(n^2+5) = 3k\,(9k^2+5)$

durch 3 teilbar.

2. Fall: n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1:

$n = 3k + 1$.

Dann ist

$$\begin{aligned} n\,(n^2+5) &= (3k+1)\,(9k^2+6k+6) \\ &= 3\,(3k+1)\,(3k^2+2k+2) \end{aligned}$$

durch 3 teilbar.

3. Fall: n läßt bei der Division durch 3 den Rest 2:

$n = 3k + 2$.

Dann ist

$$\begin{aligned} n\,(n^2+5) &= (3k+2)\,(9k^2+12k+9) \\ &= 3\,(3k+2)\,(3k^2+4k+3) \end{aligned}$$

durch 3 teilbar.

Daraus folgt, daß $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ stets durch 9 teilbar ist.

L.1.48 Es gilt $z = n^3 + 11n = n\,(n^2 + 11)$.

Die Division durch 6 wird zurückgeführt auf die Division durch 2 und durch 3.

a) Ist n gerade, so ist die zu untersuchende Zahl durch 2 teilbar.
Ist n ungerade, also von der Form $n = 2k + 1$, k natürliche Zahl, so ist

$$n^2 + 11 = 4k^2 + 4k + 12$$

gerade, d.h. durch 2 teilbar.

b) Läßt n bei der Division durch 3 den Rest 1 ($n = 3k + 1$; k natürliche Zahl), so läßt

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1$$

den Rest 1.

Läßt n bei der Division durch 3 den Rest 2 ($n = 3k + 2$; k natürliche Zahl), so läßt

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 4 = (9k^2 + 6k + 3) + 1$$

ebenfalls den Rest 1.

Daraus folgt, daß $n^2 + 11$ in beiden Fällen durch 3 teilbar ist.

Aus a) und b) folgt: $n^3 + 11n$ ist durch 6 teilbar.

L.1.49 n ist nach Voraussetzung eine ungerade Zahl, also gilt $n = 2k + 1$, wobei k eine ganze Zahl ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (4k^2 + 4k + 1) - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k + 1). \end{aligned}$$

Da von zwei unmittelbar benachbarten ganzen Zahlen stets eine gerade ist, ist das Produkt $k(k + 1)$ durch 2 teilbar.

Daraus folgt, daß $n^2 - 1$ für alle ungeraden n durch 8 teilbar ist.

L.1.50 Es gilt:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= n^2(n + 3) - (n + 3) \\ &= (n + 3)(n^2 - 1) \\ &= (n + 3)(n + 1)(n - 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Da n ungerade und die Summe zweier ungerader Zahlen stets eine gerade Zahl ist, ist jeder der Faktoren $n + 3$, $n + 1$, $n - 1$ durch 2 teilbar.

Außerdem ist genau eine der Zahlen $n + 1$ oder $n - 1$ durch 4 teilbar.

Da weiter von drei unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen stets genau eine durch 3 teilbar ist, ist von den Zahlen $n - 1$, n, $n + 1$ und damit auch von den Zahlen $n - 1$, $n + 1$, $n + 3$ genau eine durch 3 teilbar.

Damit ist das Produkt (1) durch $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ teilbar.

L.1.51 Wegen

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1) \text{ für jedes } a$$

gilt:

$$\begin{aligned} 2^{256} - 1 &= (2^{128} + 1) \cdot (2^{128} - 1) \\ &= (2^{128} + 1) \cdot (2^{64} + 1) \cdot (2^{64} - 1) \\ &\vdots \\ &= (2^{128} + 1) \cdot (2^{64} + 1) \cdot (2^{32} + 1) \cdot (2^{16} + 1) \cdot (2^{8} + 1) \cdot (2^{4} + 1) \\ &\quad \cdot (2^{2} + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 1). \end{aligned}$$

Die angegebene Zahl ist folglich keine Primzahl. Primfaktoren sind z.B. 3, 5, 17, 257.

Bemerkung: $2^{16} + 1$ ist Primzahl, während $2^{32} + 1$ durch 641 teilbar ist.

L.1.52 Es gilt:

$$z = 1963^{1965} - 1963 = 1963\,(1963^{1964} - 1)$$
$$= 1963\,(1963^{982} + 1) \cdot (1963^{491} + 1) \cdot (1963^{491} - 1).$$

Wegen

$$a^k - 1 = (a - 1)\,(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + 1)$$

für jedes positive ganze k und jedes a sowie

$$a^k + 1 = (a + 1)\,(a^{k-1} - a^{k-2} + \ldots + 1)$$

für jedes ungerade natürliche k und jedes a gilt:

$$z = 1962 \cdot 1963 \cdot 1964 \cdot P,$$

wobei P das Produkt der übrigen Faktoren ist.
Wegen

$$1962 = 2 \cdot 3^2 \cdot 109$$
$$1963 = 13 \cdot 151$$
$$1964 = 2^4 \cdot 491$$

ist z durch 2, 3, 13, 109, 151, 491 teilbar.
Es gilt

$$1963^{1964} - 1 = (1963^4)^{491} - 1.$$

Die letzte Ziffer von 1963^4 ist 1, deshalb ist auch 1 die letzte Ziffer von $(1963^4)^{491}$. Daher ist die letzte Ziffer von $1963^{1964} - 1$ gleich 0, damit ist diese Zahl durch 5 teilbar, und deswegen ist auch z durch 5 teilbar.
z ist also durch alle angegebenen Primzahlen teilbar.

L.1.53 Da für 45 die Primzahlzerlegung $45 = 3^2 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, daß die Summe $21^{39} + 39^{21}$ durch 3^2 und 5 teilbar ist.
Die letzte Ziffer von 21^n ist für jedes natürliche n gleich 1, und die letzte Ziffer von 39^{2n+1} ist für jedes natürliche n gleich 9.
Daher ist die letzte Ziffer der Summe gleich 0 und die Summe damit durch 5 teilbar. Weil sowohl 21^{39} als auch 39^{21} durch 3^2 teilbar ist, ist auch die Summe durch 3^2 teilbar. Also ist $21^{39} + 39^{21}$ durch 45 teilbar.

Bemerkung: Wegen $21 \equiv 1 \pmod{20}$, $39 \equiv -1 \pmod{20}$ ist $21^{39} + 39^{21} \equiv 1^{39} + (-1)^{21} \equiv 0 \pmod{20}$, und wegen $21^{39} + 39^{21} = 3^{21}\,(7^{39} \cdot 3^{18} + 13^{21})$ ist $21^{39} + 39^{21}$ sogar durch $3^{21} \cdot 20$ teilbar.

L.1.54 *1. Lösung:*

Da $72 = 8 \cdot 9$ gilt, ist zu zeigen, daß z durch 8 und 9 teilbar ist.
Weil n eine positive gerade Zahl ist, läßt sich n schreiben als $n = 2m$ mit positiv ganzzahligem m. Daher ist

$$z = 3^{2m} + 3^2 \cdot 7 = 9\,(3^{2m-2} + 7)$$

durch 9 teilbar.
Setzt man $2k = 2m - 2 \geqq 0$, so ist

$$z = 9\,(3^{2k} + 7) = 9\,(3^{2k} - 1 + 8).$$

Es gilt

$$3^{2k} - 1 = (3^k - 1)\,(3^k + 1).$$

$3^k - 1$ und $3^k + 1$ sind zwei unmittelbar aufeinanderfolgende gerade Zahlen, daher sind beide durch 2, eine von ihnen durch 4, das Produkt also durch 8 teilbar. Deshalb ist auch die Summe

$$3^{2k} - 1 + 8 = (3^k - 1)(3^k + 1) + 8$$

durch 8 teilbar und damit auch z.
Also ist $z = 3^{2m} + 63$ durch $8 \cdot 9 = 72$ teilbar.

2. Lösung:
Beweis durch vollständige Induktion:

a) Für $n = 2$ gilt $3^2 + 63 = 72 \equiv 0 \pmod{72}$.

b) Angenommen, für $n = 2k$ sei

$$3^{2k} + 63 \equiv 0 \pmod{72}.$$

Es ist zu beweisen, daß dann $3^n + 63$ auch für $n = 2k + 2$ durch 72 teilbar ist.

$$\begin{aligned} 3^{2k+2} + 63 &= 3^2 \cdot 3^{2k} + 63 \\ &= 3^2(3^{2k} + 63) - 7 \cdot 72 \\ &\equiv 0 \pmod{72}. \end{aligned}$$

Aus a) und b) folgt, daß die angegebene Zahl für alle positiven geraden Zahlen durch 72 teilbar ist.

L.1.55 Es ist

$$1049 \cdot 58 = 60842 = 31 \cdot 1965 - 73.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} 73^n + 1049 \cdot 58^n &= 73^n + (31 \cdot 1965 - 73)\, 58^{n-1} \\ &= 73\,(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}. \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, ist $n - 1$ gerade und in der Form $n - 1 = 2k$ mit $k \geqq 0$ und k ganzzahlig darstellbar.
Es ist deshalb

$$73^{n-1} - 58^{n-1} = (73^2)^k - (58^2)^k = 5329^k - 3364^k.$$

Da $a^n - b^n$ für natürliche Zahlen n durch $a - b$ teilbar ist, ist $5329^k - 3364^k$ durch $5329 - 3364 = 1965$ teilbar.
Daher ist auch

$$73\,(73^{n-1} - 58^{n-1}) + 31 \cdot 1965 \cdot 58^{n-1}$$

durch 1965 teilbar, d.h., $73^n + 1049 \cdot 58^n$ ist durch 1965 teilbar.

L.1.56 Mit Hilfe bekannter Potenzgesetze wird der Ausdruck umgeformt:

$$\begin{aligned} f(n) &= 5 \cdot 5^{2n} \cdot 2^2 \cdot 2^n + 3^2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 2^{2n} \\ &= 20 \cdot 50^n + 18 \cdot 12^n \\ &= 20\,(38 + 12)^n + 18 \cdot 12^n. \end{aligned}$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(38 + 12)^n = 38^n + \binom{n}{1} 38^{n-1} \cdot 12 + \ldots + \binom{n}{n-1} 38 \cdot 12^{n-1} + 12^n.$$

Daher kann man $f(n)$ in folgender Form schreiben:

$$f(n) = 20\left[38^n + \binom{n}{1} 38^{n-1} \cdot 12 + \ldots + \binom{n}{n-1} 38 \cdot 12^{n-1}\right] + 20 \cdot 12^n + 18 \cdot 12^n$$

$$= 20 \cdot 38 \left[38^{n-1} + \binom{n}{1} 38^{n-2} \cdot 12 + \cdots + \binom{n}{n-1} 12^{n-1}\right] + 38 \cdot 12^n,$$

d.h. $f(n) = 19g$, wobei g eine positive ganze Zahl ist.
Also ist $f(n)$ durch 19 teilbar.

Bemerkung: Für alle ganzen positiven Zahlen n ist $f(n)$ sogar durch $2^{n+2} \cdot 19$ teilbar, denn es ist

$$f(n) = 2^{n+2} (5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}),$$

so daß $f(n)$ sowohl durch 2^{n+2} als auch durch 19 teilbar ist.

L.1.57 Es gilt

$$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1).$$

Da alle Primzahlen außer $p = 2$ ungerade sind, ist jede der beiden Zahlen $p + 1$ und $p - 1$ durch 2 teilbar.
Außerdem ist genau eine der Zahlen $p - 1$, $p + 1$ durch 4 teilbar, da p als ungerade Primzahl entweder die Form $4n + 1$ oder $4n + 3$ (n ganz) hat.
Also ist $p^2 - 1$ durch 8 teilbar.
Da weiter von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen stets genau eine durch 3 teilbar ist, ist von den Zahlen $p - 1$, p, $p + 1$ genau eine durch 3 teilbar.
Da p als eine Primzahl, die größer als 3 ist, nicht durch 3 teilbar sein kann, ist entweder $p - 1$ oder $p + 1$ durch 3 teilbar.
Damit ist

$$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$$

durch 8 und durch 3 teilbar.
Da 8 und 3 teilerfremd sind, ist $p^2 - 1$ auch durch das Produkt $8 \cdot 3 = 24$ teilbar.

L.1.58 Jede nichtnegative ganze Zahl n läßt sich in genau einer der folgenden Formen darstellen:

$$n = 3k \quad \text{oder} \quad n = 3k + 1 \quad \text{oder} \quad n = 3k + 2.$$

Dabei ist k eine nichtnegative ganze Zahl.
Für $n = 3k$ gilt:

$$z = 5^{3k} - 4^{3k} = (5^3)^k - (4^3)^k.$$

Da $a^m - b^m$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m stets durch $a - b$ teilbar ist, ist $(5^3)^k - (4^3)^k$ durch $5^3 - 4^3 = 61$ teilbar.
Für $n = 3k + 1$ gilt:

$$z = 5^{3k+1} - 4^{3k+1} = 5 \cdot 5^{3k} - 4 \cdot 4^{3k}$$
$$z = 5(5^{3k} - 4^{3k}) + 4^{3k}.$$

In diesem Falle ist z nicht durch 61 teilbar, da der Summand $5(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand 4^{3k} aber nicht.
Für $n = 3k + 2$ gilt:

$$z = 5^{3k+2} - 4^{3k+2} = 5^{3k} \cdot 25 - 4^{3k} \cdot 16$$
$$z = 25(5^{3k} - 4^{3k}) + 9 \cdot 4^{3k},$$

d.h., in diesem Falle ist z ebenfalls nicht durch 61 teilbar, da der Summand $25\,(5^{3k} - 4^{3k})$ durch 61 teilbar ist, der Summand $9 \cdot 4^{3k}$ aber nicht.
Die Zahl $z = 5^n - 4^n$ ist also genau dann durch 61 teilbar, wenn n durch 3 teilbar ist.

L.1.59

1) Es genügt zu zeigen, daß $p - s$ durch 30 teilbar ist. Mit $p - s$ ist nämlich auch $p = (p - s) + s$ durch 30 teilbar.

2.1) Es ist

$$p - s = (a_1^5 - a_1) + (a_2^5 - a_2) + \dots + (a_n^5 - a_n).$$

Da für alle k ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$d_k = a_k^5 - a_k = a_k(a_k - 1)(a_k + 1)(a_k^2 + 1) \tag{1}$$

gilt, und da alle a_k ganze Zahlen sind, ist jedes d_k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar, d.h., jedes d_k ist durch 6 teilbar.

2.2) Ebenfalls kann man zeigen, daß jedes d_k auch durch 5 teilbar ist.

1. Weg

Wenn $a_k \equiv 0 \pmod 5$ ist, so ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv 1 \pmod 5$ ist, so ist wegen (1) $d_k \equiv 0 \pmod 5$.
Wenn $a_k \equiv 2 \pmod 5$ oder wenn $a_k \equiv -2 \pmod 5$ ist,
so ist $a_k^2 \equiv -1 \pmod 5$, d.h.
$a_k^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$, und daher ist $d_k \equiv 0 \pmod 5$.

2. Weg

Ist a_k durch 5 teilbar, so ist wegen (1) auch d_k durch 5 teilbar. Ist a_k nicht durch 5 teilbar, so läßt sich für jedes dieser a_k genau eine der folgenden Darstellungen angeben:

a) $a_k = 5b_k + 1$;
b) $a_k = 5b_k - 1$;
c) $a_k = 5b_k + 2$;
d) $a_k = 5b_k - 2$

(dabei ist b_k eine ganze Zahl).

Im Fall a) ist in (1) $a_k - 1$ und damit auch d_k durch 5 teilbar.
Im Fall b) ist in (1) $a_k + 1$ und damit auch d_k durch 5 teilbar.
Im Fall c) ist in (1)

$$a_k^2 + 1 = 25b_k^2 + 20b_k + 5 = 5\,(5b_k^2 + 4b_k + 1)$$

und damit auch d_k durch 5 teilbar.
Im Fall d) ist in (1)

$$a_k^2 + 1 = 25b_k^2 - 20b_k + 5 = 5\,(5b_k^2 - 4b_k + 1)$$

und damit auch d_k durch 5 teilbar.
Folglich ist bei beliebigem ganzzahligem a_k das entsprechende d_k durch 5 teilbar.

2.3) Da alle d_k sowohl durch 6 als auch durch 5 teilbar sind und da ferner 5 und 6 teilerfremd zueinander sind, sind alle d_k und damit neben $p - s$ auch p durch 30 teilbar.

L.1.60 *1. Beweis:*

Es seien a, b, c natürliche Zahlen.

Aus der Voraussetzung folgt:

a) $a + b + c \equiv 0 \pmod 2$ und

b) $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$.

1. Wegen a) sind entweder alle drei Zahlen gerade, damit sind auch die Kuben und deren Summe gerade; oder genau eine der Zahlen ist gerade, dann sind zwei der Kuben ungerade, der dritte gerade; die Summe der Kuben ist in beiden Fällen durch zwei teilbar:
$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 2.$$
2. Wegen b) gilt
$$(a + b + c)^3 \equiv 0 \pmod 3$$
und damit
$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 \equiv 0 \pmod 3.$$
Daraus folgt aber
$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 3.$$
Aus 1. und 2. folgt:
$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 6.$$

2. Beweis:

Läßt eine natürliche Zahl x bei der Division durch 6 den Rest r $(0 \leqq r \leqq 5)$, dann läßt x^3 auch den Rest r, wie man für die einzelnen Fälle $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ leicht ausrechnet. Daher erhält man das schärfere Resultat
$$a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \pmod 6.$$

L.1.61 *Voraussetzung:* $3 \mid a^2 + b^2$ mit ganzen Zahlen a und b, d.h. $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 3$.

Behauptung: $a \equiv 0 \pmod 3$ und $b \equiv 0 \pmod 3$.

Indirekter Beweis:

1. Fall: $a \equiv 1 \pmod 3$, d.h. $a^2 \equiv 1 \pmod 3$.
Wegen der Voraussetzung müßte dann $b^2 \equiv 2 \pmod 3$ sein, was für keine Quadratzahl möglich ist.

2. Fall: $a \equiv 2 \pmod 3$, d.h. $a^2 \equiv 1 \pmod 3$.
Der Beweis erfolgt analog zum 1. Fall.

Also gilt: $a \equiv 0 \pmod 3$ und folglich auch $b \equiv 0 \pmod 3$.

Der Satz ist also richtig.

L.1.62 Da $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, daß das Produkt $P = xyz$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist, wenn
$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$
gilt.

1. Teilbarkeit durch 3.
Bei der Division natürlicher Zahlen durch 3 treten als mögliche Reste die Zahlen 0, 1 oder 2 auf und daher bei der Division der Quadrate dieser natürlichen Zahlen durch 3 nur die Reste 0 und 1.

Die möglichen Reste der Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen sind daher 0, 1 oder 2.

Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur die Reste 0 oder 1 haben, d.h., mindestens eine der Zahlen x^2, y^2 hat den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar.

Aus $3|x^2$ oder $3|y^2$ folgt $3|x$ oder $3|y$, und damit teilt 3 das Produkt $P = xyz$.

2. Teilbarkeit durch 5.

Bei der Division natürlicher Zahlen durch 5 kommen als Reste die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 vor und daher bei der Division der Quadrate dieser natürlichen Zahlen nur die Reste 0, 1 oder 4. Die möglichen Reste der Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen sind daher 0, 1, 2, 3 oder 4.

Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1 oder 4 haben, und daher hat mindestens eines der Quadrate x^2, y^2 oder z^2 den Rest 0 und ist somit durch 5 teilbar.

Wegen des Satzes über die eindeutige Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren ist daher weiter mindestens eine der Zahlen x, y oder z durch 5 teilbar und damit auch das Produkt P.

3. Teilbarkeit durch 4.

Zunächst ist mindestens eine der Zahlen x, y oder z gerade; denn die Annahme, x, y und z (und damit auch x^2, y^2, z^2) wären ungerade Zahlen, führt zu dem Widerspruch, daß $x^2 + y^2 = z^2$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl wäre.

Ist z gerade, so sind entweder

a) x und y gerade – in diesem Falle teilt 4 das Produkt P – oder

b) x und y ungerade.
In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als
$$x = 2x' + 1 \quad \text{und} \quad y = 2y' + 1 \quad \text{und} \quad z = 2z',$$
wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann äquivalent mit
$$4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 \quad \text{bzw. mit}$$
$$4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2 = 4z'^2.$$
Dies ist ein Widerspruch, da eine natürliche Zahl nicht gleichzeitig durch 4 teilbar sein und bei der Division durch 4 den Rest 2 lassen kann.
Also ist Fall b) nicht möglich.

Ist z ungerade und eine der Zahlen x oder y gerade, so kann o. B. d. A. x als gerade vorausgesetzt werden. Dann ist y ungerade.
$$\left.\begin{aligned} x &= 2x' \\ y &= 2y' + 1 \\ z &= 2z' + 1 \end{aligned}\right\} \quad (x', y', z' \text{ sind natürliche Zahlen})$$
(1) ist dann gleichbedeutend mit:
$$4x'^2 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 + 4z' + 1$$
und weiter mit
$$x'^2 = z'^2 + z' - y'^2 - y',$$
d.h., x'^2 ist als Summe von vier ungeraden Zahlen gerade, und daher ist auch x' durch 2 teilbar. Wegen $x = 2x'$ ist daher x durch 4 teilbar und damit auch das Produkt P.

L.1.63 Wenn a eine solche natürliche Zahl ist, daß $a^{100} - 2$ und $a^{101} - 69$ durch 73 teilbar sind, dann folgt einerseits die Teilbarkeit von $a^{101} - 2a$ durch 73, also die Existenz einer ganzen Zahl r mit

$$a^{101} - 2a = 73r,$$

und andererseits die Existenz einer ganzen Zahl s mit

$$a^{101} - 69 = 73s.$$

Daraus folgt:

$$2a - 69 = 73\,(s - r),$$

also die Existenz einer ganzen Zahl t mit

$$2a = 69 + 73t,$$

$$2a = 69 + 73 + 73\,(t - 1),$$

$$2a = 142 + 73\,(t - 1).$$

Da $2a - 69$ ungerade ist, muß auch t eine ungerade Zahl sein. Dann ist $t - 1$ gerade, also von der Form

$$t - 1 = 2n, \quad n \text{ ganz},$$

und es gilt:

$$2a = 142 + 2n \cdot 73,$$

also

$$a = 71 + 73n.$$

Als Rest, den a bei Division durch 73 läßt, kommt demnach höchstens die Zahl 71 in Frage.

Zusätzlich wird noch gezeigt, daß 71 als Rest tatsächlich möglich ist, d.h., daß (mindestens) eine Zahl a mit den in der Aufgabe genannten Eigenschaften existiert. Dies kann folgendermaßen geschehen:

Es ist:

$$71 \equiv -2 \pmod{73},$$

$$71^9 \equiv (-2)^9 \equiv -512 = -7 \cdot 73 - 1 \equiv -1 \pmod{73},$$

$$71^{99} \equiv (-1)^{11} = -1 \pmod{73},$$

$$71^{100} \equiv 2 \pmod{73},$$

$$71^{101} \equiv -4 \equiv 69 \pmod{73}.$$

Wenn allgemeiner $a \equiv 71 \pmod{73}$ ist, also

$$a \equiv -2 \pmod{73}$$

ist, gilt

$$a^{100} \equiv 2 \pmod{73},$$

$$a^{101} \equiv -4 \pmod{73}.$$

Folglich ist

$$a^{100} - 2 \equiv 2 - 2 = 0 \pmod{73},$$

$$a^{101} - 69 \equiv -4 - (-4) = 0 \pmod{73}.$$

Also genügen genau alle natürlichen Zahlen $a \equiv -2 \pmod{73}$ allen Bedingungen der Aufgabe.

L.1.64 Angenommen, es gäbe zwei natürliche Zahlen x_0, y_0 derart, daß

$$N = x_0^4 + 4y_0^4$$

Primzahl ist, dann sind x_0 und y_0 größer als Null, und es gilt:

$$\begin{aligned} N &= x_0^4 + 4y_0^4 = (x_0^2 + 2y_0^2)^2 - 4x_0^2y_0^2 \\ &= [(x_0^2 + 2y_0^2) + 2x_0y_0]\,[(x_0^2 + 2y_0^2) - 2x_0y_0] \\ &= [(x_0 + y_0)^2 + y_0^2] \cdot [(x_0 - y_0)^2 + y_0^2]. \end{aligned}$$

Aus der Annahme, daß N Primzahl ist, folgt, daß genau einer der Faktoren

$$(x_0 + y_0)^2 + y_0^2 \quad \text{oder} \quad (x_0 - y_0)^2 + y_0^2$$

gleich Eins ist.
Wegen $x_0 > 0$ und $y_0 > 0$ ist

$$(x_0 + y_0)^2 + y_0^2 > 1.$$

Daher muß

$$(x_0 - y_0)^2 + y_0^2 = 1$$

sein. Daraus folgt

$$x_0 = y_0 = 1.$$

Wenn es ein Paar (x_0, y_0) natürlicher Zahlen gibt, das den Bedingungen der Aufgabe genügt, dann ist es das Paar $(1, 1)$ und kein anderes.
Dieses Paar liefert uns die Primzahl $N = 5$.

L.1.65 Angenommen, $a_1, \ldots, a_4$ seien vier Zahlen der gesuchten Art. Dann gelten für die nach Aufgabenstellung gebildeten Zahlen $d_1, \ldots, d_6$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} d_4 &= d_1 + d_2, \\ d_5 &= d_2 + d_3, \\ d_6 &= d_1 + d_2 + d_3. \end{aligned}$$

Nun sind höchstens folgende Fälle möglich:

1. Fall: d_1, d_2, d_3 sind ungerade Primzahlen. Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_4 und d_5 gerade und größer als 2, also keine Primzahlen sind. Daher scheidet dieser Fall aus.
2. Fall: d_1, d_2, d_3 sind gerade Primzahlen (also ist jede gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_4, d_5, d_6 keine Primzahlen sind.
3. Fall: Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 ist genau eine gerade (also gleich 2). Dann ergibt sich der Widerspruch, daß d_6 gerade und größer als 2 ist.
4. Fall: Von den Zahlen d_1, d_2, d_3 sind genau zwei gerade (also ist jede gleich 2).

a) Unter diesen befindet sich d_2. Dann ergibt sich, daß entweder d_4 oder d_5 gerade und größer als 2 ist, also ein Widerspruch.

b) $d_1 = d_3 = 2$; d_2 ungerade Primzahl.

Dann folgt $d_4 = d_5 = d_2 + 2$ und $d_6 = d_2 + 4$.
Nun ist von drei ganzen Zahlen der Form d_2, $d_2 + 2$, $d_2 + 4$ stets eine durch 3 teilbar.

Beweis: Beim Teilen von natürlichen Zahlen durch 3 können nur die Reste 0, 1 oder 2 auftreten.
Tritt beim Teilen von d_2 der Rest 0 auf, ist d_2 durch 3 teilbar.
Tritt der Rest 1 auf, ist (wegen $1 + 2 = 3$) $d_2 + 2$ durch 3 teilbar.
Tritt der Rest 2 auf, ist (wegen $2 + 4 = 6$) $d_2 + 4$ durch 3 teilbar.

Die einzige Primzahl, die durch 3 teilbar ist, ist die 3. Da aber $d_2 > 1$ ist, also $d_2 + 2$ und $d_2 + 4$ größer als 3 sind, verbleibt nur die Möglichkeit $d_2 = 3$.

Hiernach folgt weiter

$$a_2 = a_1 + d_3 = a_1 + 2,$$
$$a_3 = a_2 + d_2 = a_1 + 5,$$
$$a_4 = a_3 + d_1 = a_1 + 7.$$

Daher können $a_1, \ldots, a_4$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie von der Form

$$a_1 = n, \quad a_2 = n + 2, \quad a_3 = n + 5, \quad a_4 = n + 7 \qquad (1)$$

mit einer natürlichen Zahl n sind.
Umgekehrt genügen je vier Zahlen der Form (1) in der Tat den Bedingungen der Aufgabe; denn für sie ist jede der Zahlen

$$d_1 = a_4 - a_3 = 2, \qquad d_2 = a_3 - a_2 = 3,$$
$$d_3 = a_2 - a_1 = 2, \qquad d_4 = a_4 - a_2 = 5,$$
$$d_5 = a_3 - a_1 = 5, \qquad d_6 = a_4 - a_1 = 7$$

Primzahl.

L.1.66 Bezeichnet man mit $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, so beträgt die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 1000 sind

$$\left[\frac{999}{5}\right] = 199.$$

Entsprechend ergibt sich für die Anzahl der durch 3 teilbaren Zahlen

$$\left[\frac{999}{3}\right] = 333.$$

Dabei wurden aber die Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar sind, doppelt gerechnet. Ihre Anzahl ist

$$\left[\frac{999}{15}\right] = 66.$$

Von den 999 Zahlen sind also

$$999 - 333 - 199 + 66 = 533$$

Zahlen weder durch 3 noch durch 5 teilbar.

L.1.67 Angenommen, es gäbe verschiedene Darstellungen einer natürlichen Zahl z in der verlangten Form, dann wäre

$$x_1! + y_1! = x_2! + y_2!, \qquad (1)$$

wobei x_1, y_1, und x_2, y_2 von Null verschiedene natürliche Zahlen sind mit

$$x_1 \leqq y_1 \quad \text{und} \quad x_2 \leqq y_2.$$

Aus $x_1 = x_2$ würde $y_1! = y_2!$ folgen und wegen $y_1 y_2 \neq 0$ also $y_1 = y_2$.
O.B.d.A. kann daher $x_1 < x_2$ angenommen werden. Dann gelten folgende Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + k \\ y_1 &= x_1 + h \\ y_2 &= x_2 + m \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{wobei } h, k \text{ und } m \text{ natürliche Zahlen mit} \\ h \geqq 0,\ m \geqq 0 \text{ und } k \geqq 1 \text{ sind.} \end{array} \qquad (2)$$

Wegen (2) läßt sich (1) schreiben als

$$x_1! + (x_1 + h)! = (x_1 + k)! + (x_1 + k + m)! \tag{3}$$

bzw. in der Form

$$\begin{aligned} &x_1!\,[1 + (x_1 + 1)(x_1 + 2) \ldots (x_1 + h)] \\ &= x_1!\,(x_1 + 1) \ldots (x_1 + k)\,[1 + (x_1 + k + 1) \ldots (x_1 + k + m)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen $x_1! \neq 0$ ist daher (4) äquivalent mit

$$\begin{aligned} &1 + (x_1 + 1) \ldots (x_1 + h) \\ &= (x_1 + 1) \ldots (x_1 + k)\,[1 + (x_1 + k + 1) \ldots (x_1 + k + m)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Für $h > 0$ ist die rechte Seite der Gleichung (5) durch $x_1 + 1$ teilbar, die linke Seite aber nicht; aus diesem Widerspruch folgt, daß in diesem Falle (1) nicht gelten kann.
Für $h = 0$ ergibt sich aus (3)

$$2x_1! = x_1!\,(x_1 + 1) \ldots (x_1 + k)\,[1 + (x_1 + k + 1) \ldots (x_1 + k + m)]$$

und wegen $x_1! \neq 0$

$$2 = (x_1 + 1) \ldots (x_1 + k)\,[1 + (x_1 + k + 1) \ldots (x_1 + k + m)]. \tag{6}$$

(6) ist ebenfalls ein Widerspruch, da die rechte Seite von (6) wegen

$$x_1 + 1 \geqq 2$$

und

$$1 + (x_1 + k + 1) \ldots (x_1 + k + m) \geqq 2,$$

(die letzte Beziehung gilt wegen $m \geqq 0$) größer oder gleich 4 ist.
Also gibt es nicht zwei verschiedene Darstellungen einer natürlichen Zahl z in der Form

$$z = x! + y!$$

mit positiven ganzen Zahlen x, y und $x \leqq y$.

L.1.68 Angenommen, $\log_2 6$ wäre eine rationale Zahl. Dann gibt es zwei teilerfremde ganze Zahlen p, q mit $q > 0$, so daß

$$\log_2 6 = \frac{p}{q} \tag{1}$$

gilt. Hieraus folgt nach der Definition des Logarithmus

$$2^{\frac{p}{q}} = 6. \tag{2}$$

Diese Aussage ist äquivalent mit

$$\begin{aligned} 2^p &= 6^q \\ &= (2 \cdot 3)^q. \end{aligned}$$

Also müßte

$$2^{p-q} = 3^q$$

gelten.
Es sei $p - q = n$. Dann ist n ganz, und es müßte

$$2^n = 3^q$$

gelten, woraus wegen $q > 0$ folgt, daß $n > 0$ sein muß. Daraus ergäbe sich $2 \mid 3^q$, was nicht wahr ist. Also ist $\log_2 6$ keine rationale Zahl.

2. GLEICHUNGEN

L.2.1 Der Divisor sei x. Dann erhält man aus der Probe:

$$57x + 52 = 17380$$
$$x = 304.$$

Anstelle der 0 muß aber eine 6 stehen; es ergibt sich also

$$57 \cdot 364 + 52 = 20800.$$

Die Aufgabe heißt

$$20800 : 364 = 57 \text{ Rest } 52.$$

L.2.2 In jeweils 24 Stunden klettert die Maus um

$$\frac{1}{2}\text{ Elle} - \frac{1}{6}\text{ Elle} = \frac{1}{3}\text{ Elle}$$

nach unten, die Katze um

$$1\text{ Elle} - \frac{1}{4}\text{ Elle} = \frac{3}{4}\text{ Ellen}$$

nach oben. Die Tiere kommen sich also um

$$\frac{3}{4}\text{ Ellen} + \frac{1}{3}\text{ Elle} = \frac{13}{12}\text{ Ellen}$$

näher. Das gilt aber für den Tag der Begegnung nicht, hier entfällt das nächtliche Zurückweichen. Am letzten Tag kommen sich die Tiere um

$$1\text{ Elle} + \frac{1}{2}\text{ Elle} = \frac{3}{2}\text{ Ellen}$$

näher. Also befinden sich die Katze und die Maus nach x Tagen genau dann in gleicher Höhe, wenn

$$(x-1)\frac{13}{12} + \frac{3}{2} = 60,$$

d.h., wenn

$$x = 55$$

ist.

L.2.3 Es sei $a < b$. Dann gilt:

$$\frac{ab - 100}{a} = 575 + \frac{227}{a}$$

$$\frac{ab - 1000}{a} = 572 + \frac{308}{a}.$$

Daraus erhält man $a = 327$ und $b = 576$.
Durch Einsetzen überzeugt man sich, daß dieses die gesuchten Zahlen a und b sind.

L.2.4 Bezeichnet man mit x die Zahl der verflossenen Tage, so gilt die Gleichung

$$\frac{x}{2} + \frac{365 - x}{3} = x.$$

Man erhält daraus $x = 146$. Das Datum ist der 26. 5.

L.2.5 Es bezeichne $ab\,.\,cd\,.\,efgh$ das Geburtsdatum und ik das Alter von Herrn X.
Es seien also
a und b die Ziffern für den Tag,
c und d die Ziffern für den Monat,
e, f, g und h die Ziffern für das Jahr und
i und k die Ziffern für das Alter.
Dann muß gelten:
$e = 1$, und f kann nur 9 oder 8 sein, da die Anzahl der Lebensjahre von Herrn X zweistellig sein muß und er demnach nach 1799 geboren wurde.
$c = 0$, da es nur 12 Monate gibt und die 1 bereits vergeben ist.
$a = 2$, da ein Monat höchstens 31 Tage haben kann, die 0 und die 1 vergeben sind, und somit 30 und 31 auch nicht in Frage kommen.

I. Sei $f = 9$.
Dann muß gelten

A) $10g + h + 10i + k = 66$,
falls Herr X nach dem 30. 5. Geburtstag hat,

B) $10g + h + 10i + k = 67$ andernfalls.

Aus A) folgt, daß entweder

a) $g + i = 6$ und $h + k = 6$ oder

b) $g + i = 5$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus B) folgt, daß entweder

c) $g + i = 6$ und $h + k = 7$ oder

d) $g + i = 5$ und $h + k = 17$ gilt.

Aus den noch vorhandenen Ziffern ist keins der vier Gleichungspaare realisierbar.
Die Annahme $f = 9$ ist falsch.

II. Sei $f = 8$.

Dann gilt, ähnlich wie oben,

C) $10g + h + 10i + k = 166$ oder

D) $10g + h + 10i + k = 167$.

Aus C) folgt, daß entweder

e) $g + i = 16$ und $h + k = 6$ oder

f) $g + i = 15$ und $h + k = 16$ gilt.

Aus D) folgt, daß entweder

g) $g + i = 16$ und $h + k = 7$ oder

h) $g + i = 15$ und $h + k = 17$ gilt.

Mit den noch vorhandenen Ziffern ist nur

g) realisierbar.

Folgende vier Verteilungen sind möglich:

$$\left.\begin{matrix} g = 9 \text{ und } i = 7 \\ g = 7 \text{ und } i = 9 \end{matrix}\right\} \text{ und } \left\{\begin{matrix} h = 4 \text{ und } k = 3 \\ h = 3 \text{ und } k = 4. \end{matrix}\right.$$

Das Alter von Herrn X kann damit 73, 74, 93 oder 94 Jahre sein. Von diesen Zahlen ist nur 73 Primzahl. Es ergibt sich damit folgende Verteilung:

$$f = 8, \quad i = 7, \quad k = 3, \quad g = 9 \quad \text{und} \quad h = 4.$$

Für b und d stehen nur noch die Ziffern 5 und 6 zur Verfügung.
Aus g) folgt, weil es aus D) hervorgegangen ist, daß Herr X vor dem 30. 5. Geburtstag hatte.
Damit ist $d = 5$ und $b = 6$.
Herr X wurde am 26. 05. 1894 geboren und ist 73 Jahre alt.

L.2.6 Bezeichnet man das jetzige Alter der Tante in Jahren mit k, das des Bruders mit b, das der Schwester mit s, die Anzahl der seit dem im ersten Satz genannten Zeitpunkt verflossenen Jahre mit x und die Anzahl der seit dem im zweiten Satz genannten Zeitpunkt verflossenen Jahre mit y, dann kann man die in der Aufgabe enthaltenen Aussagen in der folgenden Form schreiben:

$$k - x = b + s \tag{1}$$
$$s - x = b \tag{2}$$
$$k - y = s. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$k = 2s, \tag{4}$$

aus (3) und (4) folgt

$$y = s.$$

a) Vor y Jahren war die Schwester 0 Jahre alt.

b) Die Tante ist jetzt $2y$ Jahre alt, also doppelt so alt, wie die Schwester jetzt ist.

L.2.7 Bezeichnet man die ursprünglich vorhandene Anzahl Kirschen mit x, so kann man folgende Aufstellung machen: Jürgen nimmt

$$1 + \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{3};$$

es verbleiben

$$x - \frac{x+2}{3} = \frac{2x-2}{3}.$$

Renate nimmt

$$2 + \left(\frac{2x-2}{3} - 2\right)\frac{1}{3} = \frac{2x+10}{9};$$

es verbleiben

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{2x+10}{9} = \frac{4x-16}{9}.$$

Christine nimmt

$$\frac{4x-16}{9}\,\frac{1}{3} = \frac{4x-16}{27};$$

es verbleiben

$$\frac{4x-16}{9} - \frac{4x-16}{27} = \frac{8x-32}{27}.$$

Laut Aufgabe gilt

$$x - \frac{8x-32}{27} = 42$$

und somit

$$x = 58.$$

Es befanden sich anfangs 58 Kirschen in der Schüssel.

L.2.8 Wenn die Gleichung (*) eine Lösung x_0 besitzt, so gilt:

$$\frac{a(x_0+1)+b}{c(x_0+1)+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}, \tag{1}$$

$$c(x_0+1)+d \neq 0, \quad cx_0+d \neq 0.$$

Daraus folgt

$$[a(x_0+1)+b](cx_0+d) = [c(x_0+1)+d](ax_0+b), \tag{2}$$

$c^2 + d^2 > 0$, weil c und d nicht gleichzeitig Null sein können,

und weiter

$$ad = bc, \quad c^2 + d^2 > 0. \tag{3}$$

Wenn (*) eine Lösung besitzt, so muß (3) gelten, und umgekehrt, wenn (3) gilt, dann hat (*) eine Lösung; denn aus (3) folgt, daß für alle reellen Zahlen x_0 sicher (2) gilt, und daraus folgt weiter:

I. Ist $c = 0$, dann ist wegen (3) auch $a = 0$ und $d \neq 0$. Also ist für jede reelle Zahl x_0 sicher (1) erfüllt.

II. Ist $c \neq 0$, dann ist die Gleichung (1) für jede reelle Zahl x_0 mit

$$x_0 \neq -\frac{d}{c} \text{ und } x_0 \neq -\frac{d+c}{c} \text{ erfüllt.}$$

$$x_0 = -\frac{d}{c} \text{ und } x_0 = -\frac{d+c}{c} \text{ sind nicht Lösung von (*).}$$

L.2.9 Angenommen, die Gleichungen hätten beide die Lösung x_0, dann ist $x_0 \neq 0$, und es gilt

$$3x_0^4 + 13x_0^3 + 20x_0^2 + 17x_0 + 7 = 0 \tag{1}$$

$$3x_0^4 + x_0^3 \quad - \quad 8x_0^2 + 11x_0 - 7 = 0. \tag{2}$$

Durch Addition erhält man aus (1) und (2):

$$6x_0^4 + 14x_0^3 + 12x_0^2 + 28x_0 = 0 \tag{3}$$

bzw. wegen $x_0 \neq 0$

$$6x_0^3 + 14x_0^2 + 12x_0 + 28 = 0. \tag{3a}$$

Durch Subtraktion erhält man aus (1) und (2):

$$12x_0^3 + 28x_0^2 + 6x_0 + 14 = 0 \quad \text{bzw.} \tag{4}$$

$$6x_0^3 + 14x_0^2 + 3x_0 + \quad 7 = 0. \tag{4a}$$

Aus (3a) und (4a) folgt durch Subtraktion:

$$9x_0 + 21 = 0,$$

d.h.

$$x_0 = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}. \tag{5}$$

Als gemeinsame Lösung des Gleichungssystems kommt nur der Wert $-\frac{7}{3}$ in Frage.

Durch Einsetzen in die beiden Ausgangsgleichungen bestätigt man, daß $x = -\frac{7}{3}$ Lösung ist.

L.2.10 Ist (a, b) ein Paar reeller Zahlen, für das

$$a + b = ab \tag{1}$$

$$a \cdot b = \frac{a}{b} \tag{2}$$

gilt, so folgt aus (2), daß $b \neq 0$ ist, und danach aus (1), daß $a \neq 0$, und aus (2), daß $b^2 = 1$ ist. Also gilt

a) $\quad b_1 = +1$

oder

b) $\quad b_2 = -1.$

Fall a) führt zu

$$a + 1 = a$$

und damit zu einem Widerspruch.

Fall b) ergibt

$$a - 1 = -a$$

$$a = \frac{1}{2}$$

als einzig mögliche Lösung. Durch Einsetzen in (1) und (2) zeigt man, daß $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ Lösung und damit das einzige Paar reeller Zahlen ist, das alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

L.2.11 Wenn

$$m + n = 111, \quad 10 \leqq m \leqq 90, \quad 10 \leqq n \leqq 99$$

gilt, muß sogar

$$12 \leqq m \leqq 99, \quad 12 \leqq n \leqq 99$$

sein. Wegen $m = 111 - n$ ergeben sich so die $99 - 11 = 88$ geordneten Paare $(111 - n, n)$, $n = 12, 13, \ldots, 99$.

L.2.12 Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit jeder der folgenden Gleichungen:

$$a + bc = a^2 + ac + ab + bc$$

$$a(a + b + c - 1) = 0. \tag{1}$$

Da das Produkt zweier Zahlen dann und nur dann Null ist, wenn wenigstens einer seiner Faktoren Null ist, folgt, daß

$$a = 0 \quad \text{oder} \quad a + b + c - 1 = 0$$

sein muß, und umgekehrt ist in jedem dieser Fälle die Gleichung (1) und damit die gegebene Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung ist also erfüllt für alle Zahlentripel $(a. b, c)$ mit

1. $a = 0$ und reellen Zahlen b und c und
2. reellen Zahlen a, b und c, für die

$$a + b + c = 1$$

gilt.

In allen anderen Fällen ist sie nicht erfüllt.

L.2.13 $x_1 + x_2 = a$ und $x_1 \cdot x_2 = b$ sind die Beziehungen im VIETAschen Wurzelsatz für die quadratische Gleichung der Form

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Diese Gleichung besitzt dann und nur dann reelle Lösungen, wenn die Diskriminante

$$D = \left(\frac{-a}{2}\right)^2 - b \geqq 0$$

ist, d.h., wenn

$$a^2 - 4b \geqq 0$$

ist.

L.2.14 Die angegebene Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Daraus folgt

$$|x_2| > |x_1| \quad \text{für} \quad a > 0$$

und

$$|x_1| > |x_2| \quad \text{für} \quad a < 0.$$

L.2.15 Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach dem VIETAschen Wurzelsatz

$$w^2 + w = \frac{15}{4} \tag{1}$$

und

$$w^2 \cdot w = a. \tag{2}$$

Aus (1) folgt:

$$w_1 = \frac{3}{2}, \quad w_2 = -\frac{5}{2}.$$

Wegen (2) ist

$$a_1 = w_1^3 = \frac{27}{8}, \quad a_2 = w_2^3 = -\frac{125}{8}.$$

Durch Einsetzen findet man, daß die ermittelten Werte den Bedingungen tatsächlich genügen:

$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$,

$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{125}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$.

Die gestellte Bedingung wird von jeder der beiden Zahlen

$$a = a_1 = \frac{27}{8} \quad \text{und} \quad a = a_2 = -\frac{125}{8}$$

und von keiner anderen erfüllt.

L.2.16 Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0. \tag{1}$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanden nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}} \\ &= \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1-4(3-5k)(1-k)}{4(1-k)^2}} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2+32k-11}}{2(k-1)}. \end{aligned}$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 = 0,$$

d.h.

$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0$$

ist.

Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese k der Fall.

b) Die Gleichung (1) hat genau dann zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 > 0$$

ist. Daraus folgt

$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0.$$

und schließlich

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{11}{20}\right) < 0.$$

Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$$k - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{und gleichzeitig}$$

$$k - \frac{11}{10} < 0,$$

ist, also für

$$\frac{1}{2} < k < 1, \quad 1 < k < \frac{11}{10},$$

oder

$$k - \frac{1}{2} < 0 \quad \text{und gleichzeitig}$$

$$k - \frac{11}{10} > 0$$

ist.

Es gibt keinen Wert von k, der den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügt.

Also hat die Gleichung (1) für $\frac{1}{2} < k < 1$, $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k voneinander verschiedene reelle Lösungen.

L.2.17 Angenommen, das Gleichungssystem hätte eine Lösung x_0, y_0, z_0, dann gilt

$$y_0 + z_0 = px_0 \tag{1}$$

$$z_0 + x_0 = py_0 \tag{2}$$

$$x_0 + y_0 = pz_0. \tag{3}$$

Durch Subtraktion erhält man aus (1) und (2) bzw. aus (1) und (3):

$$(1 + p)(y_0 - x_0) = 0 \tag{4}$$

$$(1 + p)(z_0 - x_0) = 0. \tag{5}$$

Außerdem erhält man durch Addition aus (1), (2) und (3)

$$2x_0 + 2y_0 + 2z_0 = p(x_0 + y_0 + z_0),$$

d.h.

$$(2 - p)(x_0 + y_0 + z_0) = 0. \tag{6}$$

Für $p \neq -1$ folgt aus (4) und (5):

$$x_0 = y_0 = z_0. \tag{7}$$

Ersetzt man in (1), (2) und (3) y_0 und z_0 durch x_0, so ergibt sich

$$x_0 + x_0 = px_0,$$
$$(2 - p)x_0 = 0.$$

Ist $p \neq 2$, so gilt $x_0 = 0$ und wegen (7) auch $y_0 = 0$ und $z_0 = 0$.
Für $p = 2$ folgt aus (6)

$$x_0 + y_0 + z_0 = t \quad (t \text{ beliebige reelle Zahl})$$

und aus (7)

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{t}{3}.$$

Für $p = -1$ folgt aus (6)

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0.$$

Setzt man $x_0 = u$ und $y_0 = v$ (u, v beliebige reelle Zahlen), so gilt

$$z_0 = -u - v.$$

Notwendige Bedingungen für die Lösung sind also:
im Fall $p \neq 1$ und $p \neq 2$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0,$$

im Fall $p = 2$

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{t}{3} \quad (t \text{ reell}),$$

im Fall $p = -1$

$$x_0 = u, \quad y_0 = v,$$
$$z_0 = -u - v \quad (u, v \text{ reell}).$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichungen bestätigt man, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind.

L.2.18 a) Löst man die erste Gleichung des Systems (*) nach x auf und setzt diesen Wert für x in die zweite Gleichung und in die dritte Gleichung ein, so erhält man die dem System (*) äquivalenten Systeme

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ -7y + 0z &= 0 \\ -7y - z &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 7y + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Das Zahlentripel $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ ist die einzige Lösung des Systems (1) und daher auch des Systems (*).

b) Aus a) ergibt sich, daß jedes Gleichungssystem mit der gleichen linken Seite wie (*) höchstens eine Lösung besitzen kann. Daher genügt es, die folgenden neun Gleichungssysteme zu betrachten.

$$\begin{aligned} a_1x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \tag{S_1}$$

$$\begin{aligned} 2x + a_2y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_2)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + a_3z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_3)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ a_4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_4)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + a_5y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_5)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + a_6z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_6)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ a_7x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_7)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + a_8y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_8)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + a_9z &= 4 \end{aligned} \qquad (S_9)$$

Löst man die erste Gleichung des Systems (S_1) nach z auf und setzt diesen Term für z in die zweite und dritte Gleichung ein, so erhält man das dem System (S_1) äquivalente System (S_1')

$$\begin{aligned} a_1x + 3y + z &= 1 \\ (4 - 2a_1)\,x - 7y \phantom{{}+z} &= 0 \\ (8 - 3a_1)\,x - 4y \phantom{{}+z} &= 1 \end{aligned} \qquad (S_1')$$

Löst man die zweite Gleichung des Systems (S_1') nach y auf, so erhält man das dem System (S_1') äquivalente System (S_1'')

$$\begin{aligned} a_1x + 3y + z &= 1 \\ (4 - 2a_1)\,x - 7y \phantom{{}+z} &= 0 \\ (40 - 13a_1)\,x \phantom{{}-7y+z} &= 7 \end{aligned} \qquad (S_1'')$$

Das System (S_1'') und daher auch (S_1) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $a_1 \neq \frac{40}{13}$ ist, und nicht lösbar für $a_1 = \frac{40}{13}$.

Entsprechend ergibt sich:

(S_4) ist eindeutig lösbar für alle $a_4 \neq \frac{15}{2}$, unlösbar für $a_4 = \frac{15}{2}$, (S_7) ist eindeutig lösbar für alle $a_7 \neq 6$, unlösbar für $a_7 = 6$ und (S_8) ist eindeutig lösbar für alle a_8.

Löst man die erste Gleichung des Systems (S_2) nach z auf und setzt diesen Term in die zweite und dritte Gleichung des Systems (S_2) ein, so erhält man die dem System äquivalenten Systeme (S_2').

$$\begin{aligned} 2x + \quad a_2 y + z &= 1 \\ (2a_2+1)\,y &= 0 \\ 2x + (5-3a_2)\,y &= 1 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} a_2 y + 2x + z &= 1 \\ (5-3a_2)\,y + 2x &= 1 \\ (2a_2+1)\,y &= 0. \end{aligned} \quad (S_2')$$

Hieraus folgt: Das System (S_2') und daher auch das System (S_2) ist eindeutig lösbar für alle $a_2 \neq -\frac{1}{2}$ und hat unendlich viele Lösungen für $a_2 = -\frac{1}{2}$. In diesem Falle sind sämtliche Zahlentripel der Form

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{13}{4}t,\ t,\ 7t\right) \quad (t \text{ beliebig reell}) \tag{2}$$

und nur diese Lösung des Systems (S_2).

Entsprechend folgt:

(S_3) ist eindeutig lösbar für alle $a_3 \neq \frac{1}{2}$. (S_3) hat unendlich viele Lösungen für $a_3 = \frac{1}{2}$, und zwar sind in diesem Falle Zahlentripel der Form

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{13}{28}t,\ \frac{1}{7}t,\ t\right) \quad (t \text{ beliebig reell}) \tag{3}$$

und nur diese Lösung des Systems (S_3).

(S_5) ist eindeutig lösbar für alle $a_5 \neq 6$. (S_5) hat unendlich viele Lösungen für $a_5 = 6$, und zwar sind in diesem Falle alle Zahlentripel der Form

$$\left(\frac{1}{2} + 2t,\ t,\ -7t\right) \quad (t \text{ beliebig reell}) \tag{4}$$

und nur diese Lösung des Systems (S_5).

(S_6) ist eindeutig lösbar für alle $a_6 \neq 1$. (S_6) hat unendlich viele Lösungen für $a_6 = 1$, und zwar sind in diesem Fall alle Zahlentripel der Form

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{7}t,\ -\frac{1}{7}t,\ t\right) \quad (t \text{ beliebig reell}) \tag{5}$$

und nur diese Lösung des Systems (S_6).

(S_9) ist eindeutig lösbar für alle $a_9 \neq 4$. (S_9) hat unendlich viele Lösungen für $a_9 = 4$, und zwar sind in diesem Falle alle Zahlentripel der Form

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t,\ 0,\ t\right) \quad (t \text{ beliebig reell}) \tag{6}$$

und nur diese Lösung des Systems (S_9).

c) Ändert man z.B. im System (S_5) mit $a_5 = 6$ das absolute Glied der ersten Gleichung, so daß die erste Gleichung von (S_5)

$$2x + 3y + z = 2$$

lautet, so widersprechen sich die erste und die zweite Gleichung von (S_5), und man erhält keine Lösung des neuen Systems.

L.2.19 Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus der ersten und dritten Gleichung durch Subtraktion

$$x_1 - x_3 + a\,(x_2 - x_4) + x_3 - x_1 = 0$$
$$a\,(x_2 - x_4) = 0. \tag{1}$$

Entsprechend folgt aus der zweiten und vierten Gleichung

$$a\,(x_3 - x_1) = 0. \tag{2}$$

I. Es sei $a \neq 0$.

Dann erhält man aus (1) und (2)

$$x_2 = x_4 \quad \text{und} \quad x_1 = x_3,$$

ferner aus der ersten und zweiten Gleichung

$$2x_1 + ax_2 = b, \tag{3}$$
$$2x_2 + ax_1 = b. \tag{4}$$

Daraus folgt

$$(4 - a^2)\,x_1 = b\,(2 - a)$$
$$(2 - a)\,[(2 + a)\,x_1 - b] = 0. \tag{5}$$

Ia. Es sei $a \neq 2$, $a \neq -2$.

Dann erhält man aus (5)

$$x_1 = \frac{b}{2 + a}$$

und aus (4)

$$x_2 = \frac{b}{2 + a},$$

ferner

$$x_3 = \frac{b}{2 + a},$$
$$x_4 = \frac{b}{2 + a}.$$

Daher kann höchstens das Quadrupel

$$\left(\frac{b}{2 + a},\ \frac{b}{2 + a},\ \frac{b}{2 + a},\ \frac{b}{2 + a}\right)$$

eine Lösung des Gleichungssystems sein.

Durch Einsetzen in die Gleichungen zeigt man, daß tatsächlich jedes derartige Quadrupel Lösung ist.

Ib. Es sei $a = -2$.

Dann hat im Falle $b \neq 0$ die Gleichung (5) und damit das gegebene Gleichungssystem *keine* Lösung.

Im Falle $b = 0$ folgt aus (3), (1) und (2)

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 .$$

Also können höchstens alle Quadrupel (t, t, t, t), wobei t eine reelle Zahl ist, Lösung sein. Durch Einsetzen in die Gleichungen überzeugt man sich davon, daß tatsächlich jedes derartige Quadrupel Lösung ist.

Ic. Es sei $a = 2$.

Dann folgt aus (3)

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{2} .$$

Also können wegen (5) und (6) höchstens alle Quadrupel

$$\left(t, \frac{b}{2} - t, t, \frac{b}{2} - t\right),$$

wobei t eine reelle Zahl ist, Lösung sein. Durch Einsetzen zeigt man, daß tatsächlich jedes derartige Quadrupel Lösung ist.

II. Es sei $a = 0$.

In diesem Falle erhält man die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = b ,$$
$$x_2 + x_4 = b .$$

Also können höchstens alle Quadrupel

$$(t_1, t_2, b - t_1, b - t_2),$$

wobei t_1, t_2 beliebige reelle Zahlen sind, Lösung sein. Durch Einsetzen zeigt man, daß tatsächlich jedes derartige Quadrupel Lösung ist.

L.2.20 Angenommen, x_0 sei eine reelle Zahl, die der gegebenen Gleichung

$$\sqrt{p + x} + \sqrt{p - x} = x \tag{1}$$

genügt. Dann gilt

$$\sqrt{p + x_0} + \sqrt{p - x_0} = x_0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq x_0 \leqq p, \tag{2}$$

da die Radikanden $p + x_0$ und $p - x_0$ sowie

$$x_0 = \sqrt{p + x_0} + \sqrt{p - x_0}$$

nicht negativ sein können.
Aus (2) folgt durch zweimaliges Quadrieren und Ordnen

$$x_0^4 + x_0^2 (4 - 4p) = 0 . \tag{3}$$

(2) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\text{I. } x_0^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \text{II. } x_0^2 = 4 (p - 1)$$

ist.
Wegen $p > 0$ kommt $x_0 = 0$ als Lösung von (1) nicht in Frage. Im Fall II. erhält man nur dann einen von 0 verschiedenen reellen Wert für x_0, wenn $p > 1$ ist.

Daher besitzt die Gleichung (1) im Falle $0 < p \leqq 1$ keine reelle Lösung.
Im Falle $p > 1$ kommt als Lösung von (1) nur der Wert $x_0 = 2\sqrt{p - 1}$ in Frage.

Setzt man in die linke Seite von (1) $x = x_0 = 2\sqrt{p-1}$, so ergibt sich:

$$L = \sqrt{p + 2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p - 2\sqrt{p-1}}\,.$$

Weiter gilt:

$$L = \sqrt{\left(\sqrt{p-1} + 1\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{p-1} - 1\right)^2}. \tag{4}$$

Für $1 < p < 2$ folgt:

$$L = \sqrt{p-1} + 1 + 1 - \sqrt{p-1} = 2\,.$$

Für $x = x_0 = 2\sqrt{p-1}$ lautet die rechte Seite von (1):

$$R = 2\sqrt{p-1}\,.$$

Da $2 \neq 2\sqrt{p-1}$ für $1 < p < 2$ gilt, hat die Gleichung (1) für diese Werte von p keine Lösung.

Für $p \geqq 2$ folgt aus (4):

$$L = 1 + \sqrt{p-1} - 1 + \sqrt{p-1} = 2\sqrt{p-1} = R,$$

d.h., im Falle $p \geqq 2$ ist

$$x = x_0 = 2\sqrt{p-1}$$

die einzige Lösung von (1).

L.2.21 Angenommen, eine Zahl x_0 erfüllte die gegebene Gleichung. Dann existieren die in der Gleichung vorkommenden Wurzelausdrücke, also gilt $x_0 > 0$. Nach Multiplikation der gegebenen Gleichung mit

$$\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}$$

(dieser Ausdruck existiert, da er ebenfalls in der Gleichung vorkommt) erhält man

$$\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0 - \sqrt{x_0}}\right)\left(\sqrt{x_0 + \sqrt{x_0}}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{x_0},$$

also

$$x_0 + \sqrt{x_0} - \sqrt{x_0^2 - x_0} = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}\,, \text{ d.h.}$$

$$\sqrt{x_0^2 - x_0} = x_0 - \frac{\sqrt{x_0}}{2}\,.$$

Hieraus folgt:

$$x_0^2 - x_0 = x_0^2 - x_0\sqrt{x_0} + \frac{x_0}{4},$$

$$x_0\sqrt{x_0} = \frac{5}{4}x_0,$$

wegen $x_0 \neq 0$ also

$$\sqrt{x_0} = \frac{5}{4}\,.$$

Daher kann höchstens $x_0 = \frac{25}{16}$ die gegebene Gleichung erfüllen. Tatsächlich ist

$$\sqrt{\frac{25}{16}+\sqrt{\frac{25}{16}}}-\sqrt{\frac{25}{16}-\sqrt{\frac{25}{16}}}=\sqrt{\frac{45}{16}}-\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{5}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

und

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\frac{25}{16}}{\frac{25}{16}+\sqrt{\frac{25}{16}}}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{25}{45}}=\frac{1}{2}\sqrt{5},$$

also $x=\frac{25}{16}$ Lösung der Gleichung.

L.2.22 Angenommen, es gäbe ein Paar (x_0, y_0) reeller Zahlen, das dem gegebenen System (*) genügt, dann gilt

$$x_0 y_0 + \frac{x_0}{y_0} = 3p\,(x_0^2 + y_0^2) \tag{1}$$

$$x_0 y_0 - \frac{x_0}{y_0} = p\,(x_0^2 + y_0^2), \tag{2}$$

mit $y_0 \neq 0$.

Das Paar (x_0, y_0) erfüllt dann auch die aus (1) und (2) durch Addition und Subtraktion hervorgehenden Gleichungen:

$$x_0 y_0 = 2p\,(x_0^2 + y_0^2), \tag{3}$$

$$2\frac{x_0}{y_0} = 2p\,(x_0^2 + y_0^2). \tag{4}$$

Hieraus folgt:

$$x_0 y_0 = 2\,\frac{x_0}{y_0} \tag{5}$$

und weiter

$$x_0\left(y_0 - \frac{2}{y_0}\right) = 0. \tag{6}$$

(6) gilt genau dann, wenn

I. $x_0 = 0$ oder II. $y_0^2 = 2$

ist.

(1) ist im Falle $x_0 = 0$ wegen $y_0 \neq 0$ genau dann erfüllt, wenn $p = 0$ ist. Durch Einsetzen in (*) bestätigt man, daß in diesem Falle alle Paare $(0, y_0)$ mit $y_0 \neq 0$ reelle Lösungen von (*) sind.

Für $y_0^2 = 2$ folgt aus (3), daß entweder

$$\sqrt{2}\,x_0 = 2p\,(x_0^2 + 2) \tag{7}$$

oder

$$-\sqrt{2}\,x_0 = 2p\,(x_0^2 + 2) \tag{8}$$

und weiter entweder

$$x_0^2 - \frac{\sqrt{2}}{2p}\,x_0 + 2 = 0 \tag{9}$$

oder

$$x_0^2 + \frac{\sqrt{2}}{2p} x_0 + 2 = 0 \tag{10}$$

gilt.
(9) ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 - \sqrt{1 - 16p^2}\right)$$

oder

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 + \sqrt{1 - 16p^2}\right)$$

gilt.
(10) ist genau dann erfüllt, wenn entweder

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 - \sqrt{1 - 16p^2}\right)$$

oder

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 + \sqrt{1 - 16p^2}\right)$$

gilt.
Da x_0 reell ist und der Fall $x_0 = 0$ schon erörtert wurde, muß, wenn nicht der Fall I vorliegt, $0 < |p| \leqq \frac{1}{4}$ gelten. Durch Einsetzen in (1) bestätigt man, daß in den Fällen $0 < |p| \leqq \frac{1}{4}$ die Zahlenpaare

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16p^2}\right), \sqrt{2}\right) \quad \text{und}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16p^2}\right), -\sqrt{2}\right)$$

Lösungen des Gleichungssystems (1) sind.
Lösungen des Gleichungssystems sind also:

Falls $p = 0$ ist: $(0, y_0)$ mit $y_0 \neq 0$ und nur diese Zahlenpaare.

$$\text{Falls } 0 < |p| \leqq \frac{1}{4} \text{ ist: } \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16p^2}\right), \sqrt{2}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{4p} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16p^2}\right), -\sqrt{2}\right) \end{array}\right\} \text{ und nur diese Zahlenpaare.}$$

Ist $|p| > \frac{1}{4}$, so hat das Gleichungssystem keine (reelle) Lösung.

L.2.23 Angenommen, (x, y) sei eine Lösung.
1) Ist $x = y = 0$, so sind die beiden Gleichungen erfüllt.
2) Ist $x = 0$ und $y \neq 0$, so sind die Gleichungen genau dann erfüllt, wenn

$$b y^2 = b,$$

also

$$y = 1 \quad \text{oder} \quad y = -1$$

ist.

3) Ist $y = 0$ und $x \neq 0$, so sind die Gleichungen genau dann erfüllt, wenn

$$ax^2 = a,$$

also

$$x = 1 \quad \text{oder} \quad x = -1$$

ist.

4) Wären $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so müßte

$$ax^2 + by^2 - a = 0$$

und

$$ax^2 + by^2 - b = 0,$$

also

$$a = b$$

gelten, was der Voraussetzung widerspricht.

Das gegebene Gleichungssystem ist daher genau für die folgenden geordneten Paare reeller Zahlen erfüllt:

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

L.2.24 Es wird zunächst bewiesen, daß das arithmetische Mittel A dreier nichtnegativer reeller Zahlen a, b, c nie kleiner als das geometrische Mittel G dieser Zahlen ist.

Hilfssatz: Es sei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und

$$A = \frac{a + b + c}{3}, \quad G = \sqrt[3]{abc}.$$

Dann gilt $A \geqq G$

Beweis: O. B. d. A. kann $0 \leqq a \leqq b \leqq c$ vorausgesetzt werden.

Die Ungleichung

$$\frac{a + b + c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc} \tag{1}$$

ist mit der folgenden Abschätzung äquivalent:

$$(a + b + c)^3 \geqq 27abc. \tag{2}$$

Diese folgt aus der durch Ausrechnen leicht zu bestätigenden Identität:

$$(a + b + c)^3 - 27\,abc = \frac{1}{2}\,(a + b + c)\,[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] + 3\,[a\,(b - c)^2 + b\,(c - a)^2 + c\,(a - b)^2],$$

deren rechte Seite für alle nichtnegativen a, b, c nicht negativ ausfällt und genau dann verschwindet, wenn $a = b = c$ ist.

Nun zur Lösung der Aufgabe:

Setzt man: $x^3 = a$, $y^3 = b$, $z^3 = c$, so folgt aus dem Hilfssatz, daß

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geqq \sqrt[3]{x^3y^3z^3}, \quad \text{d.h.}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqq 3xyz$$

ist.

Da weiter wegen $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

$$3xyz > 2xyz$$

ist, gilt stets

$$x^3 + y^3 + z^3 > 2xyz,$$

und daher gibt es kein Tripel (x, y, z) positiver reeller Zahlen, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

L.2.25 Angenommen, (x_1, x_2, x_3, x_4) sei eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems, dann folgt aus (*) und (**) durch Subtraktion

$$x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_4 - x_3 = 0,$$

also

$$(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0.$$

Da das Gleichungssystem bei jeder zyklischen Vertauschung der Indizes in sich übergeht, ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen:

$$(x_1 - x_2)(x_3 + x_4 - 1) = 0 \qquad (1)$$
$$(x_1 - x_3)(x_2 + x_4 - 1) = 0 \qquad (2)$$
$$(x_1 - x_4)(x_2 + x_3 - 1) = 0 \qquad (3)$$
$$(x_2 - x_3)(x_1 + x_4 - 1) = 0 \qquad (4)$$
$$(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - 1) = 0 \qquad (5)$$
$$(x_3 - x_4)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \qquad (6)$$

Diese Gleichungen sind genau dann erfüllt, wenn in jeder der Gleichungen wenigstens ein Faktor gleich Null ist.
Wir unterscheiden folgende Fälle:

1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$,
2) $x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4$,
3) $x_1 = x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_4$,
4) $x_i \neq x_k$ für $i \neq k$.

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zyklisches Vertauschen der Indizes, da jedes Quadrupel, das aus einer Lösung durch zyklische Vertauschung der Indizes entsteht, ebenfalls Lösung ist und man jedes Quadrupel durch zyklische Vertauschung in einen der Fälle 1) bis 4) überführen kann.

1) In diesem Falle erhält man aus (*):

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 + x_1 = 2,$$

$$x_1^2 + \frac{x_1}{3} - \frac{2}{3} = 0.$$

Diese Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3}$$

oder

$$x_1 = \frac{-1 - 5}{6} = -1$$

ist. Man überzeugt sich leicht, daß für

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{2}{3}$$

und

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$$

das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

2) In diesem Falle erhält man wegen $x_3 \neq x_4$ aus (6):

$$x_1 + x_2 = 1,$$
$$2x_1 = 1,$$
$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}.$$

Ferner folgt aus (*)

$$3x_1^2 + x_4 = 2$$
$$x_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß für

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{5}{4}$$

das gegebene Gleichungssystem erfüllt ist.

3) In diesem Falle müßte wegen (2), (3), (4), (5)

$$x_2 + x_4 = x_2 + x_3 = x_1 + x_4 = x_1 + x_3 = 1,$$

also

$$x_3 = x_4,$$

und wegen der aus (*) folgenden Beziehung $x_3 = 1 - x_1$

$$x_1^2 + 2x_1(1 - x_1) + 1 - x_1 = 2$$
$$x_1^2 - x_1 + 1 = 0$$

gelten. Das ist aber auf Grund von

$$x_1^2 - x_1 + 1 = \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

nicht möglich. In diesem Falle existiert also keine Lösung.

4) In diesem Falle folgt aus (1) und (2):

$$x_3 + x_4 = x_2 + x_4 = 1;$$

das ist aber wegen $x_2 \neq x_3$ unmöglich.

Das gegebene Gleichungssystem ist also für die Quadrupel

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$$
$$(-1, -1, -1, -1) \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) \qquad \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

und nur für diese erfüllt.

L.2.26 Für $a \geqq 4$, $b \geqq 4$, $c \geqq 4$ ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqq 3 \cdot \frac{1}{4} < 1.$$

Also muß in einer Lösung mindestens eine der Zahlen a, b, c kleiner als 4 sein. Wir betrachten zunächst die Fälle, in denen dies für die Zahl a zutrifft. Man erkennt sofort, daß $a = 1$ keine Lösung liefern kann.

Angenommen, (a, b, c) sei eine Lösung.

1. Fall: $a = 2$

Dann muß gelten

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

Ähnlich wie eben zeigt man, daß mindestens eine der Zahlen b, c kleiner als 5 sein muß. Daraus folgt:

Für $\frac{1}{2}$ gibt es nur die folgenden beiden Zerlegungen in zwei Stammbrüche

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

und

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

2. Fall: $a = 3$

Dann gilt

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1, \quad \text{also} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}.$$

Mindestens eine der Zahlen b, c muß nun kleiner als 4 sein, und daraus folgt:

Für $\frac{2}{3}$ gibt es genau zwei Zerlegungen in zwei Stammbrüche

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{3}$$

und

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \tag{4}$$

Im Sinne der Aufgabe sind in den aus (1), (2), (3) und (4) resultierenden Zerlegungen der Zahl 1 noch alle Vertauschungen der Summanden zulässig, wobei jedoch die aus (2) und die aus (4) gewonnenen Zerlegungen miteinander übereinstimmen. Somit erhalten wir, daß genau folgende 10 Tripel die geforderten Bedingungen erfüllen:

(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2),
(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6), (3, 6, 2),
(6, 2, 3), (6, 3, 2),
(3, 3, 3).

L.2.27 Die Gleichung

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3$$

ist wegen

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= a^3 + b^3 \\ 3a^2b + 3ab^2 &= 0 \\ 3ab\,(a + b) &= 0 \\ ab\,(a + b) &= 0. \end{aligned}$$

Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens einer seiner Faktoren gleich Null ist, gilt die angegebene Gleichung genau dann, wenn mindestens eine der drei Bedingungen

1) $a = 0$, b beliebig rational,
2) $b = 0$, a beliebig rational,
3) $a = -b$, b beliebig rational

erfüllt ist.

L.2.28 Die gegebene Gleichung gilt genau dann, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

I. 1) $a = 0$, b beliebig reell; n beliebig ganz $\geqq 1$,
2) $b = 0$, a beliebig reell; n beliebig ganz $\geqq 1$,
II. $a = -b$, n ungerade,
III. $n = 1$, a, b beliebig reell.

Beweis: Daß die gegebene Gleichung in den genannten Fällen eine wahre Aussage wird, prüft man durch Einsetzen nach.
Jetzt wird gezeigt, daß die Gleichung in keinem anderen Fall erfüllt ist.
Angenommen, die gegebene Gleichung sei erfüllt und es liege keiner der angegebenen Fälle vor. Dann kann man aus Symmetriegründen o. B. d. A. annehmen, daß $|a| \geqq |b|$, insbesondere also $a \neq 0$ ist.
Dividiert man beide Seiten der gegebenen Gleichung durch a^n, so erkennt man, daß

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

oder mit $x = \dfrac{b}{a}$, $0 < |x| = \dfrac{|b|}{|a|} \leqq 1$,

$$(1 + x)^n = 1 + x^n \tag{1}$$

gelten müßte.
Ist nun $x > 0$, so gilt

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \ldots + x^n > 1 + x^n;$$

denn da nicht der Fall III. vorliegt, ist $n \geqq 2$. Ist aber $x < 0$ und n gerade, so ist $(1 + x)^n < 1$ und $1 + x^n > 1$.
In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu (1).
Wir betrachten nun noch den letzten möglichen Fall

$$n = 2k + 1 \geqq 3 \ (k \text{ natürliche Zahl}), \quad x = -t, \quad 0 < t < 1.$$

Dann ist

$$(1 + x)^n = (1 - t)^n < 1 - t < 1 - t^n = 1 + x^n \tag{2}$$

im Widerspruch zu (1).

L.2.29 Ist (x, y) ein Paar, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt, dann gilt

$$\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{y},$$

woraus sich nach einmaligem Quadrieren beider Seiten

$$x = 50 + y - 2\sqrt{50y}$$
$$= 50 + y - 10\sqrt{2y}$$
ergibt.

Da x und y nach Voraussetzung positive ganze Zahlen sind, muß es eine natürliche Zahl $k \neq 0$ geben, so daß $2y = k^2$ gilt.
Daraus folgt, daß k gerade ist.
Für $k = 2$ erhält man $y = 2$, $x = 32$;
für $k = 4$ erhält man $y = 8$, $x = 18$;
für $k = 6$ erhält man $y = 18$, $x = 8$;
für $k = 8$ erhält man $y = 32$, $x = 2$
als Lösung, wie man durch Einsetzen bestätigt.

Weitere Lösungen gibt es nicht; denn für $k = 10$ ist $y = 50$ und damit $x = 0$, was einer Bedingung der Aufgabe widersprechen würde, und für $k > 10$ gilt: $y > 50$ und damit $\sqrt{y} > \sqrt{50}$, so daß $\sqrt{x} < 0$ sein müßte, was für reelles x nicht möglich ist.

L.2.30 Bezeichnet (a_1, a_2, a_3) eine Lösung der Gleichung
$$\sqrt{2a_1^2 - 2a_2^2} = a_3,$$
so muß wegen der Definition des Wurzelzeichens $a_1 \geqq a_2$ sein und
$$2(a_1^2 - a_2^2) = a_3^2$$
gelten. Daraus folgt, daß a_3^2 und damit auch a_3 durch 2 teilbar ist, also
$$a_3 = 2a' \quad (a' \text{ natürlich}).$$
Somit ist
$$a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2) \cdot (a_1 + a_2) = 2a'^2,$$
und es sind wegen $a_3 \leqq 10$ für a' nur die Werte
$$1; 2; 3; 4; 5$$
möglich.
Also sind folgende Faktorenzerlegungen zu prüfen:
$$1 \cdot 2 = 2$$
$$1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 18$$
$$1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8 = 32$$
$$1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10 = 50.$$
Dabei ist $p = a_1 - a_2$ jeweils der kleinere und $q = a_1 + a_2$ der größere Faktor. Weil $p + q = 2a_1$ eine natürliche Zahl ist, scheiden alle Fälle mit ungeradem $p + q$ aus. Es bleiben also genau die drei Fälle
$$p \cdot q = 2 \cdot 4$$
$$p \cdot q = 2 \cdot 16$$
$$p \cdot q = 4 \cdot 8$$
übrig. Sie ergeben als einzig mögliche Tripel:
$$(3, 1, 4) \quad \text{bzw.} \quad (9, 7, 8) \quad \text{bzw.} \quad (6, 2, 8).$$
Eine Probe erweist sie als Lösungen.

L.2.31 Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0 derart, daß

$$\left[\frac{5 + 6x_0}{8}\right] = \frac{15x_0 - 7}{5}$$

gilt. Dann ist

$$\frac{15x_0 - 7}{5} \leqq \frac{5 + 6x_0}{8} < \frac{15x_0 - 7}{5} + 1.$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit 4:

$$12x_0 - \frac{28}{5} \leqq \frac{5}{2} + 3x_0 < 12x_0 - \frac{8}{5},$$

also

$$\frac{41}{10} < 9x_0 \leqq \frac{81}{10}$$

und weiter nach Division durch 3 und Subtraktion von $\frac{7}{5}$:

$$-\frac{1}{30} < \frac{15x_0 - 7}{5} \leqq \frac{13}{10}.$$

Da $\frac{15x_0 - 7}{5}$ ganz ist, folgt weiter, daß entweder

$$\frac{15x_0 - 7}{5} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{15x_0 - 7}{5} = 1$$

gilt. Hieraus ergibt sich

$$x_0 = \frac{7}{15} \quad \text{bzw.} \quad x_0 = \frac{4}{5}.$$

Durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zeigt man, daß diese beiden Werte Lösungen der Ausgangsgleichung sind.
Also hat die Gleichung

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5}$$

die beiden Lösungen:

$$x = \frac{7}{15} \quad \text{und} \quad x = \frac{4}{5}$$

und keine weiteren.

L.2.32 Die Gleichung

$$\sqrt{A - B} = C \tag{1}$$

läßt sich in der Form

$$\sqrt{x\,(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2n-1}) - y\,(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1})}$$
$$= z\,(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) \tag{2}$$

schreiben. Wegen $x \neq 0$ ist (2) mit

$$x\,(1 + 10 + \ldots + 10^{2n-1}) - y\,(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1})$$
$$= z^2(1 + 10 + \ldots + 10^{n-1})^2$$

äquivalent. Wegen

$$1 + 10 + \ldots + 10^{2n-1} = \frac{10^{2n} - 1}{10 - 1}$$

und

$$1 + 10 + \ldots + 10^{n-1} = \frac{10^{n} - 1}{10 - 1}$$

erhält man daher

$$x \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} - y\frac{10^{n} - 1}{9} = z^2\left(\frac{10^{n} - 1}{9}\right)^2. \tag{3}$$

Da wegen $n > 0$ sicher $10^n - 1 \neq 0$ ist, ist (3) mit

$$(9x - z^2)\,10^n = 9y - 9x - z^2 \tag{4}$$

gleichbedeutend. Angenommen, (1) sei für die beiden voneinander verschiedenen Zahlen n_1 und n_2 erfüllt, dann gilt:

$$(9x - z^2)\,10^{n_1} = 9y - 9x - z^2 \tag{5}$$

und

$$(9x - z^2)\,10^{n_2} = 9y - 9x - z^2. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$(9x - z^2)\,(10^{n_1} - 10^{n_2}) = 0 \tag{7}$$

und hieraus wegen $n_1 \neq n_2$:

$$9x - z^2 = 0. \tag{8}$$

Aus (8) und (5) folgt dann

$$9y - 9x - z^2 = 0. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) ergibt sich

$$x = \left(\frac{z}{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad y = 2x.$$

Für z kommen daher nur Zahlen in Frage, die durch 3 teilbar sind, also $z = 3$, $z = 6$ oder $z = 9$, daraus folgt:

$$x = 1, \quad x = 4, \quad x = 9$$

und

$$y = 2, \quad y = 8, \quad y = 18.$$

Da $y = 18$ nicht zulässig ist, bleiben als Lösung der Aufgabe also nur die Zahlentripel (1, 2, 3) und (4, 8, 6) übrig.
Durch Einsetzen in (9) und (8) bestätigt man, daß die beiden als Lösung in Frage kommenden Zahlentripel (9) und (8) erfüllen.
Aus (9) und (8) ergibt sich (4).
Daher ist auch (4) für jedes dieser beiden Zahlentripel erfüllt und damit auch (1), und zwar für jede beliebige positive natürliche Zahl n.

L.2.33 Wenn es eine derartige dreistellige Zahl a gibt, so läßt sie sich in der Form $a = 100x + 10y + z$ darstellen, wobei x, y, z paarweise voneinander verschiedene natürliche Zahlen bedeuten, deren jede kleiner als 10 ist, und $x \neq 0$ gilt. Aus ihnen lassen sich genau drei Ziffernpaare (y, z), (z, x), (x, y) bilden und aus diesen entweder genau 4 oder genau 6 zweistellige Zahlen, je nachdem, ob eine der Zahlen y, z Null ist oder nicht, und zwar

$$10y + z, \quad 10z + x, \quad 10x + y,$$
$$10z + y, \quad 10x + z, \quad 10y + x.$$

Die Summe s dieser zweistelligen Zahlen ist

1) $22x + 22y + 22z$, falls $y \neq 0$, $z \neq 0$,
2) $21x + 21y$, falls $z = 0$ und
3) $21x + 21z$, falls $y = 0$ ist.

In den einzelnen Fällen genügt s der in der Aufgabe gestellten Forderung

$$s = 2a = 200x + 20y + 2z$$

genau dann, wenn

1) $y = 89x - 10z$
2) $y = 179x$
3) $z = 179x$

gilt. Diese diophantische Gleichung hat in dem zulässigen Bereich im Fall 1) die Lösung $x = 1$, $y = 9$, $z = 8$ und nur diese und in den Fällen 2) und 3) keine Lösung. Da, wie man leicht nachprüft, die Zahl 198 allen Bedingungen der Aufgabe genügt, ist sie Lösung der Aufgabe und zwar die einzige.

L.2.34 Bezeichnet man die Anzahl der Teilnehmer an allen drei Disziplinen mit y, und die Anzahl derjenigen von ihnen, die nur am Kugelstoßen teilnehmen, mit x, so müssen x und y der folgenden Gleichung genügen (Bild 1):

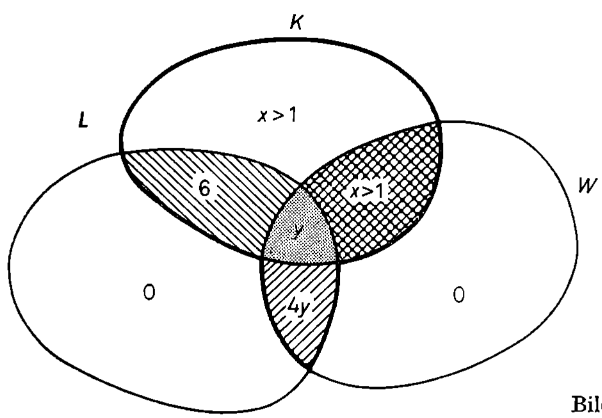


Bild 1

$$2x + 5y + 6 = 28, \text{ also } 2x + 5y = 22. \tag{1}$$

Daher muß y gerade sein. Da weiter nach Voraussetzung $y \neq 0$ und $x > 1$ gilt, ist (1) nur für $y = 2$ und $x = 6$ erfüllt.
Die Anzahl der Teilnehmer betrug also

beim Kugelstoßen	$2 \cdot 6 + 2 + 6$	= 20 Schüler,
beim Weitsprung	$5 \cdot 2 + 6$	= 16 Schüler,
beim 100-m-Lauf	$5 \cdot 2 + 6$	= 16 Schüler.

Da man hier schließen kann, daß y gerade sein muß, ist die Aufgabe „überbestimmt".

L.2.35 Dafür, daß von der ersten Sorte a, von der zweiten b und von der dritten c Bücher zu kaufen sind ($a > 0, b > 0, c > 0$), ist notwendig und hinreichend, daß

$$a + b + c = 30 \tag{1}$$

und

$$30a + 24b + 18c = 600 \tag{2}$$

gilt. Aus der ersten Gleichung erhält man

$$c = 30 - a - b.$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein, so ergibt sich

$$b = 10 - 2a.$$

Da $b > 0$ ist, gilt $1 \leqq a < 5$.
Durch Einsetzen der Zahlen 1, 2, 3, 4 für a erhält man die folgenden Zahlentripel, deren jedes, wie man durch Einsetzen prüft, (1) und (2) genügt.

a	1	2	3	4
b	8	6	4	2
c	21	22	23	24

Es gibt also diese und nur diese vier Möglichkeiten der Zusammenstellung.

L.2.36 Wegen $41 \cdot 25 > 1007$ können höchstens 24 Busse mit je 41 Plätzen voll besetzt werden. Es läßt sich nun die folgende Tabelle aufstellen.

Anzahl x der Busse zu 41 Plätzen	Anzahl n der fehlenden Plätze
24	23
23	$23 + 41 = 64$
22	$23 + 2 \cdot 41 = 105$
21	$23 + 3 \cdot 41 = 146$
20	$23 + 4 \cdot 41 = 187$
19	$23 + 5 \cdot 41 = 228$

Es müßte also in den einzelnen Fällen

$$29y + 13z = n \quad (y, z \text{ natürliche Zahlen})$$

sein, wobei y die Anzahl der Busse mit je 29 Plätzen und z die Anzahl der Busse mit je 13 Plätzen bedeuten. Durch Probieren findet man, daß diese Gleichung in den angegebenen sechs Fällen nur für $n = 146$ und für $n = 187$ natürliche Zahlen als Lösungen hat, und zwar
im Fall $n = 146$ die Lösung $y = 1, z = 9$ und nur diese
und im Fall $n = 187$ die Lösung $y = 6, z = 1$ und nur diese.
Bezeichnet man die Anzahl aller Busse mit s, so erhält man

$$\text{für } n = 146: \quad x = 21, y = 1, z = 9 \text{ und } s = 31,$$

$$\text{für } n = 187: \quad x = 20, y = 6, z = 1 \text{ und } s = 27.$$

Würde man weniger als 19 Busse, nämlich $18 - r$, $r \geqq 0$, Busse mit je 41 Plätzen verwenden, so wäre die Anzahl der in den anderen Bussen zu befördernden Personen $269 + 41r$, wozu wegen $269 > 9 \cdot 29$ im Falle $r = 0$ weniger als 10 Busse dieser Arten und allgemein im Falle $r \geqq 0$ weniger als $(10 + r)$ Busse nicht ausreichen würden. Daher würde die Anzahl der zu bestellenden Busse mindestens

$$s = 18 - r + 10 + r = 28$$

betragen.

Es sind also 20 Busse mit je 41 Plätzen, 6 Busse mit je 29 und 1 Bus mit 13 Plätzen, insgesamt also 27 Busse, zu bestellen.

Bemerkung: Bei den vorgegebenen Zahlen ist also s nicht dann minimal, wenn x maximal ist.

L.2.37 A kann höchstens 27 Jahre alt sein; denn die größte Quersumme, die unter den gegebenen Bedingungen möglich ist, beträgt

$$1 + 8 + 9 + 9 = 27.$$

Er ist also nach dem Jahre 1924 geboren. Sein Geburtsjahr sei

$$1900 + 10a + b \text{ mit } a, b \text{ ganz und } 2 \leqq a \leqq 5;\ 0 \leqq b \leqq 9.$$

Sein Alter beträgt am 1. 1. 1953 folglich (laut Voraussetzung) $1 + 9 + a + b$ Jahre.

Daher gilt, falls er am 1. 1. geboren ist (Fall 1):

$$1 + 9 + a + b = 1953 - (1900 + 10a + b),$$

also

$$43 = 11a + 2b.$$

Diese Gleichung wird, berücksichtigt man die Bedingungen für a und b, nur von $a = 3$ und $b = 5$ erfüllt. A wurde daher am 1. 1. 1935 geboren und ist 18 Jahre alt.

Er könnte aber auch an einem anderen Tage geboren sein (Fall 2):

$$1 + 9 + a + b = 1952 - (1900 + 10a + b),$$

also

$$42 = 11a + 2b.$$

Diese Gleichung wird unter den Bedingungen der Aufgabe von keinem Zahlenpaar (a, b) erfüllt.

Die für den Fall 1 angegebene Lösung ist also die einzige.

L.2.38 Angenommen, es sei (x_0, y_0, z_0) eine Lösung der Gleichung

$$5x + 2y + z = 10n. \tag{1}$$

Dann ist $(x_0 + 2, y_0, z_0)$ Lösung der Gleichung

$$5x + 2y + z = 10(n + 1) \tag{2}$$

und umgekehrt ist $(x_1 - 2, y_1, z_1)$ Lösung von (1), wenn (x_1, y_1, z_1) Lösung von (2) ist.

Daraus ergibt sich:

Zu jeder ganzzahligen nichtnegativen Lösung der Gleichung (1) gehört durch die Zuordnung

$$(x, y, z) \to (x + 2, y, z)$$

genau eine ganzzahlige nichtnegative Lösung der Gleichung (2). Jede ganz-

zahlige nichtnegative Lösung (x_1, y_1, z_1) der Gleichung (2) mit $x_1 = x_0 + 2 \geqq 2$ entspricht dabei genau einer ganzzahligen nichtnegativen Lösung der Gleichung (1).
Zu jeder ganzzahligen nichtnegativen Lösung der Gleichung (2) mit $0 \leqq x_1 = x_0 + 2 < 2$, d.h. mit $x_1 = 0$ oder mit $x_1 = 1$, gehört genau eine ganzzahlige Lösung der Gleichung (1) mit $x_0 < 0$ (nämlich mit $x_0 = -2$ bzw. $x_0 = -1$).
Da $A(n)$ für jedes n endlich ist und $A(n+1)$ die Anzahl der nichtnegativen ganzzahligen Lösungen der Gleichung (2) bedeutet, ist daher $A(n+1) - A(n)$ gleich der Anzahl der nichtnegativen, ganzzahligen Lösungen der Gleichung (2) mit $x_1 = 0$ und mit $x_1 = 1$.
Für $x = 0$ ist (2) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$2y + z = 10(n+1). \tag{3}$$

Für jede nichtnegative ganzzahlige Lösung (y_1, z_1) von (3) muß $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 5$ gelten. Umgekehrt erhält man zu jeder ganzen Zahl y_1 mit $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 5$ genau eine nichtnegative ganzzahlige Lösung (y_1, z_1) von (3). Also hat (3) genau $5n + 6$ nichtnegative ganzzahlige Lösungen.
Für $x = 1$ ist (2) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$2y + z = 10n + 5, \tag{4}$$

woraus sich analog unter Verwendung von $0 \leqq y_1 \leqq 5n + 2$ ergibt, daß die Gleichung (4) genau $5n + 3$ ganzzahlige nichtnegative Lösungen hat.
Daher ist

$$A(n+1) - A(n) = 10n + 9.$$

Da $A(0) = 1$ ist, erhält man:

$$\begin{aligned} A(n) &= A(0) + \sum_{i=0}^{n-1} [A(i+1) - A(i)] \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} (10i + 9) \\ &= 1 + 10 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 9n \\ &= 5n^2 + 4n + 1. \end{aligned}$$

L.2.39 Die beiden Zahlen seien a und b mit $a > b > 0$ und a, b ganzzahlig.
Dann soll laut Aufgabe gelten:

$$a^2 - b^2 = 105,$$

also

$$(a+b)(a-b) = 105.$$

Die Zahl 105 ist demnach in zwei ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, von denen der größere als $a + b$ und der kleinere als $a - b$ aufzufassen ist.
Dafür gibt es wegen der Primzahlzerlegung

$$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$$

die folgenden Möglichkeiten und nur diese:

$a + b$	105	35	21	15
$a - b$	1	3	5	7

Daraus folgten:

$$\begin{array}{llll} a = 53 & a = 19 & a = 13 & a = 11 \\ b = 52 & b = 16 & b = 8 & b = 4 \end{array}$$

Durch Einsetzen zeigt man, daß diese Werte tatsächlich Lösungen sind. Die vier ungeordneten Zahlenpaare lauten

$\{53,52\}$, $\{19,16\}$, $\{13,8\}$, $\{11,4\}$.

L.2.40 Angenommen, es gäbe ein Zahlentripel (a_0, b_0, c_0), das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt:

$$a_0^2 + b_0^2 = c_0^2 \quad \text{und} \tag{1}$$

$$c_0 = b_0 + 1. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$a_0^2 = 2b_0 + 1. \tag{3}$$

Aus (3) ist ersichtlich, daß a_0^2 ungerade ist, daher ist auch a_0 ungerade und läßt sich in der Form darstellen:

$$a_0 = 2n + 1, \quad n \text{ ganzzahlig.} \tag{4}$$

Weiter folgt aus (3) und (4)

$$b_0 = \frac{a_0^2 - 1}{2} = 2n^2 + 2n = 2n(n + 1) \tag{5}$$

und aus (2) und (5)

$$c_0 = 2n^2 + 2n + 1. \tag{6}$$

Ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Zahlentripel (a_0, b_0, c_0) muß notwendig (4), (5) und (6) erfüllen. Durch Einsetzen in die Beziehungen (*) und (**) bestätigt man, daß alle Zahlentripel

$$(2n + 1,\quad 2n(n + 1),\quad 2n^2 + 2n + 1)$$

mit ganzzahligem n den Bedingungen der Aufgabe genügen.

L.2.41

$$\begin{array}{l} 10008981 : 999 = 10019 \\ \underline{\;999\;} \\ \quad 1898 \\ \quad \underline{\;\;999} \\ \quad\;\; 8991 \\ \quad\;\; \underline{8991} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Begründung: Das angegebene Schema löst die Aufgabe. Es bleibt zu zeigen, daß dies die einzige Lösung ist. Erhält man als Ergebnis der Subtraktion einer $(n - 1)$-stelligen Zahl von einer n-stelligen eine höchstens $(n - 1)$-stellige Zahl, so beginnt der Minuend mit einer 1. Daraus folgt, daß sowohl der Dividend als auch der erste Restm it einer 1 beginnt.

Die Aufgabe

$$\begin{array}{r} 1{*}{*}{*} \\ \underline{-\;{*}{*}{*}} \\ 1 \end{array}$$

wird nur durch

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ 999 \\ \hline 1 \end{array}$$

gelöst. Da ein k-faches des Divisors, $0 < k < 10$, zwischen 8000 und 9000 liegt (letzte Zeile des Divisionsalgorithmus) und 999 ein l-faches des Divisors ($0 < l < 10$) ist, kommt nur 999 als Divisor in Frage. Es folgt $l = 1$, und 999 ist der Divisor.
Die vorletzte Zeile ergibt sich dann aus $999 \cdot 9 = 8991$. Im mittleren Teil des Divisionsalgorithmus erhält man danach die oben angegebene Lösung.

L.2.42 Die mit „$A\,T\,O\,M$" bezeichnete Zahl sei x, dann gilt:

$$1000 \leqq x < 10000 \tag{1}$$

und

$$x^2 - x = x\,(x-1) = n \cdot 10^4, \tag{2}$$

wobei n eine natürliche Zahl ist.
Weiter gilt: $M \neq 0$, da anderenfalls auch O gleich Null wäre, was einer der Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Da außerdem die letzte Ziffer von x gleich der letzten Ziffer von x^2 ist, kommen für M nur noch die Ziffern 1, 5 oder 6 in Frage.
Angenommen, es gelte $M = 1$, dann ist $O = T = 0$, was aber einer der Bedingungen der Aufgabe widerspricht.
Wegen (2) ist $x\,(x-1)$ durch 10 teilbar. Da aber $M \neq 0$ und $M \neq 1$ gilt, sind weder x noch $x - 1$ durch 10 teilbar und damit auch nicht durch 10^4.
Es gilt also:

I. 2^4 ist Teiler von x und
5^4 ist Teiler von $x - 1$ oder

II. 2^4 ist Teiler von $x - 1$ und
5^4 ist Teiler von x.

Im Fall I. läßt sich x in der Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} x = 16k \\ x = 625l + 1, \end{array}\right\} \tag{3}$$

wobei k eine positive ganze Zahl und l eine ungerade natürliche Zahl ist.
(3) ist gleichbedeutend mit

$$16k = 625l + 1 \tag{4}$$

Wegen (1) und (3) kommen für k und l nur Zahlen der Intervalle

$$63 \leqq k < 625 \tag{5}$$

und

$$3 \leqq l \leqq 15 \tag{6}$$

in Frage.
(4), (5) und (6) sind nur für $l = 15$ und $k = 586$ erfüllt. Daraus folgt

$$x = 9376.$$

Im Falle II. läßt sich x in der Form

$$\left.\begin{aligned} &x = 625k \\ \text{und} \quad & \\ &x = 16l + 1 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

schreiben, wobei k eine ungerade positive Zahl und l eine positive ganze Zahl bedeuten. (7) ist äquivalent mit

$$625k = 16l + 1. \quad (8)$$

Wegen (1) und (7) kommen für k und l nur Werte der Intervalle

$$3 \leqq k \leqq 15 \quad (9)$$

und

$$63 \leqq l < 625 \quad (10)$$

in Frage. (8) ist für keinen Wert k und l der Intervalle (9) und (10) erfüllt. Es kommt also als Lösung der Aufgabe nur der Wert $x = 9376$ in Frage, d.h.:

$$A = 9, \quad T = 3, \quad O = 7, \quad M = 6.$$

L.2.43 Aus der Aufgabe ergibt sich: $N \equiv 2R \pmod{10}$, also ist N eine gerade Zahl. Man setzt nun für N der Reihe nach 0, 2, 4, 6, 8 ein. Dann gibt es für R stets zwei Möglichkeiten, wobei bei der einen $R < 5$ und bei der anderen $R \geqq 5$ gilt. Für $N = 2$ bzw. $N = 6$ ist $R < 5$ ungerade bzw. $R \geqq 5$ gerade. Das führt zu Widersprüchen, da im ersten Falle R (wegen $E + E = R$ bzw. $E + E = R + 10$) gerade, im zweiten Falle (wegen $E + E + 1 = R$ bzw. $E + E + 1 = R + 10$) ungerade sein müßte. Man braucht also nur noch die übrigen Fälle zu untersuchen.

I. Es sei $N = 0$. Dann folgt

1. $R = 0$ (Widerspruch, da $R \neq N$ gefordert ist) oder
2. $R = 5$ und weiter $E = 2$ oder $E = 7$.

a) Aus $E = 2$ folgt $M = 1$ und $T = 1$ (Widerspruch) oder $T = 6$ und daraus $A = 9$.

Mithin bleiben für U, V, L nur 3, 4, 7 und 8. Wegen $U + V + 1 = L + 10$ erhält man als mögliche Lösungen nur

$U = 4, \quad V = 8, \quad L = 3$

und $U = 8, \quad V = 4, \quad L = 3.$

b) Aus $E = 7$ folgt $M = 6$ und $T = 3$ oder $T = 8$.
Aus $T = 3$ folgt $A = 0$ (Widerspruch).
Aus $T = 8$ folgt $A = 9$.

Für U, V, L bleiben mithin 1, 2, 3 und 4. Das ergibt wegen $U + V + 1 = L + 10$ keine Lösungen.

II. und III. Die Fälle $N = 4$ und $N = 8$ werden analog untersucht.

Dabei ist zu beachten, daß zu jeder Zahl N zwei verschiedene Zahlen R, zu jeder Zahl R ebenso zwei verschiedene Zahlen E und zu jeder Zahl E ebenfalls zwei verschiedene Zahlen T möglich sind, deren Differenz jeweils 5 beträgt.

Für $N = 4$ treten bereits bei allen vier für E möglichen Zahlen Widersprüche auf, während man aus den übrigen Fällen noch die folgenden sechs Lösungsmöglichkeiten ermittelt:

N	8	8	8	8	8	8
R	4	4	4	4	9	9
E	2	2	7	7	4	4
M	1	1	6	6	3	3
T	6	6	3	3	2	2
A	9	9	0	0	0	0
U	5	7	2	9	5	6
V	7	5	9	2	6	5
L	3	3	1	1	1	1

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft. Durch Einsetzen findet man, daß die jeweils angegebenen Ziffern auch tatsächlich eine Lösung ergeben.
Es gibt also genau 8 Lösungen.

L.2.44 Angenommen, die Bedingungen der Aufgabe seien erfüllbar, dann sind F, U, E, N, Z, W, I, S, B sämtlich kleiner oder gleich 9, und es gilt:

a) $S \neq 0$ und $S = 1$, da die Summe aus U, Z und dem eventuellen Übertrag kleiner als 20 und damit $S \leqq F + 1 \leqq 10$ sein muß.

b) $F = 9$, da wegen $S \neq 0$ ja $F + 1 \geqq 10$ sein muß.

Aus a) und b) folgt

c) $F + 1 = 10$

und daraus wiederum

d) $I = 0$.

Aus der letzten Spalte der Aufgabe folgt wegen d), daß $F = N$ ist.
Da nach Voraussetzung $F \neq N$ sein muß, sind die Bedingungen der Aufgabe nicht sämtlich gleichzeitig erfüllbar, d.h., die Aufgabe hat keine Lösung.

3. UNGLEICHUNGEN

L.3.1 Setzt man den Zähler von A gleich x und den Nenner von A gleich y, so erhält man

$$A = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad B = \frac{x+1}{y+2}$$

und weiter

$$A - B = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y\,(y+2)} = \frac{2x - y}{y\,(y+2)}\,.$$

Da $2x > y$ ist, folgt $2x - y > 0$ und wegen $y > 0$ weiter $A - B > 0$.
Es gilt also $A > B$.

L.3.2 Man bildet die Differenz

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{(100^{100}+1)\,(100^{89}+1) - (100^{99}+1)\,(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)\,(100^{89}+1)}\,.$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhält man im Zähler

$$100^{100} + 100^{89} - 100^{90} - 100^{99} = 100^{99}\,(100-1) - 100^{89}\,(100-1) > 0\,.$$

Da der Nenner ebenfalls positiv ist, ist die Differenz größer als Null. Also ist der erste Bruch größer.

L.3.3 Es seien

$$a = \sqrt{636000} \quad \text{und} \quad b = \sqrt[3]{389000}\,.$$

Angenommen, es sei

$$a - b \geqq 13, \tag{1}$$

dann gilt

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \geqq 13^3$$

und weiter

$$247000 - 3ab\,(a-b) \geqq 2197\,.$$

Daher ist

$$ab\,(a-b) \leqq 81\,601\,,$$

folglich wegen (1)

$$13ab \leqq 81\,601,$$

also

$$ab \leqq 6277\,.$$

Daraus ergibt sich der Widerspruch

$$247\,404 \cdot 10^6 = a^3b^3 \leqq 6\,277^3 < 247\,320 \cdot 10^6\,.$$

Es ist also

$$z = a - b < 13\,.$$

L.3.4 Die Zahlen

$$1620 \pm 12\,\sqrt{17\,457} = 1620 \pm 12 \cdot 23\,\sqrt{33}$$

lassen sich in der Form $\left(a \pm \sqrt{b}\right)^3$ darstellen, wobei $a = 9$ und $b = 33$ ist. Es gilt also

$$1620 \pm 12\,\sqrt{17\,457} = \left(9 \pm \sqrt{33}\right)^3.$$

Daher gilt wegen $9 > \sqrt{33}$:

$$z = \left(9 + \sqrt{33}\right) + \left(9 - \sqrt{33}\right) = 18\,.$$

Also ist die Zahl z gleich 18.

L.3.5 Es ist

$$\sqrt{57} > \sqrt{49} = 7\,.$$

Also ist

$$4 \cdot 70 = 280 < 253 + 20 \cdot 7 < 253 + 20\,\sqrt{57} = 25 + 20\,\sqrt{57} + 4 \cdot 57,$$

$$\left(2 \cdot \sqrt{70}\right)^2 < \left(5 + 2\,\sqrt{57}\right)^2$$

$$2\,\sqrt{70} < 5 + 2\,\sqrt{57}$$

$$7 + 2 \cdot \sqrt{70} + 10 < 3 + 2\,\sqrt{57} + 19$$

und damit

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}\,.$$

L.3.6 O. B. d. A. können die Bezeichnungen u, v, w so gewählt werden, daß

$$0 < u \leqq v \leqq w < 1$$

und damit

$$1 > 1 - u \geqq 1 - v \geqq 1 - w > 0$$

gilt.

Behauptung: $u\,(1 - v) \leqq \dfrac{1}{4}\,.$

Beweis: Aus der für alle reellen v gültigen Beziehung

$$\left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$$

folgt

$$\frac{1}{4} \geqq -v^2 + v = v\,(1 - v).$$

Wegen $v \geqq u$ folgt weiter:

$$\frac{1}{4} \geqq v\,(1 - v) \geqq u\,(1 - v), \text{ also}$$

$$u\,(1 - v) \leqq \frac{1}{4}.$$

Bemerkung: Analog beweist man, daß auch $v\,(1 - w) \leqq \frac{1}{4}$ ist. Es sind also von den Zahlen $u\,(1 - v)$, $v\,(1 - w)$ und $w\,(1 - u)$ mindestens zwei nicht größer als $\frac{1}{4}$.

L.3.7 a) Aus $p < q$ erhält man nach Division durch p bzw. q

$$1 < \frac{q}{p} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} < 1.$$

Daraus folgt:

$$\frac{p}{q} < 1 < \frac{q}{p}.$$

b) Man bildet

$$\frac{q}{p} - 1 = \frac{q - p}{p}$$

und

$$1 - \frac{p}{q} = \frac{q - p}{q}.$$

Da $p < q$ und damit $\frac{1}{q} < \frac{1}{p}$ ist, gilt

$$\frac{q - p}{q} < \frac{q - p}{p}.$$

Also liegt $\frac{p}{q}$ näher an 1 als $\frac{q}{p}$.

L.3.8 Es gilt wegen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

$$\frac{1}{a + b} > \frac{1}{a + b + c},$$

$$\frac{1}{b + c} > \frac{1}{a + b + c},$$

$$\frac{1}{c + a} > \frac{1}{a + b + c}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}.$$

L.3.9 Aus der für alle reellen Zahlen a, b gültigen Beziehung

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqq 0$$

folgt

$$a^2+b^2\geqq 2ab.$$

Wegen $a>0$ und $b>0$ folgt daraus durch Multiplikation mit $\frac{1}{ab}$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2.$$

L.3.10 Wegen $a>0$, $b>0$, $c>0$ gilt

$$a\,(b-c)^2+b\,(c-a)^2+c\,(a-b)^2\geqq 0,$$

d.h.

$$ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2-6abc\geqq 0.$$

Nach Addition von $9abc$ erhält man

$$(bc+ca+ab)\,(a+b+c)\geqq 9abc.$$

Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc\,(a+b+c)}$ ergibt sich die Behauptung.

L.3.11 *1. Lösungsweg*

1. Fall: Eine der Zahlen a, b, c sei Null.

O. B. d. A. können wir $a=0$ voraussetzen.

Dann gilt $b\neq 0$, $c\neq 0$, und es ist zu zeigen, daß für alle reellen b, c

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\geqq\frac{3}{2} \tag{1}$$

ausfällt.

(1) ist mit

$$b^4+c^4\geqq\frac{3}{2}\,b^2c^2$$

äquivalent bzw. mit

$$(b^2-c^2)^2\geqq-\frac{1}{2}\,b^2c^2. \tag{2}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (2) genau dann, wenn $b=c=0$ ist. Dieser Fall ist aber nach der Voraussetzung im Fall 1 nicht möglich, also gilt stets

$$(b^2-c^2)^2>-\frac{1}{2}\,b^2c^2$$

und damit

$$\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}>\frac{3}{2}.$$

Bemerkung: Nach Aufgabe 3.9 gilt sogar $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\geqq 2$.

2. Fall: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.

Dieser Fall ist ein Spezialfall der Aufgabe 3.12 für $n = 3$, $a^2 = a_1$, $b^2 = a_2$, $c^2 = a_3$, kann jedoch auch folgendermaßen direkt behandelt werden:
Es kann o. B. d. A. vorausgesetzt werden:

$$0 < a^2 \leqq b^2 \leqq c^2.$$

Dann ist

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqq\frac{3}{2} \tag{3}$$

äquivalent mit

$$\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2}+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2+1}+\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}\geqq\frac{3}{2}. \tag{4}$$

Setzt man:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2=1+x \quad \text{und} \quad \left(\frac{c}{a}\right)^2=1+y,$$

wobei $0 \leqq x \leqq y$ gilt, so ist (4) äquivalent mit

$$\frac{1}{(1+x)+(1+y)}+\frac{1+x}{(1+y)+1}+\frac{1+y}{(1+x)+1}\geqq\frac{3}{2}$$

bzw. mit

$$(y+2)(x+2)+(1+x)(x+y+2)(x+2)$$
$$+(y+2)(x+y+2)(y+1)\geqq\frac{3}{2}(x+y+2)(x+2)(y+2)$$

also mit

$$2(x^3+y^3+2x^2+2y^2)\geqq 4xy+x^2y+xy^2. \tag{5}$$

(5) ist gleichbedeutend mit

$$4y(y-x)+y(y^2-x^2)+y^2(y-x)+2x^2(x+1)\geqq 0. \tag{6}$$

(6) ist stets erfüllt, da alle Summanden nicht negativ sind, und damit gilt die Behauptung.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x = y = 0$ bzw. wenn $a^2 = b^2 = c^2$ ist.

2. Lösungsweg

(Bei dieser Lösung wird die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel dreier nichtnegativer Zahlen – vgl. L.2.24, Seite 99, benutzt.)
Die gegebene Ungleichung ist äquivalent mit

$$\frac{s^2}{b^2+c^2}-1+\frac{s^2}{c^2+a^2}-1+\frac{s^2}{a^2+b^2}-1\geqq\frac{3}{2}, \tag{7}$$

wobei $s^2 = a^2 + b^2 + c^2$ bedeutet.

Setzt man

$$b^2 + c^2 = \alpha^2,\ c^2 + a^2 = \beta^2 \text{ und } a^2 + b^2 = \gamma^2,$$

so gilt $\alpha^2 > 0$, $\beta^2 > 0$, $\gamma^2 > 0$, und (7) ist gleichbedeutend mit

$$\frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{s^2}{\beta^2} + \frac{s^2}{\gamma^2} \geqq \frac{3}{2} + 3$$

und mit

$$2s^2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \geqq 9$$

und wegen $2s^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ mit

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \geqq 9. \tag{8}$$

Die Richtigkeit dieser Abschätzung ergibt sich aus dem Hilfssatz 2 der Lösung von Aufgabe 3.12, angewandt auf den Spezialfall $n = 3$ oder durch die folgende Betrachtung.

Es ist (vgl. L. 2.24)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqq 3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \tag{9}$$

Ersetzt man in (9) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ bzw. durch $\beta^2\gamma^2, \gamma^2\alpha^2, \alpha^2\beta^2$, so folgt

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \geqq 3\sqrt[3]{\alpha^4\beta^4\gamma^4}. \tag{10}$$

Multipliziert man (9) und (10) miteinander, so ergibt sich (8), und daher gilt auch (7).

L.3.12 *Erster Hilfssatz:* Sind p, q positiv reelle Zahlen, so gilt

$$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \geqq 2.$$

Beweis: siehe 3.9.

Zweiter Hilfssatz: Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen, so gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqq n^2.$$

Beweis durch vollständige Induktion:

a) Die Behauptung ist richtig für $n = 1$; denn:
Ist x_1 eine positiv reelle Zahl, so gilt

$$x_1 \frac{1}{x_1} = 1 \geqq 1^2.$$

b) Wir zeigen, daß für jedes natürliche $k \geqq 1$ aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ ihre Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.
Sind $x_1, \ldots, x_{k+1}$ positiv reelle Zahlen, so gilt nach Induktionsvoraussetzung und nach Hilfssatz 1:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{x_i}\right) &= \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + x_{k+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{k+1}}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{x_{k+1}} + \frac{x_{k+1}}{x_i}\right) + 1\\ &\geqq k^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} 2\right) + 1 = (k+1)^2.\end{aligned}$$

Beweis des Satzes:

Aus $a_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ und $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$

folgt wegen $n \geqq 2$

$$s > 0,\ s - a_i > 0$$

also

$$\frac{1}{s - a_i} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Daher ist der zweite Hilfssatz für $x_i = \dfrac{1}{s - a_i}$ anwendbar, und es ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s}{s - a_i} - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= s \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - a_i} - n \geqq s \cdot n^2 \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} (s - a_i)} - n$$

$$= s \cdot n^2 \frac{1}{n s - s} - n = \frac{n}{n - 1}.$$

L.3.13 O. B. d. A. sei $a \geqq b$. Dann ist $a^{a-b} \geqq b^{a-b}$, also $a^{a-b}\, b^{b-a} \geqq 1$ und folglich

$$a^{a+b}\, b^{a+b} \geqq a^{2b}\, b^{2a},$$

also

$$\sqrt{ab} \geqq \sqrt[a+b]{a^b\, b^a}.$$

Wegen $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$ gilt $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{a\,b}$, d. h.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \sqrt[a+b]{a^b\, b^a},$$

also gilt

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt[a+b]{a^b\, b^a}.$$

L.3.14 Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a-b)^2 \geqq 0, \quad (b-c)^2 \geqq 0, \quad (a-c)^2 \geqq 0.$$

Hieraus folgt:

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0, \quad b^2 - 2bc + c^2 \geqq 0, \quad c^2 - 2ca + a^2 \geqq 0, \quad \text{bzw.}$$

$$a^2 - ab + b^2 \geqq ab, \tag{1}$$

$$b^2 - bc + c^2 \geqq bc, \tag{2}$$

$$c^2 - ca + a^2 \geqq ac. \tag{3}$$

Multipliziert man (1) mit $a + b$, (2) mit $b + c$, (3) mit $c + a$, so erhält man, da wegen $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0$ jeder dieser Faktoren nicht negativ ist:

$$a^3 + b^3 \geqq ab\,(a + b),$$
$$b^3 + c^3 \geqq bc\,(b + c),$$
$$c^3 + a^3 \geqq ca\,(c + a).$$

Hieraus ergibt sich nach Addition:

$$2\,(a^3 + b^3 + c^3) \geqq ab\,(a + b) + bc\,(b + c) + ca\,(c + a)$$

und weiter

$$2\,(a^3 + b^3 + c^3) \geqq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

sowie

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2\frac{b + c}{2} + b^2\frac{c + a}{2} + c^2\frac{a + b}{2}. \tag{4}$$

Da für nichtnegative reelle Zahlen u, v stets $\frac{u + v}{2} \geqq \sqrt{uv}$ gilt (vgl. L. 3.13), ergibt sich aus (4) die Ungleichung

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}.$$

L.3.15 Aus $|u| < |c|$ folgt zunächst $c \neq 0$ und weiter $\left|\frac{u}{c}\right| < 1$.

Aus $|v| < |c|$ folgt $\left|\frac{v}{c}\right| < 1$.

Somit ergibt sich

$$0 < \left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{u + v}{c} + \frac{uv}{c^2}$$

und

$$0 < \left(1 + \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 + \frac{u + v}{c} + \frac{uv}{c^2}$$

und daraus

$$-\left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) < \frac{u + v}{c} < 1 + \frac{uv}{c^2}, \tag{1}$$

insbesondere also auch $1 + \frac{uv}{c^2} > 0$, so daß sich nach Division der Ungleichung (1) durch $1 + \frac{uv}{c^2}$ und anschließender Multiplikation mit $|c|$ die Behauptung ergibt.

Bemerkung: Diese Ungleichung kann unter Verwendung der Funktion $\tanh x$ auch folgendermaßen bewiesen werden:
Für alle reellen x gilt

$$-1 < \tanh x < 1.$$

Nach dem Additionstheorem für den Tangens hyperbolicus ergibt sich

$$-1 < \tanh\,(x_1 + x_2) = \frac{\tanh x_1 + \tanh x_2}{1 + \tanh x_1 \tanh x_2} < 1,$$

woraus für $x_1 = \operatorname{ar\,tanh} \frac{u}{c}$ und $x_2 = \operatorname{ar\,tanh} \frac{v}{c}$ die Behauptung folgt.

L.3.16 Wegen

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2},$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \quad \text{und}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

gilt:

$$x^2 + y^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2} = a^2.$$

Daraus folgt wegen $\frac{(x-y)^2}{2} \geqq 0$

$$\frac{(x+y)^2}{2} \leqq a^2$$

und wegen $x + y \leqq |x + y|$

$$x + y \leqq a\sqrt{2}.$$

Bemerkung: Es gilt sogar $|x+y| \leqq a\sqrt{2}$, wobei Gleichheit nur im Fall $x = y$ eintritt.

L.3.17 Angenommen, die reelle Zahl x_0 erfülle die Ungleichung

$$\frac{3}{2x_0 - 1} - \frac{2}{x_0 - \frac{1}{2}} > -\frac{1}{3}. \tag{1}$$

Dann gilt $x_0 \neq \frac{1}{2}$.

Wegen

$$\frac{3}{2x_0-1} - \frac{2}{x_0 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} = \frac{9 - 12 + (2x_0 - 1)}{3\,(2x_0-1)} = \frac{2x_0 - 4}{3\,(2x_0 - 1)} = \frac{x_0 - 2}{3\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)}$$

ist (1) genau dann erfüllt, wenn $\frac{x-2}{3\left(x - \frac{1}{2}\right)} > 0$ ist.

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle vorliegt:

a) $x - 2 > 0$ und $x - \frac{1}{2} > 0$. Hierfür ist $x > 2$ notwendig und hinreichend.

b) $x - 2 < 0$ und $x - \frac{1}{2} < 0$. Hierfür ist $x < \frac{1}{2}$ notwendig und hinreichend.

Daher sind genau diejenigen reellen Zahlen x Lösung von (1), die die Bedingung $x < \frac{1}{2}$ oder $x > 2$ erfüllen.

L.3.18 Angenommen, die reelle Zahl x_0 genüge der gegebenen Ungleichung, dann gilt

$$\frac{x_0}{p} - \frac{2p}{x_0} < 2.$$

1. Ist $x_0 > 0$, so folgt durch Multiplikation mit px_0

$$x_0^2 - 2p^2 < 2px_0$$
$$(x_0 - p)^2 < 3p^2.$$

a) Für $x_0 > p$ ergibt sich

$$x_0 - p < p\sqrt{3}$$
$$x_0 < p\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

b) Für $x_0 < p$ ergibt sich

$$p - x_0 < p\sqrt{3}$$
$$x_0 > p\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

Die Werte $p\left(1 - \sqrt{3}\right) < x_0 \leqq 0$ fallen nämlich jetzt wegen der Annahme $x_0 > 0$ weg.

2. Ist $x_0 < 0$, so folgt durch Multiplikation mit px_0

$$x_0^2 - 2p^2 > 2px_0$$
$$(x_0 - p)^2 > 3p^2.$$

Da nach Voraussetzung $p > 0$ ist, folgt nun

$$p - x_0 > p\sqrt{3}$$
$$x_0 < p\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

3. Für $x_0 = 0$ ist die Ungleichung nicht erfüllt.

Als Lösungen kommen also nur reelle Zahlen aus folgenden Intervallen in Frage:

$$\text{a)}\quad 0 < x_0 < p\left(1 + \sqrt{3}\right), \qquad \text{b)}\quad -\infty < x_0 < p\left(1 - \sqrt{3}\right).$$

Wir zeigen, daß alle diese Zahlen die gegebene Ungleichung erfüllen:

a) $0 < x_0 < p\left(1 + \sqrt{3}\right)$

$$\frac{x_0}{p} - \frac{2p}{x_0} < 1 + \sqrt{3} - \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 2.$$

b) $-\infty < x_0 < p\left(1 - \sqrt{3}\right)$

$$\frac{x_0}{p} - \frac{2p}{x_0} < 1 - \sqrt{3} - \frac{2}{1 - \sqrt{3}} = 2.$$

L.3.19 Die Lösung der Aufgabe ist der Untersuchung äquivalent, wann der Ausdruck

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + 1\right)} \tag{1}$$

größer, gleich oder kleiner als Null ist.

Der Ausdruck (1) ist nur für $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$ und $x \neq -1$ definiert und wird für keinen Wert von x gleich Null, also gilt b) für keinen Wert von x. (1) ist genau dann größer bzw. kleiner als Null, wenn der Nenner von (1) größer bzw. kleiner als Null ist. Es gilt $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)>0$ genau dann, wenn

I. $x>0$

oder

II. $x>-1$ und $x<-\frac{1}{2}$

ist. Das heißt, a) gilt für alle x mit $-1<x<-\frac{1}{2}$ oder $0<x<+\infty$.

Es gilt $2x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)<0$ genau dann, wenn

I. $x<-1$

oder

II. $x<0$ und $x>-\frac{1}{2}$

ist. Das heißt, c) ist für alle x aus den Intervallen

$-\infty<x<-1$ und $-\frac{1}{2}<x<0$ erfüllt.

L.3.20

1) Die Menge $\mathfrak{M}$ aller ganzzahligen Lösungen (x, y) mit $x>0$, $y>0$ ergibt sich durch folgende Aufzählung:

99 Paare: $x=1;\quad y=1,\ldots,99,$
98 Paare: $x=2;\quad y=1,\ldots,98,$
$\vdots$
2 Paare: $x=98;\ y=1,2,$
1 Paar: $x=99;\ y=1.$

Die Anzahl dieser Paare ist

$$1+2+\ldots+98+99=\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100.$$

2) Die Mengen $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ aller ganzzahligen Lösungen (x, y) mit $x<0$, $y>0$ bzw. $x>0$, $y<0$ bzw. $x<0$, $y<0$ können jeweils eineindeutig auf $\mathfrak{M}$ abgebildet werden, indem man je ein Paar (a, b) aus $\mathfrak{M}$ dem Paar $(-a, b)$ bzw. $(a, -b)$ bzw. $(-a, -b)$ zuordnet.

3) Die Menge $\mathfrak{N}$ aller ganzzahligen Lösungen (x, y) mit $x=0$, $y>0$ enthält genau 100 Paare:

$x=0;\quad y=1,\ldots,100.$

4) Die Mengen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ aller ganzzahligen Lösungen (x, y) mit $x=0$, $y<0$ bzw. $x>0$, $y=0$ bzw. $x<0$, $y=0$ können jeweils eineindeutig auf $\mathfrak{N}$ abgebildet werden, indem man je ein Paar $(0, c)$ aus $\mathfrak{N}$ dem Paar $(0, -c)$ bzw. $(c, 0)$ bzw. $(-c, 0)$ zuordnet.

5) Die Menge $\mathfrak{P}$ aller ganzzahligen Lösungen (x, y) mit $x=0$, $y=0$ enthält genau ein Paar: $x=0$, $y=0$.

6) Die Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{P}$ sind paarweise elementfremd; ihre Vereinigungsmenge ist die Menge aller ganzzahligen Lösungspaare; deren Anzahl beträgt somit

$$4\cdot\frac{1}{2}\cdot 99\cdot 100+4\cdot 100+1=20201.$$

L.3.21 Für positive x und y ist $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ äquivalent mit

$$2x + 2y > xy. \tag{1}$$

Setzt man $x = 2 + n$, n natürliche Zahl > 0, so erhält man die zu (1) äquivalente Ungleichung für y:

$$2 \cdot (2 + n) + 2y > (2 + n) \cdot y$$

und

$$y < \frac{2n + 4}{n} = 2 + \frac{4}{n}.$$

1. $n = 1$ ergibt $y < 6$, d.h., man erhält die Zahlenpaare (3, 3), (3, 4), (3, 5).
2. $n = 2$ ergibt $y < 4$, d.h., man erhält das Zahlenpaar (4, 3).
3. $n = 3$ ergibt $y < \frac{10}{3}$, d.h., man erhält das Zahlenpaar (5, 3).
4. $n \geqq 4$ ergibt $y < 3$, denn in diesem Fall ist $\frac{4}{n} \leqq 1$. Es gibt also keine weiteren Zahlenpaare.

L.3.22 Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x - 9 > 0$ und $2x - 1 > 0$ gilt. Dies ist genau für $x > 9$ der Fall.
Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit jeder der folgenden Ungleichungen:

$$\frac{1}{2} \lg (2x - 1) + \frac{1}{2} \lg (x - 9) > 1$$

$$\lg (2x - 1)(x - 9) > 2$$

$$\lg (2x^2 - 19x + 9) > \lg 100.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$(2x^2 - 19x + 9) > 100,$$

d.h., wenn

$$x^2 - \frac{19}{2} x - \frac{91}{2} > 0$$

gilt. Wegen

$$(x - 13)\left(x + \frac{7}{2}\right) = x^2 - \frac{19}{2} x - \frac{91}{2}$$

ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(x - 13)\left(x + \frac{7}{2}\right) > 0. \tag{1}$$

Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn entweder

$$x - 13 > 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{7}{2} > 0 \tag{2}$$

oder

$$x - 13 < 0 \quad \text{und} \quad x + \frac{7}{2} < 0 \tag{3}$$

ist.

(2) ist mit $x > 13$ äquivalent, (3) mit $x < -\frac{7}{2}$. Davon ist wegen $x - 9 > 0$ nur $x > 13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x > 13$ und nur für diese erfüllt.

L.3.23 *1. Fall:* $a > 0$.

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0, die der Gleichung genügt. Dann folgt

$$a + x_0 - a = \sqrt{(2a + x_0)(a + x_0)}\,,$$

hieraus

$$x_0 \geqq 0 \quad \text{und} \quad x_0^2 = 2a^2 + 3ax_0 + x_0^2,$$

also

$$x_0 = -\frac{2}{3}a < 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt: Es gibt keine reelle Zahl x_0, die der Gleichung genügt.

2. Fall: $a = 0$.

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0, die der Gleichung genügt. Dann folgt, da die Wurzeln existieren, $x_0 > 0$. Ist x_0 irgendeine positive reelle Zahl, so gilt:

$$\sqrt{0 + x_0} - \sqrt{\frac{0^2}{0 + x_0}} = \sqrt{x_0} = \sqrt{2 \cdot 0 + x_0}\,,$$

d.h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügen alle positive reellen x und nur diese der Gleichung.

3. Fall: $a < 0$.

Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x_0, die der Gleichung genügt. Dann folgt

$$a + x_0 + a = \sqrt{(2a + x_0)(a + x_0)}$$
$$(2a + x_0)^2 = (2a + x_0)(a + x_0)$$
$$(2a + x_0)\,a = 0,$$

wegen $a \neq 0$ also $x_0 = -2a$.

Ist $x_0 = -2a$, so ist $a + x_0 = -a > 0$ und $2a + x_0 = 0$, also gilt

$$\sqrt{a + x_0} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x_0}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0 = \sqrt{2a + x_0},$$

d.h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügt die Zahl $x = -2a$ und nur diese der Gleichung.

L.3.24 Angenommen, es gäbe einen Wert x_0, der der Ungleichung

$$\sqrt{3-x_0} - \sqrt{x_0+1} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

genügt. Dann folgt zunächst, da die Radikanden nicht negativ sein dürfen, daß für x_0 nur Werte des Intervalls $-1 \leqq x_0 \leqq 3$ in Frage kommen.
(1) ist äquivalent mit

$$\sqrt{3-x_0} > \frac{1}{2} + \sqrt{x_0+1}\,. \tag{2}$$

Aus (2) folgt durch Quadrieren

$$3 - x_0 > \frac{1}{4} + x_0 + 1 + \sqrt{x_0+1}$$

und weiter

$$\frac{7}{4} - 2x_0 > \sqrt{x_0+1}\,. \tag{3}$$

Aus (3) folgt, daß für x_0 nur Werte des Intervalls $-1 \leqq x_0 < \frac{7}{8}$ in Frage kommen.
Daher folgen aus (3) der Reihe nach folgende Ungleichungen:

$$\frac{49}{16} + 4x_0^2 - 7x_0 > x_0 + 1$$

$$4\left(x_0^2 - 2x_0 + \frac{33}{64}\right) > 0$$

$$4\left(x_0 - 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31}\right)\left(x_0 - 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}\right) > 0. \tag{4}$$

Aus (4) folgt:

a) $\qquad x_0 > 1 + \frac{1}{8}\sqrt{31}$

oder

b) $\qquad x_0 < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}$.

Wegen $-1 \leqq x_0 < \frac{7}{8}$ kann höchstens der Fall b) eintreten, d.h., es gilt

$$x_0 < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31}\,.$$

Also kommen für x_0 nur Werte des Intervalls

$$-1 \leqq x_0 < 1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} \tag{5}$$

in Frage.
Für alle reellen Zahlen x_0, die (5) genügen, gilt (4) und wegen $1 - \frac{1}{8}\sqrt{31} < \frac{7}{8}$ auch (3). Da für $-1 \leqq x_0 \leqq 3$ die Ungleichung (3) mit (1) äquivalent ist, folgt, daß genau alle reellen Zahlen, die (5) genügen, die gegebene Ungleichung erfüllen.

L.3.25 Da die Radikanden $1 + x$ und $1 - x$ in

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geqq 1 \qquad (1)$$

nicht negativ und die Nenner nicht Null sein dürfen, kommen für x nur Werte des Intervalls $-1 < x < 1$ in Frage.

Für $0 \leqq x < 1$ ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \leqq 0.$$

Also kommen für die Lösung der Aufgabe nur Werte des Intervalls $-1 < x < 0$ in Frage. Für diese Werte von x ist (1) äquivalent mit

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} \geqq \sqrt{1-x^2}$$

bzw. mit

$$1 + x^2 \geqq 2\sqrt{1-x^2}$$

bzw. mit

$$x^4 + 6x^2 - 3 \geqq 0. \qquad (2)$$

(2) ist gleichbedeutend mit

$$\left(x^2 + 3 - 2\sqrt{3}\right)\left(x^2 + 3 + 2\sqrt{3}\right) \geqq 0. \qquad (3)$$

(3) ist genau dann erfüllt, wenn

I. $\quad x^2 \geqq -3 + 2\sqrt{3}$

oder

II. $\quad x^2 \leqq -3 - 2\sqrt{3}$

ist.

Der Fall II. kann nicht eintreten, da für x nur reelle Werte zugelassen sind.

I. ist äquivalent mit

$$|x| \geqq \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

Wegen $x < 0$ ist (4) mit $-x \geqq \sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$ bzw. mit $x \leqq -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$ gleichbedeutend.

Das heißt, alle x des Intervalls $-1 < x \leqq -\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$ und nur diese genügen den Bedingungen der Aufgabe.

L.3.26 x_{ij} sei die Anzahl der transportierten Ziegel von Z_i nach B_j $(i = 1, 2;\ j = 1, 2)$.

Dann gilt

$$x_{ij} \geqq 0, \quad \text{ganzzahlig} \qquad (1)$$

$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 5{,}7 \cdot 10^6 \qquad (2)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{14} = 6 \cdot 10^6 \qquad (3)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 12 \cdot 10^6 \qquad (4)$$

$$x_{11} + x_{21} = 5{,}2 \cdot 10^6 \tag{5}$$
$$x_{12} + x_{22} = 3 \cdot 10^6 \tag{6}$$
$$x_{14} + x_{24} = 4{,}1 \cdot 10^6. \tag{7}$$

Die Gesamttransportkosten sind dann der Größe

$$E = 28x_{11} + 30x_{12} + 21x_{14} + 26x_{21} + 36x_{22} + 18 \cdot 5{,}7 \cdot 10^6 + 20x_{24} \tag{8}$$

proportional.
Wegen (5), (6), (7) ist (8) mit

$$E = 2x_{11} - 6x_{12} + x_{14} + 427{,}8 \cdot 10^6$$

äquivalent und wegen (3) mit

$$E = -8x_{12} - x_{14} + 439{,}8 \cdot 10^6. \tag{9}$$

Wegen (1) und (6) gilt

$$x_{12} \leqq 3 \cdot 10^6 \tag{10}$$

und wegen (7) und (1)

$$x_{14} \leqq 4{,}1 \cdot 10^6$$

und wegen (3) und (1)

$$x_{12} + x_{14} \leqq 6 \cdot 10^6.$$

Daher gilt wegen (9)

$$E \geqq 439{,}8 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^6 - 7 \cdot x_{12},$$

also

$$E \geqq 433{,}8 \cdot 10^6 - 7x_{12}. \tag{11}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (11) ist also unter den gegebenen Voraussetzungen genau dann am kleinsten, wenn x_{12} möglichst groß ist, also wegen (10) wenn $x_{12} = 3 \cdot 10^6$ ist.
Daher sind die Gesamttransportkosten am niedrigsten, wenn

Z_1 an B_2 3 Millionen Ziegel,
Z_1 an B_4 3 Millionen Ziegel,
Z_2 an B_1 5,2 Millionen Ziegel,
Z_2 an B_3 5,7 Millionen Ziegel,
Z_2 an B_4 1,1 Millionen Ziegel

liefert.

L.3.27 x_{11}, x_{12}, x_{13} bzw. y_{11}, y_{12}, y_{13} seien die Anzahlen der von einer Fräsmaschine (ohne Revolverkopfspannvorrichtung) produzierten Stücke der Sorte I bzw. der Sorte II; x_{21}, x_{22}, x_{23} bzw. y_{21}, y_{22}, y_{23} seien die Anzahlen der von einer Fräsmaschine mit Revolverkopf produzierten Stücke der Sorte I bzw. der Sorte II und x_3 bzw. y_3 seien die Anzahlen der von dem Automaten produzierten Stücke der Sorte I bzw. der Sorte II.
Es gilt:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_3 = y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_3 \quad . \tag{1}$$

Für x_{11} bzw. x_{12} bzw. x_{13} Werkstücke der Sorte I benötigt eine Fräsmaschine (ohne Revolverkopfspannvorrichtung)

$$\frac{x_{11}}{10} \text{ bzw. } \frac{x_{12}}{10} \text{ bzw. } \frac{x_{13}}{10} \text{ Tage}$$

und für y_{11} bzw. y_{12} bzw. y_{13} Werkstücke der Sorte II benötigt eine Fräsmaschine (ohne Revolverkopfspannvorrichtung)

$$\frac{y_{11}}{20} \text{ bzw. } \frac{y_{12}}{20} \text{ bzw. } \frac{y_{13}}{20} \text{ Tage.}$$

Entsprechendes gilt für die Fräsmaschine mit Revolverkopf und für den Automaten.
Da 3 Fräsmaschinen, 3 Fräsmaschinen mit Revolverkopfspannvorrichtung und 1 Automat zur Verfügung stehen, ergeben sich folgende Ungleichungen

$$\frac{x_{11}}{10} + \frac{x_{12}}{10} + \frac{x_{13}}{10} + \frac{y_{11}}{20} + \frac{y_{12}}{20} + \frac{y_{13}}{20} \leqq 3 \tag{2}$$

und

$$\frac{x_{11}+1}{10} + \frac{x_{12}}{10} + \frac{x_{13}}{10} + \frac{y_{11}+1}{20} + \frac{y_{12}}{20} + \frac{y_{13}}{20} \geqq 3, \tag{2a}$$

$$\frac{x_{21}}{20} + \frac{x_{22}}{20} + \frac{x_{23}}{20} + \frac{y_{21}}{30} + \frac{y_{22}}{30} + \frac{y_{23}}{30} \leqq 3 \tag{3}$$

und

$$\frac{x_{21}+1}{20} + \frac{x_{22}}{20} + \frac{x_{23}}{20} + \frac{y_{21}}{30} + \frac{y_{22}}{30} + \frac{y_{23}}{30} \geqq 3 \tag{3a}$$

sowie

$$\frac{x_3}{30} + \frac{y_3}{80} \leqq 1 \tag{4}$$

und

$$\frac{x_3+1}{30} + \frac{y_3+1}{80} \geqq 1. \tag{4a}$$

Setzt man

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}, \quad y_1 = y_{11} + y_{12} + y_{13},$$
$$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}, \quad y_2 = y_{21} + y_{22} + y_{23},$$

so ist (2) äquivalent mit

$$2x_1 + y_1 \leqq 60 \tag{2'}$$

und daher mit

$$y_1 \leqq 60 - 2x_1.$$

(3) ist äquivalent mit

$$3x_2 + 2y_2 \leqq 180 \tag{3'}$$

und daher mit

$$y_2 \leqq 90 - \frac{3}{2}x_2.$$

(4) ist äquivalent mit

$$8x_3 + 3y_3 \leqq 240 \tag{4'}$$

und daher mit

$$y_3 \leqq 80 - \frac{8}{3}x_3.$$

Es ist nun zu untersuchen, ob und, wenn ja, wann die Funktion

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \tag{5}$$

unter den gegebenen Voraussetzungen ein Maximum annimmt. Aus der Aufgabenstellung ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$0 \leqq x_1 \leqq 30, \tag{6}$$

$$0 \leqq x_2 \leqq 60, \tag{7}$$

$$0 \leqq x_3 \leqq 30. \tag{8}$$

F ist genau dann möglichst groß, wenn $6F$ bzw. $18F$ möglichst groß ist. Aus (5), (2′), (3′) und (4′) folgt:

$$6F \leqq -6x_1 - 3x_2 - 10x_3 + 1380. \tag{9}$$

(2a) ist äquivalent mit

$$57 \leqq 2x_1 + y_1. \tag{2a′}$$

(3a) ist äquivalent mit

$$175 \leqq 3x_2 + 2y_2. \tag{3a′}$$

(4a) ist äquivalent mit

$$229 \leqq 8x_3 + 3y_3. \tag{4a′}$$

Aus (1), (2a′), (3a′) und (4a′) folgt:

$$-18x_1 \leqq 15x_2 + 22x_3 - 1525. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann:

$$18F \leqq 6x_2 - 8x_3 + 2615 \tag{11}$$

$18F$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen genau dann am größten, wenn $x_3 = 0$ und $x_2 = 60$ ist.

Aus (4′) und (4a′) folgt dann, da für y_3 nur ganzzahlige Werte in Frage kommen,

$$77 \leqq y_3 \leqq 80. \tag{12}$$

Aus (3′) folgt

$$y_2 \leqq 0, \text{ also } y_{21} + y_{22} + y_{23} \leqq 0,$$

d.h. $y_{21} = y_{22} = y_{23} = 0$, da sämtliche y_{ij} nichtnegative ganze Zahlen sind.

Aus (1) und (12) folgt weiter:

$$x_1 + 60 \leqq y_1 + 80,$$

$$x_1 - y_1 \leqq 20. \tag{13}$$

Daraus und aus (2′) folgt:

$$x_1 \leqq \frac{80}{3},$$

also, da für x_{11}, x_{12}, x_{13} und daher auch für x_1 nur nichtnegative ganze Zahlen in Frage kommen, $x_1 \leqq 26$.

Damit die Summe der Anzahlen der produzierten Stücke der drei Sorten möglichst groß ist, muß

$$x_1 = 26 \tag{14}$$

gewählt werden. Aus (13) folgt wegen (14)

$$y_1 \geqq 6$$

und aus (2′) folgt wegen (14)

$$y_1 \leqq 8. \tag{15}$$

Es ergeben sich also folgende Fälle:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1. Fall	26	60	0	6	0	80
2. Fall	26	60	0	7	0	79
3. Fall	26	60	0	8	0	78

Wegen (1) und (15) kommt für y_3 der Wert 77 nicht in Frage.

L.3.28 Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1, 2; j = 1, 2$).

Es gilt dann

$$x_{11} + 4x_{21} \geqq 600 \geqq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \tag{1}$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geqq 400 \geqq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \tag{2}$$
$$x_{11} + x_{12} \leqq 300 \tag{3}$$
$$x_{21} + x_{22} \leqq 200 \tag{4}$$
$$x_{ij} \geqq 0 \text{ und ganzzahlig.} \tag{5}$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22}. \tag{6}$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden.

Aus (1) folgt

$$600 - 4x_{21} \leqq x_{11} \leqq 603 - 4x_{21} \tag{7}$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leqq x_{12} \leqq 403 - 4x_{22}. \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leqq K \leqq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leqq K \leqq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}. \tag{9}$$

Aus (8) folgt

$$x_{22} \leqq \frac{403 - x_{12}}{4}$$

und daraus wegen (5)

$$x_{22} \leqq 100. \tag{10}$$

Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist.

Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher

$$x_{12} = 0.$$

Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müßte wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000,$$

also

$$x_{11} + 2x_{21} = 400 \tag{11}$$

sein.

Aus (1) und (11) folgt dann weiter

$$x_{21} \geqq 100$$

und aus (4) wegen $x_{22} = 100$

$$x_{21} \leqq 100.$$

Daher müßte $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

4. FUNKTIONEN, INSBESONDERE TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

L.4.1 Lösung durch vollständige Induktion:
Die Gleichung

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n \tag{1}$$

ist für $n = 0$ wegen $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$ erfüllt. Wir zeigen jetzt, daß für jede natürliche Zahl k aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = k$ deren Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.
Es gilt wegen

$$x_{k+1} = x_k + 2y_k \quad \text{und} \quad y_{k+1} = x_k + y_k$$

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 - 2y_{k+1}^2 &= x_k^2 + 4x_ky_k + 4y_k^2 - 2x_k^2 - 4x_ky_k - 2y_k^2 \\ &= -x_k^2 + 2y_k^2 = -(x_k^2 - 2y_k^2) \\ &= (-1)(-1)^k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (1) ist also auch für $n = k + 1$ erfüllt.
Also ist die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen n erfüllt.

L.4.2 *Behauptung:* Frage a) ist für jedes n zu verneinen. Die Antwort auf Frage b) ist: die größtmögliche Gliederzahl für eine F_n beträgt $s_n = 2n - 1$.

Beweis durch vollständige Induktion:

I. Die Behauptung ist richtig für $n = 1$. Dies folgt aus 1. und 3.

II. Jetzt wird gezeigt, daß für jedes natürliche $k \geqq 2$ aus der Richtigkeit der Behauptung für $n = 1, \ldots, k - 1$ ihre Richtigkeit für $n = k$ folgt.

A) *Beweis, daß Frage a) zu verneinen ist:*
Entfernt man aus einer F_k das erste Glied x_1 und alle Glieder, die ihm gleich sind, so erhält man eine F_{k-1}. Die Bedingungen 1., 2. und 4. sind offensichtlich erfüllt; zu 3. ist zu zeigen, daß infolge des Weglassens eines p-Tupels unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder kein $(p + 2)$-Tupel unmittelbar aufeinanderfolgender Glieder zu einem Paar der Form (a, a), $a \neq x_1$, werden kann; dies ergibt sich daraus, daß anderenfalls die gegebene F_k eine Teilfolge (x_1, a, x_1, a) enthalten hätte.
Die entstandene F_{k-1} hat nach Induktionsvoraussetzung höchstens s_{k-1} Glieder; ihre Gliederzahl sei g genannt. Durch Wiedereinfügen der soeben weggelassenen Glieder erhält man die gegebene F_k zurück;

da diese die Eigenschaft 3. besitzt, ist ein solches Wiedereinfügen höchstens an $g+1$ Stellen (abwechselnd mit den Gliedern der F_{k-1}) möglich. Also hatte die gegebene F_k höchstens $2g+1 \leqq 2s_{k-1}+1$ Glieder.

B) Ist $x_1, \ldots, x_s$ eine F_k mit $x_s \neq x_1$, so ist auch $x_1, \ldots, x_s, x_1$ eine F_k.
Beweis: Die Bedingungen 1., 2., 3. sind offensichtlich erfüllt; zu 4. ist zu zeigen, daß infolge des Anfügens von x_1 keine Teilfolge der Form (a, x_1, a, x_1) mit $a \neq x_1$ entstehen kann; dies ergibt sich daraus, daß anderenfalls die gegebene F_k eine Teilfolge der Form (x_1, a, x_1, a) enthalten hätte.

C) Wegen A) gibt es Folgen F_k mit größtmöglicher Gliederzahl s_k; eine solche Folge sei $(x_1, \ldots, x_{s_k})$. Nach B) ist in ihr $x_{s_k} = x_1$. Sind in ihr $x_{i_0}, \ldots, x_{i_j}$, $i_0 < \cdots < i_j$, genau alle diejenigen Glieder, die gleich x_1 sind, so gilt

$$j \geqq 1; \quad i_0 = 1, \quad i_j = s_k;$$
$$(x_1, \ldots, x_{s_k}) = (x_{i_0}; \underbrace{x_{i_0+1}, \ldots, x_{i_1-1}}_{T_1}; x_{i_1}; \ldots; x_{i_{j-1}};$$
$$\underbrace{x_{i_{j-1}+1}, \ldots, x_{i_j-1}}_{T_j}, x_{i_j}).$$

Dann ergibt sich wegen 4. zunächst, daß die Teilfolgen

$$T_\lambda = (x_{i_{\lambda-1}+1}, \ldots, x_{i_\lambda-1}), \quad \lambda = 1, \ldots, j,$$

zu je zweien elementfremd sind. Kommen in T_λ genau r_λ verschiedene Zahlen vor ($\lambda = 1, \ldots, j$), so ist demnach

$$\sum_{\lambda=1}^{j} r_\lambda = k - 1.$$

Weiter ergibt sich, daß T_λ eine F_{r_λ} mit maximaler Gliederzahl ist; nach Induktionsvoraussetzung ist also

$$i_\lambda - i_{\lambda-1} - 1 = s_{r_\lambda} = 2r_\lambda - 1, \quad \lambda = 1, \ldots, j.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + \sum_{\lambda=1}^{j} (i_\lambda - i_{\lambda-1}) \\ &= 1 + \sum_{\lambda=1}^{j} 2r_\lambda \\ &= 1 + 2(k-1) \\ &= 2k - 1. \end{aligned}$$

L.4.3 Bezeichnet man 16 derartige positive Zahlen mit $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ und den Quotienten der Folge mit q, so haben die Folgenglieder die Form

$$a_1, a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_1 q^2, \ldots, a_{16} = a_1 q^{15}.$$

I. Ermittlung von q

Aus den Angaben über das stufenweise Anwachsen der Stellenanzahlen kann man zunächst wie folgt auf den Wert von q schließen.

a) Wegen des Anwachsens der Glieder der Folge ist notwendig $q > 1$.

b) a_1 und $a_5 = a_1 \cdot q^4$ haben dieselbe Stellenanzahl, also ist $q^4 < 10$. Demnach sind alle $q \geqq 2$ wegen $q^4 \geqq 2^4 = 16 > 10$ zu groß.

c) a_{10} ist zehnstellig, also

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 < 10^{10},$$

während a_{15} zwölfstellig ist, also

$$a_{15} = a_1 q^{14} \geqq 10^{11}$$

gilt. Multipliziert man die beiden Seiten der ersten Ungleichung mit q^5, so ergibt sich

$$a_1 \cdot q^{14} < 10^{10} \cdot q^5$$

und damit folgende Abschätzung:

$$10^{11} \leqq a_1 \cdot q^{14} < q^5 \cdot 10^{10}.$$

Daraus folgt: $10 < q^5$.

d) Aus den Bedingungen a) und b) ergibt sich als (grobe) Abschätzung $1 < q < 2$, also kann q keine ganze Zahl sein. Wegen $q = \frac{a_2}{a_1}$ ist q außerdem rational. Daß q keine irrationale Zahl sein kann, folgt daraus, daß sonst $a_2 = a_1 \cdot q$ (und jedes andere a_i) keine ganze Zahl sein könnte.

e) Setzt man $q = \frac{z}{n}$ (mit positiven ganzen, zueinander teilerfremden Zahlen z und n), so muß wegen

$$a_{16} = \frac{a_1 z^{15}}{n^{15}}$$

und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der Nenner in a_1 aufgehen. Das ist nur für $a_1 \geqq n^{15}$ möglich.
Somit sind alle $n \geqq 4$ zu groß; denn wegen der Abschätzung

$$4^{15} = 2^{30} = (2^{10})^3 = 1024^3 > 10^9$$

ist 4^{15} (mindestens) zehnstellig, während a_1 neunstellig ist, also $a_1 < 4^{15} \leqq n^{15}$ gelten würde, im Gegensatz zu der oben genannten Bedingung

$$a_1 \geqq n^{15}.$$

f) Somit bleiben für die Lösung der Aufgabe (falls eine Lösung existiert) für q nur die Werte $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$ übrig. Nun ist aber

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32} < 10$$

im Gegensatz zur Bedingung $q^5 > 10$ in c), also ist $q = \frac{3}{2}$ zu klein.

Wegen $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ ist $q = \frac{4}{3}$ erst recht zu klein.

g) Somit ist als möglicher Wert für q nur noch $q = \frac{5}{3}$ übrig geblieben.

Weiterhin ist also nachzuprüfen, ob sich ein Wert a_1 so finden läßt, daß alle Daten der Aufgabe erfüllbar sind.

II. Ermittlung von a_1

a) Nach I. e) und g) muß $a_1 = c \cdot 3^{15}$ (c positive ganze Zahl) gelten. Da $6 \cdot 3^{15} = 86093442$ achtstellig ist, während a_1 laut Aufgabenstellung neunstellig ist, muß $c \geqq 7$ sein.

b) Alle $c \geqq 8$ kommen nicht mehr in Frage, wie man aus der Betrachtung von a_{10} entnehmen kann. Es ist nämlich

$$a_{10} = c \cdot 3^{15} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^9 = c \cdot 5^9 \cdot 3^6 = c \cdot 1423828125,$$

und $8 \cdot 1423828125$ ist eine elfstellige Zahl, während nach den vorgegebenen Bedingungen a_{10} zehnstellig ist. Alle Faktoren c, die größer als 8 sind, scheiden dann natürlich erst recht aus.

c) Unter Berücksichtigung der bisher herangezogenen Bedingungen kommt nur

$$7 \cdot 3^{15} = 100442349$$

als Anfangsglied in Frage, das neunstellig ist.

III. Die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$

Abschließend bleibt nachzuprüfen, ob diese beiden Werte mit allen Bedingungen der Aufgabe verträglich sind. Das geschieht am einfachsten, indem die Folge vollständig hingeschrieben wird. Man entnimmt daraus, daß tatsächlich alle Stellenzahlen die verlangten Werte besitzen. Damit ist bewiesen, daß die Aufgabe lösbar ist und genau eine Lösung besitzt.

$a_1 =$	100442349	$a_9 =$	5980078125
$a_2 =$	167403915	$a_{10} =$	9966796875
$a_3 =$	279006525	$a_{11} =$	16611328125
$a_4 =$	465010875	$a_{12} =$	27685546875
$a_5 =$	775018125	$a_{13} =$	46142578125
$a_6 =$	1291696875	$a_{14} =$	76904296875
$a_7 =$	2152828125	$a_{15} =$	128173828125
$a_8 =$	3588046875	$a_{16} =$	213623046875.

L.4.4 Die Funktion $f(x)$ ist für alle $x \neq -\frac{d}{c}$ definiert, d.h. in den Intervallen

$$-\infty < x < -\frac{d}{c} \tag{1}$$

und

$$-\frac{d}{c} < x < \infty. \tag{2}$$

Es seien x_1 und x_2 Zahlen des Intervalls (1) mit $x_1 < x_2$, d.h.

$$x_1 < x_2 < -\frac{d}{c}. \tag{3}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} - \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(ad - bc)}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus (3) folgt für $c > 0$:

$$cx_1 + d < 0 \quad \text{und} \quad cx_2 + d < 0,$$

d.h.,

$$(cx_1 + d)(cx_2 + d) > 0.$$

Für $c < 0$ folgt aus (3):

$$cx_1 + d > 0 \quad \text{und} \quad cx_2 + d > 0,$$

und mithin

$$(cx_1 + d)(cx_2 + d) > 0.$$

Da $x_1 - x_2 < 0$ ist, gilt $f(x_1) - f(x_2) > 0$ genau dann, wenn $ad - bc < 0$ ist.

Es seien nun x_1 und x_2 Zahlen des Intervalls (2) mit $x_1 < x_2$, d.h.

$$-\frac{d}{c} < x_1 < x_2. \tag{5}$$

Es gilt ebenfalls Gleichung (4).

Aus (5) folgt für $c > 0$:

$$cx_1 + d > 0 \quad \text{und} \quad cx_2 + d > 0,$$

d.h.

$$(cx_1 + d)(cx_2 + d) > 0.$$

Für $c < 0$ folgt aus (5):

$$cx_1 + d < 0 \quad \text{und} \quad cx_2 + d < 0,$$

d.h.

$$(cx_1 + d)(cx_2 + d) > 0.$$

Wegen $x_1 - x_2 < 0$ gilt $f(x_1) - f(x_2) > 0$ genau dann, wenn $ad - bc < 0$ ist.

Also ist $f(x)$ genau dann streng monoton fallend, wenn $ad - bc < 0$ gilt.

L.4.5 a) Da der Ausdruck

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$$

für alle reellen x positiv ausfällt, ist

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \tag{1}$$

für alle reellen Werte x definiert.

b) Es ist zu zeigen, daß für

$$1 \leqq x_1 < x_2 \tag{2}$$

stets gilt:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Aus (2) folgt

$$0 \leqq x_1 - 1 < x_2 - 1,$$

daraus folgt

$$(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$$

und weiter

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2(x_1 - 1)^2,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$(x_1 - 1)^2 [1 + (x_2 - 1)^2] < (x_2 - 1)^2 [1 + (x_1 - 1)^2]$$

und mit

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{1 + (x_1 - 1)^2} < \frac{(x_2 - 1)^2}{1 + (x_2 - 1)^2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{|x_1 - 1|}{\sqrt{1 + (x_1 - 1)^2}} < \frac{|x_2 - 1|}{\sqrt{1 + (x_2 - 1)^2}},$$

also wegen (2)

$$\frac{x_1 - 1}{\sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 2}} < \frac{x_2 - 1}{\sqrt{x_2^2 - 2x_2 + 2}},$$

d.h.,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

$f(x)$ ist also für alle $x \geqq 1$ sogar streng monoton wachsend.

c) Für alle $x \neq 1$ ist (1) äquivalent mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x-1)^2}}}.$$

Daher ist für $x \neq 1$ stets $0 < f(x) < 1$.
Für $x = 1$ gilt: $f(x) = 0$.
Also ist der Wertevorrat von $f(x)$ im Intervall $0 \leqq y < 1$ enthalten.
Ist y ein beliebiger Wert aus $0 < y < 1$, so gilt für $x > 1$ die Beziehung

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(x-1)^2}}}$$

genau dann, wenn

$$x = 1 + \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

ist, wie sich durch Umformen und Einsetzen ergibt. Daher ist $0 \leqq y < 1$ der Wertevorrat von $f(x)$.

d) Wir zeigen, daß

$$f(1 + a) = f(1 - a)$$

für alle reellen a gilt. Es ist

$$f(1 + a) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

und

$$f(1 - a) = \frac{|-a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

und daher gilt:

$$f(1 + a) = f(1 - a).$$

Also ist die Gerade $x = 1$ Symmetrieachse des Bildes der Funktion $y = f(x)$.

L.4.6 a) Wegen 1. gehört mit x auch stets $x + ka$ mit allen ganzzahligen k zum Definitionsbereich, wie man durch vollständige Induktion zeigt. Weiter gilt wegen 2.:

$$\begin{aligned} f(x + 2a) &= f[(x + a) + a] \\ &= \frac{1 + f(x + a)}{1 - f(x + a)} \\ &= \frac{1 + \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}}{1 - \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}} \\ &= \frac{1 - f(x) + 1 + f(x)}{1 - f(x) - 1 - f(x)} = -\frac{1}{f(x)}, \end{aligned}$$

woraus sich

$$f(x + 4a) = f[(x + 2a) + 2a] = -\frac{1}{f(x + 2a)} = f(x) \qquad (1)$$

ergibt.

Da mit x auch stets $x + 4ka = x + kb$ für alle ganzzahligen k zum Definitionsbereich von f gehört, ist die Funktion f wegen (1) periodisch mit der Periode $b = 4a$.

b) Die für alle reellen Zahlen $x \neq ka$, k ganzzahlig, durch

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{4a} x$$

definierte Funktion genügt wegen

$$\tan \frac{\pi}{4a}(x + a) = \frac{\tan \dfrac{\pi}{4} + \tan \dfrac{\pi}{4a} x}{1 - \tan \dfrac{\pi}{4} \cdot \tan \dfrac{\pi}{4a} x} = \frac{1 + \tan \dfrac{\pi}{4a} x}{1 - \tan \dfrac{\pi}{4a} x}$$

der gegebenen Funktionalgleichung.
Sie hat die Periode $b = 4a$. Außerdem ist die Bedingung 1. erfüllt.

L.4.7 a) Es sei $g(x) = g(x + 1)$ Dann erhält man aus Gleichung (*)

$$(x + 1) \cdot f(x) \cdot g(x) = f(x + 1) \cdot g(x + 1),$$

d.h.

$$(x + 1) \cdot \varphi(x) = \varphi(x + 1).$$

b) Setzt man voraus, daß die Gleichungen (*) und (**) beide für alle positiven reellen x erfüllt sind, so erhält man

$$\varphi(x + 1) = (x + 1) \cdot f(x) \cdot g(x),$$

also

$$f(x + 1) \cdot g(x + 1) = f(x + 1) \cdot g(x)$$

und wegen $f(x) \neq 0$ für alle positiven reellen x schließlich

$$g(x + 1) = g(x).$$

L.4.8 Angenommen, $y = f(x)$ sei eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften und D ihr Definitionsbereich. Dann liegt mit jeder Zahl z aus D auch $-z$ in D; denn bestimmt man x so, daß $x^n = z$ wird, so existiert $f(z) = f(x^n)$, also nach Aufgabenstellung auch

$$bx - a \cdot f(x^n) = f(-x^n) = f(-z).$$

Für jedes x, für das x^n, also nach dem eben Gezeigten auch $-x^n = (-x)^n$ in D liegt, gilt nun außer

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = bx \tag{1}$$

auch diejenige Gleichung, die man erhält, wenn man in (1) x durch $-x$ ersetzt, d.h.

$$f(x^n) + a \cdot f(-x^n) = -bx. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhält man wegen $|a| \neq 1$

$$f(x^n) = \frac{a+1}{a^2-1} bx = \frac{b}{a-1} x.$$

Hieraus ergibt sich:
Liegt ein $x \geqq 0$ in D, so gilt

$$f(x) = f\left(\sqrt[n]{x^n}\right) = \frac{b}{a-1}\sqrt[n]{x};$$

liegt ein $x \leqq 0$ in D, so gilt

$$f(x) = f\left[\left(-\sqrt[n]{-x}\right)^n\right] = \frac{b}{a-1}\left(-\sqrt[n]{-x}\right).$$

Daher kommt als gesuchte Funktion höchstens

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a-1}\sqrt[n]{x}, & \text{falls } x \geqq 0, \\[2ex] -\dfrac{b}{a-1}\sqrt[n]{-x}, & \text{falls } x \leqq 0, \end{cases}$$

mit der Menge der reellen Zahlen als Definitionsbereich in Frage.
Umgekehrt gilt für sie (1); denn es ist

$$f(x^n) = \frac{b}{a-1} x,$$

also

$$f(-x^n) = f[(-x)^n] = -\frac{b}{a-1} x,$$

also

$$a \cdot f(x^n) + f(-x^n) = a \cdot \frac{b}{a-1} x - \frac{b}{a-1} x = \frac{(a-1)b}{a-1} x = bx.$$

L.4.9 a) Setzt man in die gegebene Gleichung anstelle von x zunächst $1 + x$ und danach $1 - x$ ein, so erhält man das Gleichungssystem

$$af(x) + bf(-x) = c(1+x)$$
$$bf(x) + af(-x) = c(1-x).$$

Hieraus ergibt sich im Falle $|a| \neq |b|$ für alle reellen x

$$y = f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b}.$$

Wie man sieht, genügen diese Funktionen der gegebenen Gleichung.

b) Im Falle $|a| = |b|$ und $c \neq 0$ gibt es keine Funktion, die den Bedingungen genügt; denn die Annahme $a = b$ bzw. $a = -b$ führt durch Einsetzen in das unter a) genannte Gleichungssystem zu $c = 0$ und somit zu einem Widerspruch.

Im Falle $a = b \neq 0$ und $c = 0$ genügt jede für alle reellen x definierte ungerade Funktion den Bedingungen, und es gibt keine andere Funktion, für die das ebenfalls zutrifft.

Im Falle $a = -b \neq 0$ und $c = 0$ genügt jede für alle reellen x definierte gerade Funktion und keine andere Funktion den Bedingungen.

Im Falle $a = b = c = 0$ genügt jede beliebige für alle reellen x definierte Funktion den Bedingungen.

L.4.10 Setzt man $t = x - \frac{5}{2}$, so gilt

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= \left(t + \frac{3}{2}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)\left(t^2 - \frac{9}{4}\right) \\ &= t^4 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{9}{16} \\ &= \left(t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

a) Für alle reellen Zahlen x ist also $f(x) \geqq -1$. Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $t^2 = \frac{5}{4}$, d.h., wenn also entweder

$$x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ ist.}$$

Das Polynom $f(x)$ nimmt also an den Stellen

$$\xi = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

und nur dort seinen kleinsten Wert an.

b) Für $1 \leqq x \leqq 4$ gilt $-\frac{3}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{2}$, d.h. $0 \leqq t^2 \leqq \frac{9}{4}$. Wegen

$$\begin{aligned} f(x) = g(t) &= t^4 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{9}{16} \\ &= t^2\left(t^2 - \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{9}{16} \end{aligned}$$

gilt daher für alle x des Intervalls $1 \leqq x \leqq 4$

$$f(x) \leqq \frac{9}{16}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dabei genau dann, wenn $t = 0$, d.h. $x = \frac{5}{2}$ ist.

Daher gilt für alle x mit $1 \leqq x \leqq 4$, $x \neq \frac{5}{2}$ die Ungleichung $f(x) < f\left(\frac{5}{2}\right)$, d.h., $\xi = \frac{5}{2}$ und nur dieser Wert hat die Eigenschaft b).

L.4.11 Für jeden Winkel der Größe α gilt

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha. \tag{1}$$

Da

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \tag{2}$$

ist, genügt die Zahl

$$x_1 = \sin 10°$$

der kubischen Gleichung

$$3x - 4x^3 = \frac{1}{2},$$

also

$$8x^3 - 6x + 1 = 0. \tag{3}$$

Wegen (1) und (2) und wegen

$$\sin (30° + k \cdot 360°) = \frac{1}{2},$$

wobei k eine ganze Zahl ist, ist die Gleichung (3) aber auch erfüllt für

$$x_2 = \sin (10° + 1 \cdot 120°) = \sin 50°$$

und

$$x_3 = \sin (10° + 2 \cdot 120°) = -\sin 70°.$$

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 sind paarweise voneinander verschieden, und da die Gleichung (3) höchstens drei paarweise voneinander verschiedene Wurzeln hat, sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung (3).

L.4.12 Wir verwenden die Formel

$$\tan 2\varphi = \frac{2 \tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$$

zweimal, indem wir von $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ als bekanntem Wert ausgehen, und setzen

1. $\varphi = 15°$, $\tan\varphi = t$.

Dann gilt:

$$t^2 + 2\sqrt{3}\, t - 1 = 0,$$

woraus man wegen $\tan 15° > 0$

$$t = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$

erhält.

2. Wir setzen $\varphi = 7°30'$, $\tan\varphi = \tau$.
Dann gilt

$$\tau^2 + \frac{2}{t}\tau - 1 = 0,$$

woraus man wegen $\tan 7°30' > 0$

$$\tau = -\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1},$$

also nach Einsetzen von $2 - \sqrt{3}$ für t

$$\tau = \tan 7°30' = -(2 + \sqrt{3}) + 2(2 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad (1)$$

erhält.
Um die geschachtelten Wurzelzeichen zu beseitigen, setzt man

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$$

und erhält aus

$$a^2 + 3b^2 = 2$$
$$2ab = -1$$

die vier Lösungen

$$a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad a_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{6}, \qquad a_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$b_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad b_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

woraus sich wegen $\sqrt{2 - \sqrt{3}} > 0$ die Beziehung

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

ergibt. Setzt man diesen Wert in (1) ein, so folgt die Behauptung

$$\tau = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2.$$

L.4.13 Bezeichnet man das gesuchte Produkt mit x und setzt ferner

$$y = \sin 5° \cdot \sin 10° \cdot \sin 15° \ldots\ldots \sin 40° \cdot \sin 45° \cdot \sin 50° \ldots \sin 85°,$$

so ist wegen $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$$y = (\sin 5° \cdot \cos 5°) \cdot (\sin 10° \cdot \cos 10°) \ldots$$
$$\cdot (\sin 40° \cdot \cos 40°) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

und wegen $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^8} \sin 10° \cdot \sin 20° \ldots \sin 80°,$$

also

$$xy = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^8} \sin 5° \cdot \sin 10° \cdot \sin 15° \ldots \sin 85° = \frac{1}{2^9} \cdot \sqrt{2}\, y.$$

Daraus folgt wegen $y \neq 0$

$$x = \frac{1}{2^9} \cdot \sqrt{2}.$$

L.4.14 Setzt man

$$y = \sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80°,$$

so ist

$$16xy = (2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 20°) \cdot (2 \sin 40° \cdot \cos 40°) \cdot (2 \sin 60° \cdot \cos 60°) \cdot (2 \sin 80° \cdot \cos 80°).$$

Wegen

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

ist

$$16xy = \sin 40° \cdot \sin 80° \cdot \sin 120° \cdot \sin 160°.$$

Da

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

ist, folgt

$$16xy = \sin 40° \cdot \sin 80° \cdot \sin 60° \cdot \sin 20°,$$

d.h.

$$16xy = y.$$

Weil $y \neq 0$ ist, ergibt sich

$$x = \frac{1}{16}.$$

L.4.15 Der Beweis erfolgt indirekt. Angenommen, es gäbe ein x_0 derart, daß $\sin x_0 + \cos x_0 = 1{,}5$ gilt, dann ergibt sich hieraus durch Quadrieren

$$\sin^2 x_0 + 2 \sin x_0 \cdot \cos x_0 + \cos^2 x_0 = 2{,}25.$$

Daraus folgt dann wegen der für alle reellen x gültigen Beziehungen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$

daß

$$\sin 2x_0 = 1{,}25$$

ist. Dies ist nicht möglich, weil $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ für alle reellen x gilt. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Bemerkung: Auf Grund von Aufgabe 3.16 gilt genauer

$$|\sin x + \cos x| \leqq \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

L.4.16 Setzt man

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

so gilt für alle x wegen

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

und

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x\,(2\cos^2 x - 1) \\ &= \sin x\,(4\cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x\left(1+\cos x+\frac{4}{3}\cos^2 x-\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{1}{3}\sin x\,(4\cos^2 x+3\cos x+2)\\
&= \frac{1}{3}\sin x\left(4\cos^2 x+2\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cos x+\frac{9}{16}+2-\frac{9}{16}\right)\\
&= \frac{1}{3}\sin x\left[\left(2\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\right].
\end{aligned}
$$

Nun ist für alle reellen x

$$\left(2\cos x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}\geqq\frac{23}{16}>0.$$

Ferner ist für $0<x<\pi$ auch $\sin x>0$, also $f(x)>0$.

L.4.17 Wir führen den Beweis der Beziehung 1) durch vollständige Induktion. Die Beziehung 1) gilt für $n=1$; denn es ist

$$\sin x=\frac{\sin^2 x}{\sin x},$$

wenn $\sin x \neq 0$ ist.

Wir zeigen jetzt, daß für jede natürliche Zahl k aus der Richtigkeit der Behauptung für $n=k$ deren Richtigkeit für $n=k+1$ folgt.

Aus der Richtigkeit der Beziehung 1) für $n=k$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\sin x+\cdots+\sin(2k-1)x+\sin(2k+1)x\\
&\qquad=\frac{\sin^2 kx}{\sin x}+\sin(2k+1)x.
\end{aligned}
$$

Nun gilt wegen

$$
\begin{aligned}
&2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\\
&\frac{\sin^2 kx}{\sin x}+\sin(2k+1)x=\frac{\sin^2 kx+\sin x\cdot\sin(2k+1)x}{\sin x}\\
&=\frac{1}{\sin x}\left(\sin^2 kx+\frac{1}{2}[\cos 2kx-\cos(2k+2)x]\right)\\
&=\frac{1}{\sin x}\left(\sin^2 kx+\frac{1}{2}[1-2\sin^2 kx-(1-2\sin^2(k+1)x)]\right)\\
&=\frac{\sin^2(k+1)x}{\sin x},
\end{aligned}
$$

womit die Beziehung 1) für beliebiges natürliches $n\geqq 1$ bewiesen ist.

Ist $\sin x=0$, so ist $x=k\pi$, k ganz. Dann ist für jedes ganze m auch $\sin mx=0$, und daraus folgt 2).

L.4.18 Angenommen, es gäbe eine Zahl x_0, die der Gleichung

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \tag{1}$$

genügt, dann gilt

$$\sin^3 x_0 + \cos^3 x_0 = 1. \tag{2}$$

Wegen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{für alle reellen } x$$

ist

$$\sin^3 x_0 + \cos^3 x_0 = (\sin x_0 + \cos x_0)\,(1 - \sin x_0 \cos x_0).$$

Also gilt

$$(\sin x_0 + \cos x_0)\,(1 - \sin x_0 \cos x_0) = 1. \tag{3}$$

Setzt man

$$\sin x_0 + \cos x_0 = a, \tag{4}$$

so daß wegen (3) $a \neq 0$ gilt, so folgt aus (3)

$$\sin x_0 \cdot \cos x_0 = 1 - \frac{1}{a}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\begin{aligned} a^2 = (\sin x_0 + \cos x_0)^2 &= 1 + 2 \sin x_0 \cos x_0 \\ &= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

und hieraus

$$a^3 - 3a + 2 = 0. \tag{6}$$

Die Gleichung (6) hat die Lösungen

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_3 = -2.$$

Aus $a = a_1 = a_2 = 1$ folgt

$$\sin x_0 + \cos x_0 = 1$$

und nach Quadrieren

$$2 \sin x_0 \cos x_0 = \sin 2x_0 = 0. \tag{7}$$

Die Gleichung (7) hat die Lösungen

$$x_0 = 2k\pi \quad \text{und} \quad x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ ganze Zahl}).$$

Aus $a = a_3 = -2$ folgt

$$\sin x_0 + \cos x_0 = -2, \tag{8}$$

was mit

$$(\sin x_0 + \cos x_0)^2 = 1 + 2 \sin x_0 \cdot \cos x_0 \leqq 3$$

unvereinbar ist.

Die Gleichung (8) hat also keine reellen Lösungen. Folglich kommen als Lösungen der Gleichung

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

nur die Werte $x = 2k\pi$ und $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mit ganzzahligem k in Frage.

Durch Einsetzen bestätigt man, daß für jeden dieser Werte die Gleichung (1) tatsächlich erfüllt ist.

L.4.19 Die gegebene Gleichung ist wegen der für alle reellen x gültigen Beziehung $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ äquivalent mit

$$1 - \cos^2 x - \cos^2 2x - \cos^2 3x = 0. \tag{1}$$

Da

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{und} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

für alle reellen x gilt, ist (1) mit jeder der drei folgenden Gleichungen äquivalent:

$$8\cos^6 x - 10\cos^4 x + 3\cos^2 x = 0,$$

$$\cos^2 x\,(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3) = 0,$$

$$8\cos^2 x\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{2}$$

(2) ist genau dann erfüllt, wenn

I. $\cos^2 x = 0$ oder

II. $\cos^2 x = \frac{3}{4}$ oder

III. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ gilt.

Unter der Nebenbedingung $0 \leqq x \leqq 2\pi$ ist

I. gleichbedeutend damit, daß $x = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{3}{2}\pi$ ist,

II. gleichbedeutend damit, daß $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{11}{6}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$ oder $x = \frac{7}{6}\pi$ ist,

und

III. gleichbedeutend damit, daß $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{7}{4}\pi$, $x = \frac{3}{4}\pi$ oder $x = \frac{5}{4}\pi$ ist.

Also genügen die Werte $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{4}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$, $x = \frac{7}{4}\pi$ sowie $x = \frac{11}{6}\pi$ und nur diese den Bedingungen der Aufgabe.

L.4.20 Die gegebene Gleichung ist äquivalent mit

$$1 - \sin 5x = \cos^2\frac{3}{2}x + \sin^2\frac{3}{2}x - 2\cdot\cos\frac{3}{2}x\cdot\sin\frac{3}{2}x. \tag{1}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$ für alle reellen x ist (1) äquivalent mit

$$1 - \sin 5x = 1 - \sin 3x,$$

also mit

$$\sin 5x - \sin 3x = 0. \tag{2}$$

Aus den Additionstheoremen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

und

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

folgt für $\alpha = 4x$ und $\beta = x$

$$\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$$

und

$$\sin 3x = \sin(4x - x) = \sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x.$$

Daher ist (2) äquivalent mit

$$\cos 4x \sin x = 0. \qquad (3)$$

Die Gleichung (3) ist genau dann erfüllt, wenn $\sin x = 0$, d.h. $x = k\pi$, oder $\cos 4x = 0$, d.h. $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$, ist, wobei k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Also erfüllen alle $x = k\pi$ und $x = \frac{\pi}{8}(2k+1)$ und nur diese die gegebene Gleichung.

L.4.21 Angenommen, x_0 sei Lösung von

$$\frac{\sin 3x \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + r} = 0. \qquad (1)$$

Dann gilt

$$\sin 3x_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_0\right) = -1 \qquad (2)$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - 7x_0\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + x_0\right) + r \neq 0. \qquad (3)$$

(2) kann wegen $|\sin x| \leqq 1$ und $|\cos x| \leqq 1$ nur erfüllt sein, wenn entweder

a) $\sin 3x_0 = -1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_0\right) = 1$

oder

b) $\sin 3x_0 = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x_0\right) = -1$

ist.

Aus a) folgt

$$3x_0 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \text{ ganz},$$

also

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}k\pi \qquad (4)$$

und

$$\frac{\pi}{3} - 4x_0 = 2l\pi,$$

also

$$x_0 = \frac{\pi}{12} - \frac{l}{2}\pi, \quad l \text{ ganz}. \qquad (5)$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} k\pi = \frac{\pi}{12} - \frac{l}{2}\pi,$$

d.h.

$$8k + 6l = -5.$$

Dies ist ein Widerspruch, da -5 keine gerade Zahl ist. Im Falle b) folgt

$$3x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

also

$$x_0 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi, \quad k \text{ ganz}, \tag{6}$$

und

$$\frac{\pi}{3} - 4x_0 = \pi + 2l\pi,$$

d.h.

$$x_0 = -\frac{\pi}{6} - \frac{l}{2}\pi,$$

und für $l = -(m + 1)$

$$x_0 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} m, \quad m \text{ ganz}. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{m}{2}\pi,$$

also

$$4k = 3m + 1. \tag{8}$$

Es sind nun alle ganzzahligen Werte für k und m zu ermitteln, für die (8) gilt.
Da $4k = 3m + 1$ stets gerade ist, folgt, daß für m nur ungerade Zahlen in Frage kommen.
Setzt man $m = 2m' + 1$, m' ganz, so ist (8) gleichbedeutend mit

$$4k = 6m' + 4. \tag{9}$$

$6m' + 4$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn m' durch 2 teilbar ist. Setzt man $m' = 2n$, n ganz, so ist (9) mit $4k = 12n + 4$ äquivalent, d. h. mit

$$k = 3n + 1.$$

Für m ergibt sich $m = 4n + 1$.
Also erfüllt genau das Zahlenpaar $(3n + 1,\ 4n + 1)$ für jedes ganze n die Gleichung (8).
Aus (6) bzw. (7) folgt daher

$$x_0 = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n.$$

Nur diese Zahlen x_0 kommen als Lösung der Gleichung (1) in Frage. Durch Einsetzen dieser Werte x_0 in (1) bestätigt man, daß sie die Gleichung (1) genau dann erfüllen, wenn $r \neq -2$ ist. Im Falle $r = -2$ hat (1) also keine Lösung.

L.4.22 Für $x = k\frac{\pi}{2}$, k ganz, ist die gegebene Gleichung nicht erfüllt. Für $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ist sie mit jeder der folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x &= 8, \\
\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} &= 8, \\
\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} &= 8, \\
\frac{1}{2} &= 4 \sin^2 x \cos^2 x, \\
\frac{1}{2} &= (2 \sin 2x)^2, \\
2x &= \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \\
x &= \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}, \quad k \text{ ganzzahlig.}
\end{aligned}$$

L.4.23 Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin^2 x (\cos x + 1) + \cos^2 x (\sin x + 1)}{\sin x \cos x}.
\end{aligned}$$

Für alle zu untersuchenden x ist der Zähler dieses Bruches positiv. Durch Untersuchung des Nenners ergibt sich somit

a) $f(x) > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

b) $f(x) < 0$ für $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

c) Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sin x \cos x} \\
&= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \frac{2}{\sin 2x}.
\end{aligned}$$

Nach a) und b) genügt es, für Aufgabe c) $f(x)$ in dem Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zu untersuchen. In diesem ist

$$\sin 2x \leqq \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Diese Beziehung folgt nämlich

für $0 < x \leqq \frac{\pi}{4}$ aus $0 < 2x \leqq \frac{\pi}{4} + x \leqq \frac{\pi}{2}$

und

für $\frac{\pi}{4} \leqq x < \frac{\pi}{2}$ aus $0 < \pi - 2x \leqq \frac{3\pi}{4} - x \leqq \frac{\pi}{2}$, da $\sin x$ im Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ streng monoton wächst.

Somit ergibt sich

$$f(x) - \left(2 + \sqrt{2}\right) \geqq \sqrt{2} \sin 2x + \frac{2}{\sin 2x} - 2 - \sqrt{2}$$
$$= \left(\frac{2}{\sin 2x} - \sqrt{2}\right)(1 - \sin 2x)$$
$$\geqq 0.$$

In den hier genannten Ungleichungen mit Doppelzeichen ($\leqq$ oder $\geqq$) gilt das Gleichheitszeichen für $x = \frac{\pi}{4}$.

Also ist $2 + \sqrt{2}$ der gesuchte kleinste positive Funktionswert.

L.4.24 Die gegebene Ungleichung ist wegen der für alle reellen x gültigen Beziehungen

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \text{und} \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

äquivalent mit

$$\sin^2 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x > (3 \sin x - 4 \sin^3 x)^2. \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit

$$4 \sin^6 x - 5 \sin^4 x + \sin^2 x < 0. \tag{2}$$

Setzt man $\sin^2 x = z$, so ist (2) äquivalent mit

$$4z^3 - 5z^2 + z < 0, \quad z \geqq 0, \tag{3}$$

d.h. mit

$$4z(z-1)\left(z - \frac{1}{4}\right) < 0, \quad z \geqq 0. \tag{4}$$

(4) ist genau dann erfüllt, wenn $\frac{1}{4} < z < 1$, d.h., wenn $\frac{1}{4} < \sin^2 x < 1$ gilt, was äquivalent damit ist, daß eine der beiden Beziehungen

$$\frac{1}{2} < \sin x < 1 \quad \text{bzw.} \quad -1 < \sin x < -\frac{1}{2} \tag{5}$$

gilt.

(5) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{bzw.} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi, \tag{6}$$

k ganz, gilt.

Also erfüllen alle reellen Zahlen x, die in den angegebenen Intervallen (6) liegen, die gegebene Ungleichung.

L.4.25 Da die linke Seite der gegebenen Ungleichung für keinen der Werte $x = k\frac{\pi}{2}$, k ganz, erklärt ist, genügt es, sich im folgenden auf die Fälle $x \neq k\frac{\pi}{2}$ zu beschränken.

Für alle $x \neq k\frac{\pi}{2}$, k ganz, ist die gegebene Ungleichung wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ äquivalent mit

$$\frac{2\cos^2 x - 1}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} \geqq \frac{8}{3}. \tag{1}$$

Da in den betrachteten Fällen $(1-\cos^2 x)\cos^2 x > 0$ ist, ist (1) mit

$$\frac{8}{3}\cos^4 x - \frac{2}{3}\cos^2 x - 1 \geqq 0$$

und weiter mit

$$\frac{8}{3}\left(\cos^2 x - \frac{3}{4}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\right) \geqq 0 \tag{2}$$

äquivalent.

(2) ist genau dann erfüllt, wenn $\cos^2 x \geqq \frac{3}{4}$, d.h. wenn $|\cos x| \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist.

(3) gilt genau dann, wenn entweder

$$\text{I. } \cos x \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad \text{II. } \cos x \leqq -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist. I. bzw. II. ist wegen $x \neq k\frac{\pi}{2}$ und $x > 0$ gleichbedeutend damit, daß x einer der Bedingungen

$$k\pi < x \leqq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{bzw.} \quad (1+k)\pi - \frac{\pi}{6} \leqq x < (1+k)\pi$$

für ein $k = 0, 1, 2, \ldots$ genügt.

L.4.26 Da die linke Seite der gegebenen Ungleichung für keinen der Werte $x = k\frac{\pi}{4}$, $k = 1, 2, 3$, erklärt ist, genügt es, sich im folgenden auf die Fälle $x \neq k\cdot\frac{\pi}{4}$ zu beschränken. In diesen Fällen ist die gegebene Ungleichung

$$\frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{2\cot 2x}{\cot x} \leqq 1 \tag{1}$$

wegen

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

und

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

und

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

äquivalent mit

$$\frac{2 + \tan^2 x - \tan^4 x}{1 - \tan^2 x} \leqq 2. \tag{2}$$

Für $\tan^2 x < 1$ ist (2) gleichbedeutend mit

$$\tan^2 x\,(3 - \tan^2 x) \leqq 0. \tag{3}$$

Wegen $0 < x < \pi$ ist $\tan^2 x > 0$, d.h., aus (3) folgt $\tan^2 x > 3$. Das widerspricht aber der Annahme $\tan^2 x < 1$, und daher kommen für x nur Werte mit $\tan^2 x > 1$ in Frage. Für diese Werte von x ist (2) äquivalent mit

$$\tan^2 x\,(3 - \tan^2 x) \geqq 0 \tag{4}$$

also mit

$$\tan^2 x \leqq 3.$$

Daher erfüllen alle x mit $1 < \tan^2 x \leqq 3$, d.h. $1 < |\tan x| \leqq \sqrt{3}$ und nur diese, d.h. alle x der Intervalle

$$\frac{\pi}{4} < x \leqq \frac{\pi}{3}$$

und

$$\frac{2}{3}\pi \leqq x < \frac{3}{4}\pi$$

und nur diese die Bedingungen der Aufgabe.

L.4.27 Für alle reellen x gilt

$$(1 - 2\sin x \cos x)^2 \geqq 0, \tag{1}$$

d.h.

$$1 - 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos^2 x \geqq 0.$$

Wegen

$$(1 + 2\sin x \cos x)^2 - 8\sin x \cos x = (1 - 2\sin x \cos x)^2$$

und (1) ist

$$(1 + 2\sin x \cos x)^2 - 8\sin x \cos x \geqq 0,$$

also

$$(1 + 2\sin x \cos x)^2 \geqq 8\sin x \cos x.$$

Wegen

$$(\sin x + \cos x)^4 = (1 + 2\sin x \cos x)^2$$

gilt deshalb

$$(\sin x + \cos x)^4 \geqq 8\sin x \cos x. \tag{2}$$

Aus (2) ergibt sich, da für $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ nichtnegativ ist,

$$\sin x + \cos x \geqq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2\sin x \cos x}.$$

L.4.28 Wegen der für alle reellen α und β gültigen Beziehungen

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist

$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y \tag{1}$$

äquivalent mit

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 0. \tag{2}$$

Da für alle reellen α und β

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

gilt, ist (2) gleichbedeutend mit

$$-4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0. \tag{3}$$

(3) und damit auch (1) gilt daher genau dann, wenn wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 0, \quad \text{d.h.} \quad x+y = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{x}{2} = 0, \quad \text{d.h.} \quad x = 2k\pi$$

oder

$$\sin\frac{y}{2} = 0, \quad \text{d.h.} \quad y = 2k\pi$$

mit $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

L.4.29 Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + \cos y)$$

erhält man das folgende, dem gegebenen Gleichungssystem äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 1 \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$(1-\cos y)\cos y = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

d.h.

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos y = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(2) ist einzige Lösung des Gleichungssystems (1).
Aus (2) folgt:

$$x = 2m\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad y = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

wobei m und n ganze Zahlen sind.

L.4.30 Ist

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{3}, \tag{1}$$

so gilt $\sin x \neq \sin y$, also $x \neq y$.
Wegen

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

und

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

ist (1) äquivalent mit

$$\frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = \frac{5}{3},$$

d.h. mit

$$\cot \frac{x-y}{2} = \frac{5}{3},$$

da wegen $x + y = \frac{\pi}{2}$

$$\sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

gilt.
Ferner ist

$$\frac{x-y}{2} = \frac{x}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = x - \frac{\pi}{4}.$$

Also ist das Gleichungssystem genau für alle x und y erfüllt, für die

$$\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{3} \quad \text{und} \quad y = \frac{\pi}{2} - x$$

ist.
Aus einer vierstelligen Tafel, in der $\cot x$ mit einer Schrittweite von 0,1° tabelliert ist, erhält man

$$\cot 31° < 1{,}665, \quad 1{,}670 < \cot 30{,}9°,$$

also

$$30{,}9° < x - 45° < 31°,$$

und daher im Bogenmaß

$$0{,}5393 < x - \frac{\pi}{4} < 0{,}5411.$$

Folglich ist

$$x - \frac{\pi}{4} = 0{,}54 + \delta' \quad \text{mit} \quad |\delta'| < 1{,}1 \cdot 10^{-3}.$$

L.4.31 Wegen $-1 \leqq \sin\alpha \leqq 1$ und $-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$ gilt

$$[\sin(x-y)+1]\cdot[2\cos(2x-y)+1] \leqq 6$$

für alle reellen x und y, und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gleichzeitig

$$\begin{aligned}\sin\ (x-y) &= 1\\ \cos(2x-y) &= 1\end{aligned} \tag{1}$$

gilt. Das Gleichungssystem (1) ist daher mit der gegebenen Gleichung äquivalent und genau dann erfüllt, wenn es zwei ganze Zahlen m und n gibt, so daß

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,$$

$$2x - y = 2n\pi$$

gilt.
Daher erhält man alle Lösungen der gegebenen Gleichung, wenn $k = n - m$ und m in den Gleichungen

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2(n-m)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$y = [2(n-2m)-1]\pi = [2(k-m)-1]\pi$$

unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen durchlaufen.

5. LOGISCH-KOMBINATORISCHE AUFGABEN

L.5.1 Am Ende befinden sich im Glas bzw. in der Tasse die gleichen Flüssigkeitsmengen wie zu Beginn. Daher fehlt der Studentin am Ende gegenüber dem Anfangszustand in ihrer Tasse genau soviel Kaffee, wie sie Milch in der Tasse hat, und genau diese Menge Kaffee muß der Student im Glas haben. Sie hat also genau soviel Milch in der Tasse wie er Kaffee im Glas.

L.5.2 Die Würfel, die an den Eckpunkten des großen Würfels liegen, haben genau drei, die Würfel, die an den Seitenkanten liegen (mit Ausnahme der Würfel an den Eckpunkten) haben genau zwei, die Würfel an den Seitenflächen (mit Ausnahme der Würfel an den Kanten) haben genau eine, und die Würfel, die ganz im Innern des großen Würfels liegen, haben keine angestrichenen Flächen.
Da jeder Würfel genau 8 Ecken besitzt, gibt es stets genau 8 kleine Würfel, die drei angestrichene Flächen haben.
Da jeder Würfel genau 12 Kanten besitzt, gibt es stets genau $12(n-2)$ Würfel, die genau zwei angestrichene Flächen haben, wobei n die Anzahl der Würfel ist, die in jeder Reihe des großen Würfels nebeneinander liegen.
Da jeder Würfel genau 6 Flächen hat, ist die Anzahl der Würfel, die je genau eine angestrichene Fläche haben, genau $6(n-2)^2$.
Die Anzahl der Würfel, die keine angestrichene Fläche haben, ist $(n-2)^3$.
Liegen in jeder Reihe 3 bzw. 4 Würfel nebeneinander, so ist also die Anzahl der Würfel mit 3 gestrichenen Flächen in beiden Fällen gleich 8, die der Würfel mit je genau 2 angestrichenen Flächen gleich 12 bzw. 24, die der Würfel mit je genau einer angestrichenen Fläche gleich 6 bzw. 24 und die der Würfel mit keiner angestrichenen Fläche gleich 1 bzw. 8.

L.5.3 Angenommen, diese Verbindung wäre realisierbar. Wir stellen uns vor, daß jede Verbindung durch eine gesonderte Leitung erfolgt. Dann müßten auf jedem Telefon genau 15 Anschlüsse vorhanden sein, insgesamt also $77 \cdot 15$. Da die Verbindung von Telefon A zu Telefon B stets gleichzeitig Verbindung

von Telefon B zu Telefon A ist, müßte die Gesamtzahl der Anschlüsse durch 2 teilbar sein.
Das ist jedoch unmöglich, da $77 \cdot 15$ eine ungerade Zahl ergibt.

L.5.4 Man numeriert zunächst die Gefäße von 1 bis 5. Dann nimmt man

aus dem 1. Gefäß genau 1 Kugel,
aus dem 2. Gefäß genau 2 Kugeln,
aus dem 3. Gefäß genau 4 Kugeln,
aus dem 4. Gefäß genau 8 Kugeln,
aus dem 5. Gefäß genau 16 Kugeln

heraus und ermittelt mit einer Wägung die Gesamtmasse dieser 31 Kugeln. Die Maßzahl der Gesamtmasse sei m.
Für die Differenz $d = m - 310$ gilt dann $0 < d < 31$. Da m eine natürliche Zahl ist, ist auch d eine natürliche Zahl. Außerdem läßt sich jede natürliche Zahl n mit $0 \leqq n \leqq 31$ eindeutig in der Form

$$n = x_1 \cdot 2^0 + x_2 \cdot 2^1 + x_3 \cdot 2^2 + x_4 \cdot 2^3 + x_5 \cdot 2^4$$

darstellen, wobei $x_i (i = 1, \ldots, 5)$ entweder Null oder Eins ist. Daher gilt

$$d = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5,$$

d.h., in dem i-ten Gefäß liegen Kugeln von 10 g oder 11 g Masse, je nachdem, ob x_i gleich Null oder Eins ist.

L.5.5 Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. 7, 7, 7, 9, 10
2. 7, 7, 8, 8, 10
3. 7, 7, 8, 9, 9
4. 7, 8, 8, 8, 9
5. 8, 8, 8, 8, 8

und nur diese.
Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1) Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so daß

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Möglichkeiten übrig bleiben.

2) und 3) Analoge Überlegungen führen zu

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 30$$

Möglichkeiten.

4) wie 1.
5) 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es $20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101$ Möglichkeiten.

L.5.6 Bei jedem Spiel gibt es 3 Möglichkeiten. Bei 2 Spielen kann jede der 3 Möglichkeiten des 1. Spieles mit jeder der 3 Möglichkeiten des 2. Spieles kombiniert werden; es gibt also 3^2 Möglichkeiten. Entsprechend erhält man für 14 Spiele genau 3^{14} verschiedene Möglichkeiten, den Tipschein auszufüllen. Wenn man also 4782969 Tipscheine so ausfüllt, daß keine zwei gleich ausfallen, so befindet sich unter ihnen genau eine richtige Voraussage, und bei weniger Tipscheinen kann der Fall eintreten, daß sich unter ihnen keine richtige Voraussage befindet.

L.5.7 a) Die Enden seien auf einer Seite gemäß der Aufgabe verbunden, z.B. o. B. d. A. 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6. Auf der anderen Seite hat man für das erste Ende 5 Möglichkeiten der Verbindung. Danach kann eines der vier freien Enden mit irgendeinem der drei anderen Enden verbunden werden. Für die restlichen zwei Enden bleibt nur noch eine Möglichkeit. Die Zahl der möglichen Fälle ist also $n = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$.

b) Verknüpfung auf der einen Seite wie unter a). Als Resultat kann dann und nur dann ein einziger Ring entstehen, wenn auf der anderen Seite 1 mit 3, 4, 5 oder 6 verknüpft wird.
Nehmen wir an, daß 1 mit 3 verknüpft ist. In diesem Fall entsteht genau dann ein einziger Ring, wenn 2 mit 5 oder 6 verbunden wird. Entsprechend gibt es in jedem der anderen Fälle, nämlich daß 1 mit 4, 5 oder 6 verbunden ist, genau zwei Möglichkeiten, einen einzigen Ring zu erzeugen. Die Zahl der günstigen Fälle, in denen ein einziger Ring entsteht, ist danach $r = 4 \cdot 2 = 8$.

c) Die Wahrscheinlichkeit ist

$$w = \frac{r}{n} = \frac{8}{15} = 0{,}533\ldots$$

Dieter hat also die größeren Gewinnchancen.

L.5.8 Aus den n Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$ lassen sich bei Zulassung von Wiederholungen die folgenden n^2 zweistelligen Zahlen bilden:

$11,\ 12,\ 13, \ldots, 1n$
$21,\ 22,\ 23, \ldots, 2n$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$n1,\ n2,\ n3, \ldots, nn$

Es läßt sich daher vermuten, daß sich aus n Ziffern n^3 dreistellige und n^4 vierstellige Zahlen bilden lassen.

Beweis:

Aus den n^2 zweistelligen Zahlen erhält man alle möglichen dreistelligen Zahlen, indem man an jede dieser n^2 zweistelligen Zahlen nacheinander die Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$ anhängt. Man erhält also $n^2 \cdot n = n^3$ paarweise voneinander verschiedene dreistellige Zahlen.
Ebenso verfährt man mit den n^3 dreistelligen Zahlen. Man hängt wieder

nacheinander an jede der n^3 dreistelligen Zahlen die Ziffern $1, 2, 3, \ldots, n$ an und erhält so $n^3 \cdot n = n^4$ paarweise voneinander verschiedene vierstellige Zahlen. Andere Möglichkeiten der angegebenen Art gibt es nicht, d.h.:

a) Mit den Ziffern 1, 2 lassen sich 4 paarweise voneinander verschiedene zweistellige, 8 paarweise voneinander verschiedene dreistellige und 16 paarweise voneinander verschiedene vierstellige Zahlen bilden und nicht mehr.

b) Mit den Ziffern 1, 2, 3 lassen sich 9 paarweise voneinander verschiedene zweistellige, 27 paarweise voneinander verschiedene dreistellige und 81 paarweise voneinander verschiedene vierstellige Zahlen bilden und nicht mehr.

c) Mit den Ziffern 1, 2, 3, 4 lassen sich 16 paarweise voneinander verschiedene zweistellige, 64 paarweise voneinander verschiedene dreistellige und 256 paarweise voneinander verschiedene vierstellige Zahlen bilden und nicht mehr.

L.5.9 Der erste Befehl bewirkt die Umkehrung der natürlichen Reihenfolge, also die paarweisen Vertauschungen

$$1 \leftrightarrow n,\ \ 2 \leftrightarrow (n-1),\ \ 3 \leftrightarrow (n-2), \ldots \text{ oder allgemein}$$
$$k \leftrightarrow (n+1-k) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wenn n gerade ist, bleibt kein Schüler auf seinem Platz; bei ungeradem n dagegen behält der Schüler mit der Nummer $\frac{n+1}{2}$ seinen Platz bei.

Der zweite Befehl beläßt Schüler n auf seinem Platz und bewirkt die Umkehrung der Reihenfolge aller übrigen, also die paarweisen Vertauschungen

$$1 \leftrightarrow (n-1),\ \ 2 \leftrightarrow (n-2),\ \ 3 \leftrightarrow (n-3), \ldots \text{ oder allgemein}$$
$$m \leftrightarrow (n-m) \quad \text{mit} \quad m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dabei gilt für das Verbleiben eines der übrigen Schüler auf seinem Platz die analoge Feststellung: Wenn n gerade ist, behält der Schüler mit der Nummer $\frac{n}{2}$ seinen Platz bei, dagegen bleibt bei ungeradem n kein Schüler auf seinem Platz. Als Beispiel verfolgen wir für $n = 7$ (ungerade) und $n = 8$ (gerade) die stufenweise Umordnung durch die beiden Befehle.

$$\begin{array}{llll}
n=7 & 1\ 2\ 3\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7 & n=8 & 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8 \\
 & \underline{7}\ 6\ 5\ \underline{4}\ 3\ 2\ 1 & & \underline{8}\ 7\ 6\ 5\ \underline{4}\ 3\ 2\ 1 \\
 & \underline{7}\ 1\ 2\ \underline{3}\ 4\ 5\ 6 & & \underline{8}\ 1\ 2\ 3\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7
\end{array}$$

Dabei sind die jeweils auf ihren Plätzen verbleibenden Schüler durch Unterstreichen ihrer Nummern hervorgehoben.

L.5.10 Da man in der Aufgabenstellung die Worte „rot“ und „blau“ miteinander vertauschen kann, ohne die Aufgabe zu ändern, genügt es, alle Behauptungen für die roten Strecken zu beweisen.

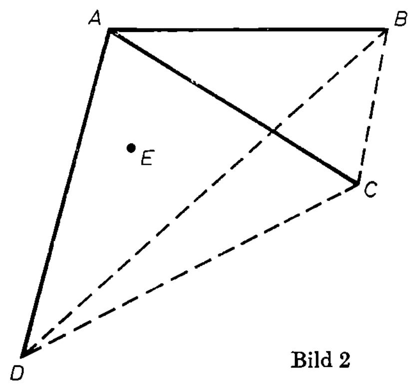


Bild 2

a) 1. Die gegebenen Punkte seien A, B, C, D, E. Nimmt man an, daß von Punkt A drei rote Strecken, z.B. AB, AC, AD ausgehen, so müßten die Strecken BC, DB, CD blau sein, da sonst ein „rotes" Dreieck entstehen würde (Bild 2).
Dann entstünde aber ein „blaues" Dreieck, was den Bedingungen der Aufgabe widerspricht. Also können von jedem Punkt höchstens zwei rote und daher auch höchstens zwei blaue Strecken ausgehen. Da von jedem Punkt genau vier Strecken ausgehen müssen, gehen von jedem Punkt genau zwei rote und zwei blaue Strecken aus, falls die Bedingungen überhaupt realisierbar sind.

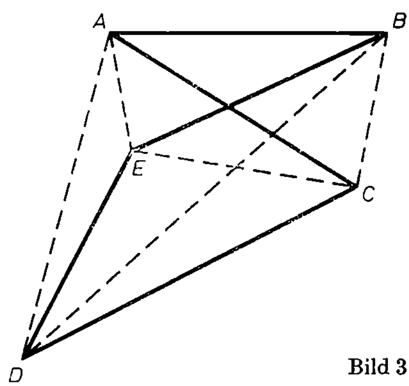


Bild 3

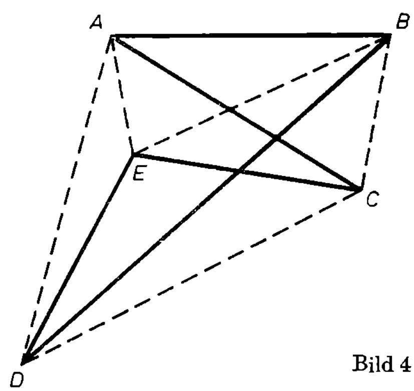


Bild 4

2. Es seien z.B. die Strecken AB und AC rot, die Strecken AD und AE blau. Dann ist BC blau, und DE ist rot (Bild 3).
Da vom Punkt D zwei rote Strecken ausgehen, ist DC entweder rot oder blau. Ist DC rot, dann ist CE blau, BE rot, BD blau. In diesem Falle ergeben sich die geschlossenen gleichfarbigen Streckenzüge $ACDEBA$ (rot) und $AECBDA$ (blau), vgl. Bild 3. Ist CD jedoch blau, so erhält man die folgenden gleichfarbigen Streckenzüge $ACEDBA$ (rot) und $ADCBEA$ (blau), vgl. Bild 4.

b) Betrachten wir nun o. B. d. A. die vier von A ausgehenden Strecken! Es gibt für sie genau $\binom{4}{2} = 6$ voneinander verschiedene Möglichkeiten, genau zwei von ihnen rot zu färben. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es auf Grund der Überlegungen unter a) 2. genau zwei paarweise voneinander verschiedene Verbindungsschemata.
Daher gibt es genau zwölf verschiedene Realisierungen der Aufgabe.

L.5.11 Da die Vermutung $ADBC$ des Sportlehrers in zwei Fällen mit dem wirklichen Einlauf übereinstimmte, gibt es keine anderen als die folgenden Möglichkeiten

1. $ADCB$,
2. $ACBD$,
3. $ABDC$,
4. $CDBA$,
5. $BDAC$,
6. $DABC$.

Die Fälle 1., 2. und 4. scheiden wegen der Unrichtigkeit der ersten Vermutung aus; denn sie enthalten als Paar unmittelbar aufeinanderfolgender Läufer CB bzw. BA. Die Einläufe 3. und 5. sind ebenfalls nicht möglich, da dort B an zweiter bzw. A an dritter Stelle ins Ziel kommen würde, wie es in der ersten Vermutung auch angenommen war.
Die Läufer gingen also in der Reihenfolge $DABC$ ins Ziel, da in diesem Falle alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, wie man leicht nachprüft.

L.5.12 Bezeichnet man den Zunamen von Bernhard mit X, den Vornamen von Dietrich mit Y und kürzt man die gegebenen vier Namen mit ihrem Anfangsbuchstaben ab, so erhält man aus c) die Kombination BX, XY, YD. $X = B$ ist mit a) unvereinbar. Aus $X = D$ würde $Y = B$ folgen, und es ergäbe sich BD, DB, BD, was nicht möglich ist. Also müßten die beiden anderen Personen AC und CA heißen. CA ist mit b) unverträglich. Daher gibt es für X nur zwei Möglichkeiten: $X = A$ oder $X = C$.

1. Aus $X = A$ folgt $Y = C$.
   Also heißen die vier Personen BA, AC, CD, DB.
2. Aus $X = C$ folgt $Y = A$, also hieße eine der vier Personen CA, was aber nach b) nicht der Fall ist.
3. Die Aufgabe wird also durch 1. eindeutig gelöst.

L.5.13 Man untersucht, in welcher Antwort beide Angaben falsch sein können, ohne daß ein Widerspruch entsteht.

Fall 1: Angenommen, in der ersten Antwort seien beide Angaben falsch, d.h., weder A noch C erreichten die volle Punktzahl. Da laut Bedingung die restlichen Antworten genau eine richtige Antwort enthalten, folgt aus der

3. Antwort: F erreichte die volle Punktzahl,
5. Antwort: D erreichte die volle Punktzahl,
2. Antwort: E erreichte nicht die volle Punktzahl,
4. Antwort: E erreichte die volle Punktzahl.

In diesem Fall gäbe es drei Schüler mit voller Punktzahl.

Fall 2: Angenommen, die 2. Antwort sei vollständig falsch, d.h. weder B noch F erreichten die volle Punktzahl. Dann folgt aus der

3. Antwort: A erreichte die volle Punktzahl,
4. Antwort: E erreichte die volle Punktzahl,
5. Antwort: D erreichte die volle Punktzahl nicht,
1. Antwort: C erreichte die volle Punktzahl nicht.

Also haben A und E die volle Punktzahl erreicht.

Fall 3 bis 5:
Analog zu Fall 1 erhält man jeweils drei Schüler mit voller Punktzahl.

Die Aufgabe wird eindeutig durch Fall 2 gelöst.

L.5.14 *1. Fall:* Angenommen, die Aussage 1 sei wahr; dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch, und Brigitte hat den Ball. Das steht aber im Widerspruch zur Aussage 1, daß nicht zwei Mädchen den Ball haben können.

2. Fall: Angenommen, die Aussage 2 sei wahr, d.h., Brigitte hat den Ball nicht. Dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch. Folglich hat Claudia die Schere. Anna hat den Ball nicht, also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt.

3. Fall: Da nach Voraussetzung eine der drei Aussagen wahr ist, muß es die Aussage 3 sein. Dann sind die Aussagen 1 und 2 falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia hat den Bleistift und Anna hat die Schere.

L.5.15 Wäre Peters Aussage richtig, dann wäre Bärbels Aussage falsch, d.h., die Zahl wäre rational. Das führt zu einem Widerspruch; denn Peters Zahl heißt $\sqrt{3}$, ist also irrational.
Daher ist Bärbels Aussage richtig, d.h., die Zahl ist irrational. Daraus folgt, daß die Aussage von Klaus falsch ist, also ist die Aussage von Inge richtig.
Wegen $2\pi r = 2$, $r = \frac{1}{\pi}$ heißt die gesuchte reelle Zahl $\frac{1}{\pi}$.
Diese Zahl ist kleiner als 3, also ist Günters Aussage wahr, während Monikas Aussage falsch ist.

L.5.16 Zur Abkürzung bezeichnen wir die gegebenen Auskünfte mit

$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ usw.

Wir untersuchen zunächst die Auskünfte

C_1, C_2, C_3.

Von ihnen ist mindestens eine wahr und mindestens eine falsch. Es ergeben sich also die in der folgenden Tafel aufgeführten sechs Fälle, wobei jeweils zur Abkürzung eine wahre Auskunft mit W und eine falsche mit F bezeichnet wird:

	1	2	3	4	5	6
C_1	W	W	W	F	F	F
C_2	W	F	F	W	W	F
C_3	F	W	F	W	F	W

1. Fall: Sind C_1 und C_2 wahr, so ist die gedachte Zahl z eine durch 7 teilbare Primzahl, also $z = 7$. Dann ist auch C_3 wahr, was der Voraussetzung widerspricht. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

2. Fall: Sind C_1 und C_3 wahr und ist C_2 falsch, so ist z eine nicht durch 7 teilbare Primzahl und $z < 20$. Dann sind die Auskünfte B_1, B_2, B_3 sämtlich falsch, was der Voraussetzung widerspricht, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.

3. Fall: Ist C_1 wahr und sind C_2 und C_3 falsch, so ist z Primzahl und $z \geqq 20$. Dann sind A_1 und A_2 falsch, also A_3 wahr, d.h.

$$11z < 1000, \quad z \leqq 90.$$

Daher sind ferner B_1 und B_2 falsch, also B_3 wahr, d.h.

$$12z > 1000, \quad z \geqq 84.$$

Nun ist unter den Zahlen 84, 85, ..., 90 nur die Zahl 89 eine Primzahl, es ist also

$$z = 89.$$

Man überzeugt sich zum Abschluß davon, daß dann D_1 wahr und D_2 und D_3 falsch sind, daß also alle Bedingungen erfüllt sind.

4. Fall: Sind C_2 und C_3 wahr und ist C_1 falsch, so ist $z = 14$. Dann sind D_1, D_2 und D_3 falsch, so daß dieser Fall nicht eintreten kann.

5. Fall: Ist C_2 wahr und sind C_1 und C_3 falsch, so ist $z \geqq 20$ und z durch 7 teilbar. Dann sind aber D_1, D_2, D_3 falsch, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.

6. Fall: Sind C_1 und C_2 falsch und ist C_3 wahr, so ist $z < 20$, z nicht Primzahl und nicht durch 7 teilbar. Dann sind B_2, B_3 falsch und B_1 wahr also $z = 10$.
Dann sind D_1, D_2, D_3 wahr, so daß auch dieser Fall nicht eintreten kann.
Daher entspricht nur der 3. Fall allen gestellten Bedingungen. Die zu ermittelnde Zahl ist 89.

L.5.17 Angenommen, die Auskunft 2 sei wahr, dann ist auch die Auskunft 1 wahr. Das ist aber nach Voraussetzung nicht möglich, also ist die Auskunft 1 wahr und die Auskunft 2 falsch. Da die Auskunft 1 wahr ist, ist die Auskunft 3 falsch, denn $\pm \sqrt{13}$ sind keine rationalen Zahlen, und die Auskunft 4 ist wahr.

Für a kommen also nur Zahlen der Form

$$7\,(2k+1), \quad k \text{ ganze Zahl,}$$

in Frage.

Daher ist auch die Auskunft 6 falsch, damit ist die Auskunft 5 richtig, d.h., a muß positiv sein, also die Form

$$7\,(2n+1), \quad n \text{ natürliche Zahl,}$$

haben.

Es gilt

$$a^3 + a = 7^3(2n+1)^3 + 7\,(2n+1).$$

Für $n = 0$ ergibt sich

$$a^3 + a = 7^3 + 7 = 350 < 8000.$$

Für $n \geqq 1$ ergibt sich

$$a^3 + a \geqq 7^3 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3$$
$$a^3 + a \geqq 21\,(49 \cdot 9 + 1)$$
$$a^3 + a \geqq 21 \cdot 442 > 8000.$$

Also ist die einzige Zahl der Form $7\,(2n+1)$, die der Bedingung 5 und den Bedingungen 1 und 4 genügt, die Zahl $a = 7$.

L.5.18 Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

(9) Herr Drossel führt Aufsicht im Raum 48
– wegen (1) und (5).

(10) Jutta arbeitet im Raum 49
– wegen (1), (2) und (7).

(11) Günter arbeitet im Raum 50, Klaus in 48
– wegen (1), (10) und (6).

(12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel
– wegen (3), (8), (9) und (11).

(13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär
– wegen (12) und (4).

(14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler
– wegen (12) und (13).

(15) Herr Adler führt Aufsicht im Raum 50
– wegen (3), (9), (10) und (14).

(16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht im Raum 49
– wegen (3), (4), (13), (9) und (15).

L.5.19 Die Bedingungen 1. bis 6. liefern folgende Strukturmatrix (die in den runden Klammern stehenden Zahlen geben die Nummer der Bedingung an, die zum Ausscheiden der entsprechenden Kombination führt):

Stadt Beruf / Name Beruf	Berlin Ingenieur	Rostock Dreher	Schwerin Kran-führer	Erfurt	Cottbus	Suhl
A Ingenieur	(1)	(2; 1)	(3; 1)		(5)	
B	(6)		(4)			
C Kran-führer	(1; 3)	(2; 1)	(3)		(6)	(5)
D						
E Dreher	(1; 2)	(2)	(3; 1)			
F			(4)			

Daraus folgt:

C wohnt in Erfurt und ist Kranführer.
A wohnt in Suhl und ist Ingenieur.
E wohnt in Cottbus und ist Dreher.
B wohnt in Rostock und ist Dreher.
F wohnt in Berlin und ist Ingenieur.
D wohnt in Schwerin und ist Kranführer.

L.5.20 Die Aufgabe wird mit Hilfe einer Strukturmatrix gelöst. Dabei geben die in runden Klammern stehenden Zahlen die Nummer der Bedingung an, die das Aufstellen des entsprechenden Tanzpaares verhindert.

	Brigitte	Christina	Dorothea	Eva	Inge	Monika
Anton	(2; 1)	(2)		(5; 1)		
Fred	(4; 1)	(4)	(4)	(5; 4; 1)	(4)	
Günter						
Helmut	(4; 1)			(5; 1)		
Jürgen	(3)	(3)		(3)	(3)	
Kurt						

Daraus folgt:

(6) Fred kann nur mit Monika tanzen.
(7) Jürgen kann nur mit Dorothea tanzen.
(8) Anton kann nur mit Inge tanzen.
(9) Helmut kann nur mit Christina tanzen.

(10) Sowohl Günter als auch Kurt können mit Brigitte oder Eva tanzen.

Damit ergeben sich nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

1) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.
2) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

L.5.21 Die Sitzplätze werden, von links beginnend, der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 und 5 numeriert.

Behauptung:

(1) Auf Platz 1 sitzt der Ingenieur.
(15) Auf Platz 2 sitzt der Zypriot wegen (1) und (14).
(16) Auf Platz 1 sitzt der Reisende aus der UdSSR, er ist Ingenieur, fliegt nach Leipzig und ist Fußballspieler.

Beweis:

Auf Platz 1 sitzt nicht der Reisende aus Polen wegen (1) und (3), nicht der Reisende aus der DDR und der aus Ungarn wegen (11) und (15) und nicht der Reisende aus Zypern wegen (15). Wegen (8) fliegt er nach Leipzig und ist wegen (10) nicht Leichtathlet, wegen (1) und (5) nicht Schwimmer, wegen (7) nicht Handballspieler und wegen (2) nicht Volleyballspieler.
Damit ergibt sich die Antwort auf a):
Der Fußballspieler ist Bürger der UdSSR.

Behauptung:

(17) Der Zypriot ist 24 Jahre alt wegen (13), (16) und (14).
(18) Der Kapitän spielt Volleyball oder Handball.

Beweis:

Der Kapitän spielt nicht Fußball wegen (16). Er ist nicht Leichtathlet wegen (6) und (10) und nicht Schwimmer wegen (5).

Behauptung:

(19) Der Kapitän ist Ungar oder Deutscher.

Beweis:

Der Kapitän ist nicht aus der UdSSR wegen (16), nicht aus Polen wegen (3) und nicht aus Zypern wegen (18), (2) und (15) bzw. (18) und (7).

Behauptung:

(20) Der Kapitän sitzt auf Platz 3, 4 oder 5 wegen (1), (15) und (19).
(21) Der Kapitän ist 40 oder 52 Jahre alt.

Beweis:

Er ist nicht 21 Jahre wegen (4), nicht 24 Jahre wegen (17) und (19) und nicht 32 Jahre wegen (6) und (9).

Behauptung:
(22) Der Zypriot auf Platz 2 reist nach Dresden.

Beweis:
Er reist nicht nach Berlin wegen (9) und (17), nicht nach Rostock wegen (19) und (6), nicht nach Leipzig wegen (16) und nicht nach Karl-Marx-Stadt, denn dann wäre er wegen (10) Leichtathlet, daher wegen (18) nicht Kapitän, wegen (5) nicht Lehrer, wegen (16) nicht Ingenieur und wegen (3) nicht Journalist, also Feinmechaniker. Dann wäre er 21 Jahre alt wegen (4) im Widerspruch zu (17).

Behauptung:
(23) Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

Beweis:
Angenommen, das wäre nicht der Fall, dann wäre er wegen (21) 52 Jahre alt und säße wegen (12), (22) und (16) auf Platz 3. Er wäre also wegen (2) Volleyballspieler und wegen (7) und (19) Ungar. Dann säße wegen (11) und (15) der Deutsche auf Platz 4, wäre nicht Ingenieur wegen (16), nicht Lehrer wegen (7) und (5), nicht Journalist wegen (3), sondern Feinmechaniker und daher 21 Jahre wegen (4). Daher hätte der Reisende aus der DDR nicht das Reiseziel Berlin wegen (9) und nicht die Reiseziele Leipzig wegen (16), Dresden wegen (22), Rostock wegen (6) und Karl-Marx-Stadt wegen (7) und (10) im Widerspruch zur Voraussetzung, daß eine der fünf Städte sein Reiseziel ist.
Damit ergibt sich die Antwort b):
Der Kapitän ist 40 Jahre alt.

L.5.22 Jeder Teilnehmer spielte genau 7 Partien und konnte maximal 7 Punkte erreichen (wenn er alle Partien gewann). Die vier Schachspieler, die die letzten vier Plätze belegten, mußten unter sich genau 6 Partien ausspielen. Die dabei zu verteilenden 6 Punkte teilten sie also unter sich auf. Da der Spieler, der den zweiten Platz belegte, laut Aufgabe genau so viele Punkte gewonnen hat wie die letzten vier zusammen, hat er mindestens 6 Punkte erreicht. Er kann aber auch nicht mehr als 6 Punkte erreicht haben; denn besiegte er außer den anderen Spielern auch den Ersten, würde er Erster, und spielte er gegen diesen (bei Siegen gegen alle übrigen Spieler) unentschieden, so hätten erster und zweiter Spieler entgegen der Voraussetzung gleiche Punktzahl. Somit müssen die letzten vier Spieler zusammen genau 6 Punkte erzielt haben, d.h., sie haben alle Partien gegen die ersten vier Spieler verloren. Infolgedessen hat auch der vierte Spieler den sechsten Spieler besiegt.
Außerdem sind alle Bedingungen der Aufgabe miteinander verträglich, wie z.B. folgendes Schema zeigt:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1	1	1	1	1	1
2	0		1	1	1	1	1	1
3	0	0		1	1	1	1	1
4	0	0	0		1	1	1	1
5	0	0	0	0		1	1	1
6	0	0	0	0	0		1	1
7	0	0	0	0	0	0		1
8	0	0	0	0	0	0	0	

L.5.23 Da A gegen B das einzige unentschieden ausgegangene Spiel ist, haben A und B je eine ungerade, C und D je eine gerade Punktzahl. Die Summe dieser Punktzahlen ist zwölf, da genau sechs Spiele mit je zwei vergebenen Punkten ausgetragen wurden. Die Zahl Eins kann nicht vergeben worden sein, weil sonst D als letzte Mannschaft und, mit gerader Punktzahl versehen, null Punkte erhalten hätte. Also hätte D jedes Spiel verloren und daher jede andere Mannschaft mindestens zwei Punkte gewonnen.
Mithin lautet die Punkteverteilung 0, 3, 4, 5, da keine Mannschaft mehr als sechs Punkte und keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl erhalten haben. Da D die letzte Mannschaft ist, hat D Null Punkte. Folglich errang C, Peters Lieblingsmannschaft (denn sie ist als einzige nicht in dem Bericht erwähnt), vier Punkte und damit den zweiten Platz.

Bemerkung: Welche der beiden Mannschaften A, B die drei bzw. fünf Punkte erhalten hat, ist aus den Angaben der Aufgabe nicht zu ermitteln, wie die folgenden beiden Tabellen zeigen, die auf Grund dieser Angaben möglich sind:

	A	B	C	D
A		1 : 1	2 : 0	2 : 0
B	1 : 1		0 : 2	2 : 0
C	0 : 2	2 : 0		2 : 0
D	0 : 2	0 : 2	0 : 2	

	A	B	C	D
A		1 : 1	0 : 2	2 : 0
B	1 : 1		2 : 0	2 : 0
C	2 : 0	0 : 2		2 : 0
D	0 : 2	0 : 2	0 : 2	

Der Nachweis dieser Realisierungsmöglichkeiten ist zur Lösung der Aufgabe nicht nötig, denn wenn die Angaben als wahr vorausgesetzt werden, muß es ja eine Realisierung geben. Zieht man entgegen der Aufgabenstellung in Betracht, daß die Angaben nicht in allen Teilen wahr sind, so kann die Plazierung von C nicht ermittelt werden. Eine Untersuchung, ob die Angaben wahr sein können, war nicht gefordert.

L.5.24 Daß an dem Tanzabend mindestens ein Herr teilgenommen hat, folgt so: Angenommen, das wäre nicht der Fall gewesen, dann wäre sicher eine Dame dabeigewesen, weil sonst der Tanzabend ohne Herren und Damen stattgefunden hätte. Diese Dame hätte dann, da kein Herr anwesend war, mit allen anwesenden Herren getanzt, was aber laut Aufgabentext nicht der Fall war.

Entsprechend ergibt sich, daß auch mindestens eine Dame anwesend war.

Beweis der Behauptung der Aufgabe durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der anwesenden Damen:

Die Anzahl n der anwesenden Damen war sicher größer oder gleich 2; denn der anwesende Herr H_1 hat mit mindestens einer Dame D_1 getanzt und mit mindestens einer anderen – D_2 – nicht.

1) Im Fall $n = 2$ sei H_1 ein Herr, der mit der Dame D_1 getanzt hat. Dann gibt es mindestens einen zweiten Herrn H_2, der nicht mit D_1 getanzt hat. H_1 kann nicht mit D_2 getanzt haben, da er sonst mit jeder der Damen getanzt hätte. H_2 muß mit D_2 getanzt haben, da er sonst mit keiner der Damen getanzt hätte. Damit genügen (H_1, H_2) und (D_1, D_2) den Forderungen.

2) Ist die Behauptung für n Damen richtig, so folgt ihre Richtigkeit für $n + 1$ Damen in nachstehender Weise:
Entweder hat jeder Herr mit mindestens 2 und höchstens $(n - 1)$ der $(n + 1)$ Damen getanzt, (1)
oder es gibt einen Herren H, der mit n Damen getanzt hat, (2)
oder es gibt einen Herren H, der mit genau einer Dame D getanzt hat. (3)

Im Fall (1) erfüllen n beliebige Damen und sämtliche Herren zusammen die Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes, so daß es nach Induktionsvoraussetzung zwei Damen und zwei Herren gibt, die den Forderungen genügen.

Im Fall (2) sei D' die Dame, mit der H nicht getanzt hat. Dann gibt es einen Herrn H', mit dem D' getanzt hat. Da H' nicht mit allen Damen getanzt hat, gibt es eine Dame D, mit der er nicht getanzt hat. Da H mit allen Damen außer D' getanzt hat, hat er mit D getanzt. Die Damen D, D' und die Herren H, H' genügen den Bedingungen.

Im Fall (3) gibt es einen Herrn H' $(\neq H)$, der nicht mit D getanzt hat und eine Dame D' $(\neq D)$, die mit H' getanzt hat. (D, D') und (H, H') genügen also den Bedingungen. Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

L.5.25 Wir bilden die Menge $\mathfrak{M}$ aller gegebenen Gegenstände von derselben Farbe. Wenn es in ihr zwei solche gibt, die sich in der Form unterscheiden, dann unterscheidet sich jeder Gegenstand anderer Farbe von wenigstens einem der Gegenstände aus $\mathfrak{M}$ sowohl in der Farbe als auch in der Form.
Wenn aber alle Gegenstände aus $\mathfrak{M}$ auch in der Form übereinstimmen, dann unterscheidet sich nach Voraussetzung wenigstens ein Gegenstand anderer Form von ihnen in der Farbe, da andernfalls im Widerspruch zur Voraussetzung alle Gegenstände dieselbe Farbe hätten.

L.5.26 Man bezeichne die sechs Farben mit

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$$

und die Stoffe entsprechender Farbzusammenstellung mit

$$(F_1, F_2), \quad (F_1, F_3) \quad \text{usw.}$$

Nach Voraussetzung ist jede der sechs Farben mit höchstens zwei der anderen nicht kombiniert. Daher kann man die Numerierung der F_k so wählen, daß von folgenden Stoffarten jede vorkommt

$$(F_1, F_2), \quad (F_1, F_3), \quad (F_1, F_4), \quad (F_4, F_5) \tag{1}$$

und von folgenden mindestens eine

$$(F_2, F_3), \quad (F_2, F_4), \quad (F_2, F_5). \tag{2}$$

Fallunterscheidung:

1) (F_6, F_2) oder (F_6, F_3) kommt vor.
Dann ist

$$(F_1, F_3), \quad (F_2, F_6), \quad (F_4, F_5)$$

bzw.

$$(F_1, F_2), \quad (F_3, F_6), \quad (F_4, F_5)$$

eine geeignete Zusammenstellung.

2) Weder (F_6, F_2) noch (F_6, F_3) kommt vor. Dann existieren die Stoffart (F_5, F_6) und mindestens zwei der Stoffarten (2).

   a) (F_2, F_3) kommt vor. Dann ist

   $$(F_1, F_4), \quad (F_2, F_3), \quad (F_5, F_6)$$

   geeignet.

   b) (F_2, F_3) kommt nicht vor. Dann kommt (F_2, F_4) vor, und (F_1, F_3), (F_2, F_4), (F_5, F_6) ist geeignet.

WERNER WALSCH

Zum Beweisen im Mathematikunterricht

Etwa 192 Seiten mit etwa 43 Abb., Styx, Bestell-Nr. 002176 (EDV 7063551), etwa 8,– Mark

Gestützt auf umfangreiche wissenschaftliche Untersuchungen in der Schulpraxis, leistet der Autor einen wesentlichen Beitrag zur Verwirklichung der Leitlinie „Beweisen" der neuen Lehrpläne für den Mathematikunterricht. Die Vermittlung einer guten mathematischen Allgemeinbildung ist untrennbar mit der Entwicklung geistiger Fähigkeiten verbunden. Dabei kommt im Mathematikunterricht dem Beweisen eine große Bedeutung zu. Mit den dargelegten theoretischen Grundlagen, praktischen Erfahrungen, Untersuchungsergebnissen und Empfehlungen werden wesentliche Fragen beantwortet, vor die sich jeder Mathematiklehrer gestellt sieht, wenn er diese spezielle Lehrplanforderung in seinem Unterricht erfüllen möchte.

Der Titel erscheint etwa im Oktober 1972.

VOLK UND WISSEN

VOLKSEIGENER VERLAG

BERLIN

GERT MAIBAUM

Wahrscheinlichkeits-rechnung

224 Seiten mit 48 Abb., Styx, Bestell-Nr. 001811
(EDV 7062145), 7,- Mark

Das Buch kann als Lehrmaterial im Rahmen des fakultativen Unterrichts in der Abiturstufe verwendet werden. Darüber hinaus soll dieses Buch interessierten Erwachsenen wie auch Studenten technischer, natur- und geisteswissenschaftlicher Fachrichtungen ein relativ bequemer, da pädagogisch wohldurchdachter, Zugang zu einer mathematischen Disziplin sein, die sich in den verschiedenartigen Anwendungsgebieten (Ökonomie, Psychologie, Medizin, Biologie u.a.) zunehmender Verbreitung erfreut.

Der Titel ist lieferbar.

VOLK UND WISSEN
VOLKSEIGENER VERLAG
BERLIN

00 21 70-1 • 6,-