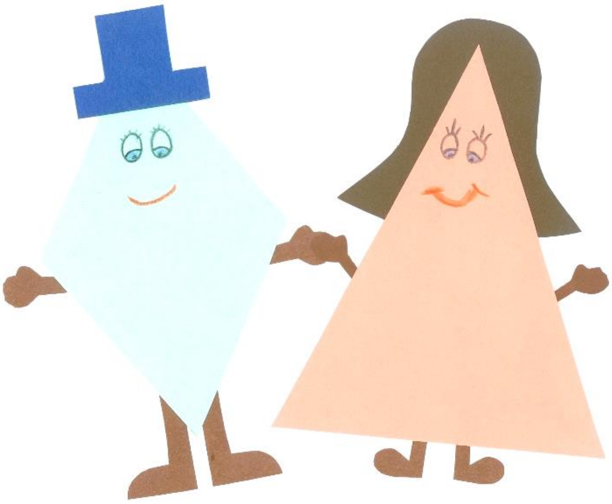
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Beachte bitte die Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Wenn du probiert hast, dann beschreibe wie. Achte darauf, eine Frage in der Aufgabe mit einem Antwortsatz zu beantworten. Wenn möglich, prüfe dein Ergebnis mit einer Probe. Es genügt auch, wenn du nicht zu allen Aufgaben eine Lösung einsendest.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünschen dir
Annemarie Maßalsky und Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und ihr Bruder Quadrato – unternehmen eine mehrtägige Wanderung. Ab dem zweiten Tag wanderten sie täglich 3 km mehr als am Vortag. Am Ende des fünften Tages hatten sie 80 km geschafft.

Wie viele Kilometer wanderten sie am ersten Tag?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Familie Geometrie wanderte am 1. Tag 10 km.

Probe: Tag 1: 10 km,
Tag 2: (10 + 3 =) 13 km, Tag 3: (13 + 3 =) 16 km,
Tag 4: (16 + 3 =) 19 km, Tag 5: (19 + 3 =) 22 km.

gesamt (10 + 13 + 16 + 19 + 22 =) 80 km

Herleitung: Du kannst die Lösung finden, indem du in einer Tabelle systematisch verschiedene Möglichkeiten untersuchst.

Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5	Summe	Vergleich
1	1 + 3 = 4	4 + 3 = 7	7 + 3 = 10	10 + 3 = 13	35	35 < 80
2	2 + 3 = 5	5 + 3 = 8	8 + 3 = 11	11 + 3 = 14	40	40 < 80
Die Erhöhung am Tag 1 um 1 km führt zur Erhöhung der Summe um 5 km. Du kannst also am Tag 1 eine größere Zahl nehmen.						
9	9 + 3 = 12	12 + 3 = 15	15 + 3 = 18	18 + 3 = 21	75	75 < 80
10	**10 + 3 = 13**	**13 + 3 = 16**	**16 + 3 = 19**	**19 + 3 = 22**	**80**	**80 = 80**
11	11 + 3 = 14	14 + 3 = 17	17 + 3 = 20	20 + 3 = 23	85	85 > 80

Nur wenn Familie Geometire am ersten Tag 10 km wanderten, beträgt die Gesamtstrecke am 5. Tag 80 km.

Lösungsvariante mit Gleichungen: Bezeichne die Anzahl der Kilometer des 1. Tages mit X. Dann können wir die zurückgelegten Kilometer der nächsten Tage berechnen:

Tag 1: X
Tag 2: X + 3
Tag 3: (X + 3) + 3 = X + 6
Tag 4: (X + 6) + 3 = X + 9
Tag 5: (X + 9) + 3 = X +12

$$X + X + 3 + X + 6 + X + 9 + X + 12 = 80$$
$$5 \cdot X + 30 = 80$$

Daraus folgt: $X = 10$.

Weitere Lösungsvariante: Da die Wanderstrecke jeden Tag um die gleiche Länge zunimmt, wird am dritten Tag die mittlere Wanderstrecke zurückgelegt:

(80 : 5 =) 16 km.

Daraus folgt: Die Wanderstrecke am Tag 2 betrug (16 – 3 =) 13 km.
Die Wanderstrecke am Tag 1 betrug (13 – 3 =) 10 km.

Die Wanderstrecke am Tag 4 betrug (16 + 3 =) 19 km.
Die Wanderstrecke am Tag 5 betrug (19 + 3 =) 22 km.

Beachte: Während in der Tabelle die Probe bereits enthalten ist, darfst du die Probe bei den anderen Varianten nicht vergessen.

****

Aufgabe 2. Familie Geometrie steht an einem Aussichtspunkt und sehen in der Ferne einen Schornstein, einen Kirchturm und einen Funkturm. Sie diskutieren, welches Bauwerk das höchste sein könnte.

Quadrato meint: „Der Funkturm ist höher als der Schornstein."
Kreisa sagt: „Der Kirchturm ist niedriger als der Schornstein."
Herr Raute denkt: „Der Funkturm ist niedriger als der Kirchturm."

Frau Dreieck bemerkt: „Eure drei Aussagen können aber nicht alle richtig sein." Was ist Frau Dreieck aufgefallen? Warum können alle Aussagen nicht gleichzeitig richtig sein?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Wenn alle Schätzungen wahr wären, haben auch Quadrato und Kreisa richtig geschätzt. Also ist der Funkturm das höchste Bauwerk (Aussage von Quadrato) und der Kirchturm ist das niedrigste Bauwerk (nach Aussage von Kreisa). Herr Raute sagt aber, dass der Kirchturm nicht das niedrigste Bauwerk ist. Also können nicht alle Aussagen wahr sein.

Beachte: Die Aussage von Quadrato ist wichtig für die Lösung. Wären nämlich der Funkturm kleiner als der Kirchturm und der Kirchturm kleiner als der Schonstein, so hätten sowohl Kreisa als auch Herr Raute recht. In diesem Fall sind die Antworten von Kreisa und Herrn Raute nicht widersprüchlich.

****

Aufgabe 3. Jeden Abend schrieb Familie Geometrie Ansichtskarten.

Kreisa schrieb 3 Ansichtskarten mehr als Quadrato.
Frau Dreieck schrieb so viele Ansichtskarten wie Quadrato und Kreisa zusammen.
Herr Raute schrieb dreimal so viele Ansichtskarten wie Quadrato.
Frau Dreieck schrieb 2 Ansichtskarten weniger als Herr Raute.

Ermittle, wie viele Ansichtskarten Familie Geometrie schrieb. Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Familie Geometrie hat insgesamt 41 Ansichtskarten geschrieben.

Herleitung: Auch bei dieser Aufgabe kannst du die Lösung durch systematisches Probieren finden. Fülle die Tabelle aus (wir verwenden die Anfangsbuchstaben als Variablenbezeichnung)

Quadrato	**Kreisa**	**Frau Dreieck**	**Herr Raute**	**Vergleich**
Q	**K = Q + 3**	**D = Q + K**	**R = 3 · Q**	**R und D**
1	4	5	3	R < D
2	5	7	6	R < D
3	6	9	9	R = D
4	7	11	12	R = D + 1
5	**8**	**13**	**15**	**R = D + 2**
6	9	15	18	R = D + 3

Nur wenn Quadrato 5 Ansichtskarten geschrieben hat, sind alle Bedingungen des Aufgabentextes erfüllt. Um die Frage aber vollständig zu beantworten, müssen die Anzahlen noch addiert werden: Es sind insgesamt

(5 + 8 + 13 + 15 =) 41 Ansichtskarten.

Lösungsvariante mit Gleichungen: Wir verwenden auch hier die Anfangsbuchstaben als Variablenbezeichnungen. Aus dem Aufgabentext wissen wir:

$K = Q + 3$,
$D = K + Q = (Q + 3) + Q = 2 \cdot Q + 3$
$R = 3 \cdot Q$
$R = D + 2 = (2 \cdot Q + 3) + 2 = 2 \cdot Q + 5$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt Q = 5. Nun findest du die Anzahl der Ansichtskarten der anderen und kannst die Summe ausrechnen.

Beachte: In der Herleitung (mittels Tabelle oder Gleichungen) spielt die Summe der Anzahlen keine Rolle. Wenn du den Antwortsatz vergisst, könnte die Lösung unvollständig sein, wenn in deiner Darstellung die Berechnung der Summe nicht zu finden ist.

****

Aufgabe 4. Kreisa und Quadrato haben auf ihrer Wanderung vier Poster gekauft, ein Poster von einer Burg, ein Poster von einem Schloss und zwei Poster aus dem Tierpark.

Aufgabe 4a) Sie wollen die Poster so in einer Reihe aufhängen, dass die zwei Poster vom Tierpark direkt nebeneinander hängen. Dabei kommt es nicht darauf an, was auf den Tierparkpostern zu sehen ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dafür eine Reihenfolge auszuwählen?

Aufgabe 4b) Sie wollen nun die Poster so in einer Reihe aufhängen, dass die zwei Poster vom Tierpark nicht direkt nebeneinander hängen. Dabei kommt es nicht darauf an, was auf den Tierparkpostern zu sehen ist. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, dafür eine Reihenfolge auszuwählen?

Aufgabe 4c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die vier Poster so aufzuhängen, dass das Poster von der Burg ganz links zu sehen ist? Auch dabei kommt es nicht darauf an, was auf den Tierparkpostern zu sehen ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4:
Wir nehmen an, dass die Poster des Tierparks bei dieser Aufgabe nicht unterschieden werden. Es spielt also keine Rolle, was auf diesen Postern zu sehen ist. Dann können wir die Poster mit B (wie Burg), S (wie Schloss) und zweimal T (wie Tierpark) abkürzen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Es gibt 6 Möglichkeiten der Anordnung, wenn die Tierpark-Poster nebeneinander hängen.

Begründung: Schreibe einfach alle Möglichkeiten auf:

B S T T S B T T **B T T S** S T T B T T B S T T S B

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Es gibt 6 Möglichkeiten der Anordnung, wenn die Tierpark-Poster nicht nebeneinander hängen.

Begründung: Schreibe auch für diese Bedingungen alle Möglichkeiten auf:

B T S T   S T B T   T B T S   T S T B   T B S T   T S B T

Lösungshinweise zu Aufgabe 4c) – Antwortsatz: Es gibt 3 Möglichkeiten der Anordnung, wenn das Poster der Burg ganz links hängt.

Begründung: Da die Antworten aus a) und b) alle Möglichkeiten von Anordnungen zeigen, genügt es, unter diesen alle Anordnungen zu zählen, die mit B beginnen. Die zulässigen Anordnungen wurden in beiden Listen markiert.

Ergänzung: Es ist aber auch möglich, dass es uns wichtig ist, was auf den Postern zu sehen ist. Dann betrachten wir die zwei Poster des Tierparks als zwei verschiedene Poster, die wir unterschieden wollen. Dann musst du sie aber mit zwei verschiedenen Abkürzungen bezeichnen (zum Beispiel T1 und T2). Jetzt ergeben T1 T2 (T1 hängt links von T2) und T2 T1 (T1 hängt rechts von T2) zwei verschiedene Anordnungen. Somit gibt es doppelt so viele Anordnungen wie im obigen Fall:

Ergänzung zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten der Anordnung, wenn die Tierpark-Poster nebeneinander hängen:

B S T1 T2; S B T1 T2; **B T1 T2 S;** S T1 T2 B; T1 T2 B S; T1 T2 S B;
B S T2 T1; S B T2 T1; **B T2 T1 S;** S T2 T1 B; T2 T1 B S; T2 T1 S B.

Ergänzung zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten der Anordnung, wenn die Tierpark-Poster nicht nebeneinander hängen:

B T1 S T2; S T1 B T2; T1 B T2 S; T1 S T2 B; T1 B S T2; T1 S B T2;
B T2 S T1; S T2 B T1; T2 B T1 S; T2 S T1 B; T2 B S T1; T2 S B T1.

Ergänzung zu Aufgabe 4c) – Antwortsatz: Es gibt 6 Möglichkeiten der Anordnung, wenn das Poster der Burg ganz links hängt.

Hinweis: Beide Varianten wurden als richtiger Lösungsansatz bewertet.

****

Runde 1 — Spiel mit Domino-Steinen (Teil B)

Aufgabe 1a) Quadrato hat eine Vorlage gezeichnet, die wie ein Fensterahmen aus 6 Domino-Steinen aussieht. Er hat eine Belegung gefunden, bei der jede Seitensumme 12 beträgt.

0	1	5	6
5			0
5			0
2	3	1	6

Findest du eine weitere Belegung, bei der die Seitensummen 12 betragen**?**

Aufgabe 1b) Kreisa möchte den Fensterrahmen so mit Domino-Steinen belegen, dass jede Seitensumme 22 beträgt. Es gelingt ihr jedoch nicht. Endlich gibt sie auf und sagt: Das geht nicht mit der Seitensumme 22!“. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1c) Belege den Fensterahmen so, dass eine möglichst kleine Seitensumme entsteht. Zeige dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a): Es gibt viele Möglichkeiten, solche Fenster anzugeben. Es genügt sogar, nur den Stein 5-5 durch einen anderen Stein mit der Summe 10 zu ersetzen, beispielsweise durch den Stein 6-4.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b): Es gelingt, an drei Seiten die Summe 22 zu erreichen. Aber für die Fragezeichen sind nur noch die Ziffern 0, 1, 2 und 3 verfügbar. Somit kann die Seitensumme der vierten Seite nicht größer als 17 werden.

6	6	5	5
6			6
4			5
6	?	?	6

Wir können sogar genau begründen, warum Kreisa recht hat: Wir suchen die sechs Domino-Steine mit den höchsten Zahlen heraus. Auch wenn wir noch nicht wissen, ob wir daraus ein geeignetes Fenster legen können, so wissen wir bereits: Die Summe aller Felder von 6 Domino-Steinen kann nicht größer als

$$(6 + 6) + (6 + 5) + (6 + 4) + (5 + 5) + (6 + 3) + (5 + 4) = 61$$

sein. Wenn wir die vier Seitensummen addieren, müssen wir beachten, dass die Zahlen an den Ecken doppelt gezählt werden. Es kann also maximal ($4 \cdot 6 =$) 24 dazu kommen (wenn an jeder Ecke ein 6 steht). Die Summe der vier Seitensummen ist also höchstens insgesamt $61 + 24 = 85$. Das ist aber weniger als die geforderte Summe $4 \cdot 22 = 88$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c): Um die kleinste Seitensumme zu finden, kannst du es zuerst mit den Domino-Steinen versuchen, die die kleinsten Summen haben: 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 0-3, 1-2. Da der Domino-Stein 0-3 zu verwenden ist, muss die Seitensumme mindestens 3 sein. Wie die Abbildung zeigt, kannst du aus diesen 6 Domino-Steinen tatsächlich ein Fenster legen.

0	3	0	0
1			1
2			1
0	2	0	1

****

Aufgabe 2a) Wie viele Domino-Steine zeigen weder die Augenzahl 0 noch die Augenzahl 3? Begründe dein Ergebnis.

Aufgabe 2b) Quadrato hat sich aus den Domino-Steinen ohne 0 und 3 zwei Steine herausgesucht. Er sagt: „Die Summe der Augenzahlen ist auf beiden Domino-Steinen gleich groß. Die Differenz beider Augenzahlen eines Domino-Steines ist doppelt so groß wie die Differenz der Augenzahlen des anderen Domino-Steines“.

Finde heraus, welche Domino-Steine sich Quadrato genommen hat.

Aufgabe 2c) Kreisa hat sich 3 Domino-Steine genommen und sagt: „Die Summe der Augenzahlen des zweiten Steines ist doppelt so groß wie die Summe der Augenzahlen des ersten Steins. Die Summe der Augenzahlen des dritten Steines ist doppelt so groß wie die Summe der Augenzahlen des zweiten Steins. Außerdem gilt, dass bei keinem meiner Steine die Punktzahlen auf beiden Felder gleich sind.“

Welche Steine hat sich Kreisa genommen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Es sollen die Steine mit 0-0, 0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6 sowie 1-3, 2-3, 3-3, 3-4, 3-5, 3-6 herausgenommen werden. Das sind 13 Steine. Somit verbleiben (28 – 13 =) 15 Domino-Steine.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Quadrato hat die Domino-Steine 2-4 und 1-5 ausgewählt. Die Lösung ist eindeutig.

Herleitung: Bilde für jeden der Domino-Steine die Summe der Augenzahlen.

1 + 1 = 2, 1 + 2 = 3, 1 + 4 = 5, **1 + 5 = 6**, 1 + 6 = 7, 2 + 2 = 4,
2 + 4 = 6, 2 + 5 = 7, **2 + 6 = 8**, **4 + 4 = 8**, 4 + 5 = 9, **4 + 6 = 10**,
5 + 5 = 10, 5 + 6 = 11, 6 + 6 = 12.

Es gibt nur 3 Paare von Domino-Steinen, die die gleiche Summe haben. Für diese prüfe nun die Differenz:

5 – 1 = 4, **4 – 2 = 2**
6 – 2 = 4, 4 – 4 = 0
6 – 4 = 2, 5 – 5 = 0.

Nur im ersten Paar ist die Bedingung an die Differenzen erfüllt: Die eine Differenz (2) ist doppelt so groß wie die andere Differenz (4).

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c): Die Aufgabenstellung war leider ungenau. Es gibt mehrere Varianten für die Lösung.

Lösungsvariante 1: Wenn Kreisa die 15 Domino-Steine ohne 0 und ohne 3 verwendet, kann ihre Aussage nicht stimmen.

Begründung: Der Domino-Stein 1-2 hat die kleinste Summe 3. Dann haben der zweite Stein die Summe (2 · 3 =) 6 und der dritte Stein die Summe (2 · 6 =) 12. Doch für 12 kann nur der Domino-Stein 6-6 verwendet werden. Das hat aber Kreisa mit ihrer Aussage ausgeschlossen.

Lösungsvariante 2: Vielleicht hat sich Kreisa versprochen und sie meinte: *„… dass bei* ***einem*** *meiner Steine die Punktzahlen auf beiden Felder gleich sind."*

Dann kann Kreisa die Steine 1-2, 1-5, 6-6 oder die Steine 1-2, 2-4, 6-6 ausgewählt haben. Die Lösung ist also nicht eindeutig. Weitere Lösungen gibt es aber nicht, da bei jedem anderen ersten Domino-Stein die Summe der Felder des dritten Steines größer als 12 sein müsste. Dafür gäbe es aber keinen Domino-Stein.

Lösungsvariante 3: Wenn Kreisa wieder alle 28 Domino-Steine verwenden durfte, dann gibt es 6 Lösungen ohne Doppelsteine:

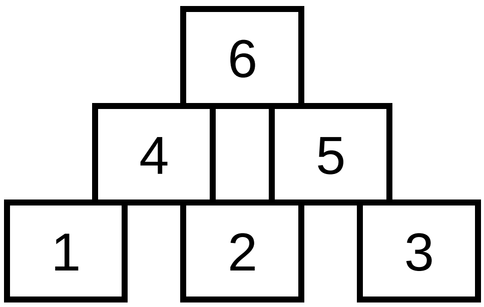
0-1, 0-2, 0-4; 0-1, 0-2, 1-3;
0-2, 0-4, 2-6; 0-2, 1-3, 2-6; 0-2, 1-3, 2-6; 0-2, 1-3, 2-6

Hinweis: Für alle richtigen Lösungen in jeder Variante wurde ein Punkt vergeben.

****

Runde 2 **Büchsen abräumen** (Teil A)

Familie Geometrie spielt "Büchsen abräumen". Dafür stellen sie Büchsen wie Pyramiden auf. In der Abbildung ist eine Pyramide mit drei Etagen abgebildet. Jeder wirft mit einem Ball und versucht mit einem Treffer möglichst viele Büchsen abzuräumen.



Wird eine Büchse getroffen, fallen alle darüber stehenden Büchsen herunter. Beispiele:

- Quadrato trifft Büchse 3. Dann fallen auch Büchsen 5 und 6. Er hat also mit seinem Treffer drei Büchsen abgeräumt.

- Kreisa trifft Büchse 4. Dann fällt auch Büchse 6. Sie hat so zwei Büchsen abgeräumt.
- Wenn Herr Raute Büchse 2 trifft, hat er vier Büchsen abgeräumt: Büchsen 2, 4, 5, 6.

Aufgabe 1. Quadrato hat eine Pyramide mit 5 Etagen aufgebaut. Er wirft mehrmals auf diese Pyramide. Nach jedem Wurf bleiben die nicht abgeräumten Büchsen stehen, auf die er mit dem nächsten Wurf zielt.

Aufgabe 1a) Wie oft muss Quadrato mindestens werfen, um alle Büchsen abzuräumen? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1b) Wie viele Büchsen kann er mit zwei Würfen maximal abräumen? Gib ein Beispiel an, welche Büchsen er mit zwei Würfen abräumen könnte.

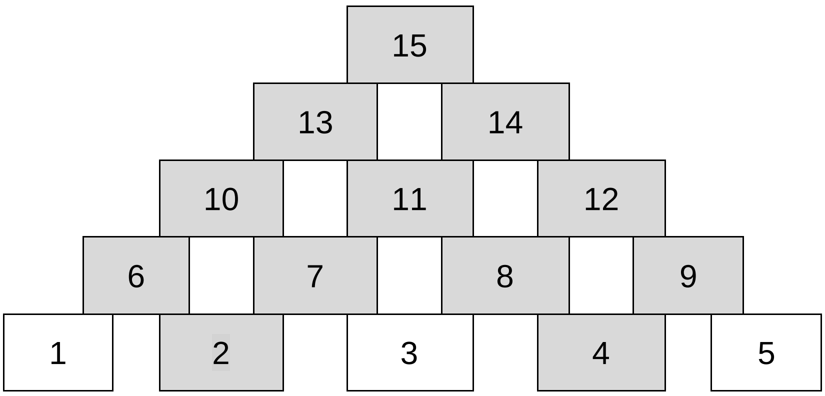
Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz*:* Quadrato muss mindestens fünfmal werfen, um alle Büchsen abzuräumen.

Begründung: Wird eine Büchse getroffen, so werden nur darüberstehende Büchsen abgeräumt, nicht aber andere Büchsen aus der gleichen Reihe. Um alle Büchsen abzuräumen, muss Quadrato also alle fünf Büchsen der untersten Reihe treffen. Für jede Büchse benötigt er einen Wurf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Quadrato kann mit zwei Würfen maximal 12 Büchsen abräumen.

Begründung: Eine Pyramide mit fünf Etagen besteht aus (5 + 4 + 3 + 2 + 1 =) 15 Büchsen. Mit zwei Würfen können nur 2 Büchsen der untersten Reihe abgeräumt werden. Also bleiben mindestens 3 Büchsen stehen und es können maximal (15 – 3 =) 12 Büchsen abgeräumt werden.

Durch ein Beispiel ist zu zeigen, dass es gelingen kann: Trifft Quadrato die Büchsen mit den Nummern 2 und 4, so werden alle Büchsen der zweiten bis fünften Etagen abgeräumt, es bleiben nur die Büchsen 1, 3 und 5 stehen.



****

Aufgabe 2. Kreisa hat 40 Büchsen. Sie möchte daraus mehrere Pyramiden aufbauen, sodass keine Büchsen übrig bleiben.

Wie viele Möglichkeiten hat Kreisa für den Aufbau der Pyramiden? Gib alle Möglichkeiten an, wie Kreisa die 40 Büchsen in Pyramiden aufstellen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Kreisa hat 16 Möglichkeiten, Pyramiden zu bauen.

Herleitung: Nur eine Büchse ist natürlich keine aufgebaute Pyramide. Wir suchen also nur die Möglichkeiten, bei denen die Pyramiden in der untersten Etage mindestens zwei Büchsen haben. Zunächst finden wir heraus, wie viele Büchsen Kreisa für eine Pyramide benötigt. Dabei stellen wir fest, dass sich die Anzahl der Büchsen der nächstgrößeren Pyramide jeweils um die Anzahl der Büchsen in der neu hinzukommenden untersten Etage erhöht.

Anzahl Büchsen in unterster Reihe	Anzahl aller Büchsen	Berechnung
2	3	
3	6	3 + 3
4	10	6 + 4
5	15	10 + 5
6	21	15 + 6
7	28	21 + 7
8	36	28 + 8

Kreisa beginnt immer mit möglichst großen Pyramiden. Wenn sie eine Pyramide mit 36 Büchsen baut, kann sie aus den verbleibenden 4 Büchsen keine vollständigen Pyramiden mehr bauen.

Kreisa kann eine Pyramide aus 28 Büchsen bauen. Würde sie nun eine Pyramide aus 10 Büchsen bauen, kann sie die verbleibenden 2 Büchsen nicht zu einer vollständigen Pyramide bauen. Deshalb hat sie genau drei Möglichkeiten, aus den verbleibenden 12 Büchsen Pyramiden zu bauen:

(1) zwei Pyramiden mit 6 Büchsen,
(2) eine Pyramide mit 6 Büchsen und zwei Pyramiden mit drei Büchsen,
(3) vier Pyramiden aus 3 Büchsen.

Wir tragen alle diese und weitere Versuche in einer Tabelle ein. Wir stellen fest: Wenn die großen Pyramiden gebaut wurden, dann können die verbleibenden Büchsen nur dann zu vollständigen Pyramiden verbaut werden, wenn die Anzahl der verbleibenden Pyramiden ein Vielfaches von 3 ist.

Nr.	Große Pyramiden					verbleibende Anzahl Büchsen	6	3
	36	28	21	15	10			
	1					4	geht nicht	
		1			1	2	geht nicht	
1		1				12	2	0
2		1				12	1	2
3		1				12	0	4
			1	1		4	geht nicht	
4			1		1	9	1	1
5			1		1	9	0	3
6				2	1	0	0	0
				1	2	5	geht nicht	
7				1	1	15	2	1
8				1	1	15	1	3
9				1	1	15	0	5
10					4	0	0	0
11					1	30	5	0
12					1	30	4	2

13					1	30	3	4
14					1	30	2	6
15					1	30	1	8
16					1	30	0	10

****

Aufgabe 3. Familie Geometrie hat einen Wettkampf „Büchsen abräumen“ durchgeführt. Am Ende zählte jeder die Anzahl seiner abgeräumten Büchsen zusammen. Sie stellten fest:

(a) Kreisa räumte 5 Büchsen mehr als Quadrato ab.
(b) Herr Raute räumte doppelt so viele Büchsen wie Quadrato ab
(c) Frau Dreieck und Kreisa räumten gleich viele Büchsen ab.
(d) Frau Dreieck und Kreisa räumten zusammen genau so viele Büchsen ab wie Herr Raute und Quadrato zusammen.

Wie viele Büchsen räumten alle vier zusammen ab?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Alle vier räumten insgesamt 60 Büchsen ab.

Herleitung: Eine solche Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Benutze dafür eine Tabelle. Trage in die erste Spalte ein, wie viele Büchsen Quadrato abgeräumt haben könnte. Mithilfe der Aussagen (a) bis (c) findest du heraus, wie viele Büchsen dann die anderen abgeräumt haben. Mit der Aussage (d) kannst du prüfen, ob du damit die Lösung gefunden hast. Wir benutzen die Anfangsbuchstaben der Namen (Q, K, R, D) als Variablen für die Anzahl der Büchsen, die sie abgeräumt haben.

Q	Aussage (a)	Aussage (b)	(c)	Aussage (d)		
	Q + 5 = K	2 · Q = R	D = K	D + K	R + Q	Vergleich
1	1 + 5 = 6	2 · 1 = 2	6	6 + 6 = 12	2 + 1 = 3	12 > 3
2	2 + 5 = 7	2 · 2 = 4	7	7 + 7 = 14	2 + 4 = 6	14 > 6
Wir können einige Versuche überspringen.						
9	9 + 5 = 14	2 · 9 = 18	14	14 + 14 = 28	9 + 18 = 27	28 > 27
10	**10 + 5 = 15**	**2 · 10 = 20**	**15**	**15 + 15 = 30**	**10 + 20 = 30**	**30 = 30**
11	11 + 5 = 16	2 · 11 = 22	16	16 + 16 = 32	11 + 22 = 33	32 < 33

Nur wenn Quadrato 10 Büchsen abräumte, sind alle Bedingungen erfüllt.

Lösungsvariante: In der ersten Zeile der Tabelle haben wir bereits Gleichungen eingetragen. Mit diesen können wir die Lösung finden, ohne zu probieren. Es soll gelten:

(a) $Q + 5 = K$ (b) $2 \cdot Q = R$ (c) $D = K$ (d) $D + K = R + Q$

In die Gleichung (d) tragen wir solche Beziehungen ein, die nur Q enthalten:

$$Q + 5 + Q + 5 = 2 \cdot Q + Q$$

In dieser Gleichung können wir nun zusammenfassen und finden das Ergebnis für Quadratos Büchsenanzahl:

$2 \cdot Q + 10 = 3 \cdot Q$, also $Q = 10$.

Nun kannst du mit den Gleichungen (a) bis (c) ausrechnen, wie viele Büchsen die anderen abräumten, und den Antwortsatz schreiben.

Weitere Lösungsvariante: Kreisa hat 5 Büchsen mehr als Quadrato und Frau Dreieck hat genauso viele Büchsen wie Kreisa. Also haben Kreisa und Frau Dreieck zusammen 10 Büchsen mehr als Quadrato. Da Quadrato und Herr Raute zusammen genauso viele Büchsen wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen abräumten, hat auch Herr Raute 10 Büchsen mehr als Quadrato abgeräumt. Weil Herr Raute doppelt so viele Büchsen wie Quadrato abräumte, hat Quadrato 10 Büchsen abgeräumt.

Nun kannst du ausrechnen, wie viele Büchsen die anderen abräumten, und den Antwortsatz schreiben.

****

Aufgabe 4. Bei einem anderen Familienwettkampf gab jeder vorher einen Tipp über den Ausgang des Wettbewerbs ab.

(a) Kreisa wird mehr Büchsen als Quadrato abräumen.
(b) Quadrato wird nicht letzter.
(c) Herr Raute wird vor Quadrato platziert sein.
(d) Frau Dreieck gewinnt den Familienwettbewerb.

Nach dem Wettbewerb stellten sie fest, dass jeder eine andere Anzahl Büchsen abräumte. Allerdings war nur ein Tipp richtig war. Alle anderen Tipps stimmten nicht.

Findest du heraus, wer den Wettbewerb gewonnen hat? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Quadrato hat den Wettbewerb gewonnen.

Begründung: Nur ein Tipp war richtig, alle anderen stimmten nicht. Wir untersuchen deshalb, welcher Tipp der richtige gewesen sein könnte.

Angenommen, Kreisas Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Herrn Raute hatte nicht recht, er war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Kreisas Tipp nicht richtig.

Angenommen, Quadratos Tipp war richtig. Dann war Kreisas Tipp falsch und Kreisa hat weniger Büchsen abgeräumt als Quadrato, war also hinter Quadrato platziert. Auch Herrn Raute hatte nicht recht und er war ebenfalls hinter Quadrato platziert. Da auch der Tipp von Frau Dreieck nicht stimmte, hat sie den Wettbewerb nicht gewonnen. Also wurde Quadrato der Erste.

Obwohl wir jetzt eine Lösung kennen, prüfen wir auch noch die Aussagen von Herrn Raute und Frau Dreieck, ob sie auch zu einer Lösung führen:

Angenommen, Herrn Rautes Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Kreisa hatte nicht recht, sie war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Herrn Rautes Tipp nicht richtig.

Angenommen, Frau Dreiecks Tipp war richtig. Dann stimmt Quadratos Tipp nicht und er wurde letzter. Aber auch Kreisa hatte nicht recht, sie war also nach Quadrato platziert. Beide Aussagen können jedoch nicht gleichzeitig gelten. Also war Frau Dreiecks Tipp nicht richtig.

Nur wenn Quadratos Tipp richtig war, stimmten alle anderen Tipps nicht. In diesem Fall kann Quadrato als Gewinner des Wettbewerbs eindeutig ermittelt werden.

Lösungsvariante: Wir können prüfen, wie viele Aussagen richtig (r) und wie viele Aussagen falsch (f) sind, wenn wir den Sieger kennen. Wir legen dafür eine Tabelle an. Als erstes untersuchen wir die Aussage (b). Wenn wir nicht genau wissen, ob diese Aussage richtig ist, probieren wir zunächst die Möglichkeit, diese Aussage sei falsch:

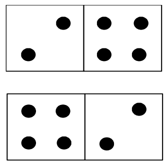
Sieger	Aussage (b)	Aussage (a)	Aussage (c)	Aussage (d)
Kreisa	f	r	r	f
Quadrato	r	f	f	f
Herr Raute	f	r	r	f
Frau Dreieck	f	r	r	r

Wenn Quadrato nicht Sieger war, kann Aussage (b) nicht richtig sein, weil es noch eine andere Aussage gibt, die richtig ist. Nur wenn Quadrato gewann, sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

****

Runde 2 — Neues Spiel mit Domino-Steinen (Teil B)

Kreisa und Quadrato spielen wieder mit Domino-Steinen. Du erinnerst dich: Ein Domino-Spiel besteht aus Spielsteinen, die jeweils in zwei quadratische Felder aufgeteilt sind. Auf diesen Feldern sind Punkte so angebracht, dass jede mögliche Kombination aus je zwei Zahlen von 0 bis 6 genau einmal dargestellt ist. Es gibt 28 verschiedene Spielsteine.



Jeden Stein gibt es nur einmal, das heißt, in nebenstehender Abbildung sind beide Steine gleich. Statt Spielsteine mit Punkten zu zeichnen, können wir die Anzahl der Punkte auf die Felder schreiben. Den abgebildeten Spielstein bezeichnen wir kurz mit 2-4. Für ein leeres Feld schreiben wir „0“.

2	4

Aufgabe 1. Quadrato legt eine Reihe mit Domino-Steinen, sodass zwei benachbarte Domino-Steine mit der gleichen Zahl aneinander stoßen:

Aufgabe 1a) Ergänze die zwei fehlenden Domino-Steine so, dass die Summe aller Punktzahlen der sieben Domino-Steine 35 beträgt?

1	1	1	5	5	3	3	2	?	?	?	?	1	2

Aufgabe 1b) Ergänze in diesem Beispiel die Reihe so, dass die Summe aller Punktzahlen der sieben Domino-Steine 58 beträgt

2	1	1	3	3	6	6	4	?	?	?	?	?	?

Aufgabe 1c) Für ein anderes Beispiel behauptet Quadrato, dass die Summe aller Punktzahlen der sieben Domino-Steine 36 beträgt. Erkläre, warum diese Behauptung nicht stimmen kann.

3	1	1	2	?	?	?	?	4	5	5	1	1	0

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Mit den Dominosteinen 2-4 und 4-1 beträgt die Summe aller Punktzahlen 35.

Hinweis: Es genügt die Angabe der richtigen Steine und die Probe, dass die Summe 35 beträgt. Die Lösung ist deshalb durch Probieren mit Domino-Steinen zu finden. Aber du kannst die Lösung auch herleiten. Dazu schreiben wir statt der Fragezeichen Buchstaben.

1	**1**	**1**	**5**	**5**	**3**	**3**	**2**	**a**	**b**	**c**	**d**	**1**	**2**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

$a = 2$, $b = c$, $d = 1$.

Außerdem soll gelten

$$35 = 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + a + b + c + d + 1 + 2 =$$
$$1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 3 + 3 + 2 + 2 + b + b + 1 + 1 + 2 = 27 + 2 \cdot b$$

Damit findest du $b = 4$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Es müssen die Dominosteine 4-5, 5-6 und 6-6 ergänzt werden.

2	**1**	**1**	**3**	**3**	**6**	**6**	**4**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

$a = 4$, $b = c$, $d = e$.

Außerdem soll gelten

$$58 = 2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 6 + 4 + a + b + c + d + e + f =$$
$$2 + 1 + 1 + 3 + 3 + 6 + 6 + 4 + 4 + b + b + d + d + f =$$
$$30 + 2 \cdot b + 2 \cdot d + f$$

also muss die Gleichung

$$28 = 2 \cdot b + 2 \cdot d + f$$

erfüllt sein. Die größte Punktzahl, die du für b einsetzen kannst, ist $b = 5$ (weil der Domino-Stein 4-6 schon verwendet wurde).

Aus $28 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot d + f$ folgt die Gleichung $18 = 2 \cdot d + f$. Da d und f nicht größer als 6 sind, gibt es nur die Möglichkeit $d = 6$ und $f = f$, um diese Gleichung zu erfüllen.

Setzt du für b eine kleinere Zahl als 5, so wäre $2 \cdot d + f > 18$, was nicht möglich ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Da die Summe der bereits sichtbaren Punktzahlen eine ungerade Zahl ist und die zu ergänzenden Punktzahlen eine geradzahlige Summe ergeben, kann die Gesamtsumme nicht 36 sein.

Hinweis: Willst du diese Aufgaben durch Probieren lösen, so musst du alle Möglichkeiten der Belegung geprüft haben. Beachte dabei die Regeln für das Anlegen von Domino-Steinen:

1. fehlender Stein	2. fehlender Stein	Gesamt-summe	Bemerkung
2-0	0-4	29	
2-1			nicht möglich, weil 1-2 schon verwendet wurde
2-2	2-4	33	
2-3	3-4	35	
2-4	4-4	37	
2-5	5-4		nicht möglich, weil 4-5 schon verwendet wurde
2-6	6-4	41	

Lösungsvariante: Aber du kannst auch mit einer Rechnung beweisen, dass es keine Lösung geben kann.

3	**1**	**1**	**2**	**a**	**b**	**c**	**d**	**4**	**5**	**5**	**1**	**1**	**0**

Aufgrund der Regeln für das Anlegen von Dominosteinen gilt:

$a = 2$, $b = c$, $d = 4$.

Für die Summe aller Punktzahlen soll gelten

$$36 = 3 + 1 + 1 + 2 + a + b + c + d + 4 + 5 + 5 + 1 + 1 + 0 =$$
$$3 + 1 + 1 + 2 + 2 + b + b + 4 + 4 + 5 + 5 + 1 + 1 + 0 = 29 + 2 \cdot b$$

So erhältst du die Gleichung $7 = 2 \cdot b$. Dafür gibt es jedoch keine Lösung, da b nur die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen kann.

****

Aufgabe 2. Kreisa verwendet nur die Domino-Steine 0-0, 0-1, 0-2, 1-1, 1-2 und 2-2. Sie hat diese sechs Domino-Steine zu einem Rechteck gelegt. Dann hat sie die Punkte auf ein Blatt Papier übertragen, aber nicht die Lage der Steine eingezeichnet.

Aufgabe 2a) Wie sind die Domino-Steine zu legen, damit Anordnung A erfüllt wird. Finde zwei verschiedene Anordnungen.

Aufgabe 2b) Erkläre, warum Anordnung B nicht durch Auflegen von Domino-Steinen erfüllt werden kann!

Aufgabe 2c) Begründe, warum für die Anordnung C das Auflegen von Domino-Steinen eindeutig bestimmt ist.

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Anordnung A

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Anordnung B

0	0	1	2
1	0	1	2
1	0	2	2

Anordnung C

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Es gibt nur eine Möglichkeit, den Domino-Stein 1-1 aufzulegen. Ebenso gibt es nur eine Möglichkeit, den Domino-Stein 0-2 aufzulegen. Hast du beide Steine aufgelegt, gibt es für den Domino-Stein 2-2 auch nur noch eine Möglichkeit (vergleiche Abbildung 2a1).

Nun gibt es zwei Möglichkeiten für die Lage des Domino-Steines 0-0. Legst du ihn vertikal (Abbildung 2a2), so ist die Lage der verbleibenden Steine auch festgelegt. Legst du ihn horizontal, verbleiben noch zwei Möglichkeiten, die verbleibenden Steine aufzulegen (Abbildungen 2a3 und 2a4).

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a1

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a2

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a3

0	0	0	1
0	1	2	1
1	2	2	2

Abb. 2a4

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b): Für die Doppelsteine 0-0, 1-1 und 2-2 gibt es jeweils drei verschiedene Möglichkeiten, ihn aufzulegen. Wir untersuchen 0-0:

- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b1, so kann 0-0 nicht noch einmal verwendet werden, also ist die Lage des Steines 0-1 schon festgelegt. Aber es gibt nur einen Stein 0-1.
- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b2, so steht auf jedem Nachbarfeld einer 0 die Punktzahl 1, aber es gibt nur einen Stein 0-1.
- Liegt der Stein 0-0 wie in Abbildung 2b3, so müsste ein zweiter Stein 0-0 gelegt werden.

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b1

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b2

0	0	1	2
0	1	1	2
0	1	2	2

Abb. 2b3

Diese Begründung genügt, um nachzuweisen, dass es keine Belegung geben kann. Probiere aber einmal zur Übung aus, wie dieser Nachweis auch mit den Steinen 1-1 oder 2-2 geführt werden kann.

Lösungsvariante: Du kannst jedoch viel kürzer zeigen, dass es keine Lösung geben kann: An keiner Stelle stoßen Felder mit „0“ und „2“ aneinander, also kann der Stein 0-2 nicht aufgelegt werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c): Es gibt nur eine mögliche Lage für den Domino-Stein 0-2 (Abbildung 2c1). Dann sind links und rechts davon die nächsten Steine 1-1 und 2-2 bereits festgelegt (Abbildung 2c2). Auch danach gibt es links oben nur eine Möglichkeit mit 0-0 auszulegen (Abbildung 2c3). Und schließlich kann das Rechteck nur noch wie in Abbildung 2c4 vollständig bedeckt werden.

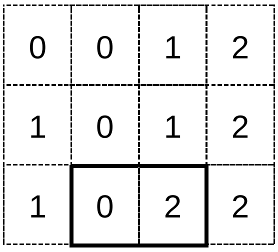


Abb. 2c1

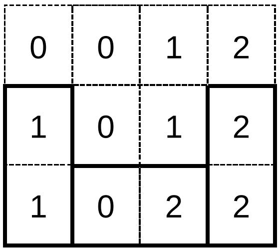


Abb. 2c2

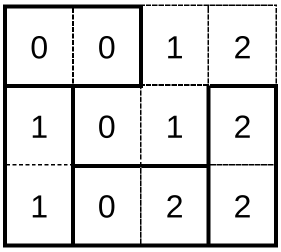


Abb. 2c3

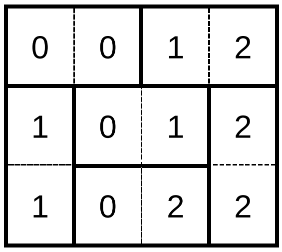
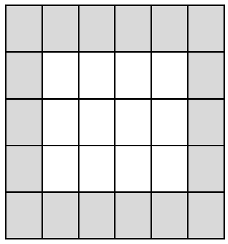


Abb. 2c4

****

Runde 3 **So viele Blumen** (Teil A)

Aufgabe 1. Frau Dreieck hat in ein rechteckiges Beet so ähnlich wie in der Abbildung Blumenzwiebel gesteckt: Ein paar Reihen Zwiebeln für gelbe Tulpen (weiße Felder) und außen herum Zwiebeln für rote Tulpen (graue Felder). In der Abbildung ist Platz für 12 gelbe Tulpen und 18 rote Tulpen. Doch Frau Dreieck hat ein größeres Beet auf diese Art gestaltet. Dabei war die Anzahl der Zwiebeln für die gelben Tulpen genauso groß wie die Anzahl der Zwiebeln für die roten Tulpen.



Wie viele Zwiebeln hat Frau Dreieck gesteckt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz*:* Es gibt zwei Möglichkeiten. Frau Dreieck kann 48 Zwiebeln oder 60 Zwiebeln gesteckt haben. (Es genügt, wenn du eine der beiden Lösungen gefunden hast.)

Herleitung: Weil Frau Dreieck ein größeres Beet hat, kannst du das Beet durch Einfügen von Spalten oder Zeilen zu vergrößern. Dabei stellst du fest:

Lösungsvariante 1: Wenn eine Spalte eingefügt wird, erhöht sich die Anzahl der äußeren Felder (rote Tulpen) um 2, die Anzahl der inneren Felder (gelbe Tulpen) um 3. In einer Tabelle, die mit 6 Spalten wie in der Aufgabenstellung beginnt, kannst du nun untersuchen, wie sich die Anzahl der roten und gelben Tulpen verändert. Bei 12 Spalten (und 5 Zeilen) stimmen die Anzahlen der roten und gelben Tulpen überein.

Anzahl Spalten	6	7	8	9	10	11	**12**
rote Tulpen	18	20	22	24	26	28	**30**
gelbe Tulpen	12	15	18	21	24	27	**30**

In der Tabelle ist die Probe bereits enthalten, aber rechne trotzdem noch einmal nach: Von den $12 \cdot 5 = 60$ Feldern sind im Inneren $10 \cdot 3 = 30$ Felder weiß (gelbe Tulpen). Somit sind $60 - 30 = 30$ Felder grau (rote Tulpen).

Lösungsvariante 2: Wenn eine Zeile eingefügt wird, erhöht sich die Anzahl der äußeren Felder (rote Tulpen) um 2, die Anzahl der inneren Felder (gelbe Tulpen) um 4. In einer Tabelle, die mit 5 Zeilen wie in der Aufgabenstellung beginnt, kannst du nun untersuchen, wie sich die Anzahl der roten und gelben Tulpen verändert. Bei 8 Zeilen (und 6 Spalten) stimmen die Anzahlen der roten und gelben Tulpen überein.

Anzahl Zeilen	5	6	7	**8**
rote Tulpen	18	20	22	**24**
gelbe Tulpen	12	16	20	**24**

Auch in dieser Tabelle ist die Probe bereits enthalten, aber rechne trotzdem noch einmal nach: Von den $8 \cdot 6 = 48$ Feldern sind im Inneren $6 \cdot 4 = 24$ Felder weiß (gelbe Tulpen). Somit sind $48 – 24 = 24$ Felder grau (rote Tulpen).

Hinweis: Es gibt keine weiteren Möglichkeiten. Zwar könnte es noch bei abwechselnden Einfügen von Spalten und Zeilen weitere Lösungen geben. Aber das ist nicht der Fall – auch wenn wir es hier nicht untersucht haben.

****

Aufgabe 2. Im Blumenladen wurden verschiedene Blumensträuße angeboten: Sträuße mit 4 gelben Tulpen, Sträuße mit 5 roten Tulpen und Sträuße mit 7 Narzissen. Herr Raute kaufte 5 Sträuße, von jeder Sorte mindestens einen. Zu Hause angekommen nahm er die Sträuße auseinander und wollte drei neue große Sträuße binden. Er stellte aber fest, dass bei zwei Blumen leider die Blüten abgebrochen waren. Diese beiden Blumen legte er beiseite. Mit den anderen Blumen konnte er drei Sträuße mit gleicher Anzahl Blumen binden.

Wie viele Sträuße hat Herr Raute von jeder Sorte gekauft?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Herr Raute hat einen Strauß gelbe Tulpen, drei Sträuße rote Tulpen und einen Strauß Narzissen gekauft.

Probe: Herr Raute hat mit den 5 Sträußen insgesamt ($1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 =$) 26 Blumen gekauft. Weil er zwei Blumen davon beiseite legen musste, blieben ihm 24 Blumen. Diese konnte er zu 3 Sträußen mit jeweils ($24 : 3 =$) 8 Blumen binden.

Herleitung: Herr Raute kaufte von jeder Sorte mindestens einen Strauß. Also kaufte er mindestens ($4 + 5 + 7 =$) 16 Blumen. Probiere nun in einer Tabelle alle Möglichkeiten, wie viele Blumen mit zwei weiteren Sträußen dazu kommen können:

bereits gekauft	gelbe Tulpen	rote Tulpen	Narzissen	Summe	Summe – 2
16	4 + 4	0	0	24	22
16	4	5	0	25	23
16	4	0	7	27	25
16	**0**	**5 + 5**	**0**	**26**	**24**
16	0	5	7	28	26
16	0	0	7 + 7	30	28

Nur in einem Fall ist der Anzahl der verbleibenden Blumen durch 3 teilbar. Herr Raute kaufte also von jeder Sorte einen Strauß und zwei weitere Sträuße mit roten Tulpen.

****

Aufgabe 3. Familie Geometrie pflückte Blumen. Kreisa hat viele Blumen gepflückt, zweimal so viele wie Frau Dreieck. Herr Raute pflückte nur halb so viele Blumen wie Frau Dreieck. Quadrato hatte keine Lust und pflückte nur vier Blumen. Als sie zu Hause die Blumen in die Vase stellten, bemerkte Kreisa, dass sie allein so viele Blumen gepflückt hat wie Frau Dreieck, Herr Raute und Quadrato zusammen.

Wie viele Blumen füllten die Vase?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz*:* 32 Blumen füllten die Vase.

Probe: Da Kreisa genauso viele Blumen pflückte wie Frau Dreieck, Herr Raute und Quadrato zusammen, pflückte Kreisa (32 : 2 =) 16 Blumen. Frau Dreieck pflückte halb so viel, also (16 : 2 =) 8 Blumen. Herr Raute pflückte halb so viele Blumen wie Frau Dreieck, also (8 : 2 =) 4 Blumen. Und Quadrato pflückte 4 Blumen.

Kreisa pflückte genauso viele Blumen wie Frau Dreieck, Herr Raute und Quadrato zusammen, (8 + 4 + 4 = 16 Blumen).

Herleitung – Lösungsvariante 1: Aufgaben dieses Typs kannst du immer durch systematisches Probieren lösen. Trage dazu die Anzahl der Blumen, die sich bei deinen Versuchen ergeben, in einer Tabelle ein. Laut Aufgabentext weißt du: Kreisa pflückte doppelt so viele Blumen wie Frau Dreieck. Frau Dreieck pflückte doppelt so viele Blumen wie Herr Raute.

Also pflückte Herr Raute am wenigsten Blumen von diesen drei, sodass du deine Versuche mit der Blumenanzahl von Herrn Raute starten kannst.

Quadrato	Herr Raute	Frau Dreieck	Kreisa	Herr Raute, Frau Dreieck, Quadrato zusammen	Vergleich
4	1	2	4	7	4 < 7
4	2	4	8	10	8 < 10
4	3	6	12	13	12 < 13
4	**4**	**8**	**16**	**16**	**16 = 16**
4	5	10	20	19	20 > 19

Nur wenn Kreisa 16 Blumen pflückte, werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In der Tabelle kannst du ablesen, dass Frau Dreieck 8 Blumen und Herr Raute 4 Blumen pflückten.

Herleitung – Lösungsvariante 2: Diese Aufgabe kannst du aber auch mit Gleichungen lösen. Wenn du mit den ersten Buchstaben der Namen die Anzahl der gepflückten Blumen bezeichnest, kannst du folgende Gleichungen entsprechend des Aufgabentextes aufschreiben:

$$K = 2 \cdot D, \quad D = 2 \cdot R, Q = 4,$$
$$K = D + R + Q$$

Nun setzt du die Gleichungen der ersten Zeile in die zweite Zeile ein:

$$2 \cdot D = 2 \cdot R + R + 4$$

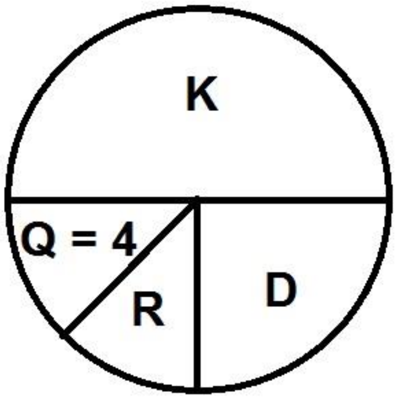
Auch für D kannst du noch einmal eine Gleichung der ersten Zeile einsetzen:

$$2 \cdot (2 \cdot R) = 2 \cdot R + R + 4$$

Wenn du alle R zusammenfasst, findest du die Lösung: $R = 4$. Daraus kannst du nun $D = 2 \cdot 4 = 8$ und $K = 2 \cdot 8 = 16$ berechnen.

Herleitung – Lösungsvariante 3: Diese Aufgabe kannst du aber auch mit einer Zeichnung lösen. Dazu zerschneiden wir eine Torte in vier Teile, für jeden ein Teil. Jedes Teil soll so groß sein, dass es der Anzahl der gepflückten Blumen entspricht:

Da Kreisa genau so viel erhält wie Frau Dreieck, Herr Raute und Quadrato zusammen, erhält Kreisa eine Hälfte der Torte (Halbkreis).



Kreisa erhält doppelt so viel wie Frau Dreieck, also erhält Frau Dreieck die Hälfte von dem, was Kreisa erhält (Viertelkreis).

Das verbleibende Stück ist genau so groß wie das Stück für Frau Dreieck. Dieses Stück wird halbiert, weil Herr Raute halb so viel wie Frau Dreieck erhält.

Somit erhält Herr Raute genau so viel wie Quadrato. Deshalb weißt du nun, dass Herr Raute ebenfalls 4 Blumen pflückte. Somit haben Frau Dreieck (2 · 4 =) 8 Blumen und Kreisa (2 · 8 =) 16 Blumen gepflückt.

****

Aufgabe 4. Im Garten der Familie Dreieck ist es schon Frühling geworden. Viele Frühlingsblüher zeigen ihre Blütenpracht: Krokusse, Tulpen und Narzissen. Nun rätseln sie über die Anzahl der Blüten:

Kreisa sagt: „Es sind mehr Narzissen als Krokusse“ und
„Es sind mehr Krokusse als Tulpen.“
Quadrato meint: „Es sind mehr Krokusse als Narzissen“ und
„Es sind mehr Tulpen als Narzissen“.
Herr Raute vermutet: „Es sind weniger Narzissen als Tulpen“ und
„Es sind weniger Narzissen als Krokusse“.

Frau Dreieck kennt die Anzahlen (die Blumensorten haben verschiedene Anzahlen). Sie stellt fest, dass jeder eine richtige Aussage und eine falsche Aussage gegeben hat.

Welche Blumensorte ist auf häufigsten zu sehen? Welche Blumensorte steht am wenigsten im Garten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Es gibt zwei Möglichkeiten:

- Entweder stehen Tulpen am häufigsten und Krokusse am wenigsten im Garten
- oder es stehen Krokusse am häufigsten und Tulpen am wenigsten im Garten.

Begründung: Da die Anzahlen der Blumensorten verschieden sind, kannst du die Aussagen von Herrn Raute auch anders formulieren:

„Es sind mehr Tulpen als Narzissen“ und
„Es sind mehr Krokusse als Narzissen“.

So hat es auch Quadrato geschätzt. Du musst also nur die Aussagen von Kreisa und Quadrato betrachten. Berücksichtige bei deiner Untersuchung die Feststellung von Frau Dreieck: Jeder gab eine richtige und eine falsche Aussage.

Lösungsvariante 1: Verwende die Anfangsbuchstaben der Blumennamen als Bezeichnung für die Variable für die Anzahlen der Blumen einer Sorte. Dann kannst du die Aussagen von Kreisa und Quadrato als Ungleichungen aufschreiben.

- Angenommen, die 1. Aussage von Kreisa ist richtig: $N > K$.
- Dann ist aber die 2. Aussage falsch, es gilt also: $T > K$.

Außerdem muss Quadratos 1. Aussage falsch sein, weil sie der 1. Aussage von Kreisa widerspricht.
- Deshalb ist die 2. Aussage von Quadrato richtig, also: T > N.

Aus den drei Ungleichungen ergibt sich die Reihenfolge: T > N > K.

Nun musst du aber auch noch die zweite Möglichkeit prüfen.

- Angenommen, die 2. Aussage von Kreisa ist richtig: K > T.
- Dann ist aber die 1. Aussage falsch, es gilt also: K > N.
- Außerdem muss Quadratos 1. Aussage richtig sein, weil sie das Gegenteil von Kreisas 1. Aussage angibt.
- Deshalb ist die 2. Aussage von Quadrato falsch, also: N > T.

Aus den drei Ungleichungen ergibt sich die Reihenfolge: K > N > T.

Beide Möglichkeiten sind Lösungen der Aufgabe.

Lösungsvariante 2: *A*ngenommen, Narzissen wären am häufigsten zu sehen. Dann sind beide Aussagen von Quadrato falsch. Doch das darf nicht sein. Also können Narzissen nicht am häufigsten sein.

Narzissen können aber auch nicht am wenigsten sein, denn dann wären beide Aussagen von Quadrate richtig. Auch das darf nicht sein.

Es verbleiben noch 2 Möglichkeiten: Entweder sind Tulpen am häufigsten (und damit Krokusse am wenigsten) oder Krokusse am häufigsten (und damit Tulpen am wenigsten).

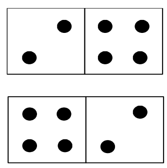
Bei beiden Möglichkeiten ist jeweils eine Aussage von Kreisa und Quadrato richtig und eine Aussage falsch.

Beide Möglichkeiten sind also Lösungen der Aufgabe.

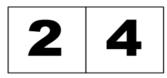
****

Runde 3 **Domino-Memory** (Teil B)

Kreisa und Quadrato spielen oft mit Domino-Steinen. Du erinnerst dich: Ein Domino-Spiel besteht aus Spielsteinen, die in zwei quadratische Felder aufgeteilt sind. Auf diesen Feldern sind Punkte so angebracht, dass jede mögliche Kombination aus zwei Zahlen von 0 bis 6 genau einmal dargestellt ist. Es gibt 28 verschiedene Spielsteine. Jeden Stein gibt es nur einmal, das heißt, in nebenstehender Abbildung sind beide Steine gleich.



Statt Punkte zu zeichnen können wir die Anzahl der Punkte als Zahl auf die Felder schreiben. Den abgebildeten Spielstein bezeichnen wir also kurz mit 2-4. Für ein leeres Feld schreiben wir „0“.



Nun habe sie eine neue Idee: Domino-Memory. Es wird wie Memory mit Karten gespielt. Die Domino-Steine werden mit den Punktzahlen nach unten verdeckt auf dem Tisch ausgelegt. Einer beginnt. Er darf zwei Domino-Steine umdrehen. Ist die Summe der Punktzahlen beider Domino-Steine von 12 verschieden, so legt er die Steine wieder verdeckt auf den Tisch und der andere ist dran. Ergeben aber die Punktzahlen beider Domino-Steine die Summe 12, so darf er diese Steine behalten und weitere Paare umdrehen, solange er immer wieder die Punktsumme 12 findet. Wer am Ende die meisten Domino-Steine behalten konnte, hat gewonnen.

Aufgabe 1. Alle Domino-Steine eines kompletten Spiels liegen verdeckt auf dem Tisch. Quadrato beginnt das erste Spiel und hat Glück. Gleich viermal hintereinander findet er Paare von Domino-Steinen, die als Summe 12 ergeben.

Gib vier Paare an, die er gefunden haben könnte!

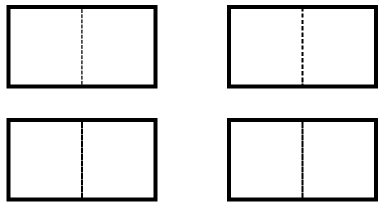
Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es gibt ganz viele Möglichkeiten, Paare von Domino-Steinen zu finden, deren Augensumme insgesamt 12 ergibt,

z.B. 0-0 / 6-6, 0-4 / 3-5, 2-3 / 3-4, 2-2 / 4-4.

Du musst aber darauf achten, dass unter diesen vier Paaren jeder Domino-Stein nur einmal vorkommt. Nicht richtig wäre 0-0 / 6-6, 0-4 / 4-4, 2-3 / 3-4, 2-2 / 4-4, weil der Stein 4-4 dann zweimal benutzt würde.

****

Aufgabe 2. Kreisa und Quadrato haben ein Domino-Memory regelgerecht gespielt. Es liegen nur noch vier Domino-Steine auf dem Tisch, so wie in der Abbildung. Kreisa ist an der Reihe und darf umdrehen. Sie kann sich erinnern, dass der Stein links oben 2-3 zeigt und der Stein rechts oben 3-4 zeigt.



Wie muss Kreisa spielen, damit sie beide Paare der Domino-Steine behalten kann?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Wenn regelgerecht gespielt wurde, kann Kreisa sicher sein, dass die verbleibenden 4 Domino-Steine zu zwei Paaren mit der Augensumme 12 passen.

Um ganz sicher zu sein, nimmt sie als erstes die Domino-Steine, an die sie sich erinnern kann. Weil 2-3 und 3-4 die Augensumme 12 ergibt, kann sie das Paar behalten. Anschließend kann sie das andere Paar umdrehen.

Wenn sie einen Domino-Stein der unteren Reihe umdreht, kann sie ausrechnen, ob die Augensumme dieses Steines durch 2-3 oder 3-4 zu 12 ergänzt wird. Dann kann sie den passenden Stein aus der oberen Reihe umdrehen. Lässt sich die Augensumme des umgedrehten Domino-Steins nicht mit einem der oberen Steine zu 12 ergänzen, passt sicher der andere unten liegende Stein.

****

Aufgabe 3. Nach einem anderen Spiel liegen wieder nur noch vier Domino-Steine auf dem Tisch. Quadrato ist an der Reihe und darf umdrehen. Er hat wieder einmal großes Glück: Egal, welche zwei Domino-Steine er zuerst umdreht, er findet immer ein Paar mit der Summe 12. Dieses Paar kann er behalten und auf den beiden anderen Domino-Steinen beträgt die Summe ebenfalls 12.

Welche vier Domino-Steine könnten auf dem Tisch verdeckt liegen, damit Quadrato mit Sicherheit die zwei Paare behalten kann?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Damit Quadrato bei jedem möglichen Paar von Domino-Steinen die Augensumme 12 findet, müssen alle auf dem Tisch liegenden Domino-Steine die Augensumme 6 haben. Es gibt genau 4 solche Domino-Steine: 0-6, 1-5, 2-4, 3-3.

****

Aufgabe 4. Beim Spiel mit allen 28 Domino-Steinen dauert es Quadrato und Kreisa zu lange, bis alle Paare aufgedeckt sind. Sie wollen deshalb als Summe anstatt 12 die Zahl 8 vorgeben. Für einige Steine gibt es aber kein Paar, sodass diese Summe 8 möglich wird. Beispielsweise gibt es zum Domino-Stein 6-6 keine Ergänzung zur Summe 8, weil der Stein ja bereits eine größere Summe zeigt. Solche Steine wollen sie aus dem Spiel nehmen.

Wie viele Steine müssen sie entfernen, damit alle im Spiel verbleibenden Steine zu Paaren mit Augensumme 8 passen? Gib die zu entfernenden Domino-Steine an.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Es müssen 14 Domino-Steine entfernt werden.

Begründung: Zuerst entferne alle Domino-Steine, deren Augensummen größer als 8 sind:

6-6, 6-5, 6-4, 6-3, 5-5, 5-4 (**6 Domino-Steine**).

Doch dies genügt nicht!

Es gibt 3 Domino-Steine mit der Augensumme 8: 6-2, 5-3, 4-4. Dazu passt nur ein Domino-Stein mit der Augensumme 0. Es gibt aber nur einen solchen Stein: 0-0. Also müssen **2 Domino-Steine** mit der Augensumme 8 entfernt werden.

Es gibt 3 Domino-Steine mit der Augensumme 7: 6-1, 5-2, 4-3. Dazu passt nur ein Domino-Stein mit der Augensumme 1. Es gibt aber nur einen solchen Stein: 1-0. Also müssen **2 Domino-Steine** mit der Augensumme 7 entfernt werden.

Es gibt 4 Domino-Steine mit der Augensumme 6: 6-0, 5-1, 4-2, 3-3. Dazu passt nur ein Domino-Stein mit der Augensumme 2. Es gibt aber nur zwei solche Steine: 2-0 und 1-1. Also müssen **2 Domino-Steine** mit der Augensumme 6 entfernt werden.

Es gibt 3 Domino-Steine mit der Augensumme 5: 5-0, 4-1, 3-2. Dazu passt nur ein Domino-Stein mit der Augensumme 3. Es gibt aber nur zwei solche Steine: 3-0 und 2-1. Also muss **1 Domino-Stein** mit der Augensumme 5 entfernt werden.

Es gibt 3 Domino-Steine mit der Augensumme 4: 4-0, 3-1, 2-2. Sie können nur untereinander zu kombiniert werden. Also muss **1 Domino-Stein** mit der Augensumme 4 entfernt werden.

Es müssen (6 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 =) 14 Domino-Steine entfernt werden.