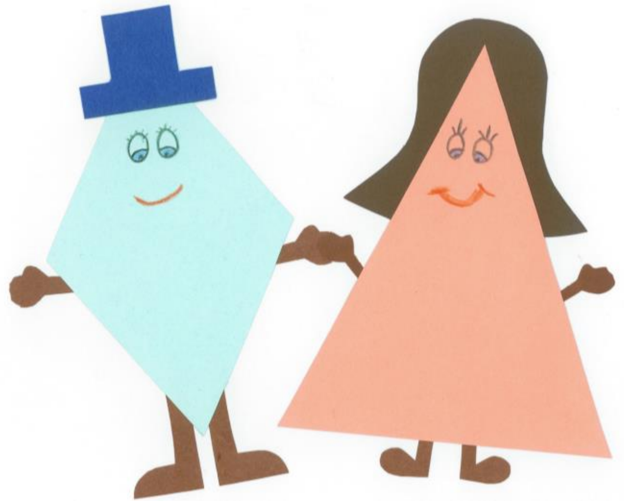
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Wenn du teilnimmst, beachte bitte die Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Formuliere zu jeder Aufgabe einen Antwortsatz.

Einsendungen und Hinweise an

Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz
oder
norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir

Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute und die Kinder Quadrato und Kreisa – sind im Urlaubsquartier angekommen. Zum Schlafen haben sie ein Doppelstockbett, ein Bett am Fenster und ein Bett an der Wand.

Aufgabe 1a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, den vier Familienmitgliedern ein Bett zuzuordnen?

Aufgabe 1b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten sind es, wenn Frau Dreieck auf keinen Fall oben im Doppelstockbett schlafen möchte?

Begründe deine Antwort – zum Beispiel durch Angabe aller Möglichkeiten oder durch Erklärung deiner Rechnung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es gibt 24 verschiedene Möglichkeiten, den vier Familienmitgliedern ein Bett zuzuordnen.

Herleitung: Um alle Möglichkeiten zu finden, ist eine Tabelle hilfreich. Zur Abkürzung kannst du zum Beispiel **F** für das Bett am Fenster, **W** für das Bett an der Wand, **D1** für das untere Doppelstockbett und **D2** für das obere Doppelstockbett schreiben.

Frau Dreieck	F	F	F	F	F	F	W	W	W	W	W	W
Herr Raute	W	W	D1	D1	D2	D2	F	F	D1	D1	D2	D2
Kreisa	D1	D2	W	D2	W	D1	D1	D2	F	D2	F	D1
Quadrato	D2	D1	D2	W	D1	W	D2	D1	D2	F	D1	F
Frau Dreieck	D1	D1	D1	D1	D1	D1	D2	D2	D2	D2	D2	D2
Herr Raute	F	F	W	W	D2	D2	F	F	W	W	D1	D1
Kreisa	W	D2	F	D2	W	F	W	D1	F	D1	W	F
Quadrato	D2	W	D2	F	F	W	D1	W	D1	F	F	W

Lösungsvariante durch eine Rechnung: Lasse zuerst Frau Dreieck ein Bett aussuchen. Sie hat 4 Möglichkeiten. Hat sie gewählt, darf Herr Raute ein Bett aussuchen. Er hat nur noch 3 Möglichkeiten, weil Frau Dreieck ja bereits ein Bett ausgesucht hat. Dann ist Kreisa dran. Sie kann nur noch aus 2 Möglichkeiten auswählen. Schließlich muss Quadrato das Bett nehmen, was frei bleibt – er hat nur 1 Möglichkeit. Insgesamt ergibt es ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 24 Möglichkeiten.

Hinweis: Bei dieser Rechnung ist es egal, in welcher Reihenfolge die Familienmitglieder ein Bett aussuchen dürfen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Es gibt 18 verschiedene Möglichkeiten, den vier Familienmitgliedern ein Bett zuzuordnen, wenn Frau Dreieck nicht das obere Doppelstockbett nehmen möchte.

Herleitung: Streiche in der Tabelle zur Teilaufgabe a) alle Möglichkeiten, bei denen für Frau Dreieck D2 steht. Das sind 6 Möglichkeiten weniger.

Lösungsvariante durch eine Rechnung wie in Aufgabe 1a): Lasse wieder zuerst Frau Dreieck ein Bett aussuchen. Sie hat 3 Möglichkeiten, weil sie ja das obere Doppelstockbett nicht nehmen will. Hat sie gewählt, darf Herr Raute ein Bett aussuchen. Er hat auch 3 Möglichkeiten, weil Frau Dreieck ja bereits ein Bett ausgesucht hat. Dann ist Kreisa dran. Sie kann nur noch aus 2 Möglichkeiten auswählen. Schließlich muss Quadrato das

Bett nehmen, was frei bleibt – er hat nur 1 Möglichkeit. Insgesamt ergibt es (3 · 3 · 2 · 1 =) 18 Möglichkeiten.

Hinweis: Da Frau Dreieck bei der Bettauswahl eine Besonderheit hat, ist es günstig, dass sie zuerst ihr Bett auswählt. Die Reihenfolge der anderen Familienmitglieder kannst du dann beliebig festlegen.

****

Aufgabe 2. Kreisa und Quadrato besuchen mit Frau Dreieck und Herrn Raute ein Museum. Herr Raute zahlt für die vier Personen insgesamt 30 Euro für den Eintritt. Die Eintrittskarte für ein Kind kostet ein Drittel des Preises für einen Erwachsenen.

> Wie viel kostet der Eintritt für ein Kind?
> Zeige, wie du das Ergebnis gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Der Eintritt kostet für ein Kind 3 Euro und 75 Cent.

Probe: Kostet der Eintritt für ein Kind 3 Euro 75 Cent, so kostet der Eintritt für zwei Kinder 7 Euro 50 Cent und für zwei Erwachsene das Dreifache, also 22 Euro und 50 Cent, zusammen 30 Euro.

Herleitung: Du kannst diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Fertige dafür eine Tabelle an, nimm für den Eintritt einen bestimmten Preis an und trage deine Rechnung ein. Kommt für die Familie insgesamt ein Preis von 30 Euro heraus, hast du die Lösung gefunden. Verwende als Abkürzung für Euro das Zeichen €.

Eintritt für ein Kind	Eintritt für einen Erwachsenen	Eintritt für die gesamte Familie	Vergleich mit 30 €
1 €	3 · 1 € = 3 €	2 · 1 € + 2 · 3 € = 8 €	8 € < 30 €
2 €	3 · 2 € = 6 €	2 · 2 € + 2 · 6 € = 16 €	16 € < 30 €
3 €	3 · 3 € = 9 €	2 · 3 € + 2 · 9 € = 24 €	24 € < 30 €
4 €	3 · 4 € = 12 €	2 · 4 € + 2 · 12 € = 32 €	32 € > 30 €

Offenbar ist der Preis von 3 € zu niedrig, aber 4 € sind zu viel. Also muss der Eintritt für ein Kind zwischen 3 € und 4 € kosten. Probiere beispielsweise 3 Euro 50 Cent. Verwende als Abkürzung für Cent Ct.

Eintritt für ein Kind	Eintritt für einen Erwachsenen	Eintritt für die gesamte Familie	Vergleich mit 30 €
3 € 50 Ct	3 · 3 € 50 Ct = 10 € 50 Ct	2 · 3 € 50 Ct + 2 · 10 € 50 Ct = 28 €	28 € < 30 €

Da sich bei 3 € 50 Ct ein Gesamtpreis von 28 € ergibt, bei 4 € aber ein Gesamtpreis von 32 €, liegt der Eintrittspreis für ein Kind in der Mitte von 3 € 50 Ct und 4 €, also bei 3 € 75 Ct.

Hinweis: Wenn du die erste Tabelle anschaust, kannst du dir den Cent-Betrag auch so überlegen: Erhöht sich der Eintrittspreis für ein Kind um 1 €, so steigt der Gesamtpreis für die Familie um 8 €. Es fehlen aber nur 6 €, dafür sind 75 Ct erforderlich – eine Probe bestätigt deine Rechnung.

Lösungsvariante: Wenn Herr Raute für zwei Kinder und zwei Erwachsene 30 € bezahlt, kostet der Eintritt für ein Kind und einen Erwachsenen 15 €. Da der Eintritt für einen Erwachsenen dreimal so viel wie für ein Kind kostet, ist der Betrag von 15 € in 4 Teile zu zerlegen (drei Teile ergeben den Preis für den Eintritt eines Erwachsenen, ein Teil ist der Preis für den Eintritt eines Kindes).

Da 15 nicht durch 4 teilbar ist, kannst du auch 15 € = 12 € und 300 Ct schreiben. Also beträgt der Preis (12 : 4 =) 3 € und (300 : 4 =) 75 Ct.

***Eine ähnliche Lösungsvariante**:* Wenn Herr Raute für zwei Kinder und zwei Erwachsene 30 € bezahlt, kostet der Eintritt für drei Kinder und drei Erwachsene 45 €.

Der Eintritt für drei Kinder kostet aber so viel wie der Eintritt für einen Erwachsenen. Also kostet der Eintritt für vier Erwachsene ebenfalls 45 €. Um den Eintrittspreis für einen Erwachsenen zu berechnen, musst du nun 45 € durch 4 teilen. Einfacher ist es 44 € und 100 Ct durch 4 zu teilen: Der Eintritt für einen Erwachsenen kostet also (44 : 4 =) 11 € und (100 : 4 =) 25 Ct. Daraus kannst du den Eintrittspreis für ein Kind berechnen.

Lösungsvariante mittels Gleichungen: Kürze den Eintritt für ein Kind mit K und den Eintritt für einen Erwachsenen mit E ab. Dann lässt sich die Aufgabe in zwei Gleichungen angeben:

$$2 \cdot K + 2 \cdot E = 30\text{ €} \text{ und } \quad 3 \cdot K = E$$

Die zweite Gleichung kannst du in die erste Gleichung eingesetzen:

$$2 \cdot K + 2 \cdot (3 \cdot K) = 8 \cdot K = 30\text{ €}$$

Damit findest du für den Wert für K die Gleichung: K = 30 € : 8 = 3 € 75 Ct.

****

Aufgabe 3. Der Museumsführer erzählt beim Rundgang, dass vor einiger Zeit ein wertvolles Ausstellungsstück gestohlen wurde. Die vier Männer Egon, Frank, Gustav und Heinz wurden kurz danach als Tatverdächtige gefasst. Sie beteuerten ihre Unschuld:

Egon: „Frank hat es gestohlen!“
Frank: „Gustav war es!“
Gustav: „Ich war es ganz bestimmt nicht!“
Heinz: „Ich war es auch nicht!“

Der Museumsdetektiv wusste aber, dass genau einer der Ganoven die Wahrheit sagte und alle anderen logen. Deshalb konnte er den Täter schnell überführen.

Wer war der Täter? Wer von den vier Ganoven hatte die Wahrheit gesagt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Heinz war der Täter und Gustav hat die Wahrheit gesagt.

Probe: Der Museumsdetektiv hatte Recht. Wenn Heinz der Täter war, haben Egon, Frank und Heinz gelogen und Gustav hat die Wahrheit gesagt. Drei Ganoven haben gelogen und nur einer sagte die Wahrheit.

Herleitung Variante 1: Nimm nacheinander an, dass jeder der vier Ganoven der Täter war und untersuche, welche der Aussagen wahr und welche der Aussagen unwahr (gelogen) wären. Dies kannst du übersichtlich in eine Tabelle schreiben.

Täter	Aussage von ...			
	Egon	Frank	Gustav	Heinz
Egon	unwahr	unwahr	wahr	wahr
Frank	wahr	unwahr	wahr	wahr
Gustav	unwahr	wahr	unwahr	wahr
Heinz	**unwahr**	**unwahr**	**wahr**	**unwahr**

Nun wenn Heinz der Täter war, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt (drei Ganoven lügen) und Gustav sagt die Wahrheit.

Hinweis zu einer kürzeren Lösung: Gustav und Heinz behaupten beide, dass sie nicht der Täter waren. Da aber nur einer der Ganoven die Wahrheit sagte, muss Gustav oder Heinz der Täter sein. Es genügt deshalb, nur die 3. und 4. Zeile der Tabelle zu untersuchen.

Herleitung Variante 2: Nimm nacheinander an, dass jeder der vier Ganoven die Wahrheit gesagt hat und gleichzeitig die anderen drei gelogen haben. Trage in die Tabelle ein, wen jeder als Täter beschuldigt oder wen er als Täter ausschließt.

Wahre Aussage von ...	Wer war der Täter oder wer war nicht der Täter?			
	Egon	Frank	Gustav	Heinz
(1) Egon	Frank	nicht Gustav	Gustav	Heinz
(2) Frank	nicht Frank	Gustav	Gustav	Heinz
(3) Gustav	**nicht Frank**	**nicht Gustav**	**nicht Gustav**	**Heinz**
(4) Heinz	nicht Frank	nicht Gustav	Gustav	nicht Heinz

(1) Wenn Egon die Wahrheit sagt, dann lügen sowohl Gustav als auch Heinz und beide wären die Täter. Das kann nicht sein.

(2) Wenn Frank die Wahrheit sagt, dann lügen sowohl Gustav als auch Heinz und beide wären die Täter. Das kann nicht sein.

(3) Wenn Gustav die Wahrheit sagt, dann lügt Heinz und er wäre der Täter. Egons Aussage ist falsch (denn es war Heinz) und auch Franks Aussage ist falsch (denn Gustav war es nicht). Also haben tatsächlich drei Ganoven gelogen und die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt.

(4) Wenn Heinz die Wahrheit sagt, dann lügen Frank (also war es Gustav nicht) und Gustav (also war es Gustav). Doch dies kann nicht gleichzeitig gelten.

Nur wenn Gustav die Wahrheit sagt, widersprechen sich keine Antworten und Heinz war eindeutig der Täter.

Beachte: Obwohl nach der 3. Zeile die Aufgabe schon gelöst ist, untersuche dennoch alle Fälle!

Hinweis zu einer kürzeren Lösung: Frank sagt das Gegenteil von Gustav. Also sagt entweder Frank oder Gustav die Wahrheit. Es genügt deshalb, nur die Fälle (2) und (3) zu untersuchen.

****

Aufgabe 4. Frau Dreieck und Herr Raute schreiben viele Urlaubskarten. Weil sie allen Bekannten Urlaubsgrüße schicken wollen, schreiben sie jeden Tag einige Karten. Frau Dreieck ist fleißig und schreibt jeden Tag vier Karten. Herr Raute schreibt am ersten Tag eine Karte, am zweiten Tag zwei Karten, am dritten Tag drei Karten – und so weiter –

jeden Tag eine Karte mehr. Eines Tages sagt Frau Dreieck zu Herrn Raute: „Bis heute haben wir beide insgesamt gleich viele Urlaubskarten geschrieben.“

Wie viele Urlaubskarten haben sie bis zu diesem Tag insgesamt geschrieben?
Zeige, wie du das Ergebnis gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Frau Dreieck und Herr Raute haben insgesamt 56 Urlaubskarten geschrieben.

Herleitung: Diese Aufgabe kannst am Einfachsten mit Hilfe einer Tabelle lösen. Trage ein, wie viele Karten Frau Dreieck und Herr Raute an jedem Tag schreiben und wie viele Karten sie bis zu diesem Tag geschrieben haben.

Tag	1	2	3	4	5	6	**7**	8
Karten von Frau Dreieck an diesem Tag	4	4	4	4	4	4	**4**	4
Karten von Frau Dreieck bis zu diesem Tag	4	8	12	16	20	24	**28**	32
Karten von Herrn Raute an diesem Tag	1	2	3	4	5	6	**7**	8
Karten von Herrn Raute bis zu diesem Tag	1	3	6	10	15	21	**28**	36

Nun kannst du ablesen, dass am 7. Tage beide insgesamt gleich viel Karten schreiben, insgesamt (28 + 28 =) 56 Urlaubskarten.

****

Runde 1 — Zahlenspielereien — (Teil B)

Kreisa und Quadrato spielen gern mit Zahlen. Zunächst experimentiert jeder für sich.

Aufgabe 1. Quadrato hat sich die Ziffer 2 ausgewählt und will mit fünf Zweien die Zahl 0 berechnen, indem er geschickt die Rechenzeichen für Addition (+), Subtraktion (-), Multiplikation (·) oder Division (:) zwischen die Zweien setzt.

Schnell findet er eine Lösung: $0 = 2 - 2 : 2 - 2 : 2$.
Bei der Zahl 10 ist es besonders einfach: $10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$.

Kannst du mit fünf Zweien und geeigneten Rechenzeichen dazwischen die Zahlen 1 und 4 berechnen?
Gibt deine Gleichungen an. Beachte: Klammern sind nicht erlaubt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es genügt die Angabe richtiger Gleichungen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, beispielsweise:

$2 + 2 - 2 - 2 : 2 = 1$ $\quad$ $2 + 2 : 2 + 2 : 2 = 4$
$2 \cdot 2 - 2 - 2 : 2 = 1$ $\quad$ $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4$

****

Aufgabe 2. Kreisa hat sich die Ziffer 4 ausgewählt und möchte mit vier Vieren und geeigneten Rechenzeichen dazwischen die Zahlen 1 und 4 berechnen.

Aufgabe 2a) Für die Zahl 1 hat sie eine Lösung gefunden. Gib auch eine Lösung an.

Aufgabe 2b) Für die Zahl 4 gelingt es ihr nicht! Kannst du erklären, warum es keine Gleichung mit vier Vieren und Rechenzeichen dazwischen mit dem Ergebnis 4 geben kann? Beachte: Klammern sind auch diesmal nicht erlaubt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Es genügt die Angabe einer richtigen Gleichung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, beispielsweise:

$4 - 4 + 4 : 4 = 1$
$4 \cdot 4 : 4 : 4 = 1$

Erläuterung zu Aufgabe 2b): Um zu erklären, warum es keine Lösung für die Aufgabe

$4 \bigcirc 4 \bigcirc 4 \bigcirc 4 = 4$

geben kann, kannst du alle Möglichkeiten ausprobieren, anstelle des Zeichens ○ ein Rechenzeichen einzusetzen. Da an jeder Stelle eines von vier Zeichen stehen kann, nämlich + (Addition), – (Subtraktion), · (Multiplikation) oder : (Division), müsstest du ($4 \cdot 4 \cdot 4 =$) 64 Gleichungen untersuchen. (Manche Gleichungen stimmen aber überein, weil sich nur die Reihenfolgen der Rechenzeichen unterscheiden.) Bei keiner dieser Gleichungen kommt als Ergebnis 4 heraus – prüfe es doch einmal nach!

Ganz ohne Probieren findest du die Lösung sicher nicht. Doch bestimmt merkst du beim Probieren schnell, dass das Multiplikationszeichen nicht auftreten kann: $4 \cdot 4 = 16$ ist zu groß, um mit Subtraktion der beiden anderen Vieren auf das Ergebnis 4 zu kommen. Aber bei $4 \cdot 4 : 4 = 4$ erhältst du das Zwischenergebnis 4, was durch eine Rechenoperation mit der vierten 4 wieder verändert wird.

Auch merkst du sicher schnell, dass das Divisionszeichen auch nicht auftreten kann: $4 : 4 = 1$ ergibt eine ungerade Zahl. Durch Addition oder Subtraktion mit 4 kann keine gerade Zahl entstehen, also kann das Ergebnis nicht 4 werden. Wenn du aber $4 : 4 \cdot 4 = 4$ rechnest, ist es so wie schon untersucht.

Also müsstest du nur probieren, die drei Zeichen ○ durch + oder – zu ersetzen: Bei drei Pluszeichen erhältst du als Ergebnis 16, bei zwei Pluszeichen lautet das Ergebnis 8, und bei einem Pluszeichen kommt als Ergebnis 0 heraus. Ohne Pluszeichen ist das Ergebnis immer kleiner als 0.

Also kann es keine solche Gleichung mit dem Ergebnis 4 geben.

Beachte: Beim Probieren erscheint es so, als könne das Ergebnis nur 4 werden, wenn eine ungerade Anzahl von Vieren betrachtet wird, zum Beispiel

$4 + 4 - 4 = 4$
$4 + 4 - 4 + 4 - 4 = 4$
...

Aber es geht auch mit acht Vieren, also mit einer geraden Anzahl von Vieren:

$4 : 4 + 4 : 4 + 4 : 4 + 4 : 4 = 4$

Hinweis: Wären Klammern zugelassen, ist das Ergebnis 4 möglich, zum Beispiel so

$(4 - 4) \cdot 4 + 4 = 4$

****

Nun spielen Kreia und Quadrato gemeinsam.

Aufgabe 3. Kreisa beginnt das Spiel und nennt eine Zahl von 1 bis 3. Dann ist Quadrato dran und addiert dazu eine Zahl von 1 bis 3 und nennt die Summe. Nun ist wieder Kreisa an der Reihe und so weiter. Wer die Summe 10 nennen kann, der hat gewonnen.

Kreisa möchte unbedingt gewinnen, egal, was Quadrato sagt. Kannst du erklären, wie sie immer gewinnen kann? Welche Zahl muss sie dazu als erstes sagen? Worauf muss sie bei den nächsten Zahlen achten?

Ein Tipp: Spiele dieses Spiel doch einfach mal mit einer Freundin oder einem Freund – dann kommst du bestimmt schnell auf die Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Vorbemerkung*:* Würden Kreisa (abgekürzt mit K) und Quadrato (abgekürzt mit Q) ohne Überlegung spielen, ist das Ergebnis nicht vorhersehbar. Folgende Spielverläufe sind beispielsweise nach den Regeln möglich:

Zahl K	Zahl Q	Zwischen-summe	Zahl K	Zwischen-summe	Zahl Q	Zwischen-summe	Zahl K	Zwischen-summe
3	2	5	3	8	1	9	1	10 K gewinnt
2	3	5	3	8	2	10 Q gewinnt	-	-

Du solltest deshalb herausfinden, wie Kreisa spielen muss, damit sie ***immer*** gewinnen kann, egal welche Zahlen Quadrato sagt.

Antwortsatz: Kreisa sagt als erstes die Zahl 2 und achtet bei ihren nächsten Zahlen immer darauf, dass ihre Zahl und die von Quadrato genannte Zahl in der Summe 4 ergeben.

Begründung: Wenn du das Spiel selbst probiert hast, fiel dir bestimmt auf, dass du immer dann gewinnen konntest, wenn nach deiner zweiten Zahl die Zwischensumme 6 erschien.

Beträgt nämlich die Zwischensumme 6 und sagt dein Spielgegner nun

- 1, so antwortest du mit 3 und hast wegen 6 + 1 + 3 = 10 gewonnen,
- 2, so antwortest du mit 2 und hast wegen 6 + 2 + 2 = 10 gewonnen,
- 3, so antwortest du mit 1 und hast wegen 6 + 3 + 1 = 10 gewonnen.

Nun weißt du: Wenn Kreisa 6 erreicht, kann sie immer gewinnen. Wann kann sie aber immer 6 erreichen? Wenn sie am Anfang 2 sagt, weil sie dann die Zahl von Quadrato wieder zur Summe 4 ergänzen kann. Alle möglichen Spielverläufe lassen sich in einer Tabelle zusammenfassen

<table>
<tr><th>Zahl K</th><th>Zahl Q</th><th>Zwischen-summe</th><th>Zahl K</th><th>Zwischen-summe</th><th>Zahl Q</th><th>Zwischen-summe</th><th>Zahl K</th><th>Zwischen-summe</th></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td rowspan="3">6</td><td>1</td><td>7</td><td>3</td><td rowspan="3">10
K gewinnt</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>1</td></tr>
</table>

****

Kreisa hat es geschafft – sie gewinnt nun jedes Mal. Quadrato möchte das auch und erfindet ein neues Spiel:

Aufgabe 4. Er beginnt und nennt eine Zahl von 1 bis 6. Dann ist Kreisa dran und addiert eine Zahl von 1 bis 6 und nennt die Summe. Zu dieser Summe addiert Quadrato nun wieder eine Zahl von 1 bis 6 und so weiter. Wer nun die Zahl 40 nennt, der hat gewonnen.

Kann Quadrato das Spiel immer gewinnen? Wie muss Quadrato spielen, um zu gewinnen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Quadrato kann immer gewinnen, wenn er zu Beginn 5 sagt und dann immer die Zahl sagt, die Kreisas genannte Zahl zu 7 ergänzt.

Begründung: Da Kreisa eine Zahl zwischen 1 und 6 sagen kann, kann Quadrato immer eine Zahl nennen, die Kreisas Zahl zu 7 ergänzt:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7.$$

Damit schafft Quadrato nach seiner ersten Ansage als Zwischensummen immer

(5 + 7 =) 12,
(12 + 7 =) 19,
(19 + 7 =) 26,
(26 + 7 =) 33 und
(33 + 7 =) 40

und Quadrato hat gewonnen.

Hinweis: Wenn Quadrato und Kreis immer eine Zahl zwischen 1 und 6 nennen dürfen, könnten sie auch einen Spielwürfel benutzen und die gewürfelte Augenzahl nennen. Wer zuerst die Summe 40 erreicht oder übertrifft, hat gewonnen. Doch nun können sie das Spiel nicht mehr durch Überlegung beeinflussen – die Spieler müssen sich auf ihr Glück verlassen.

Probiere es mal mit einem Würfel aus!

****

Runde 2 **Auf dem Rodelberg** (Teil A)

Aufgabe 1. Quadrato traf sich mit seinen Freunden am Rodelberg. Sie hatten insgesamt 7 Schlitten mit. Es waren Zweisitzer (darauf haben zwei Kinder Platz), Dreisitzer (für drei Kinder) und Viersitzer (für vier Kinder). Von jeder Sorte waren es mindestens einer, aber die Zweisitzer waren am wenigsten. Als sie losrodelten, hatten alle 23 Kinder auf den Schlitten Platz gefunden und kein Platz blieb frei.

Wie viele Schlitten von jeder Sorte hatten die Kinder am Rodelberg?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Die Kinder hatten drei Viersitzer, drei Dreisitzer und einen Zweisitzer am Rodelberg.

Probe:	Anzahl der Schlitten:	$3 + 3 + 1 = 7$
	Anzahl der Kinder:	$3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 12 + 9 + 2 = 23$

Herleitung: Du kannst die Lösung finden, indem du in einer Tabelle die Möglichkeiten der Anzahl von Schlitten systematisch untersuchst.

Anzahl Viersitzer	Anzahl Dreisitzer	Verbleibende Anzahl Zweisitzer	Anzahl Sitzplätze	Vergleich mit 23
1	1	7 – 1 – 1 = 5	1 · 4 + 1 · 3 + 5 · 2 = 17	17 < 23
2	1	7 – 2 – 1 = 4	2 · 4 + 1 · 3 + 4 · 2 = 19	19 < 23
3	1	7 – 3 – 1 = 3	3 · 4 + 1 · 3 + 3 · 2 = 21	21 < 23
4	**1**	**7 – 4 – 1 = 2**	**4 · 4 + 1 · 3 + 2 · 2 = 23**	**23 = 23**
5	1	7 – 5 – 1 = 1	5 · 4 + 1 · 3 + 1 · 2 = 25	25 > 23

Alle 23 Kinder finden auf 4 Viersitzern, 1 Dreisitzer und 2 Zweisitzern Platz. Aber in der Aufgabenstellung wurde verlangt, dass die Anzahl der Zweisitzer am wenigsten war. Deshalb ist das nicht die richtige Lösung.

Probierst du es mit 2 Dreisitzern, stellst du schnell fest, dass es keine Lösung geben kann – denn es passen dann immer eine gerade Anzahl von Kindern auf alle Schlitten, also nie 23 Kinder.

Probiere es also mit 3 Dreisitzern:

Anzahl Viersitzer	Anzahl Dreisitzer	Verbleibende Anzahl Zweisitzer	Anzahl Sitzplätze	Vergleich mit 23
1	3	7 – 1 – 3 = 3	1 · 4 + 3 · 3 + 3 · 2 = 19	19 < 23
2	3	7 – 2 – 3 = 2	2 · 4 + 3 · 3 + 2 · 2 = 21	21 < 23
3	**3**	**7 – 3 – 3 = 1**	**3 · 4 + 3 · 3 + 1 · 2 = 23**	**23 = 23**

Zur Kontrolle probiere es noch einmal mit 5 Dreisitzern. (mit 4 Dreisitzern kann es wie mit 2 Dreisitzern wieder keine Lösung geben.) Da von jeder Sorte Schlitten mindestens einer vorhanden war, geht es nur mit 1 Viersitzer, 5 Dreisitzern und 1 Zweisitzer. Darauf passen aber nur $1 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 21$, also weniger als 23 Kinder.

Lösungsvariante mit Gleichungen: Zur Abkürzung schreiben wir für die Anzahl der Viersitzer V, Dreisitzer D und Zweisitzer Z. Dann lassen sich die Bedingungen der Aufgabe in zwei Gleichungen schreiben:

Anzahl der Schlitten: $V + D + Z = 7$
Anzahl der Kinder: $V \cdot 4 + D \cdot 3 + Z \cdot 2 = 23$

Nun schreibe die zweite Gleichung etwas anders auf:

$$V \cdot 4 + D \cdot 3 + Z \cdot 2 = V \cdot 2 + D \cdot 1 + 2 \cdot (V + D + Z) = 23$$

Wenn du jetzt für den Ausdruck in der Klammer den Wert 7 einsetzt (erste Gleichung), erhältst du

$$V \cdot 2 + D = 9$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird, kann V nur die vier Werte 1, 2, 3 oder 4 annehmen. Für jeden dieser Werte kannst du die Werte für D und Z berechnen und die Anzahl der Plätze mit 23 vergleichen.

Weitere Lösungsvariante: Von jeder Sorte muss es mindestens einen Schlitten geben und die Zweisitzer müssen die wenigsten sein. Das sagt uns, dass es mindestens einen Zweisitzer, zwei Dreisitzer und zwei Viersitzer sein müssen.
Zusammen sind das schon

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 2 + 6 + 8 = 16 \text{ Kinder,}$$

die auf diesen Schlitten Platz finden. Es fehlen also noch (23 – 16 =) 7 Kinder, die auf (7 – 1 – 2 – 2 =) 2 übrigen Schlitten Platz finden müssen.

Einen Zweisitzer können wir nicht mehr benutzen, da dann noch 5 Kinder übrig wären und höchstens 4 Kinder auf einem Schlitten Platz haben. Da 7 eine ungerade Zahl ist, brauchen wir noch einen Dreisitzer mit 3 Kindern, Nun haben wir also schon 6 Schlitten benutzt und haben noch 4 Kinder und 1 Schlitten übrig. Da nehmen wir noch einen Viersitzer und dann passt das.

****

Aufgabe 2. Auch Kreisa ging Rodeln. Sie traf sich mit ihren 4 Freundinnen. Sie hatten einen Zweisitzer, einen Dreisitzer und einen Viersitzer mit.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gab es für Kreisa, sich eine Rodelmannschaft auszusuchen, die mit einem vollbesetzten Schlitten den Berg hinunter rodelt? Dabei war es ihr egal, wer an welcher Position auf dem Schlitten sitzt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Kreisa hat 14 Möglichkeiten, sich eine Rodelmannschaft auszusuchen.

Herleitung: Wir bezeichnen die vier Freundinnen mit 1, 2, 3 und 4. Dann sind folgende Rodelmannschaften möglich, in denen Kreisa (K) einen Platz hat:

Zweisitzer:	K1, K2, K3, K4
Dreisitzer:	K12, K13, K14, K23, K24, K34
Viersitzer:	K123, K124, K134, K234.

Das sind 4 + 6 + 4 = 14 Möglichkeiten.

Lösungsvariante mit ausführlicher Beschreibung der möglichen Fälle: Auch hier ermitteln wir die Anzahl der möglichen Rodelmannschaften auf den verschiedenen Schlittenvarianten.

Zweisitzer: Kreisa nimmt eine weitere Freundin mit. Da sie 4 Freundinnen hat, hat sie 4 verschiedene Möglichkeiten.

Dreisitzer: Wir zählen zuerst die Möglichkeiten, wenn Kreisa bereits vorher eine Freundin festlegte, mit der sie auf jeden Fall fahren möchte. Das könnte zum Beispiel Freundin 1 sein. Dann besetzen Freundin 1 und Kreisa schon 2 der 3 Plätze auf dem Dreisitzer, nur ein Platz ist noch frei. Da sie noch 3 weitere Freundinnen hat, hat Kreisa für diesen Platz 3 Möglichkeiten.

Nun zählen wir, wie viele Möglichkeiten sie hat, wenn Freundin 1 nicht mitfährt. Wenn Freundin 2 mitfährt und Freundin 1 nicht mitfahren soll, sind 2 der 3 Plätze durch Kreisa und Freundin 2 besetzt und auf dem dritten Platz kann entweder Freundin 3 oder Freundin 4 sitzen. Somit gibt es da auch wieder 2 Möglichkeiten.

Wenn Freundin 1 und Freundin 2 nicht mitfahren, haben wir noch Freundin 3 und Freundin 4 übrig. Mit Kreisa zusammen besetzen sie genau einen Dreisitzer, das ist also auch eine Möglichkeit.

Es gibt also insgesamt 3 + 2 + 1 = 6 Möglichkeiten für verschiedene Rodelmannschaften auf dem Dreisitzer.

Viersitzer: Wenn Kreisa den Viersitzer nimmt, muss immer eine ihrer 4 Freundinnen oben bleiben. Da es 4 Freundinnen sind, hat sie dafür auch wieder 4 verschiedene Möglichkeiten.

Das sind dann insgesamt 4 + 6 + 4 = 14 verschiedene Möglichkeiten.

****

Aufgabe 3. Am Nachmittag fand ein Rodel-Wettbewerb statt. Familie Geometrie stand am Rodel-Berg und beobachtete den Zieleinlauf, als die Kinder Einsa, Zweio, Dreia und Viero ankamen. Doch der Zieleinlauf war sehr knapp, sodass sie sich über den Sieger nicht einig waren.

Herr Raute: „Eina gewann."
Frau Dreieck: „Zweia oder Eina gewann."
Kreisa: „Zweia oder Dreia gewann."
Quadrato: „Zweia oder Viero gewann."

Als das Ergebnis offiziell bekannt gegeben wurde, stellten sie fest, dass nur zwei der Familie richtig beobachtet hatten.

Wer gewann den Rodel-Wettbewerb?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Einsa gewann den Rodelwettbewerb.

Begründung: Probiere nacheinander aus, ob die Aussagen von Herrn Raute, Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato wahr oder falsch sind, wenn Einsa, Zweio, Dreia oder Viero gewonnen haben.

Es gewann:	Herr Raute: Einsa gewann	Frau Dreieck: Zweio oder Einsa gewann	Kreisa: Zweio oder Dreisa gewann	Quadrato: Zweio oder Viero gewann
Einsa	**Wahr**	**Wahr**	**Falsch**	**Falsch**
Zweio	Falsch	Wahr	Wahr	Wahr
Dreia	Falsch	Falsch	Wahr	Falsch
Viero	Falsch	Falsch	Falsch	Wahr

Nur wenn Einsa gewann, waren genau zwei Aussagen wahr und zwei Aussagen falsch.

Diese Tabelle fasst folgende Beobachtung zusammen: Einsa wird zweimal als Gewinnerin genannt, Zweio wird dreimal als Gewinner genannt. Dreia und Viero werden jeweils nur einmal als Gewinner genannt. Wenn genau zwei Aussagen wahr sind, kann nur Einsa gewonnen haben.

Lösungsvariante: Gehe alle Möglichkeiten durch, welche zwei Familienmitglieder die Wahrheit gesagt haben könnten und schau dann, wer gewonnen hat.

1. Annahme: Herr Raute und Frau Dreieck haben recht. Dann hätte Einsa gewonnen. Hier gibt es keinen Widerspruch.
2. Annahme: Herr Raute und Kreisa haben recht. Das geht nicht, da sie nicht die gleiche Person vorschlagen.
3. Annahme: Herr Raute und Quadrato haben recht. Das geht nicht, weil sie nicht die gleiche Person vorschlagen.
4. Annahme: Frau Dreieck und Kreisa haben recht und Herr Raute und Quadrato irren sich. Dann hätte Zweia gewonnen. Das geht aber nicht, da auch Quadrato dann recht hätte, er sich ja aber irrt.

5. Annahme: Frau Dreieck und Quadrato haben recht, Herr Raute und Kreisa irren sich. Dann hätte Zweia gewonnen. Das geht aber nicht, da auch Kreisa dann recht hätte, sie sich ja aber irrt.
6. Annahme: Kreisa und Quadrato haben recht und Herr Raute und Frau Dreieck irren sich. Dann wäre Zweia die Gewinnerin. Das geht aber nicht, da Frau Dreieck sie ja auch vorgeschlagen hatte, sie sich aber irrt.

Damit haben wir alle Möglichkeiten überprüft und nur die 1. Annahme ist möglich. Deswegen können wir schlussfolgern, dass Herr Raute und Frau Dreieck recht hatten und dass Einsa die Gewinnerin ist.

****

Aufgabe 4. Als alle nach dem Rodeln wieder nach Hause kamen, stand in der Küche eine Keks-Dose. Quadrato nahm sich den dritten Teil der Kekse heraus. Von den verbleibenden Keksen nahm sich Kreisa die Hälfte heraus. Herr Raute nahm sich zwei Kekse weniger als Quadrato. Dann blieben für Frau Dreieck nur noch halb so viele Kekse, wie Herr Raute hatte.

Wie viele Kekse waren anfangs in der Keks-Dose?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: In der Keks-Dose waren anfangs 18 Kekse.

Herleitung: Für solche Aufgaben kannst du mit einer Tabelle die Lösung finden. Probiere einfach systematisch, wie viele Kekse jeder genommen hat, wenn eine bestimmte Anzahl anfangs in der Dose war. Überprüfe, ob damit der letzte Satz der Aufgabenstellung erfüllt wird: „Dann blieben für Frau Dreieck nur noch halb so viele Kekse, wie Herr Raute hatte.“

Kekse in der Dose	Anzahl Kekse, die Quadrato nahm	Verbliebene Anzahl Kekse in der Dose	Anzahl Kekse, die Kreisa nahm	Anzahl Kekse für Herrn Raute	Verbliebende Anzahl Kekse in der Dose
3	3 : 3 = 1	3 – 1 = 2	2 : 2 = 1	1 – 2 n.l.	
6	6 : 3 = 2	6 – 2 = 4	4 : 2 = 2	2 – 2 n.l.	
9	9 : 3 = 3	9 – 3 = 6	6 : 2 = 3	3 – 2 = 1	9 – 3 – 3 – 1 = 2
12	12 : 3 = 4	12 – 4 = 8	8 : 2 = 4	4 – 2 = 2	12 – 4 – 4 – 2 = 2
15	15 : 3 = 5	15 – 5 = 10	10 : 2 = 5	5 – 2 = 3	15 – 5 – 5 – 3 = 2
18	**18 : 3 = 6**	**18 – 6 = 12**	**12 : 2 = 6**	**6 – 2 = 4**	**18 – 6 – 6 – 4 = 2**
21	21 : 3 = 7	21 – 7 = 14	14 : 2 = 7	7 – 2 = 5	21 – 7 – 7 – 5 = 2

Nur wenn anfangs 18 Kekse in der Dose waren, hatte Frau Dreieck halb so viel Kekse wie Herr Raute.

****

Runde 1 Mathematische Experimente (Teil B)

Kreisa und Quadrato spielen wieder mit Zahlen. Sie haben sich 8 Zahlenkarten gebastelt, auf jeder Karte steht eine der Zahlen 1 bis 8, keine der Zahlen benutzten sie mehr als einmal. Außerdem haben sie jede Menge Karten mit den Rechenzeichen + (Addition), – (Subtraktion), · (Multiplikation) und : (Division) zur Verfügung.

Aufgabe 1a) Quadrato nimmt sich die vier Zahlenkarten mit den geraden Zahlen und legt mit geeigneten Rechenzeichen eine Gleichung mit dem Ergebnis 5. Kannst du es auch? Zeige es!

Aufgabe 1b) Kreisa nimmt sich die vier Zahlenkarten mit den ungeraden Zahlen und legt mit geeigneten Rechenzeichen ebenfalls eine Gleichung mit dem Ergebnis 5. Kannst du es auch? Zeige es!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a): Es genügt die Angabe einer richtigen Gleichung.

$8 : 4 + 6 : 2 = 5$ oder $4 \cdot 6 : 8 + 2 = 5$ oder $6 - 2 \cdot 4 : 8 = 5$

Beachte: Bei solchen Gleichungen rechnet man immer zuerst die Multiplikation und die Divisionen, also alles mit · und : (mit Punkten geschrieben), und dann die Additionen und Subtraktionen + und – (mit Strichen geschrieben). Das nennt man **Punkt-vor-Strich-Regel**. Wenn du die Reihenfolge des Rechnens ändern willst, musst du Klammern setzen – aber solche Karten hatten Kreisa und Quadrato nicht zur Verfügung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b): Es genügt die Angabe einer richtigen Gleichung.

$7 - 5 + 3 : 1 = 5$ oder $7 + 3 - 5 : 1 = 5$ oder $7 : 1 - 5 + 3 = 5$

Statt dem Divisionszeichen kannst du auch das Multiplikationszeichen verwenden, da es egal ist, ob du mit 1 multiplizierst oder durch 1 dividierst.

****

Aufgabe 2. Kreisa hat heimlich die Zahlenkarte mit der Zahl 3 versteckt, ohne dass es Quadrato bemerkte. Nun behauptet Kreisa, sie könne sich drei Zahlenkarten mit der Summe 13 nehmen, sodass es Quadrato nicht gelingt, mit einer Auswahl der verbleibenden Zahlen ebenfalls die Summe 13 zu schaffen.

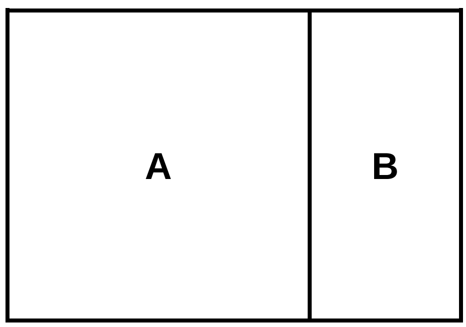
Hat Kreisa Recht? Welche Karten muss Kreisa auswählen?

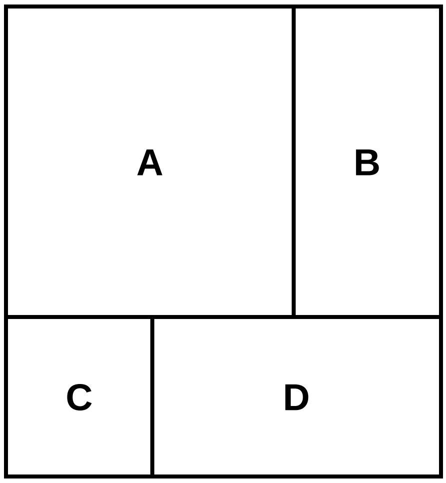
Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Kreisa hat recht. Sie muss die Karten 1, 5, 7 nehmen.

Begründung: Wenn Kreisa die Karten 1, 5 und 7 ausgewählt hat, kann sie die Summe 1 + 5 + 7 = 13 bilden. Weil sie die Karte 3 versteckt hat, bleiben für Quadrato nur Karten übrig, auf denen eine gerade Zahl steht. Die Summe von geraden Zahlen ist aber immer gerade – also kann Quadrato nicht die Summe 13 bilden.

****

Quadrato hat ein neues Spiel erfunden. Er schneidet sich einige Quadrate mit 4 cm Seitenlänge aus. Dann zeichnet er auf ein Blatt Papier ein Rechteck, 6 cm lang und 4 cm breit, und legt zwei Quadrate A und B wie in der Abbildung darauf. Es ist offensichtlich, dass das Quadrat A oben liegt und das Quadrat B unten.



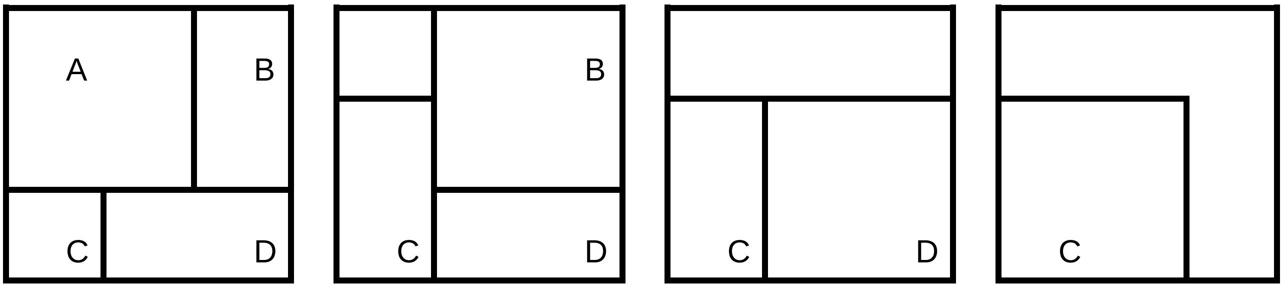


Aufgabe 3. Quadrato zeichnet nun ein Quadrat, 6 cm lang und 6 cm breit, und legt darauf vier Quadrate. Kannst du ermitteln in welcher Reihenfolge die Quadrate liegen? Offensichtlich liegt Quadrat A oben – und weiter? Gib die Reihenfolge von oben nach unten an.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Wenn das Quadrat A entfernt wird, lässt sich nur die Fläche B zu einem Quadrat ergänzen, ohne dass neue Striche in der bisher sichtbaren Fläche gezeichnet werden müssen.

Wenn nun das Quadrat B entfernt wird, lässt sich nur die Fläche D zu einem Quadrat ergänzen, ohne dass neue Striche in der bisher sichtbaren Fläche gezeichnet werden müssen.

Am Ende bleibt das Quadrat C übrig.

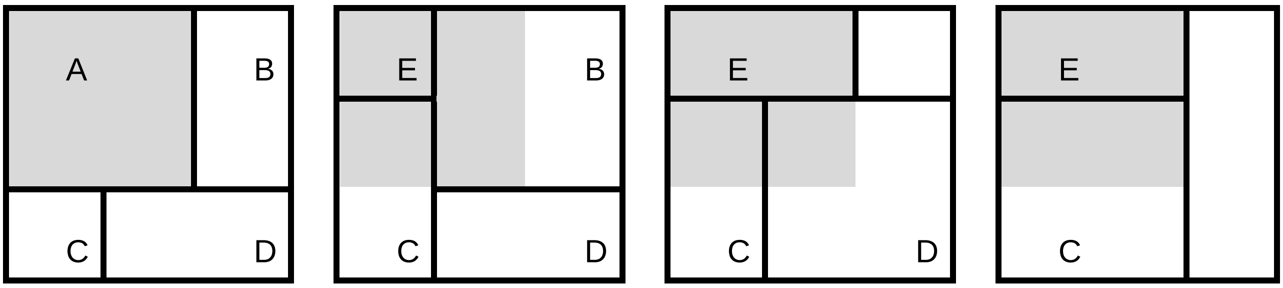


****

Aufgabe 4: Kreisa behauptet, in der Abbildung könnte noch ein fünftes Quadrat verdeckt liegen, dass eindeutig als unterstes Quadrat gefunden werden kann. Hat sie recht?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa hat recht.

Begründung: Wenn beispielsweise genau unter dem Quadrat A ganz unten ein Quadrat E liegen würde (grau markiert), wäre es zu Beginn nicht zu sehen. Nachdem das Quadrat A entfernt wurde, ist vom Quadrat E ein erstes Stück sichtbar. Erst wenn auch die drei anderen Quadrate B, D und C entfernt werden, ist das Quadrat E vollständig sichtbar.



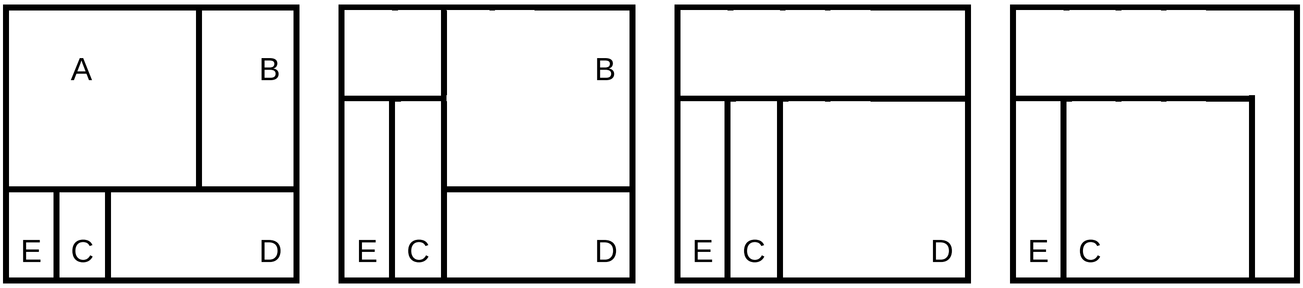
Es ist sogar egal, wo das Quadrat liegt. Solange es ganz unten, also unter A, B, C und D liegt und A, B, C, D so liegen bleiben, wie sie sind, sieht man das Quadrat beim Draufschauen nicht, weil es zu Beginn durch die anderen versteckt wird.

****

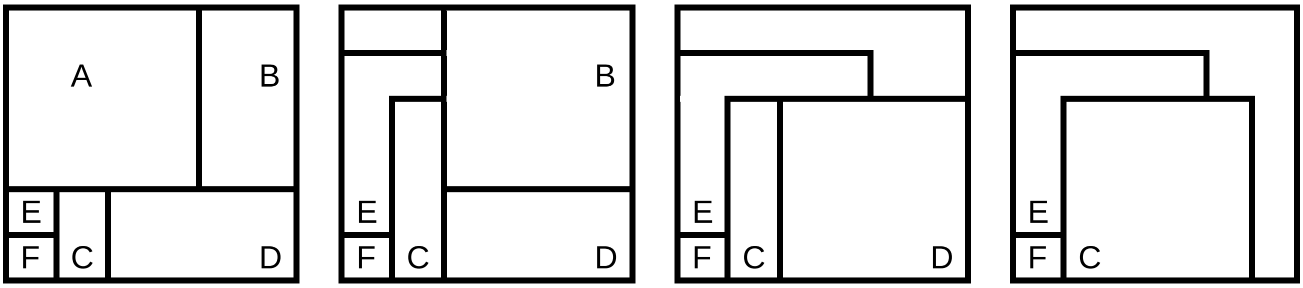
Aber kannst du auch 5 Quadrate so in einem Quadrat (6 cm lang und 6 cm breit) übereinanderlegen, dass von jedem Quadrat ein Stück zu sehen ist und die Reihenfolge von oben nach unten eindeutig ermittelt werden kann?

Tipp: Mache es Quadrato nach und probiere es mit ausgeschnittenen Quadraten.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, fünf Quadrat so anzuordnen, dass man alle bereits am Anfang sieht, die Reihenfolge aber eindeutig bestimmt ist. Ein Beispiel zeigt die folgende Abbildung ganz links: Das Quadrat C ist nur ein kleines Stück nach rechts verschoben, und links unten liegt das Quadrat E. In der Abbildung rechts daneben ist Quadrat A entfernt usw.



Hinweis: Es lassen sich sogar sechs Quadrate anordnen, so wie in der folgenden Abbildung ganz links.



Prüfe es, indem du 6 gleichgroße Quadrate ausschneidest und das Übereinanderlegen ausprobierst!

****

LOGO – Runde 3 **Im Tierpark** (Teil A)

Aufgabe 1. Quadrato hat heute Geburtstag. Nun ist Kreisa genau doppelt so alt wie Quadrato. Vor vier Jahren war Kreisa noch dreimal so alt wie Quadrato.

Wie alt ist nun Quadrato? Wie alt war Kreisa vor vier Jahren?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Quadrato ist 8 Jahre. Kreisa war vor vier Jahren 12 Jahre alt.

Probe: Kreisa ist jetzt 16 Jahre alt, es gilt $8 \cdot 2 = 16$.
Quadrato war vor 4 Jahren (8 – 4 =) 4 Jahre alt, es gilt $4 \cdot 3 = 12$.

Herleitung: Die Lösung kannst du durch systematische Suche finden. Stelle dazu die Altersangaben in einer Tabelle übersichtlich zusammen. Beachte: Quadrato ist mindestens 5 Jahre alt, weil eine Aussage zum Alter vor vier Jahren getroffen wird.

Alter von Quadrato heute	Alter von Kreisa heute	Alter von Quadrato vor 4 Jahren	Alter von Kreisa vor 4 Jahren	Kontrolle
5	$5 \cdot 2 = 10$	$5 – 4 = 1$	$10 – 4 = 6$	$1 \cdot 3 < 6$
6	$6 \cdot 2 = 12$	$6 – 4 = 2$	$12 – 4 = 8$	$2 \cdot 3 < 8$
7	$7 \cdot 2 = 14$	$7 – 4 = 3$	$14 – 4 = 10$	$3 \cdot 3 < 10$
8	$8 \cdot 2 = 16$	$8 – 4 = 4$	$16 – 4 = 12$	$4 \cdot 3 = 12$
9	$9 \cdot 2 = 18$	$9 – 4 = 5$	$18 – 4 = 14$	$5 \cdot 3 > 14$

Lösungsvariante mit Gleichungen: Setze für das Alter von Quadrato die Variable Q und für das Alter von Kreisa die Variable K. Dann lassen sich die beiden Aussagen über das Alter durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$2 \cdot Q = K \quad \text{und} \quad 3 \cdot (Q – 4) = K – 4$$

Die zweite Gleichung kannst du auch so schreiben: $Q \cdot 3 – 12 = K – 4$.
Für K setze die erste Gleichung ein und du erhältst

$$3 \cdot Q – 12 = 2 \cdot Q – 4.$$

Daraus findest du nun leicht: $Q = 8$. Setzt du diesen Wert in die erste Gleichung ein, ergibt sich $K = 18$. (Vergiss die Probe nicht!)

****

Aufgabe 2. Aus Anlass des Geburtstages geht die Familie Geometrie in den Tierpark. Der Eintritt für einen Erwachsenen kostet dreimal so viel wie der Eintritt für ein Kind. Herr Raute erschrickt: Er hat nur 30 Euro in der Geldbörse – das reicht nicht für alle vier, also für die zwei Erwachsenen und die zwei Kinder. Doch Frau Dreieck beruhigt: „Schau doch, Geburtstagskinder dürfen kostenfrei in den Tierpark“. Glück gehabt – da langt das Geld doch und Herr Raute kann die Eintrittskarten bezahlen. Er erhält sogar noch eine ganze Anzahl von Euros zurück.

Wie viel kostet der Eintritt für einen Erwachsenen? Wie viel kostet der Eintritt für ein Kind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Der Eintritt für einen Erwachsenen kostet 12 €, für ein Kind 4 €.

Probe: Der Preis für zwei Erwachsene und zwei Kinder beträgt (2·12 + 2·4 =) 32 €. Dafür genügen die 30 € von Herrn Raute nicht. Für zwei Erwachsene und ein Kind kostet der Eintritt (2·12 + 1·4 =) 28 €. Herr Raute kann diese Summe bezahlen und erhält 2 € zurück.

Herleitung: Auch bei dieser Aufgabe ist eine systematische Suche möglich. Schreibe K für Kind und E für Erwachsene.

Eintrittspreis für 1K	Eintrittspreis für 1E	Eintrittspreis für 2E/2K	Kontrolle	Eintritt für 2E/1K
1 €	(3·1 =) 3 €	2·3 + 2· 1 = 8 €	8 < 30	
2 €	(3·2 =) 6 €	2·6 + 2·2 = 16 €	16 < 30	
3 €	(3·3 =) 9 €	2·9 + 2·3 = 24 €	24 < 30	
4 €	**(3·4 =) 12 €**	**2·12 + 2·4 = 32 €**	**32 > 30**	**(2·12 + 1·4 =) 28 €**
5 €	(3·5 =) 15 €	(2·15 + 2·5 =) 40 €	40 > 30	(2·15 + 1·5 =) 35 €

In dieser Tabelle kannst du die Lösung ablesen. Doch genau genommen ist noch nicht untersucht, ob es auch Lösungen gibt, wenn der Eintrittspreis für ein Kind keine ganze

Anzahl von Euros beträgt. Doch das wird für die Lösung nicht verlangt. Rechne es trotzdem einmal nach:

Bei 3 € 75 Cent (abgekürzt mit Ct) könnte Herr Raute den Eintritt für zwei Erwachsene und zwei Kinder gerade noch bezahlen. Also muss der Eintrittspreis mindestens 3 € 76 Ct kosten. Nun kannst du die Tabelle fortsetzen und alle Cent-Beträge prüfen. Es gibt keine weitere Lösung, wenn Herr Raute eine ganze Anzahl von Euros als Rückgeld erhält.

Eintrittspreis für 1K	Eintrittspreis für 1E	Eintrittspreis für 2E/2K	Eintrittspreis für 2E/1K
3 € 75 Ct	11 € 25 Ct	30 € 0 Ct	26 € 25 Ct
3 € 76 Ct	11 € 28 Ct	30 € 8 Ct	26 € 32 Ct
...			
3 € 85 Ct	11 € 55 Ct		26 € 95 Ct
3 € 86 Ct	11 € 58 Ct		27 € 02 Ct
...			
4 € 0 Ct	12 € 0 Ct		28 € 0 Ct
...			
4 € 14 Ct	12 € 42 Ct		28 € 98 Ct
4 € 15 Ct	12 € 45 Ct		29 € 5 Ct

Lösungsvariante: Wenn du der Eintrittspreis für ein Kind mit E bezeichnest, so beträgt der Eintrittspreis für einen Erwachsenen 3 · E. Herr Raute muss für die ganze Familie insgesamt (2 · 3 · E + 2 · E =) 8 · E bezahlen. Da er für das Geburtstagskind nicht bezahlen muss, sind es aber nur (8 – 1 =) 7 · E.

Laut Aufgabenstellung gilt 8 · E > 30. Außerdem gilt 7 · E ≤ 30.

Da Herr Raute eine ganze Anzahl von Euros als Rückgeld erhält, muss der Betrag durch 7 teilbar sein. Schnell findest du die Lösung: E = 4.

****

Aufgabe 3. Zuerst geht Familie Geometrie zum Affengehege. Die vielen Äffchen toben darin so herum, dass sie nur ganz schwer zu zählen sind. Quadrato meint, 14 Äffchen gesehen zu haben. Kreisa dagegen hat 16 Äffchen gezählt. Frau Dreieck sagt: „Es waren 19 Äffchen." Schließlich behauptet Herr Raute, sogar 23 Äffchen gesehen zu haben. Als sie den Tierpfleger nach der richtigen Anzahl fragen, antwortet er: „Einer von euch hat die richtige Zahl genannt – die anderen Zahlen sind um 3, 4 und 5 Äffchen daneben."

Wer hatte die richtige Anzahl der Äffchen genannt? Begründe auch, warum die anderen mit ihrer Anzahl nicht recht hatten!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Frau Dreieck hatte die richtige Anzahl genannt, es waren 19 Äffchen.

Begründung: Da der Pfleger sagte, dass einer die richtige Anzahl nannte, können es nur 14, 16, 19 oder 23 Äffchen gewesen sein. Trage in eine Tabelle ein, um wie viele Äffchen sich jeder geirrt, wenn eine der Anzahlen zutrifft. Nur wenn es 19 Äffchen waren, sind alle genannten Bedingungen erfüllt.

Sie hatten geschätzt ...		Angenommen, die Anzahl wäre ...			
		14	16	19	23
Quadrato	14	0	2	*5*	9
Kreisa	16	2	0	*3*	7
Frau Dreieck	19	5	3	*0*	4
Herr Raute	23	9	7	*4*	0

Lösungsvariante: Auch ohne diese Tabelle kannst du schnell ausschließen, wer nicht die richtige Anzahl nannte.

Quadrato nannte 14 Äffchen. Doch dann hätte Herr Raute (23 – 14 =) 9 zu viel genannt – das kann nicht sein.
Kreisa nannte 16 Äffchen. Doch dann hätte Herr Raute (23 – 16 =) 7 zu viel genannt – das kann nicht sein.
Herr Raute nannte 23 Äffchen. Doch dann hätte Quadrato (23 – 14 =) 9 zu wenig genannt – das kann nicht sein.

Also kann nur Frau Dreieck die richtige Anzahl genannt haben. Prüfe noch mit einer Probe, ob dann die anderen tatsächlich mit ihren Zahlen 3, 4 oder 5 daneben lagen: Quadrato (19 – 14 =) 5; Kreisa (19 – 16 =) 3; Herr Raute (23 – 19 =) 4.

****

Aufgabe 4. Gleich neben den Affen ist ein Gehege wie ein Bauernhof eingerichtet. Dort sind Ponys, Kaninchen, Hühner und zwei Ziegen zu sehen, zusammen mehr als 30 und weniger als 35 Tiere. Es sind 5 Ponys weniger als Kaninchen und es sind 8 Hühner mehr als Kaninchen.

Wie viele Ponys, Kaninchen und Hühner gibt es in dem Gehege?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Es gibt 4 Ponys, 9 Kaninchen, 17 Hühner und 2 Ziegen.

Probe: Insgesamt sind es (4 + 9 + 17 + 2 =) 32 Tiere, also mehr als 30 und weniger als 35 Tiere.

Herleitung: Löse die Aufgabe mittels Gleichungen. Schreibe für die Anzahl der Ponys P, für die Anzahl der Kaninchen K, für die Anzahl der Hühner H und für die Anzahl der Ziegen Z. Dann kannst du aus dem Aufgabentext folgende Gleichungen erkennen:

$$Z = 2;\quad 30 < P + K + H + Z < 35;\quad P = K - 5;\quad H = K + 8$$

Setze nun in die Ungleichung für Z, P und H die Angaben ein:

$$30 < K - 5 + K + K + 8 + 2 < 35$$
$$30 < 3 \cdot K + 5 < 35$$
$$25 < 3 \cdot K < 30$$

Die einzige durch 3 teilbare Zahl, die größer als 25 und kleiner als 30 ist, ist 27. Also findest du K = 9. Daraus folgt P = 4 und H = 17.

****

Runde 3

Spiel mit Quadraten

(Teil B)

Aufgabe 1. Quadrato hat einen Streifen Papier mit einer Anzahl aneinander gereihter Quadrate. Er nummeriert die Quadrate von links nach rechts mit 1, 2, ... Nun faltet er den Streifen so, dass er die Größe eines Quadrates erhält. Das Quadrat mit der Nummer 1 liegt ganz oben. Er beginnt mit einem Streifen aus drei Quadraten.

Er stellt fest, dass es zwei Möglichkeiten gibt, wie die nummerierten Quadrate nach dem Falten übereinanderliegen können (von oben nach unten): 1 – 2 – 3 oder 1 – 3 – 2.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen der nummerierten Quadrate gibt es, wenn Quadrato einen Streifen mit 4 Quadraten faltet? Gib alle diese Reihenfolgen an und beschreibe, wie du die Lösung gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten.

Herleitung: Es gibt 6 Möglichkeiten, die Zahlen 1, 2, 3 und 4 hintereinander anzuordnen, wenn die 1 oben liegen soll:

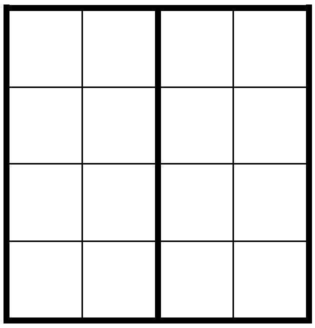
1 – 2 – 3 – 4, 1 – 2 – 4 – 3, 1 – 3 – 2 – 4, 1 – 3 – 4 – 2, 1 – 4 – 2 – 3, 1 – 4 – 3 – 2

Probiere nun mit einem Papierstreifen aus vier aneinanderhängenden Quadraten, ob diese Möglichkeiten alle gefaltet werden können. Es ist dabei günstig, die Quadrate vorn und hinten mit den Zahlen zu beschriften, um die Reihenfolge besser erkennen zu können.

Die Reihenfolgen 1 – 3 – 2 – 4 und 1 – 4 – 2 – 3 gelingen nicht!

****

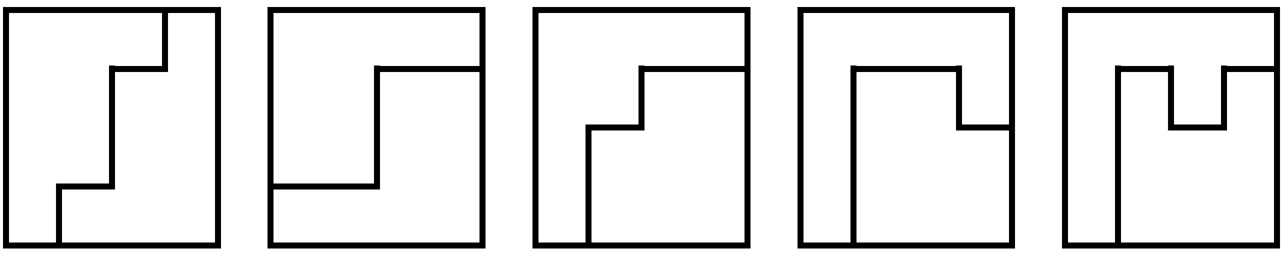
Aufgabe 2. Quadrato hat ein Quadrat gezeichnet, das aus 16 kleinen Quadraten besteht. Er möchte es in zwei Teile zerlegen, sodass jedes Teil die gleiche Anzahl von kleinen Quadraten enthält. Die wohl einfachste Lösung ist in nebenstehender Abbildung zu sehen. Aber es gibt auch andere Lösungen.



Wie viele verschiedene Zerlegungen findest du?

Zwei Zerlegungen sind gleich, wenn ein Teil der einen Zerlegung auf ein Teil der anderen Zerlegung genau passt, auch wenn du es dafür drehen oder sogar umdrehen musst.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Es gibt sehr viele Möglichkeiten – hier einige Beispiele:



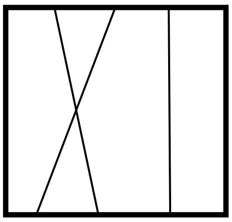
Aufgabe 3. Quadrato hat wieder ein Quadrat gezeichnet. Er fordert Kreisa auf, drei Geraden so in das Quadrat zu zeichnen, dass dadurch das Quadrat in 5 Teile zerlegt wird. Kreisa lacht: „Das ist doch nicht schwer".

Kannst du es auch? Zeige, wie Kreisa die Geraden zeichnen könnte!

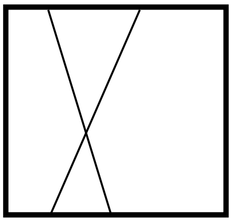
Nun fordert Quadrato Kreisa auf, mit vier Geraden das Quadrat in 12 Teile zu zerlegen. Nach einer Weile gibt Kreisa auf: „Das geht doch gar nicht!"

Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

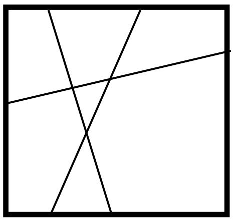
Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Es genügt die Angabe eines Beispiels, bei dem drei Geraden das Quadrat in 5 Teile zerlegt.



Mit zwei Geraden kann Kreisa das Quadrat in maximal 4 Teile zerlegen

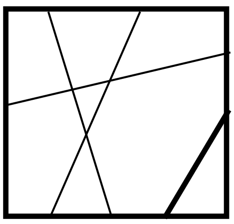
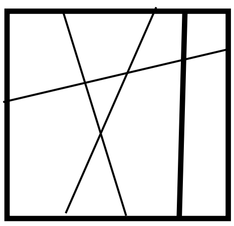


Mit drei Geraden kann Kreisa das Quadrat in maximal 7 Teile zerlegen, wenn die dritte Gerade jeder der ersten beiden Geraden innerhalb des Quadrates schneidet.



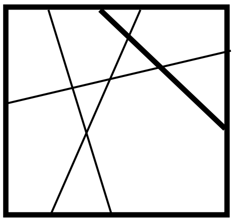
Durch Probieren findest du: Wenn die vierte Gerade keine der ersten drei Geraden innerhalb des Quadrates schneidet, kommt ein Teil hinzu.

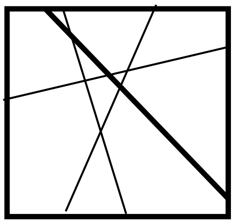
Wenn die vierte Gerade eine der ersten drei Geraden innerhalb des Quadrates schneidet, kommen zwei Teile hinzu.

Wenn die vierte Gerade zwei der ersten drei Geraden innerhalb des Quadrates schneidet, kommen drei Teile hinzu.

Wenn die vierte Gerade die drei ersten Geraden innerhalb des Quadrates schneidet, kommen vier Teile hinzu.





Weitere Möglichkeiten gibt es nicht – es sind also höchstens 11 Teile möglich.

****

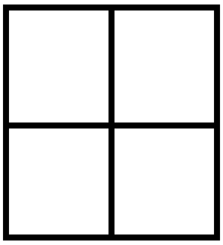
Aufgabe 4. Das Zerlegen von Quadraten bereitet Quadrato Vergnügen. Nun nimmt er dafür eine Schere und zerschneidet des Quadrat mit einem Schnitt. Danach zerschneidet er ein einzelnes entstandenes Teil wieder mit einem Schnitt und danach wieder ein entstandenes Teil und so weiter.

Wie viele Schnitte benötigt Quadrato, damit er 13 Teile erhält? Wie viele Schnitte benötigt er, damit alle Teile wieder Quadrate sind, wobei zwei verschiedene Größen entstehen dürfen?

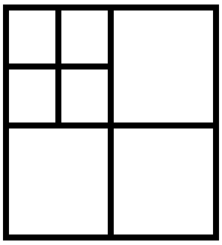
Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Nach dem ersten Schnitt erhält Quadrato 2 Teile. Zerschneidet er ein Teil davon in zwei Teile, hat er insgesamt 3 Teile. Nach jedem Schnitt erhält Quadrato ein Teil mehr als vor dem Schnitt. Wenn er 12 Mal schneidet, hat er also 13 Teile.

Will er nur quadratische Teile erhalten, kann er dies das erste Mal mit drei Schnitten erreichen. Erst zerschneidet er das Quadrat in zwei gleich große Rechtecke. Danach zerschneidet er jedes dieser Rechtecke in zwei Quadrate – nach drei Schnitten erhält er also vier Quadrate.

Nimmt er eines dieser entstandenen Quadrate und zerschneidet dieses in gleicher Weise, so erhält er nach sechs Schnitten 3 größere Quadrate und 4 kleine Quadrate.



3 Schnitte



6 Schnitte