Rada Soutěže Adama Riese
ve Spolku Adama Riese e.V. Annaberg-Buchholz

Matematická soutěž „Adam Ries“ 2007

Sbírka příkladů
pro práci s kostkami a k počítání

vydavatel:
Dr. Norman Bitterlich
D-09114 Chemnitz, Draisdorfer Str. 21
e-mail: norman.bitterlich@t-online.de

Úvod

Adam Ries je na západě Krušných hor známou a oblíbenou osobností. Město Annaberg-Buchholz se svým označením „Horské město a město Adama Riese” pyšní po právu, protože právě zde tento počtář po několik let působil. Jeho praktické metody výrazně ovlivnily hospodářský rozkvět v tomto regionu v 16. století. Dobrá pověst jeho počtářské školy se šířila daleko za hranice Krušných hor.

Od roku 1981 nabízí Annaberg-Buchholz saským dívkám a chlapcům z pátých tříd vyučování ve stylu Adama Riese, které se týká počítání a hry v kostky. V každoroční matematické soutěži jsou vytipováni nejlepší počtáři Saska. Cíl soutěže se během let nezměnil: poskytnout možnost chlapcům a dívkám, které zajímá matematika, ověřit si své znalosti a zároveň zintenzívnit jejich zájem o obor. Ale došlo k podstatným formálním změnám. Ze soutěže v regionu Chemnitz se stala soutěž s cílem internacionálního srovnání.

Při příležitosti 500. výročí narození Adama Riese v roce 1992 se Spolek Adama Riese, e.V.[1], stal nositelem této soutěže. Nabídka k porovnání výkonů byla poté vypsána v Bavorsku/Horních Frankách, Durynsku a v Sasku, kde jako pořadatelé působila města Staffelstein (místo narození Adama Riese), Erfurt (zde poprvé pracoval jako matematik) a Annaberg-Buchholz (kde jako matematik dlouhodobě působil). Od roku 1994 se soutěže účastní také žáci z České Republiky.

V zájmu sjednocení podpory špičkových výkonů v matematice a podpory všeobecné matematické gramotnosti probíhá soutěž ve 3 kolech:

1. stupeň: soutěž domácích úkolů a klausur na úrovni jednotlivých zemí (prosinec až únor)

2. stupeň: soutěž klausur pro 50 nejúspěšnějších účastníků 1. kola (v rámci jednotlivých zemí)

3. stupeň: soutěž klausur pro 10 nejlepších žáků ze soutěží jednotlivých zemí (soutěž čtyř zemí)

Soutěž klausur se dělí na dvě části. V první, která trvá 90 minut, se jedná o exaktní znázornění řešení tří obsáhlých problémových matematických úloh, v němž musí být všechny výpovědi jasně formulovány a

[1] www.adam-ries-bund.de

zdůvodněny. Ve druhé části dostanou žáci soubory úkolů s rozmanitými úlohami na přemýšlení a pro práci s kostkami. Pro každý komplex úloh je vymezen čas (10 až 15 minut), stačí však uvést pouze výsledek, ke kterému je možno dojít skládáním a pokládáním kostek, různými kombinacemi a úvahami nebo výpočtem zpaměti. Obě části se započítávají do celkového hodnocení.

Dne 4. a 5. května 2001 se ve městě Annaberg-Bucholz po desáté konalo třetí kolo Soutěže Adama Riese. U příležitosti tohoto jubilea vydal Peter Haase v publikační řadě Spolku Adama Riese (Schriftenreihe des Adam-Ries-Bundes e.V.) sbírku příkladů z let 1992-2001 s obsáhlými komentáři k jejich řešení a informacemi k soutěži /1/ [2]. Žáci se zájmem o matematiku mají tak spolu s /2/ a /3/ k dispozici rozsáhlý materiál pro samostatnou práci při řešení problémových příkladů. Úlohy obsažené v tomto sešitě byly vybrány z /1/.

Soutěž Adama Riese 2007 došla tradičním finále čtyř zemí 22. a 23. června svého závěrečného vrcholu. Pouze v Sasku se v tomto roce zabývalo úlohami prvního kola a tedy Riesovým dílem 1950 dívek a chlapců. I úlohy 2. kola spojují historii a matematiku.

Chceme, aby tato knížečka dodala podněty k přípravě na finálové kolo, aby každý účastník mohl své správné výsledky stvrdit slovy:

„To jsem udělal podle Adama Riese...“.

Úspěšní účastníci soutěže

V předešlých letech bylo v klausurní části třetího kola možné získat maximálně 24 bodů, při skládání kostek 16 bodů. Podle obtížnosti úloh získali vítězové soutěže v letech 1994 – 2006 mezi 25 body (1998) a 39 body (2004). Všichni účastníci dostanou diplom a upomínkový dárek. Oceňována je přibližně jedna čtvrtina účastníků. Nejúspěšnějšími českými účastníky, kteří dosáhli nejméně 20 bodů byli:

[2] /1/ Haase, P.: Adam-Ries-Wettbewerb 1992-2001 – Aufgaben und Lösungen. In: Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz, Bd. 13., Annaberg-Buchholz, 2001 (ISBN 3-930430-43-6)
/2/ Haase, P.; König, H.: 15 Jahre Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klasse 5 – ein Beitrag zur Förderung mathematisch begabter Schüler. Chemnitz 1996.
/3/ Aufgaben der Adam-Ries-Wettbewerbe – Klasse 5 – (1981-1995), Chemnitz, 1995.

		body	mista	cena	Roce
Lenka Sarnová	gymn. Most	29	2.	I.	1997
Vladimir Patera	zš. Chomutov	29	7.		1994
Markéta Gottfriedová	gymn. Louny	29	8.	III.	2005
Michal Pelc	gymn. Most	28	2.	II.	1999
Tomáš Janata	zš. Chomutov	27	2.	II.	1996
Marek Urban	gymn. Kadaň	26	9.		2005
Vlasta Blahova	gymn. Louny	25	4.	III.	1996
Daniel Zibrt	gymn. Louny	25	8.	III.	1999
Marek Mojzík	zš. Chomutov	24	8.	III.	1997
Tomáš Tvrzník	gymn. Most	23	8.	III.	2002
Vojtèch Mezera	gymn. Louny	22	4.	II.	1998
Frantisek Krticka	gymn. Most	22	4.	II.	1998
Michala Kockovská	zš. Chomutov	22	6.	III.	1998
Petr Sindelar	gymn. Most	22	9.	III.	2000
Petr Tvrzník	gymn. Most	21	10.		2000
Jiří Urban	gymn. Louny	21	12.		2001
Michaela Batoryová	gymn. Kadaň	21	13.		2006
Martin Suchan	gymn. Louny	21	14.		1997
Ondřej Mošna	gymn. Kadaň	21	17.		2003
Martin Houda	gymn. Louny	20	13.		2000
Tomáš Janata	zš. Chomutov	20	14.		1995
Jiří Markvart	gymn. Most	20	17.		2002
Hana Trešlová	gymn. Louny	20	18.		2003
Ondřej Šefl	gymn. Most	20	22.		2005
Ondřej Draganov	gymn. Kadaň	20	22.		2005
Marie Koutská	gymn. Most	20	22.		2005

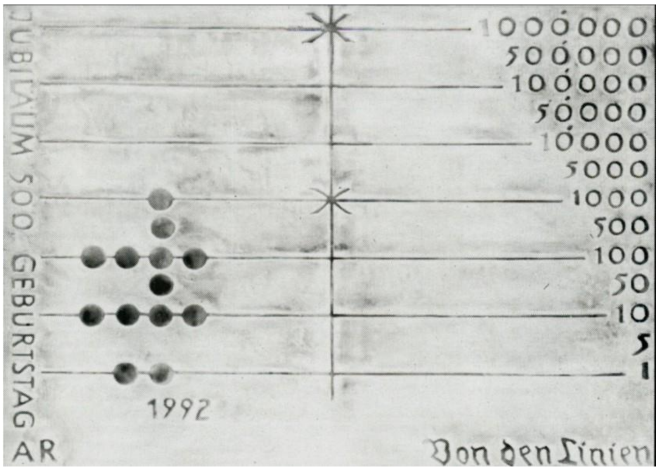

ENCOMIVM
ARITHMET
ARithmetica
menj
Slowe Počeſtwo Znánj / neb
Počjtánj ;
Bez něhož Swětſké wěcy y Duchownj /
Nemohauſt prawě býti Sprawowany :
Neb w Počtu / Wjře / Waze Wſſemohauc

Po stopách Adama Riese

V domě na Johannisgasse 23, kde je dnes Muzeum Adama Riese, žil a pracoval Adam Ries od roku 1525 do roku 1559. Zde se nacházela i jeho proslulá Početní škola, kterou po jeho smrti vedl dále jeden z jeho synů, Abraham Ries. Adam Ries získal tento dům v červenci 1525 za 150 zlatých od svého švagra, občana městské části Buchholzu, Andrease von der Strassen. (Pro porovnání: zedník vydělával v této době přibližně 7 zlatých týdně).

Dům byl postaven pravděpodobně v roce 1500. Během požáru města Annabergu v roce 1604 byl těžce poškozen, ale s použitím původních stavebních dílů opět postaven. Následovalo mnoho dalších přestaveb a dostaveb a tak dnes jsou pro něj typické stavební formy 18. století. Půdorys a uspořádání místností v přízemí však i nadále odpovídá stavu z dob Adama Riese.

Návštěvníkům muzea, založeného v roce 1984, se tím zprostředkují všechny důležité aspekty života a práce Adama Riese. Pochopíme zejména i jeho roli německého početního mistra. Oceněn bude též jako saský horní úředník a „znovuobjevený“ cosista (středověký výraz pro algebraika od slova cosa – neznámá). Kromě toho tu získáte informace o známých knihách „Brotordnungen" které Adam Ries vytvořil kromě jiných pro města Annaberg, Cvikov, Hof a Lipsko mezi lety 1533 a 1557.



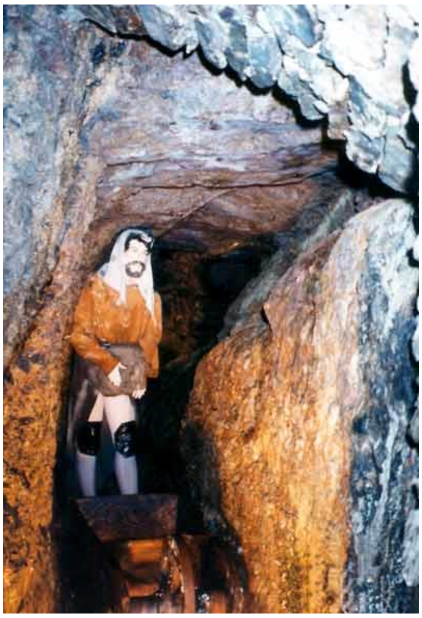
Návštěvník je uveden do proměnlivé historie starých saských měr a vah, kterou se Adama Ries vizionářsky snažil v jejím vývoji a užívání ovlivňovat. Zpracování v "Rechnens auf der Linien" (Počítání v liniích), znázorňující zacházení s římskými číslicemi na počitadle znamená pro návštěvníka vrchol prohlídky

Muzea Adama Riese. A kdo přitom ještě neovládá pokládání a sčítání počítacích feniků, neměl by v žádném případě zanedbat návštěvu moderní početní školy v horním patře budovy. Tady budete mít příležitost naučit se čtyři základní pravidla počítání „v liniích“, abyste mohli nadále nosit titul „Mistr počítání na počitadle“.

Po stopách důlní těžby

V centru starého hornického města Annaberk se nacházejí dva turisticky zajímaví svědkové krušnohorského dolování. Historické vnitřní město s kostelem sv. Anny, Muzeem Krušnohoří a zpřístupněným dolem má zvláštní konstelaci: jen zřídka lze zažít tak bezprostředně vedle sebe těžbu stříbra a její vliv na pozdně středověký vývoj města, architekturu a umění.

V kostele sv. Anny postaveném v letech 1499 – 1525 můžeme obdivovat čtyřkřídlý oltář malíře Hanse Hesse. Tento tzv. „hornický oltář“ je považován za nejvýznamnější malbu báňského regionu z doby Adama Riese. Působí na nás svou barevnou pestrostí a komplexním vyobrazením těžby stříbra. Ukazuje scény týkající se vyměřování, průzkumu a těžby, dopravy a úprav i mincovnictví. Na obrazech jsou detailně zobrazeny pracovní procesy, pracovní prostředky a oděv z dávné doby.



Několik metrů od anenského kostela se ve dvoře Muzea Krušnohoří nachází vchod k dolu „U Gößnera“, který je přístupný návštěvníkům. Zde se můžeme seznámit s mnoha detaily týkajícími se hornického řemesla mezi léty 1500 a 1530. Je nutné sestoupit po ocelových schodech do 13 m hloubky. Prohlídka trvá necelou hodinu, je dlouhá asi 260 m a vede třemi štolami. Návštěvníci chránění helmou a pláštěm procházejí úzkými a často nízkými chodbami. Důl byl pro veřejnost otevřen roku 1995. Díky muzeálnímu ztvárnění a nasvícení zde ožívají obrazy na „hornickém oltáři“.

Roku 1491 bylo na úpatí „hory strachu“ (Schreckenberg) poprvé nalezeno stříbro. Naleziště je poněkud vzdálené od dnešního městského centra, na druhém břehu řeky „Sehma“. Spolu s těžbou se rozvíjelo město, jehož výstavba byla započata roku 1496 a které roku 1497 obdrželo městská práva. V následujících letech bylo otevřeno uvnitř města více než 20 dolů. Důl „U Gößnera“, který vznikl v této době, byl pojmenován po Andreasovi Gößnerovi. Od roku 1519 byl radním v Annaberku a od roku 1524 správcem mlýna. Zemřel roku 1533. Jelikož Adam Ries žil v tomto hornickém městě od roku 1523, jistě se oba muži potkávali často.

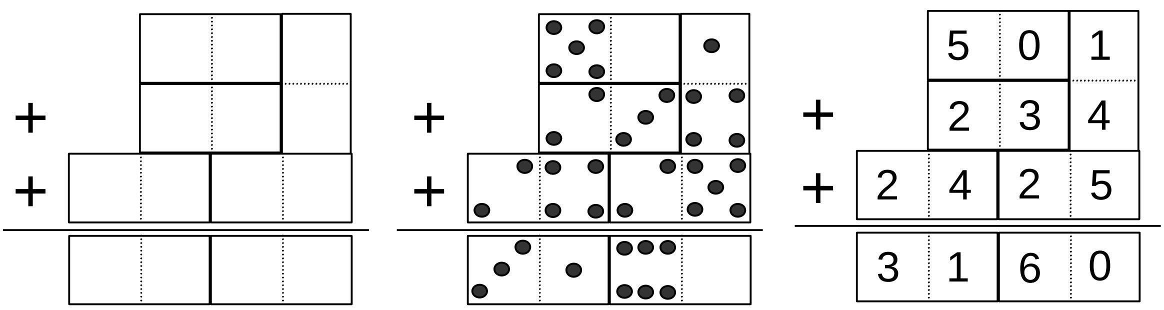
* *

Počítání s kostkami domina

Účastníci druhého kola soutěže Adama Riese se setkávají každým rokem v předvečer soutěže ze Saska v zemském školním domově v Jöhstadtu. V přátelské atmosféře soupeření v řešení úloh se chlapci a dívky zabývají počítáním, skládáním puzzle a skládáním papírových skládanek. Jedna z takových úloh používá jako pomůcku dominové kostky:

Polož 7 kostek domina na šablonu tak, aby vznikla správě vypočtená úloha. Považuj přitom počet bodů na jedné polovině dominové kostky za číslici vícemístného čísla.

Příklad:



.
Najděte sami podobná rozložení.

* *

Úlohy soutěže Adama Riese 2007 (2. stupeň, část 1)

2007/2 – I/1[3]

V nejvýznamnější matematické knize Adama Rieseho, která pochází z roku 1524 a jmenuje se **Coß**, se nachází úloha, jež převedena do současného jazyka, zní takto (čísla a jednotky jsou pozměněny):

136) Item eyn Vischer hat ein hecht, Ist etwas groß vnd langk, sol 1 ℔ vmb 20 ₰ gebnn. Nun hat er kein wag darmit er wigtt. Nimet eyner $1/4$ daruon gibt 30 hl, komet einander Nimet $1/8$ vom vbrigenn gibt darfur 7 hl. Nun komet einander, Nimet das do vorhanden ist alles miteinander gibt darfur 80 hl, let solches stuck wegenn befindet $27\,1/2$ ℔. Nun frage ich, wiuil der hecht gewegen hab vnd ab er daß gethan stuckweyß vorkaufftt Dan machn ℔.

Rybář chytil velkou štiku, kterou chtěl prodat na trhu. Bohužel ale neměl s sebou žádnou váhu.

První zákazník si vzal čtvrtinu štiky a dal za ni 30 feniků, aniž by znal váhu.
Druhý zákazník si vzal ze zbytku štiky polovinu a dal za ni 40 feniků, aniž by znal váhu.
Třetí zákazník měl již váhu s sebou a zjistil, že ještě 15 liber ze štiky zbylo, a tak zbytek ryby koupil.

V době, kdy Adam Ries žil, se platilo mimo jiné feniky a haléři. Pro přepočet platí: 1 fenik odpovídá 8 haléřům.

a) Spočítej, jakou cenu musí třetí zákazník zaplatit, jestliže rybář požaduje 20 haléřů za libru štiky. Cenu uveď ve fenicích i v haléřích.

Ries klade ve své úloze další otázky. Vyřeš tyto úlohy:

b) Kolik liber vážila celá štika?
c) Prozkoumej, zda rybář prodejem prvnímu a druhému zákazníkovi udělal dobře, nebo zda by bylo pro něj výhodnější prodat celou štiku za cenu 20 haléřů za libru ?

2007/2 – I/2

V různých sportovních spolcích diskutují členové o svém věku. Všechny spolky se skládají ze členů různého stáří, nejmladšímu je jeden rok.

[3] roce/stupeň – čast/komplex

Rozdíl věku každého člena a jemu nejbližšího staršího člena je pokaždé stejný a vyjádřitelný v celých rocích.

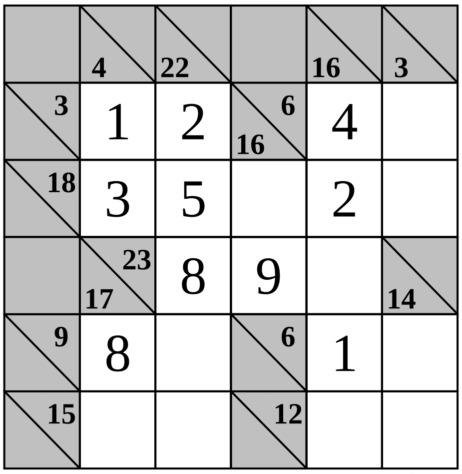
a) Tenisový spolek má 10 členů. Rozdíl věku každého člena a jemu nejbližšího staršího člena činí v tomto spolku dva roky. Nejmladšímu členu je 12 let.
   Vypočítej, jakého stáří dosáhnou všichni členové spolku dohromady.
b) Nejstaršímu členovi plaveckého spolku je 24 let. Všem členům dohromady je 84 let.
   Objasni všechny možnosti, kolik členů plavecký spolek může mít.

U následujících spolků činí rozdíl věku každého člena a jemu nejbližšího staršího člena jeden rok.

c) Fotbalový klub má 27 členů. Všem členům dohromady je 513 let.
   Vypočítej, kolik let je nejmladšímu členovi v tomto klubu.
d) Madlen si myslí: Můj bratr navštěvuje jeden spolek s 23 členy, kteří dosahují dohromady věku 230 let.
   Vyzkoumej, zda je to možné. Zdůvodni!

2007/2 – I/3

Tim a Tom řeší KAKURO. V čtverci složeném ze sloupců a řádků se nacházejí šedá a bílá pole. Některá šedá pole jsou rozdělena a obsahují čísla. Horní číslo v takovém poli udává součet čísel, která se nacházejí v bezprostředně vpravo umístěných bílých polích ve stejném řádku. Dolní číslo v takovém poli udává součet čísel, která se nacházejí v bezprostředně směrem dolů umístěných bílých polích ve stejném sloupci. Vyplňování bílých polí KAKURA probíhá podle následujících dvou pravidel:



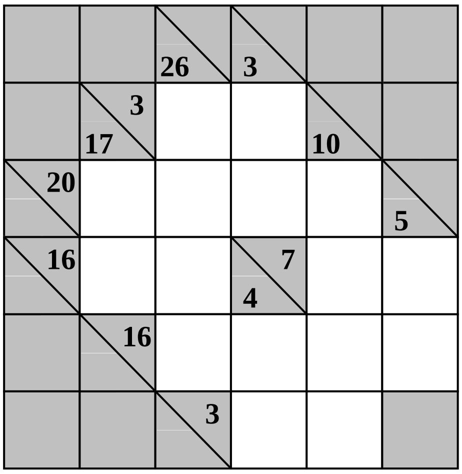
Obr. 1

1) vyplňujeme pouze čísly 1 až 9.
2) v každém součtu se smí každé číslo vyskytnout maximálně jednou.

a) Vyplň zbylá bílá pole v KAKURA na obrázku 1.
b) Tim uvažuje, že by při vyplňování mohla být výhoda, znát pro daný počet políček možné hodnoty součtů. Vyhledej všechna čísla,

jejichž hodnota může vzniknout jako součet dvou polí při vyplňování KAKURA.

c) Tom by si chtěl sám sestavit KAKURO ze šesti sloupců a šesti řádků. Jakou maximální hodnotu může mít součet čísel v takovém KAKURU? Zdůvodni.
d) Vyřeš KAKURO na obrázku 2. Zjisti, zda je řešitelné jednoznačně.



Obr. 2

Poznámka: KAKURO pochází z japonštiny a znamená „součet“. I když se prodává jako japonská hra, pochází zřejmě z USA, kde byla v roce 1966 zveřejněna v Dell Magazine pod názvem „Cross Sums“. O jeho popularizaci se ale stejně jako v případě Sudoku, které pochází ze Švýcarska, postaral až japonský specialista na hádanky Nicoli.

* *

Složité úlohy minulých let – část 1

2005/2 – I/1

Ve své druhé knize příkladů vydané roku 1522 uvádí Adam Ries mezi jinými následující příklad (čísla jsou mírně pozměněna): Zákazník nakoupí tato koření: šafrán, hřebíček a zázvor. 1 libra šafránu stojí 4 guldeny 5 šilinků, 1 libra hřebíčku stojí 19 šilinků a 1 libra zázvoru stojí 8 šilinků.

V době Adama Riese se hmotnost zboží udávala v librách a lotech (1 libra = 32 lotů) a platilo se guldeny a šilinky (1 gulden = 20 šilinků).

Vyřeš následující úlohy:

a) Zákazník kupuje 1 libru šafránu, 2 libry hřebíčku a 3 libry zázvoru. Kolik zaplatí? (Cenu vyjádři tak, aby bylo zapotřebí co nejmenšího počtu mincí.)
b) Adam Ries položil následující otázku: zákazník nakoupil stejné množství šafránu, hřebíčku i zázvoru a zaplatil celkem 133 guldenů. Kolik koření od každého druhu nakoupil? (Výsledek uveď v základním tvaru.)

c) Další zákazník chce nakoupit hřebíček a zázvor, každého na váhu jen v celých librách (ale minimálně jednu libru) a chce, aby celková cena nákupu byla v celých guldenech.

Kolik musí nakoupit hřebíčku a zázvoru? Nalezni nejmenší možná množství splňující tyto podmínky a ukaž, že menší neexistují.

2006/2 – I/2

Marek a Lukáš se opět baví číselnými hádankami. Marek říká Lukášovi: „Mysli si dvě čísla. Obě jsou větší než nula. Vytvoř součet obou těchto čísel a přičti jej k součinu těchto myšlených čísel. Vyřkni výsledek.“

a) Dobrá, Lukáš si vybral čísla 4 a 12. Vypočítej, jaké číslo Markovi řekne.
b) Lukáš říká jako výsledek číslo 71. Sděluje ještě, že obě myšlená čísla jsou čísly po sobě následujícími.
Zjisti tato čísla.

Poté co Marek uhádl často čísla správně, prozradil svůj trik: „Přičti k výsledku 1 a rozlož obdržené číslo do dvou činitelů, z nichž oba jsou větší než jedna. Odečti od každého činitele 1, potom obdržíš ta myšlená čísla.“

c) Jako výsledek je uvedeno číslo 34. Zjisti tímto trikem myšlená čísla.
d) Lukáš chce tento Markův trik použít na číslo 71 jako výsledek (viz dílčí úloha b). Zjistí, že (bez požadavku na po sobě jdoucí čísla) člověk získá více než jednu dvojici čísel. Zjisti všechny možné dvojice myšlených čísel.

2006/3 – I/1

Ve své druhé početnici uvádí ADAM RIES několik úloh o „obchodních společnostech“. Jistý počet osob ukládá po určité časové období peněžní obnos a dosáhne tím zisku. Tento bude ve prospěch zúčastněných osob rozdělen podle výše podílu.

V době, kdy žil Adam Ries, se platilo zlaťáky, šilinky a haléři. Pro přepočet platilo:
1 zlaťák odpovídá 20 šilinkům, 1 šilink odpovídá 12 haléřům.

a) Tři osoby tvoří jednu „obchodní společnost“.

První vloží 120 zlaťáků, druhý 536 zlaťáků a třetí 144 zlaťáků současně. Dosáhnou při tom zisku ve výší 200 zlaťáků.
Vypočítej, jaká peněžní částka každému z nich přísluší.

b) Tři jiné osoby tvoří opět jednu „obchodní společnost“.
První uloží na 4 měsíce 55 zlaťáků, druhý uloží na 5 měsíců 45 zlaťáků a třetí uloží na 3 měsíce 65 zlaťáků. Dosáhnou při tom zisku ve výši 136 zlaťáků.
Vypočítej, jaký peněžní obnos nyní náleží každému z nich. (Uveď peněžní částky ve zlaťácích, šilincích a haléřích).

2006/3 – I/2

Dnes večer se odehrají v Lipsku a v Mnichově dva osmifinálové zápasy v mistrovství světa ve fotbale 2006. Pro všechna mužstva to byla dlouhá cesta až k finálové účasti.

a) Kvalifikace skupiny Jižní Ameriky se zúčastnilo 10 mužstev. Každé mužstvo sehrálo proti každému soupeři jeden zápas na domácím hřišti a jeden zápas na hřišti soupeře.
Za každé vítězství byly uděleny tři body, za remízu jeden a za prohaný zápas žádný bod.
Vypočítej, kolik maximálně bodů mohlo získat mužstvo v této skupině.
b) Aby se čas na kvalifikaci zkrátil, byl by i možný KO-systém. Mužstvo bude vyřazeno, jakmile prohraje zápas. Každý zápas bude rozhodnut (popřípadě pokutovými kopy).
Evropské skupiny se kvalifikace zúčastnilo celkem 32 mužstev.
Uveď´, kolik zápasů by bylo nutných za těchto podmínek. Zdůvodni!
c) V prvním kole kvalifikace skupiny Oceánie hrálo v květnu 2004 ve skupině 1 pět mužstev – Cookovy ostrovy, Nová Kaledonie, Salomóny, Tahiti a Tongo.
Předpokládejme, že každé mužstvo sehrálo proti každému dalšímu jeden zápas na domácím hřišti a jeden zápas na hřišti soupeře, zápasy se uskutečnily v po sobě následujících týdnech a každé mužstvo mělo odehrát týdně právě dva zápasy. Některé ze zápasů jsou již nasazeny.

(1) Doplň možný herní plán na pracovním listě.
(2) Prověř, zda existují za těchto podmínek další od sebe odlišné herní plány a ukaž, že nemohou žádné další existovat. (Herní plány, které vznikly jenom výměnou zápasu na domácím hřišti se zápasem na hřišti soupeře, jsou stejné.)

Pracovní list:

		Zápas na domácím hřišti				
		Cookovy ostrovy	Nová Kaledonie	Salomóny	Thaiti	Tongo
Zápas hřišti soupeře	Cookovy ostrovy	--	1. týden			
	Nová Kaledonie	2. týden	--	1. týden	2. týden	
	Salomóny	3. týden	3. týden	--		
	Tahiti	2. týden		1. týden	--	1. týden
	Tonga					--

2006/3 – I/3

U mnohého zakoupeného zboží je natištěn čárový kód s čísly, evropské číslo výrobku (EAN). Tento kód podává informaci o původu a druhu daného zboží.

Úplné EAN je většinou 13-místné. Pro rozeznání chybného EAN je poslední číslice číslicí kontrolní. Tu můžeme vypočítat z předcházejících 12 číslic následovně: Zleva do prava se násobí jednotlivé číslice střídavě s činiteli 1 resp. 3 a součiny se potom sečtou. Doplněk takto získaného kontrolního součtu k nejbližčímu násobku 10 je kontrolní číslicí.

Pro výše uvedené EAN 4 009993 010207 získáme kontrolní čislo 7 takto

$$4\cdot1+0\cdot3+0\cdot1+9\cdot3+9\cdot1+9\cdot3+3\cdot1+0\cdot3+1\cdot1+0\cdot3+2\cdot1+0\cdot3=73$$

$$\rightarrow \quad 73+7=8\cdot10$$

a) U následujícího EAN chybí kontrolní číslo: 40 16138 10060?
b) Jiné číslo EAN má kontrolní číslo 0, na všech ostatních místech stojí jedno a totéž číslo. Zjisti toto EAN.
c) U následujícího EAN chybí první dvě číslice: ?? 57054 07149 3. Zjisti všechny možné dvojice chybějících číslic a dokaž, že nemohou existovat další.

Mezinárodním standardním knižním číslem (krátce ISBN) jsou označovány skoro všechny knihy. Skládá se z 10 číslic, z nichž zase poslední je kontrolní číslicí. Tu můžeme vynásobí z předcházejících 9 číslic následovně: Počínaje zleva se vynásobí první číslice 10, druhá 9, třetí 8, ..., a devátá 2. Součiny se potom sečtou. Doplněk takto získaného kontrolního součtu k nejbližšímu násobku 11 je kontrolní číslice.

d) Někdo vzpomíná, že kniha „O matematickě soutěži Adam Ries 1992 – 2001“ má ISBN 3-930-43643-6. Ukáže se ale, že ve skutečném ISBN na právě jednom místě stojí (ne na místě kontrolního čísla) menší číslice.
Zjisti, zda se z těchto údajů dá jednoznačně určit ISBN této knihy.

* *

Puzzle a skládání

1999/3-II/1.2

Podle čísel na okraji čtverce položte odpovídající bonbónů do příslušného řádku, případně sloupce, přičemž na každé políčko lze položit nejvýše jeden bonbón.

3	2	1	2	3	
					2
					1
					4
					3
					1

2001/3 - II/1.2

Polož do šesti políček čtvercové sítě o rozměrech 6 x 6 vždy jeden bonbón a to tak,

a) aby v každém řádku a sloupci čtvercové sítě zůstal neobsazen lichý počet polí a mimo to, aby bonbóny neležely všechny současně v jedné úhlopříčce.
b) aby v každém řádku a sloupci čtvercové sítě zůstal neobsazen sudý počet polí.

2002/3 - II/1.2

Bonbóny (viz sáček) mají být „rozděleny“ s povšimnutím následujících podmínek:

- Stejná písmena mají být obložena stejným počtem bonbónů, různá s rozdílně velkým počtem.
- Ne každé písmeno jednoho jména musí být obloženo.
- Je-li písmeno obloženo, tak je toto obloženo při každém výskytu stejným počtem bonbónů.

a) 8 bonbónů se má tak rozdělit, že ANNA „získá“ třikrát tolik jak ADAM.

A	N	N	A

A	D	A	M

b) 12 bonbónů má být rozděleno tak, že Riesova nejstarší dcera EVA dostane nejvíce bonbónů, ANNA o jeden méně než EVA, a nejmladší dcera SYBILLA opět o jeden méně než ANNA.

E	V	A

A	N	N	A

S	Y	B	I	L	L	A

2004/3-II/1.2

8 bonbónů má být položeno na políčka čtverce tak, že na každém řádku a v každém sloupci budou zakryta právě dvě políčka a že na nezakrytých políčkách je možné postupně za sebou přečíst jméno matematika.

Ohranič zakrytá políčka. Písmena těchto políček postupně čtená udávají jméno jednoho z míst jeho působení.

A	A	D	N
N	A	M	A
R	B	E	I
R	E	G	S

2006/3 – II/1.2

Polož na 10 políček čtverce se 4 x 4 poličky vždy jeden bonbón tak, že na každem řádku, v každém sloupci a na každé úhlopříčce čtverce leži sudý počet (nejméně dva) bonbónů.

* *

Hry s čísly

2004/2 – II/2.2

Tlustá nula vyzývá všechna čísla na stránce početnice postavit se do řady, aby se se všichni mohli naučit dobře počítat:

Postaví-li se do dvojstupu, jedno přebývá.
Postaví-li se do třístupů, rovněž jedno přebývá.
A přebývá právě jedno i tehdy, stojí-li ve čtyř- či v pěti-, nebo v šestistupu.

Uveď jedno takové množství čísel, pro něž toto platí.

Odpověď‘: ....

A nyní požaduje tlustá nula, aby se všechna čísla postavila do sedmistupu – a žádné nepřebývá.

Uveď nejmenší možný počet čísel, pro něž toto platí.

Odpověď‘: ....

2005/2 – II/2.1

Nahraď ve vedle stojící figurce mezery čísly a početními znaménky tak, aby správně vypočítané příklady byly vodorovně i svisle.

309	-		=	
		-		+
150			=	170
=		=		=
	-	59	=	

2005/2 – II/2.2

Čísla 1 až 16 (každé jednou) se mají vepsat do magického čtverce tak, aby v každém řádku, sloupci a úhlopříčce byl součet těchto čísel stejný.

16			13
	11	10	
		6	
4			1

2006/2 – II/2.1

Doplň v obrázku operační znaménka a přirozená čísla tak, aby řetězová úloha byla správně vyřešena při výpočtu směřujícím zleva doprava. (Pozor: pravidlo „násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním“ neplatí, mezivýpočty nejsou udány.)

12		5	·		-	3	=	150

2006/2 – II/2.2

Každé písmeno musí být nahrazeno jednou číslicí, přičemž rozdílná písmena znamenají rozdílné číslice, shodná písmena shodné číslice:

$$\begin{array}{cccccc} & A & D & A & M \\ + & A & N & N & A \\ \hline = & R & I & E & S \end{array}$$

a) Nahraď písmeno **A** číslicí **4**. Zbývající písmena nahraď tak, aby úloha byla vyřešena správně.

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & \_ & 4 & \_ \\ + & 4 & \_ & \_ & 4 \\ \hline = & \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}$$

b) Uveď další řešení:

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & \_ & 4 & \_ \\ + & 4 & \_ & \_ & 4 \\ \hline = & \_ & \_ & \_ & \_ \end{array}$$

2007/2 – II/2.1

V egyptské pyramidě objevili učenci do kamene vytesané číslo. Toto číslo je nejmenší ze všech přirozených čísel, které je dělitelné všemi přirozenými čísly od 1 do 10. Najdi toto číslo.

2007/2 – II/2.2

V jednom přístavu zakotvily čtyři lodě. Přístav pak opustily najednou. Je známo, že první loď se vrací každé čtyři týdny, druhá každých 8 týdnů, třetí každých 12 týdnů a čtvrtá každých 16 týdnů.

Po kolika týdnech zakotvily znovu všechny čtyři lodě v tomto přístavu?

2007/2 – II/2.3

Součin čtyř po sobě následujících přirozených čísel je 3024. Uveď tato čtyři čísla.

* *

Úlohy ze starých početnic

2000/3 – II/2.1

V arabských povídkách „Z tisíce a jedné noci“ najdeme ve 458. noci hezkou hádanku:

Holubí hejno letělo k vysokému stromu, část holubů si sedlo na strom, ostatní pod strom. Tu promluvili ti na stromě k těm, kteři byli dole: „ Když jeden z vás vzlétne nahoru, tak jste třetinou z nás všech. A když jeden z nás slétne dolů, tak vám budeme do počtu rovni.“

Kolik holubů bylo na stromě, kolik pod stromem?

Odpověd´: ....na stromě; .... pod stromen.

2002/3 - II/2.1

Mistr počtář Jacob von Koburg (kolem 1600) zadal svým posluchačům následující úkol:

Dvě města by mohla být 228 mil od sebe vzdálená. Z každého tohoto města si jdou dva poslové naproti se stejným startovním časem. Každý z těchto poslů uběhne nàsledující den vždy stejný počet mil jak v předcházející den, ale jeden z poslů ujde denně o dvě mile více než ten druhý. Po 12 dnech se potkají.

Kolik mil z celkové trasy uběhne každý z poslů?

Odpověd‘: Ten jeden: .... mil,
Ten druhý: .... mil.

2004/2 – II/1.3

Achilles běží závod s krásnou Helenou. Helena běží poloviční rychlostí v porovnání s Achillem. Achilles dá Heleně náskok 1000 m.

Kolik metrů musí uběhnout Achilles, aby Helenu dohonil?

Odpověď': ....

2005/2 – II/1.3

Ze „Zázraků početní techniky“: Někdo, kdo je tázán jak staří jsou jeho synové, odpoví: „Nejstarší je právě ještě jednou tak starý jako nejmladší. Umocníme-li věkové číslo každého a sečteme-li obě mocniny, dostaneme výsledek 180.“

Jak staří jsou oba synové?

Odpověď': ....

2006/2 – II/1.2

Řekyně šla do Jupiterovy svatyně a prosila ho, zda by nemohl zdvojnásobit její peníze. Jupiter její prosbu vyslyšel a ona mu z vděčnosti obětovala dvě „Drachmen“ („Drachme“ byla řecká peněžní jednotka). Šla dál k Apollónově svatyni se stejnou prosbou, načež obětovala znovu dvě „Drachmen“. Když spočítala své peníze, zjistila, že jich má dvakrát tolik jako na začátku. Kolik jich měla?

Odpověď': ....

* *

Tolikero možností

1998/3 – II/3

Cyklistický závod vede místy působení Adama Rieseho: Staffelstein – Erfurt – Annaberg.

V této úloze nás nyní zajímají možná pořadí cílového vjezdu, přičemž žádní dva cyklisté nepřejedou cílovou čáru současně.

1. Cyklističtí závodníci Abler, Baler, Capler a Delar jedou v první skupině, která se blíží cílovému stadionu.

a) Napiš všechna možná pořadí cílového vjezdu, kdyby přejel Capler přes cílovou čáru jako první. Piš např. tak: CABD
b) Kolik možností může celkem nastat (tedy každý z jezdců by mohl jako první přejet cílovou čáru)?

Odpověď: . . . .

2. Ale ještě není závod u konce. Nastává nová situace, neboť Erlerovi se podaří připojení k první skupině. Diváci nyní povzbuzují těchto pět jezdců k závěrečnému finiši. Dva z těchto jezdců, totiž Abler a Erler, patří k AR týmu.

a) U kolika všech možných pořadí cílového vjezdu by mohl být jeden z těch dvou z AR týmu první, ten další druhý?

Odpověď: . . . .

b) U kolika všech možných pořadí cílového vjezdu by mohl být alespoň jeden z AR týmu první nebo druhý?

Odpověď: . . . .

c) Manažer AR týmu sní už o tom, že oba závodníci jeho týmu by mohli stát na stupních vítězů. U kolika všech možných cílových vjezdů by to bylo možné?

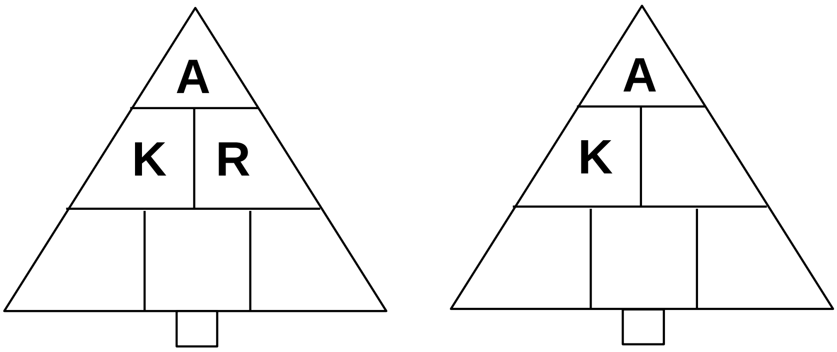
Odpověď: . . . .

2001/3 - II/3

Annabergsko-Buchholzští slaví v tomto roce 500. výročí města Buchholz. Městští hrdinové které buchholzští opěvují ve své národní písni, jsou přichystáni jako figurky – sošky k prodeji. To jsou mimo jiných: **A**ugustýn (A), **K**okosnuss (K), **R**ichter-Bui (R), **S**chmiedelpfeif (S), **W**ä-tä-tä (W) a **Z**acherlin (Z). (Při zápisu řešení by mělo být použito jen počátečních písmen.)

1. Vilík pomáhá postavit městské hrdiny do regálu jednoho prodejního stánku. Regál (→obr.) má tvar jehličnatého stromu, přičemž na horní

poličku má být postavena právě jedna figurka, na prostřední poličku dvě figurky a na spodní tři figurky.



a) Vilík postaví Augustýna na horní poličku, Kokosnuss na prostřední poličku vlevo, vedle Kokosnuss Richter-Buiho.
Napiš všechny různé možnosti postavení zbývajících figur na spodní poličce.

Možnosti: ....

b) Vilík postaví Augustýna na horní poličku, Kokosnuss na prostřední poličku vlevo.
Kolik různých možností vyplyne pro postavení zbývajících figur?

Odpověď': ....

U kolika těchto možností stojí Wä-tä-tä uprostřed spodní poličky?

Odpověď': ....

2. Anna by si chtěla koupit figurky.

a) Anna koupí právě dvě ze šesti figurek. Zapiš systematicky všechny různé možnosti volby obou figurek.

Začni takto: AK; AR; ....
KR; ....

b) U jiného stánku je nabízeno více než šest figurek. Vybrala-li by si Anna zde své dvě figurky, došla by na 45 různých možností volby.
Kolik různých figurek je nabízeno u tohoto stánku?

Odpověď': ....

2004/2 – II/3

Na počítacích fenicích erfurtské početní školy byly tyto ražby: zobrazení Adama Riese (R), pohled na město Erfurt (E), pohled na město Annaberg (A), pohled na město Staffelstein (S), erfurtská universitní brána (U).

(R) **(A)** **(E)** **(S)** **(U)**

1. V jednom koženém sáčku je přesně 100 počítacích feniků, a to 30 feniků s ražbou (E), 20 s ražbou (A) a 50 s ražbou (S). Máš z tohoto sáčku (aniž bys rozeznal ražbu - nebo-li „se zavázanýma očima“) vybrat nejnižší nutný počet feniků tak, aby sis mohl být jist, že mezi vybranými jsou minimálně:

(a) tři feniky s ražbou (A) Odpověď‘: ....
(b) tři feniky s ražbou (S) a tři feniky s ražbou (E) Odpověď‘: ....
(c) tři feniky s ražbou (A) a tři feniky s ražbou (E) Odpověď‘: ....

2. Martina a Ondra si vzájemně dávají složité úkoly, aby nalezli všechny možnosti seřazení feniků v albu mincí. K dispozici mají právě jeden fenik od každé ražby – tedy celkem 5 kusů.

Martina dá Ondrovi tento úkol: Ulož fenik s (R) jako první, ty ostatní ve všech možných řazeních po sobě.

V kolika z nich leží (U) vedle (E)?

Odpověď‘: ....

Ondra se ptá Martiny: na jedné straně alba jsou tři volná místa vedle sebe a na další straně ještě dvě.
V kolika různých uspořádáních můžeš 5 feniků na tato místa uložit?

Odpověď‘: ....

Nyní jsou k dispozici právě čtyři feniky: dva s (R), jeden s (S) a jeden s (E).

Kolik existuje možností pořadí těchto feniků, mají-li se tyto čtyři uložit po sobě na čtyři volná místa?

Odpověď: ....

2005/2 – II/3

1. Ve škole matematiky v Annabergu chtějí děti pověsit na zeď obrázky. Mají k dispozici pět obrázků s následujícími motivy (písmena v závorkách slouží jako značky pro jednotlivé obrázky):

(**A**) obrázek počítadla **A**bacus
(**B**) obrázek obchodnice **B**arbary Uthmann
(**C**) obrázek úhlu se jménem **C**osinus
(**R**) obrázek početního mistra Adama **R**iese
(**S**) obrázek **š**koly matematiky v Annabergu

a) Máte vybrat tři obrázky a ty poté pověsit vedle sebe na zeď. Tomáš se ptá, kolik různých trojic obrázků existuje, pokud nám záleží i na pořadí obrázků na zdi. Nalezni odpověď.

b) Dále máte pověsit na zeď všech pět obrázků. Tomáš se ptá, kolik různých možností máme, pokud mají obrázky (**A**), (**B**), (**C**) viset vždy za sebou, opět záleží na jejich pořadí, a obrázky (**R**) a (**S**) visí na zbývajících volných místech.

2. Těchto pět obrázků a ještě obrázek s**t**olu (**T**) použijeme jako obrázkové motivy na podložky pod myš u počítače. Máme tedy k dispozici šest různých podložek. Těchto šest podložek chceme nyní zabalit po dvojicích jako dárky. Tak nám vzniknou například následující dvojice: (**A**)(**T**) – (**B**)(**C**) – (**R**)(**S**).

a) Vypiš všechny možnosti rozdělení těchto šesti podložek do dvojic, pokud víš, že jedna dvojice je (**A**)(**B**).
b) Marie, která má všechny tyto podložky zabalit do dvojic jako dárky, přemýšlí, kolik má celkem různých možností rozdělení podložek do dvojic. Nalezni odpověď.

2006/2 – II/3

Anna, **B**edřich, **C**ecílie a **D**aniel se procházejí po náměstí v „KÄTu“ (zábavní centrum v Annaberg-Buchholz).

1. Všichni čtyři chtějí na kolotoči jezdit na „koni“a sedět na něm za sebou. „Koňský hřbet“ je dostatečně velký pro čtyři. Kolik různých možností posazení bude celkem, když

a) Anna a Daniel budou sedět za sebou?

   Odpověd‘: ....

b) Anna a Daniel a také Bedřich a Cecílie budou sedět za sebou?

   Odpověd‘: ....

c) Děvčata a chlapci budou sedět střídavě?

   Odpověd‘: ....

2. Tito čtyři potkají Elišku. Eliška má volné lístky a daruje každému ze svých čtyř přátel jeden.

a) Eliška má pět volných lístků, dva na kolotoč „Pavouk“ a tři na ruské kolo. Napiš všechny možnosti, jak si děti mohou lístky mezi sebou rozdělit.

   Možností: ....

b) Představ si, že by Eliška měla tři lístky na „Pavouka“ a na ruské kolo také tři. Kolik různých možností rozdělení lístků vyjde celkem, když jeden lístek, jedno který, bude přebývat.

   Odpověd‘: ....

* *

vydavatel:
Dr. Norman Bitterlich
D-09114 Chemnitz, Draisdorfer Str. 21
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de