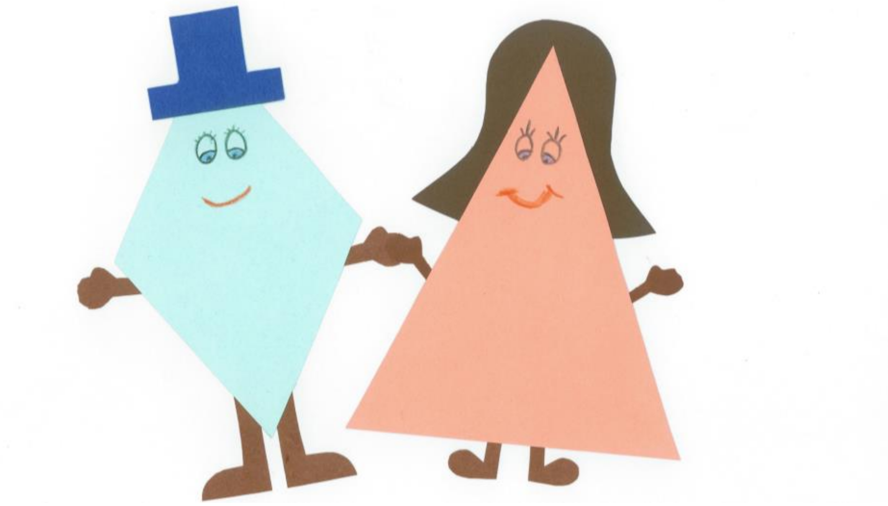
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Wenn du teilnimmst, beachte bitte die Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Formuliere zu jeder Aufgabe einen Antwortsatz.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz
oder
norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir

Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Herr Raute, Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato – ging zu einem Sportfest. Herr Raute forderte die anderen drei heraus, beim Ballzielwurf in den Wettstreit zu treten. Jeder warf zehn Mal. Am Ende verglichen sie die Anzahl der Treffer. Dabei hatten alle unterschiedliche Trefferzahlen erreicht, so dass es eine eindeutige Reihenfolge gab.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen kann es geben, wenn Herr Raute manchmal absichtlich daneben warf, um nicht zu gewinnen, und Kreisa mehr Treffer als Quadrato schaffte? Schreibe alle Reihenfolgen auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es gibt 9 verschiedene Möglichkeiten.

Begründung: Wir schreiben zur Abkürzung für Frau Dreieck D, für Kreisa K, für Quadrato Q und für Herrn Raute R. Damit kannst du alle möglichen Reihenfolgen (ohne Berücksichtigung der zusätzlichen Information) aufschreiben, z.B. so

1. D, 2. K, 3. Q, 4. R – kurz DKQR, DKRQ, DQKR, DQRK, DRKQ, DRQK,
KDQR, KDRQ, KQDR, KQRD, KRDQ, KRQD,
RDKQ, RDQK, RKDQ, RKQD, RQDK, RQKD,
QDKR, QDRK, QKDR, QKRD, QRDK, QRDK.

Das sind 24 Möglichkeiten. Nun streiche alle Reihenfolgen, bei denen R an erster Stelle steht, denn Herr Raute hat nicht gewonnen:

DKQR, DKRQ, DQKR, DQRK, DRKQ, DRQK,
KDQR, KDRQ, KQDR, KQRD, KRDQ, KRQD,
~~RDKQ, RDQK, RKDQ, RKQD, RQDK, RQKD,~~
QDKR, QDRK, QKDR, QKRD, QRDK, QRDK.

Nun streiche auch noch alle Reihenfolgen, bei denen Q vor K steht, denn Kreisa war besser als Quadrato:

DKQR, DKRQ, ~~DQKR, DQRK~~, DRKQ, ~~DRQK~~,
KDQR, KDRQ, KQDR, KQRD, KRDQ, KRQD,
~~QDKR, QDRK, QKDR, QKRD, QRDK, QRDK~~.

Es verbleiben also 9 Möglichkeiten, die die Bedingungen der Aufgaben erfüllen:

DKQR, DKRQ, DRKQ, KDQR, KDRQ, KQDR, KQRD, KRDQ, KRQD.

Lösungsvariante: Aus dem Aufgabentext erkennst du, dass Herr Raute und Quadrato nicht gewonnen haben. Wenn Kreisa gewonnen hat, ist sie natürlich immer besser als Quadrato – alle möglichen Reihenfolgen mit Kreisa an erster Stelle erfüllen die Bedingungen. Wenn Frau Dreieck gewonnen hat, musst du aufpassen, dass Kreisa vor Quadrato steht.

****

Aufgabe 2. Quadrato nahm an einem Geländelauf teil. Insgesamt 31 Sportler starteten. Als Quadrato das Ziel erreicht hatte, waren viermal so viele Teilnehmer noch auf der Strecke hinter ihm wie schon vor ihm durchs Ziel gelaufen sind.

Welchen Platz hat Quadrato erreicht? Beschreibe, wie du dein Ergebnis gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato erreichte den 7. Platz.

Probe: Wenn Quadrato den 7. Platz erreichte, kamen 6 Läufer vor ihm und (31 – 7 =) 24 Läufer nach ihm ins Ziel. Es gilt 6 · 4 = 24.

Herleitung: So eine Aufgabenstellung kannst du durch systematisches Probieren lösen. Wenn du für den erreichten Platz eine bestimmte Zahl annimmst, kannst du ausrechnen, ob sich damit alle Aussagen der Aufgabenstellung erfüllen lassen. Fertige dazu eine Tabelle an.

Platz von Quadrato	Anzahl der Läufer vor ihm: Platz – 1	Vierfaches dieser Anzahl	Anzahl der Läufer nach ihm: 31 – Platz	Vergleich
2	1	4	29	4 < 29
3	2	8	28	8 < 28
4	3	12	27	12 < 27
5	4	16	26	16 < 26
6	5	20	25	20 < 25
7	**6**	**24**	**24**	**24 = 24**
8	7	28	23	28 > 23

Nun kannst du die Lösung direkt aus der Tabelle ablesen. Wenn du beim Probieren gleich auf Platz 7 gekommen bist und du somit die Lösung schon gefunden hast, dann probiere, dass Platz 6 und Platz 8 keine Lösungen sind.

Lösungsvariante: Ohne Quadrato starteten 30 Läufer. Für jeden Läufer vor ihm im Ziel kommen 4 Läufer nach ihm ins Ziel. In einer Skizze kannst du solange Gruppen von 5 Läufern einzeichnen, bis 30 Läufer erreicht sind. Oder du rechnest 30 : 5 = 6. Es muss also 6 solche Gruppen geben. Somit sind 6 Läufer vor ihm und (6 · 4 =) 24 Läufer nach ihm im Ziel. Quadrato ist also 7.

Weitere Lösungsvariante mittels Gleichung: Wenn Quadrato den Platz P erreichte, so gilt laut Aufgabenstellung $4 \cdot (P - 1) = 31 - P$. Diese Gleichung kannst du nun umformen und nach P auflösen:

$4 \cdot P - 4 = 31 - P$ | auf beiden Seiten P addieren
$5 \cdot P = 35$ | beide Seiten durch 7 teilen
$P = 7$

Prüfe mit einer *Probe*, dass du dich beim Umformen nicht verrechnet hast:

****

Aufgabe 3. Die Familie Geometrie schaute beim 100-Meter-Lauf zu. Es war der Finallauf, den Arno, Bert, Chris und Daniel erreichten. Der Zieleinlauf war knapp. Alle diskutierten über die Reihenfolge des Einlaufes.

Herr Raute: „Chris kam vor Arno ins Ziel."
Frau Dreieck: „Daniel kam vor Chris ins Ziel."
Kreisa: „Bert kam vor Arno ins Ziel."
Quadrato: „Arno kam vor Daniel ins Ziel."

Nach einer Weile stellte Kreisa fest: „Das kann nicht sein! Wenigstens eine Aussage muss falsch sein." Hast du es auch bemerkt? Erkläre, warum nicht alle Aussagen gleichzeitig richtig sein können.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Kreisa hat Recht, es können nicht alle Aussagen wahr sein.

Begründung: Sind die drei Aussagen von Herrn Raute, Frau Dreieck und Kreisa richtig, kam Arno als Letzter ins Ziel. Dann muss die Aussage von Quadrato falsch sein.

Wenn aber die Aussage von Quadrato richtig ist, wurde Arno nicht Letzter und unter den Aussagen der anderen drei muss mindestens eine falsche Aussage sein.

Hinweis: Da wir nicht wissen, wie viele der Aussagen falsch sind, können wir nicht eindeutig herausfinden, wer eine falsche Aussage gibt.

****

Aufgabe 4. Die Jungen der Grundschule „LOGO“ wollten Fußball spielen. Da es 33 Jungen waren, konnten sie drei Mannschaften bilden. Schnell haben sich Freunde zusammengefunden und drei Gruppen gebildet. Doch in diesen Gruppen waren unterschiedlich viele Spieler. Also wechselten 7 Spieler von Gruppe 1 in Gruppe 2 und 5 Spieler von Gruppe 2 in Gruppe 3. Jetzt waren in jeder Mannschaft 11 Spieler und das Fußballturnier konnte beginnen.

Wie viele Spieler waren vor dem Wechsel in jeder der Gruppen? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Vor dem Wechsel waren in der ersten Gruppe 18 Jungen, in der zweiten Gruppe 9 Jungen und in der dritten Gruppe 6 Jungen.

***Herleitung**:* Die Lösung findest du durch Rückwärtsrechnen.
Da nach dem Wechsel von 7 Jungen aus der Gruppe 1 in die Gruppe 2 in der Gruppe 1 nun 11 Jungen waren, waren es vor dem Wechsel (11 + 7 =) 18 Jungen.

Da nach dem Wechsel von 5 Jungen aus der Gruppe 2 in die Gruppe 3 in der Gruppe 3 nun 11 Jungen waren, waren es vor dem Wechsel (11 - 5 =) 6 Jungen.

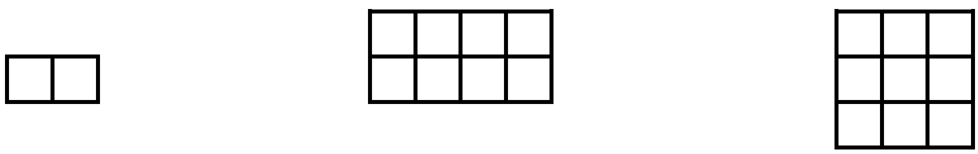
Damit müssen es in der Gruppe 2 vor dem Wechsel (33 – 16 – 5 =) 9 Jungen gewesen sein.

Eine *Probe* bestätigt: Wenn zur Gruppe 2 zunächst 7 Jungen aus der Gruppe 1 kamen und dann 5 Jungen in die Gruppe 3 wechselten, verbleiben in der Gruppe 2 insgesamt (9 + 7 – 5 =) 11 Jungen.

****

Runde 1 — Quadrate und Kreise — (Teil B)

Aufgabe 1. Quadrato spielt gern mit Domino-Steinen, denn ein Domino-Stein besteht aus zwei aneinander gefügten Quadraten. Quadrato hat zwei Vorlagen gezeichnet, ein 2 x 4-Rechteck und ein 3 x 3-Quadrat.



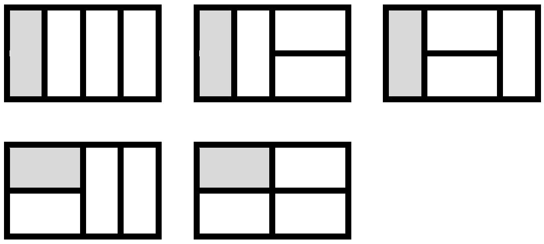
Domino-Stein *2 x 4-Rechteck* *3 x 3-Quadrat*

Aufgabe 1a) Es ist nicht schwer, auf das 2 x 4-Rechteck einige Domino-Steinen so zu legen, dass sie nicht aufeinander liegen und alle Teilquadrate des Rechtecks bedeckt sind. Doch wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Quadrato, das Rechteck mit Domino-Steinen auf diese Weise zu bedecken? Gib alle Möglichkeiten an.

Aufgabe 1b) Warum gelingt es Quadrato nicht, das 3 x 3-Quadrat nach diesen Regeln mit Domino-Steinen zu bedecken?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es gibt 5 verschiedene Möglichkeiten, das 2 x 4-Rechteck mit 4 Domino-Steinen zu bedecken.

Begründung: Es genügt eine Zeichnung mit allen Möglichkeiten.



Das damit wirklich alle Möglichkeiten gefunden wurden, kannst du dir so überlegen:

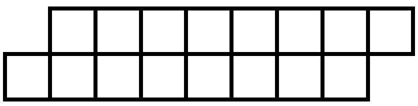
Den ersten Domino-Stein ganz links (grau gefärbt) kannst du wie in der ersten Reihe senkrecht auf das Rechteck legen. Dann gibt es drei Möglichkeiten, die anderen drei Domino-Steine aufzulegen.

Du kannst aber auch den ersten Domino-Stein wie in der zweiten Reihe waagerecht legen. Dafür gibt es dann nur die zwei angegebenen Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Da jeder Dominostein aus zwei Quadraten besteht, kann man mit Domino-Steinen stets nur eine gerade Anzahl von Quadraten bedecken. Weil ein 3 x 3 Quadrat aus (3 · 3 =) 9 Teilquadraten besteht und 9 nicht durch 2 teilbar ist, kann es also keine vollständige Überdeckung geben.

****

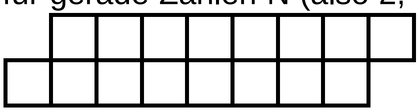
Aufgabe 2. Nun verwendet Quadrato neue Vorlagen: Zunächst zeichnet er Rechtecke mit jeweils 2 Zeilen und unterschiedlich vielen Spalten. Bei N Spalten entstehen 2 x N-Rechtecke. Dann entfernt er zwei gegenüberliegende Eckquadrate.



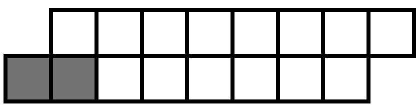
Beispiel N = 9: 2 x 9 Rechteck mit 2 entfernten Eckquadraten

Nun will Quadrato seine Vorlagen wieder mit Domino-Steinen bedecken. Manchmal gelingt es ihm, aber manchmal auch nicht. Hilf Quadrato: Für welche Zahlen N kann er ein 2 x N-Rechteck mit Domino-Steinen vollständig bedecken, wenn zwei gegenüber liegende Eckquadrate entfernt wurden? Für welche Zahlen N geht es nicht? Begründe deine Antwort.

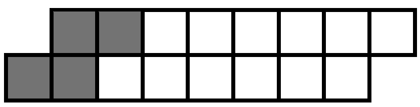
Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Für ungerade Zahlen N größer als 1 (also 3, 5, ...) kann Quadrato diese Vorlagen stets bedecken, für gerade Zahlen N (also 2, 4, ...) und N = 1 ist es jedoch nicht möglich.



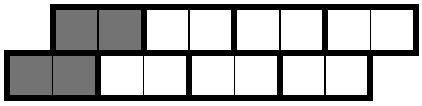
Begründung: Verwende eine solche Vorlage von Quadrato
Um das Feld links unten mit einem Domino-Stein zu bedecken, gibt es nur eine Möglichkeit (grau gefärbt):



Um das linke Feld in der oberen Reihe zu bedecken, gibt es wieder nur eine Möglichkeit:

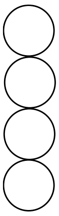


Du must also immer abwechselnd unten und oben einen Domino-Stein auflegen:



Wenn du die Vorlage vollständig bedecken konntest, werden in der unteren Reihe (und ebenso in der oberen Reihe) eine gerade Anzahl von Feldern bedeckt, weil jeder Domino-Stein 2 Felder bedeckt. Für die Zahl N musst du noch das abgeschnitte Feld hinzuzählen – also kann es nur bei ungerader Zahl N eine Bedeckung wie gefordert geben, bei gerader Zahl N aber nicht. Für N = 1 ist auch keine Bedeckung möglich, denn es bleibt nach dem Abschneiden der beiden Felder nichts übrig.

****



Aufgabe 3. Kreisa beschäftigt sich lieber mit Kreisen. Sie hat 4 Kreise untereinander gezeichnet. Nun will sie diese farbig ausmalen, jeden Kreis mit einer Farbe – gelb, blau oder rot. Wie viele Möglichkeiten hat Kreisa, die Farben zu verteilen, wenn sie alle Farben verwenden will, aber benachbarte Kreise unterschiedliche Farben haben sollen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Kreisa hat unter den Bedingungen der Aufgabenstellung 18 Möglichkeiten, die Kreise zu bemalen.

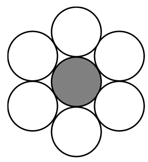
Begründung: Kreisa will alle drei Farben verwenden. Mit einer Farbe muss sie dann aber 2 Kreise färben, die nicht benachbart sein dürfen. Wenn sie beispielsweise zwei Kreise gelb färbt, gibt es folgende 6 verschiedene Möglichkeiten:

Gelb	Gelb	Gelb	Gelb	Blau	Rot
Blau	Blau	Rot	Rot	Gelb	Gelb
Gelb	Rot	Gelb	Blau	Rot	Blau
Rot	Gelb	Blau	Gelb	Gelb	Rot

Wenn Kreisa zwei Kreise blau färbt, sind es ebenfalls 6 andere Möglichkeiten. Und wenn Kreisa zwei Kreise rot, sind es noch einmal 6 andere Möglichkeiten. Insgesamt gibt es also mit drei Farben (6 + 6 + 6 =) 18 verschiedene Möglichkeiten.

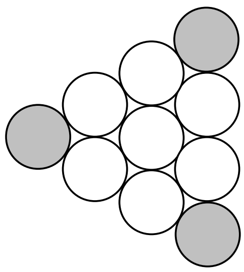
****

Aufgabe 4. Sie hat einen Kreis gezeichnet. Um diesen Kreis zeichnete sie rundherum sechs Kreise, so eng wie möglich wie in der Abbildung. Wenn sie nun um diese sieben Kreise wieder rundherum Kreise so eng wie möglich zeichnen will – für wie viele ist dafür Platz? Zeige, wie du deine Lösung gefunden hast.



Kreisa verwendet Gegenstände, um die Lösung zur Aufgabe 4 zu finden. Hast du einen Tipp, was sie verwenden könnte?

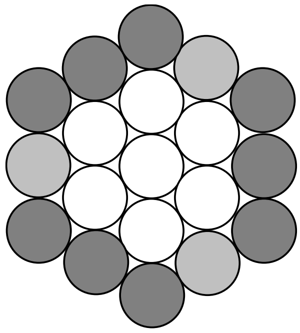
Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz:
Es passen 12 weitere Kreise um die Figur.



Zuerst passen drei Kreise so an die gegebene Figur, dass es wie ein Dreieck aussieht.

Dann passen an jede dieser drei Dreiecksseiten weitere drei Kreise.

Insgesamt kannst du also 12 Kreise rundherum um die gegebene Figur aus 7 Kreisen zeichnen. Um zu zeigen, wie du die Lösung gefunden hast, genügt es ein solches Bild zu zeichnen.



Es gab viele Tipps, was Kreisa verwenden könnte: Geldstücke, Gläser, Tassen, Spielsteine aus dem Dame-Spiel, Bierdeckel, Abfall aus dem Locher – Hauptsache, die Gegenstände sind rund und gleichgroß. Aber natürlich kann Kreisa auch einen Zirkel zum Zeichnen nehmen oder sich einen Kreis als Schablone herstellen.

****

Runde 2: Schöne Winterzeit (Teil A)

Aufgabe 1. Bahn frei: Quadrato trifft sich mit seinen Freunden am Rodelberg. Sie haben einige Schlitten mit - alle gleich lang und so groß, dass mehrere Kinder darauf gemeinsam rodeln können. Schnell sind alle Schlitten besetzt. Jeweils drei Kinder sitzen auf einem Schlitten – aber ein Junge steht noch herum. Quadrato überlegt kurz: „Wenn jeweils vier Kinder auf einem Schlitten sitzen, sind die Schlitten gleich besetzt und wir können alle gemeinsam rodeln!“

Gesagt, getan. Wie viele Freunde sind am Rodelberg? Mit wie vielen Schlitten rodeln sie nach Quadratos Vorschlag ins Tal?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es waren 16 Freunde am Rodelberg. Sie können auf 4 Schlitten gemeinsam ins Tal rodeln.

Herleitung: Die Lösung kannst du durch systematisches Probieren finden. Da die Freunde einige Schlitten hatten, waren es mindestens 2 Schlitten. Wenn auf jedem Schlitten 3 Kinder sitzen und ein Junge keinen Platz gefunden hat, lässt sich aus der Anzahl der Schlitten die Anzahl der Freunde ermitteln, die am Rodelberg waren. Trage die Anzahl der Freunde in eine Tabelle ein und prüfe, ob diese Anzahl durch 4 teilbar ist – denn dann würden alle Kinder nach Quadratos Vorschlag gemeinsam rodeln können.

Anzahl Schlitten	Anzahl Kinder	durch 4 teilbar?
2	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	nein
3	$3 \cdot 3 + 1 = 10$	nein
4	$4 \cdot 3 + 1 = 13$	nein
5	$\mathbf{5 \cdot 3 + 1 = 16}$	**ja**

Hinweis: Die Lösung ist nicht eindeutig. Wenn du die Tabelle fortsetzt, findest du bei 9 Schlitten wieder eine durch 4 teilbare Anzahl von Kindern ($9 \cdot 3 + 1 = 28$). Es könnten also auch 28 Kinder gewesen sein, die dann mit 7 Schlitten gemeinsam ins Tal rodelten. Aber auch 40, 52, 64, … Kinder erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

Lösungsvariante: Vergleiche die Dreier- und die Viererreihe! Findest du zwei Zahlen, bei der die 3-er-Reihe um 1 kleiner als die 4-er-Reihe ist, hast du eine Lösung gefunden.

3-er-Reihe	3	6	9	12	**15**	18	21	24	**27**	30	33	36	**39**	42	45	...
4-er-Reihe		4	8	12	**16**		20	24	**28**		32	36	**40**		44	...

****

Aufgabe 2. Schneemann bauen: Kreisa möchte einen Schneemann bauen. Sie hat schon sechs Schneekugeln gerollt. Alle sind unterschiedlich groß: 30 cm, 35 cm, 40, cm, 45 cm, 50 cm und 55 cm dick (Durchmesser). Für einen Schneemann benötigt sie drei Schneekugeln. Sie überlegt, welche drei Kugeln sie für ihren Schneemann auswählt.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Kreisa, drei Kugeln für einen Schneemann auszuwählen, wenn die aufeinander gesetzten Schneekugeln nach oben immer kleiner werden sollen?

Quadrato fragt Kreisa: „Kannst du aus den 6 Kugeln zwei Schneemänner (mit jeweils drei Kugeln) bauen, die gleich groß sind?“ Was meinst du, kann es Kreisa? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Kreisa kann 20 verschiedene Schneemänner bauen. Es ist nicht möglich, aus den 6 Kugeln gleichzeitig zwei gleichgroße Schneemänner zu bauen.

Herleitung: Schreibe alle Möglichkeiten auf. Beginne beispielsweise mit der unteren Kugel. Dann sind folgende Kombinationen möglich. Ist die unterste Kugel 55cm dick, gibt es 10 Möglichkeiten:

55-50-45, 55-50-40, 55-50-35, 55-50-30, 55-45-40,
55-45-35, 55-45-30, 55-40-35, 55-40-30, 55-35-30

Ist die unterste Kugel 50 cm dick, gibt es 6 Möglichkeiten:

50-45-40, 50-45-35, 50-45-30, 50-40-35, 50-40-30, 50-35-30

Ist die unterste Kugel 45 cm dick, gibt es 3 Möglichkeiten: 45-40-35, 45-40-30, 45-35-30
Ist die unterste Kugel 40 cm dick, gibt es 1 Möglichkeit: 40-35-30

Insgesamt sind es (10 + 6 + 3 + 1 =) 20 verschiedene Möglichkeiten, einen Schnee-mann zu bauen.

Wenn du alle Möglichkeiten in eine Tabelle einträgst, kannst du die Größe des Schneemanns berechnen und die Summe der Durchmesser der anderen drei Kugeln angeben.

1. Schneemann	Größe	2. Schneemann	Größe	Vergleich
55-50-45	150	40-35-30	105	150 > 105
55-50-40	145	45-35-30	110	145 > 110
55-50-35	140	45-40-30	115	140 > 115
…	...	...	...	...

Wenn du dies für alle 20 Möglichkeiten aufschreibst, findest du heraus, dass keinem Vergleich zwei gleich große Schneemänner entstehen. Aber schon nach wenigen Zeilen fällt dir bestimmt auf, dass die Größe des einen Schneemanns auf 5 und die des anderen Schneemanns auf 0 endet. Die Größen können also gar nicht gleich sein.

Und warum ist das so? Die Summe der Durchmesser aller 6 Kugeln beträgt

55 + 50 + 45 + 40 + 35 + 30 = 255 cm.

Diese Zahl ist aber nicht durch 2 teilbar, also können die Schneemänner nie gleich groß sein.

****

Aufgabe 3. Schneeball-Zielwurf: Quadrato und Kreisa werfen mit Schneebällen. Herr Raute hat sechs Blechdosen auf die Gartenbank gestellt. Auf den Dosen stehen die Zahlen 1 bis 6, auf jeder Dose genau eine dieser Zahlen. Die Werfer können die Zahlen aber nicht sehen.

Sie spielen heute „Abräumer". Wer mit einem Schneeball eine Dose von der Gartenbank wirft, erhält die darauf befindliche Zahl als Punkte. Eine getroffene Dose wird nicht wieder aufgestellt.

Quadrato beginnt. Als er eine Dose getroffen hat, ist Kreisa dran und abwechselnd so weiter. Nachdem sowohl Quadrato als auch Kreisa bereits zwei Dosen getroffen haben, erklärt Herr Raute: „Bis jetzt hat Kreisa mit ihren zwei Treffern mehr Punkte als Quadrato mit seinen zwei Treffern."

Quadrato trifft im nächsten Wurf die Dose mit der Zahl 4. Kreisa kann zum Schluss nur noch die Dose mit der Zahl 2 abräumen.

Wie viele Punkte hat Quadrato insgesamt, wenn er mit seinen drei Treffern doch noch mehr Punkte schafft als Kreisa mit ihren drei Treffern?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadrato hat insgesamt 11 Punkte geschafft.

Herleitung: Auch bei dieser Aufgabe hilft eine Tabelle, die Lösung zu finden. Wieder geht es darum, alle Möglichkeiten anzugeben. Beachte dabei, dass bei den ersten beiden Würfen nur die Zahlen 1, 3, 5, 6 getroffen wurden, denn Quadrato traf im dritten Wurf die 4 und Kreisa traf im dritten Wurf die 2. Wenn nach 2 Würfen Kreisa weniger Punkte als Quadrato hat, musst du diese Möglichkeit nicht weiter untersuchen.

Nach 2 Würfen					Nach 3 Würfen		
Kreisa: Treffer	Kreisa: Summe	Quadrato: Treffer	Quadrato: Summe	Ver-gleich	Kreisa: gesamt	Quadrato: gesamt	Ver-gleich
1 und 3	4	5 und 6	11	4 < 11	entfällt		
1 und 5	6	3 und 6	9	6 < 9	entfällt		
1 und 6	7	3 und 5	8	7 < 8	entfällt		
3 und 5	**8**	**1 und 6**	**7**	**8 > 7**	**8 + 2 =10**	**7 + 4 =11**	**10 < 11**
3 und 6	9	1 und 5	6	9 > 6	9 + 2 =11	6 + 4 =10	11 > 10
5 und 6	11	1 und 3	4	11 > 4	11 + 2 =13	4 + 4 =8	13 > 8

Lösungsvariante: Quadrato traf bei seinem letzten Wurf die 4, Kreisa die 2. Quadrato hatte also im letzten Wurf 2 Punkte mehr als Kreisa. Wenn er danach (mindestens) einen Punkt mehr als Kreisa hatte, kann er nach zwei Würfen nur einen Punkt zurückgelegen haben.

Vor dem letzten Wurf hatten beide Kinder zusammen (1 + 3 + 5 + 6 =) 15 Punkte getroffen. Deshalb hatten Quadrato nach zwei Würfen 7 Punkte und Kreisa 8 Punkte. Nach dem dritten Wurf waren es für Quadrato 11 Punkte und für Kreisa 10 Punkte.

****

Aufgabe 4. Schneeball-Fehlwurf: Frau Dreieck sieht dem Zielwerfen kopfschüttelnd zu und warnt: „Passt auf, dass ihr beim Werfen der Schneebälle nicht aus Versehen eine Fensterscheibe trefft." Kaum hat sie es gesagt – klirr – da passiert es. Doch wem passiert es?

Quadrato ruft: „Ich war es nicht."

Herr Raute meint: „Kreisa war es.“
Kreisa sagt: „Quadrato war es.“
Quadrate beteuert: „Ich habe die Wahrheit gesagt.“

Frau Dreieck schmunzelt: „Von diesen vier Aussagen sind aber nur zwei wahr, die anderen zwei Aussagen sind gelogen – stimmt’s? Dann weiß ich, wer der Fehlschütze war!“

Weißt du es auch? Wer hat die Fensterscheibe getroffen? Schreibe, wie du den Fehlschützen gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Der Fehlschütze war Herr Raute.

Herleitung: Überprüfe, welche Aussagen wahr und welche Aussagen gelogen waren, wenn Quadrato, Kreisa oder Herr Raute der Fehlschütze war.

Der Fehlschütze war:	Quadrato: Ich war es nicht	Herr Raute: Kreisa war es	Kreisa: Quadrato war es	Quadrato: Ich habe die Wahrheit gesagt
Quadrato	gelogen	gelogen	wahr	gelogen
Kreisa	wahr	wahr	gelogen	wahr
Herr Raute	**wahr**	**gelogen**	**gelogen**	**wahr**

Wenn Quadrato der Fehlschütze war, wären 3 Aussagen gelogen.
Wenn Kreisa der Fehlschütze war, wären 3 Aussagen wahr.

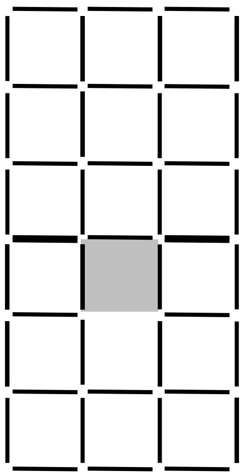
Nur wenn Herr Raute der Fehlschütze war, waren 2 Aussagen wahr und 2 Aussagen gelogen.

Lösungsvariante: Die Aussagen von Quadrato sind entweder beide wahr oder beide gelogen. Deshalb musst du nur zwei Möglichkeiten untersuchen:

(1) Quadrato hat gelogen. Dann müssen die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute wahr sein. Da sie aber zwei unterschiedliche Fehlschützen angeben, können sie nicht beide die Wahrheit sagen.
(2) Quadrato hat die Wahrheit gesagt. Dann müssen die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute gelogen sein. Also war der Fehlschütze weder Quadrato (denn Kreisa hat gelogen) noch Kreisa (denn Herr Raute hat gelogen). Da Frau Dreieck nur zuschaute, kann nur Herr Raute der Fehlschütze gewesen sein.

****

Runde 2 — Ganz viele Quadrate (Teil B)



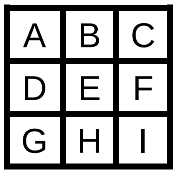
Aufgabe 1. Quadrato hat aus Legestäbchen die nebenstehende Figur gelegt.

Aufgabe 1a) Er fordert Kreisa auf, die Anzahl der darin versteckten Quadrate zu zählen. Wie viele Quadrate hast du gezählt? Pass aber auf, die Quadrate können unterschiedliche Größen haben?

Aufgabe 1b) Kreisa hat die richtige Anzahl gefunden. Sie nimmt nun ein Legestäbchen aus der Mitte weg. Jetzt sind nicht mehr alle Quadrate vollständig (beispielsweise ist das grau markierte Quadrat nicht mehr vollständig). Wie viele vollständige Quadrate sind es noch?

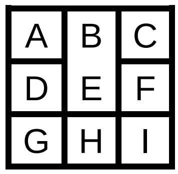
Aufgabe 1c) Wie viele Legestäbchen musst du wegnehmen, damit gar keine vollständigen Quadrate mehr übrig bleiben? Nimm aber möglichst wenige Legestäbchen weg. Zeige, wie deine Figur dann aussieht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: In der gelegten Figur sind insgesamt 14 Quadrate enthalten.



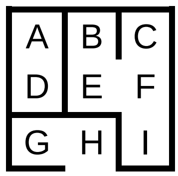
Begründung: Es sind 9 kleine Quadrate (A, B, C, D, E, F, G, H, I), 4 mittlere Quadrate (bestehend aus jeweils 4 kleinen Quadraten, ABDE, BCEF, DEGH, EFHI) und das große Quadrat (bestehend aus allen 9 Quadraten ABCDEFGHI), also insgesamt (9 + 4 + 1 =) 14 Quadrate.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – A*ntwortsatz:* In der gelegten Figur sind nun nur noch 10 vollständige Quadrate.



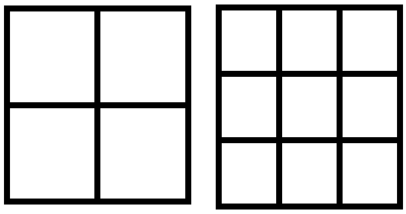
Begründung: Es sind jetzt noch 7 kleine Quadrate (A, C, D, F, G, H, I), 2 mittlere Quadrate (ABDE, BCEF) und das große Quadrat, also insgesamt (7 + 2 + 1 =) 10 Quadrate.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c. Insgesamt müssen 6 Stäbchen entfernt werden. Es gibt aber verschiedene Möglichkeiten, welche Stäbchen weggenommen werden können. In der Abbildung ist ein Beispiel angegeben.



****

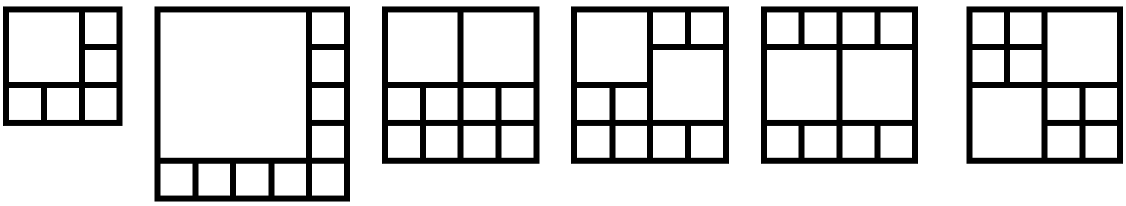
Aufgabe 2. Quadrato hat ein neues Rätsel für Kreisa vorbereitet. Sie soll in ein Quadrat kleinere Quadrate einzeichnen, so dass das vorgegebene Quadrat vollständig ausgefüllt ist und die kleinen Quadrate sich nicht überschneiden. Es ist kein Problem, vier oder neun gleichgroße Quadrate einzuzeichen.



Aufgabe 2a) Aber Kreisa soll 6 kleinere Quadrate einzeichnen, die aber nicht alle gleich groß sein müssen. Hilf ihr – zeichne eine Lösung des Rätsels.

Aufgabe 2b) Findest du auch eine Lösung mit 10 kleineren Quadraten? Zeichne deine Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Zur Lösungsangabe genügen die geforderten Zeichnungen.

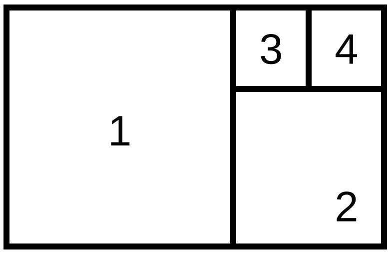


2(a) *2(b)* *2(b) weitere Varianten*

****

Aufgabe 3. Quadrato überlegt sich, wie er aus einem Papierstreifen verschiedene Quadrate erhalten kann. Er schneidet schrittweise immer das größtmögliche Quadrat ab.

In der Abbildung ist der Streifen 5 Kästchen lang und 3 Kästchen breit. Davon könnte Quadrato nacheinander die Quadrate 1, 2 und 3 abschneiden. Das Quadrat 4 bleibt übrig. Er erhält insgesamt 4 Quadrate in 3 verschiedenen Größen.



Aufgabe 3a) Wie viel Quadrate erhält Quadrato, wenn er einen Papierstreifen mit 23 cm Länge und 10 cm Breite verwendet?

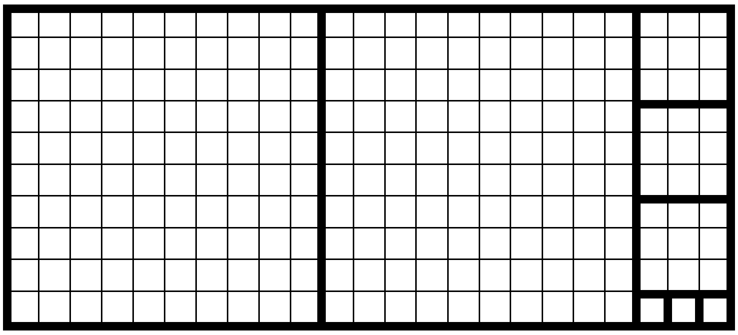
Aufgabe 3b) Welche Maße muss ein Papierstreifen haben, damit Quadrato insgesamt 7 Quadrate in 5 verschiedenen Größen erhält?

Aufgabe 3c) Was stellst du fest, wenn du ein beliebiges Blatt als Papierstreifen nimmst (beispielsweise ein Blatt aus einem Schreibblock)? Bleibt da auch ein Quadrat übrig, wenn du nacheinander die größtmöglichen Quadrate abgeschnitten hast?

Kreisa behauptet, sie braucht kein Lineal, um das größtmögliche Quadrat von einem Papierstreifen zu finden. Hast du einen Tipp, wie es ohne Lineal gehen könnte?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Quadrato erhält 8 Quadrate.

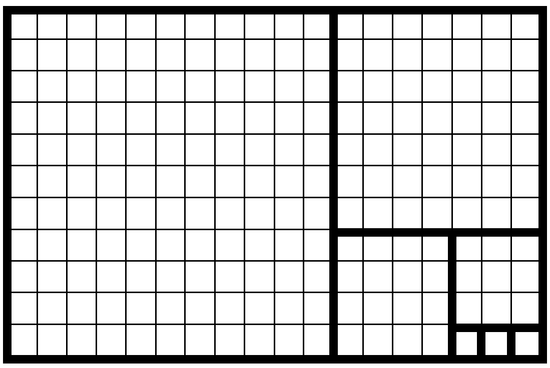
Begründung: Zunächst kann er 2 Quadrate mit 10 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 10 cm Länge und 3 cm Breite übrig. Von diesem Streifen kann er 3 Quadrate mit 3 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 3 cm Länge und 1 cm Breite übrig. Von diesem Streifen kann er 3 Quadrate mit 3 cm Seitenlänge abschneiden. Insgesamt sind es (2 + 3 + 3 =) 8 Quadrate.



Skizze (nicht maßstabsgerecht!)

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Ein Streifen mit 18 cm Länge und 11 cm Breite erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. (Es sind auch andere Streifen möglich!)

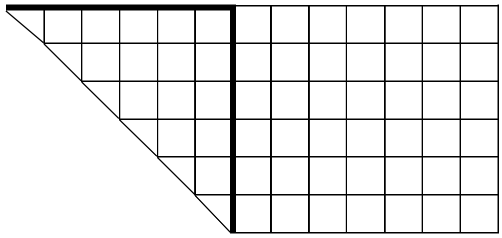
Begründung: Zunächst kann Quadrato 1 Quadrat mit 11 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 11 cm Länge und 7 cm Breite übrig. Davon kann er 1 Quadrat mit 7 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 7 cm Länge und 4 cm Breite übrig. Davon kann er 1 Quadrat mit 4 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 4 cm Länge und 3 cm Breite übrig. Davon kann er 1 Quadrat mit 3 cm Seitenlänge abschneiden. Es bleibt ein Streifen von 3 cm Länge und 1 cm Breite übrig. Daraus erhält er 3 Quadrate mit 1 cm Seitenlänge. Insgesamt sind es (1 + 1 + 1 + 1+ 3 =) 7 Quadrate in 5 Größen.



Skizze (nicht maßstabsgerecht!)

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c) Es scheint so, als ob bei jedem Blatt Papier immer Quadrate nach dieser Vorschrift abgeschnitten werden können. Wenn du das Blatt Papier mit Zentimetern genau ausmessen kannst (beispielsweise 30 cm lang und 21 cm breit), dann klappt es immer. Wenn das mit Zentimetern nicht aufgeht, dann geht es vielleicht mit Millimetern (ein Blatt eines Schreibblocks ist 297 mm lang und 210 mm breit) – dann klappt es auch wieder. Aber so genau kann man millimetergroße Quadrate gar nicht abschneiden, oder?

Tipps zur Zusatzfrage. Um das größtmögliche Quadrat von einem Papierstreifen abzuschneiden, kannst du eine Ecke zum Dreieck falten – damit ist das Quadrat markiert.



****

Runde 3 Im Blumenladen (Teil A)

Aufgabe 1. Herr Raute hat für Frau Dreieck einen großen Blumenstrauß gekauft, insgesamt 17 Stängel. Darunter sind Stängel mit nur zwei Blüten, Stängel mit vier Blüten und Stängel mit sieben Blüten – von jeder Sorte mindestens ein Stängel. Insgesamt sind es 52 Blüten.

Wie viele Stängel hat Herr Raute von jeder Sorte gekauft?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Herr Raute kaufte 2 Stängel mit 7 Blüten, 4 Stängel mit 4 Blüten und 11 Stängel mit 2 Blüten.

Probe: Die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt. Die Anzahl der Stängel beträgt (2 + 4 + 11 =) 17, Die der Blüten (2 · 7 + 4 · 4 + 11 · 2 = 14 + 16 + 22 =) 52.

Herleitung: Die Lösung kannst du mit systematischem Probieren finden. Lege dafür die Anzahl der Stängel mit 7 Blüten und die Anzahl der Stängel mit 4 Blüten fest und ermittle, ob sich die Bedingungen der Aufgabe (Stängelzahl und Blütenzahl) mit Stängeln mit 2 Blüten erfüllen lassen.

Weil die gesamte Blütenzahl geradzahlig ist, und 2 (Blüten) und 4 (Blüten) auch geradzahlig sind, muss auch die Anzahl der Stängel mit 7 Blüten geradzahlig sein. Es genügt also, mit 2 Stängeln mit 7 Blüten zu beginnen.

Stängel mit 7 Blüten	Stängel mit 4 Blüten	Stängel insgesamt	verbleibende Stängelzahl mit 2 Blüten	Blüten gesamt	Vergleich
2	1	2 + 1 = 3	17 – 3 = 14	14 + 4 + 28 = 46	46 < 52
2	2	2 + 2 = 4	17 – 4 = 13	14 + 8 + 26 = 48	48 < 52
2	3	2 + 3 = 5	17 – 5 = 12	14 + 12 + 24 = 50	50 < 52
2	**4**	**2 + 4 = 6**	**17 – 6 = 11**	**14 + 16 + 22 = 52**	**52 = 52**
2	5	2 + 5 = 7	17 – 7 = 10	14 + 20 + 20 =54	54 > 52
4	1	4 + 1 = 5	17 – 5 = 12	28 + 4 + 24 = 56	56 > 52

Auch wenn du in der vierten Zeile bereits eine Lösung gefunden hast, solltest du auch noch einmal mit einer anderen Anzahl von Stängeln mit 7 Blüten probieren. Doch bereits mit 4 solchen Stängeln wird die Anzahl der Blüten zu groß. Es gibt deshalb keine andere Lösung für diese Aufgabe. In der Tabelle ist die Probe bereite enthalten.

Lösungsvariante: Wir kürzen die Anzahlen der Stängel mit S2, S4 und S7 ab. Dann soll laut Aufgabenstellung gelten

$S2 + S4 + S7 = 17 \qquad\qquad 2 \cdot S2 + 4 \cdot S4 + 7 \cdot S7 = 52$

In der zweiten Gleichung erkennst du, dass S7 eine gerade Zahl sein muss. Deshalb nehmen wir an, es gelte S7 = 2 und alles vereinfacht sich zu

$S2 + S4 = 15 \qquad\qquad 2 \cdot S2 + 4 \cdot S4 = 38$

Die zweite Gleichung können wir geschickt umformen

$2 \cdot S2 + 4 \cdot S4 + = 2 \cdot (S2 + S4) + 2 \cdot S4 = 2 \cdot 15 + 2 \cdot S4 = 38,$

also $2 \cdot S4 = 8.$

Damit hast du S4 = 4 gefunden, S2 und S7 findest du nun leicht. (Probe!).

Nun nehmen wir noch an, es gelte S7 = 4:

$S2 + S4 = 13 \qquad 2 \cdot S2 + 4 \cdot S4 = 24$

Die zweite Gleichung können wir geschickt umformen

$2 \cdot S2 + 4 \cdot S4 + = 2 \cdot (S2 + S4) + 2 \cdot S4 = 2 \cdot 13 + 2 \cdot S4 = 24,$

also $2 \cdot S4 = -2.$

Es kann also keine weitere Lösung geben.

****

Aufgabe 2. Auch Quadrato und Kreisa wollen Blumen kaufen. Jeder hat einige Münzen. Insgesamt sind es 12 Münzen. Von jeder Sorte ist mindestens eine Münze dabei (beachte: Es gibt Münzen zu 1, 2, 5, 10, 20 und 50 Cent sowie 1- und 2-Euro-Münzen). Zusammen haben sie genau 5 Euro.

Suche alle Möglichkeiten, welche Münzen Quadrato und Kreisa zusammen haben können.

Kann es sein, dass sowohl Kreisa als auch Quadrato jeweils 6 Münzen und den gleichen Geldbetrag haben können? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Es gibt drei verschiedene Münzaufteilung von 12 Münzen mit einem Gesamtbetrag von 5 €.

Begründung: Bei der Suche nach allen Möglichkeiten der Münzaufteilung stellen wir zunächst fest, dass von jeder Münzsorte mindestens eine Münze dabei ist. Das sind 8 Münzen im Wert von (1 + 2 =) 3 Euro und (1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 50 =) 88 Cent.

2 €	1 €	50 Ct	20 Ct	10 Ct	5 Ct	2 Ct	1 Ct	Anzahl	Betrag
1	1	1	1	1	1	1	1	8	3,88

Es verbleiben noch 1 Euro und 12 Cents, die mit 4 Münzen anzugeben sind.

2 €	1 €	50 Ct	20 Ct	10 Ct	5 Ct	2 Ct	1 Ct	Anzahl	Betrag
	1			1			2	4	1,12
	1				2	1		4	1,12
		2		1		1		4	1,12

Die möglichen Aufteilungen sind deshalb:

2 €	1 €	50 Ct	20 Ct	10 Ct	5 Ct	2 Ct	1 Ct	Anzahl	Betrag
1	2	1	1	2	1	1	3	12	5,00 €
1	2	1	1	1	3	2	1	12	5,00 €
1	1	3	1	2	1	2	1	12	5,00 €

Kreisa und Quadrato können ihre Münzen nicht so aufteilen, dass beide gleich viele Münzen und dabei den gleichen Betrag haben.

Begründung: Wenn Kreisa und Quadrato den gleichen Betrag haben, hat jeder (5 : 2 =) 2,50 Euro. Wenn nun die 12 Münzen auf Kreisa und Quadrato aufgeteilt sind, hat einer von beiden die 2-Euro-Münze – nehmen wir an, Quadrato hat die 2-Euro-Münze. Dann kann Quadrato keine 1-Euro-Münze haben (er hätte dann bereits 3 Euro mit 2 Münzen) und auch keine 50-Cent-Münze (er hätte dann bereits 2,50 € mit 2 Münzen).

Also hat Kreisa alle 1-Euro-Münzen und alle 50-Cent-Münzen. In jeder der möglichen Münzaufteilungen ergeben diese zusammen 2,50 Euro mit weniger als 6 Münzen. Deshalb ist es nicht möglich, dass beide die gleiche Anzahl von Münzen haben.

****

Aufgabe 3. Die Auswahl an farbenprächtigen Blumen ist groß. Es gab zum Beispiel weiße, gelbe, orange und rote Rosen.

Wie viele verschiedene Blumensträuße aus 7 Rosen gibt es, so dass mindestens zwei Farben dabei sind und Rosen mit unterschiedlicher Farbe in unterschiedlicher Anzahl vorkommen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Es gibt 60 verschiedene Möglichkeiten.

Begründung: Du kannst die Anzahl finden, indem du sorgfältig alle Möglichkeiten aufschreibst. Verwende dafür Abkürzungen für die Farben, z.B. g(elb), o(range), r(ot) und w(eiß). Schreibe nun so: gooooooo, ggoooooo, gggoooo, …

Du kannst die Schreibarbeit aber einschränken. Untersuche zuerst, wie viele Möglichkeiten es gibt, einen zweifarbigen Strauß zu bilden (Farben 1 und 2). Es sind folgende 6 Möglichkeiten: 1222222, 1122222, 1112222, 1111222, 1111122, 1111112.

Nun lassen sich bei vier Farben 6 Möglichkeiten finden, zwei Farben aus vier Farben auszuwählen: go, gr, gw, or, ow, rw. Also lassen sich insgesamt (6 · 6 =) 36 zweifarbige Sträuße bilden.

Mit drei Farben gibt es ebenfalls 6 Varianten (Farben 1, 2 und 3), um einen Strauß unter Beachtung der Festlegungen zu den Anzahlen verschieden farbiger Blumen zu bilden: 1223333, 1222233, 1123333, 1122223, 1111233, 1111223.

Nun lassen sich bei vier Farben 4 Möglichkeiten finden, drei Farben aus vier Farben auszuwählen: gor, gow, grw, orw. Also lassen sich insgesamt (6 · 4 =) 24 dreifarbige Sträuße bilden.

Einen Strauß mit 4 Farben kann man nicht bilden, weil dazu mindestens (1 + 2 + 3 + 4 =) 10 Rosen erforderlich wären.

Es gibt also (36 + 24 =) 60 verschiedene Möglichkeiten.

****

Aufgabe 4. Am Abend unterhalten sich Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato über die Anzahl der weißen, gelben und roten Blumen, die sie im Blumenladen gesehen haben. Dabei unterschieden sich die Anzahlen der Blumen mit verschiedener Farbe. Sie erinnern sich:

Frau Dreieck: „Es waren mehr rote als weiße Blumen.“
Kreisa: „Es waren mehr gelbe als rote Blumen.“
Quadrato: „Es waren mehr weiße als gelbe Blumen.“
Herr Raute: „Es waren mehr rote Blumen als weiße und gelbe Blumen zusammen.“

Aufgabe 4a) Nach kurzer Zeit bemerkt Quadrato: „Alle vier Aussagen können nicht stimmen, da passt etwas nicht zusammen.“

Was hat Quadrato festgestellt? Erkläre, warum Quadrato Recht hat.

Aufgabe 4b) Plötzlich sagt einer der vier: „Oh, ich habe etwas verwechselt. Meine vorige Aussage war falsch.“ Nun lässt sich eine eindeutige Reihenfolge ermitteln.

Wer hatte eine falsche Aussage gegeben? Welche Blumenfarbe war am häufigsten zu sehen, welche Blumenfarbe am wenigsten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wir kürzen die Farben der Blumen wieder mit g(elb), r(ot) und w(eiß) ab. Dann lassen sich die 4 Aussagen als Ungleichungen schreiben: $r > w$, $g > r$, $w > g$ und $r > w + g$

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Wenn $r > w$ und $w > g$, dann muss auch $r > g$ sein. Das ist ein Widerspruch zur Aussage von Kreisa.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Kreisa gab eine falsche Antwort. Am häufigsten waren rote Blumen zu sehen, am wenigsten gelbe Blumen.

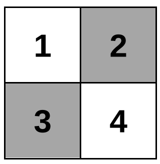
Begründung: Prüfe für jede Aussage nach, ob das Gegenteil dieser Aussage zu den drei anderen unveränderten Aussagen passt. Dabei stellst du fest: Nur wenn Kreisa ihre Aussage ändert, lässt sich eine Reihenfolge ermitteln:

Wer gab eine falsche Aussage?	Wie lauten die Aussagen, wenn die falsche Ausage korrigiert wurde?			
	Frau Dreieck	Kreisa	Quadrato	Herr Raute
Frau Dreieck	**$w > r$**	$r > w$	$r > w$	$r > w$
Kreisa	$g > r$	**$r > g$**	$g > r$	$g > r$
Quadrato	$w > g$	$w > g$	**$g > w$**	$w > g$
Herr Raute	$r > w + g$	$r > w+g$	$r > w + g$	**$r \leq w + g$**
	nicht möglich: wenn $w > r$ und $g > r$, dann ist auch $w + g > r$	möglich: es gilt $r > w$ und $w > g$, also $r > w > g$	nicht möglich: wenn $g > r$, dann ist auch $w + g > r$	nicht möglich: siehe Aufgabe a

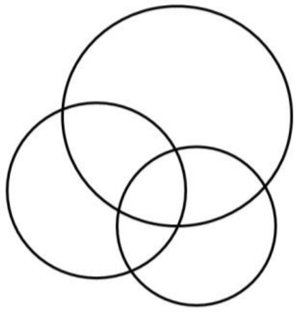
****

Runde 3 Farbige Muster (Teil B)

Kreisa und Quadrato malen Muster farbig aus. Dabei achten sie darauf, dass Flächen, die sich an einer Linie berühren und deshalb benachbart sind, unterschiedliche Farbe haben. Wenn das gelingt, nennen sie das Muster gut gefärbt.



So sind die Flächen 1 und 2, 2 und 4, 1 und 3 sowie 3 und 4 benachbart, weil sie sich an einer Quadratseite berühren. Dagegen sind die Flächen 1 und 4 sowie 2 und 3 nicht benachbart. Sie stoßen nur in einem Eckpunkt aneinander. Die weiß-graue Färbung ist ein Beispiel für eine gute Färbung.



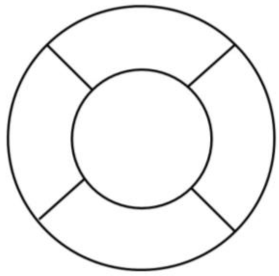
Aufgabe 1. Kreisa zeichnet ineinander verschlungene Kreise. Sie freut sich, dass sie dieses Muster mit zwei Farben gut färben kann.

Aufgabe 1a) Mach es ihr nach – zeichne auch so ein Muster aus drei Kreisen und färbe es mit zwei Farben gut. Zeige, wie dein gut gefärbtes Muster aussieht.

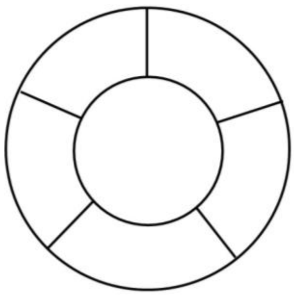
Aufgabe 1b) Zeichne nun dein Muster aus drei Kreisen noch einmal. Ergänze dieses Muster durch einen vierten Kreis, der von jedem der drei Kreise ein Stück enthält. Kannst du dieses Muster auch mit zwei Farben gut färben? Zeige es.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1): Kreisa kann jedes Muster aus ineinander verschlungenen Kreis mit zwei Farben gut ausmalen. Es genügte, jeweils ein Beispiel für 3 und 4 Kreise aufzuzeichnen und gut zu färben.

****



Aufgabe 2.
Aufgabe 2a) Quadrato zeichnet für Kreisa ein anderes Muster (siehe nebenstehende Abbildung) – erkläre, warum Kreisa nun drei verschiedene Farben benötigt, um dieses Muster gut zu färben.



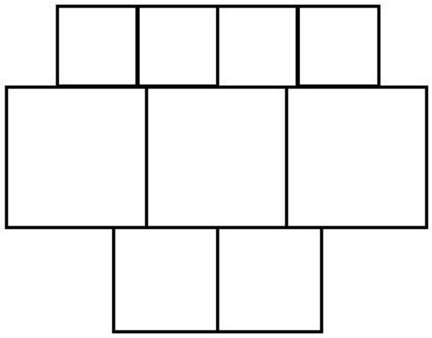
Aufgabe 2b) Quadrato zeichnet nur eine Linie mehr in dieses Muster – wie viele Farben benötigt Kreisa nun mindestens, um dieses Muster gut zu färben? Begründe.

Erklärung zu Aufgabe 2a) Im Außenring berühren sich immer zwei benachbarte Flächen, dafür benötigst du zwei verschiedene Farben. Der Innenkreis berührt alle Flächen des Außenrings – dafür benötigst du eine dritte Farbe, um die Figur gut auszumalen.

Erklärung zu Aufgabe 2b) Nach Aufgabe 2a müssen mindestens drei Farben verwendet werden. Also färbe zunächst den Innenkreis. Die Flächen im Außenring färbe abwechselnd mit einer zweiten und dritten Farbe. Doch wenn du die letzte Fläche färben willst, liegt diese zwischen zwei Flächen mit unterschiedlicher Farbe. Für eine gute Färbung benötigt Kreisa also eine vierte Farbe.

Für die Erklärungen zur Aufgabe 2 sind Abbildungen zu gut gefärbten Mustern günstig - zeige also an einem Beispiel, wie du es gefärbt hast.

****



Aufgabe 3. Quadrato zeichnet aufeinander gestapelte Quadrate unterschiedlicher Größe. Er freut sich, dass er dieses Muster auch mit drei Farben gut färben kann.

(a) Zeige, wie Quadrato das Muster ausmalen könnte.

(b) Kannst du ein Muster aus Quadraten zeichnen, für das man mindestens 4 verschiedene Farben benötigt, um es gut zu färben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3(a): Es genügte, das Muster gut farbig auszumalen. Eine Anleitung dazu: Beachte zunächst bei beiden kleinen Quadrate in der oberen Reihe links und rechts nicht. Dann siehst du ähnlich wie in Aufgabe 2a) ein Innenquadrat und ein Außenring aus 6 Quadratflächen. So ein Muster kannst du mit 3 Farben gut ausmalen. Da die beiden unbeachteten Quadrate das Innenquadrat nicht berühren, kannst du diese nun noch mit der Farbe des Innenquadrates färben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3(b): Wenn du nun statt 6 Quadratflächen im Außenring nur 5 Flächen zeichnest (zum Beispiel statt der beiden Quadrate in der untersten Reihe ein großes Quadrat, dass alle Quadrate der mittleren Reihe berührt), ist es wieder wie in Aufgabe 2(b). Jetzt benötigst du 4 Farben für eine gute Färbung. Aber es gibt ganz viele unterschiedliche Muster, für die 4 Farben erforderlich sind. Allerdings können auch kompliziert aussehende Muster manchmal nur mit 3 Farben gut gefärbt werden – auch wenn es natürlich mit 4 Farben einfacher geht.