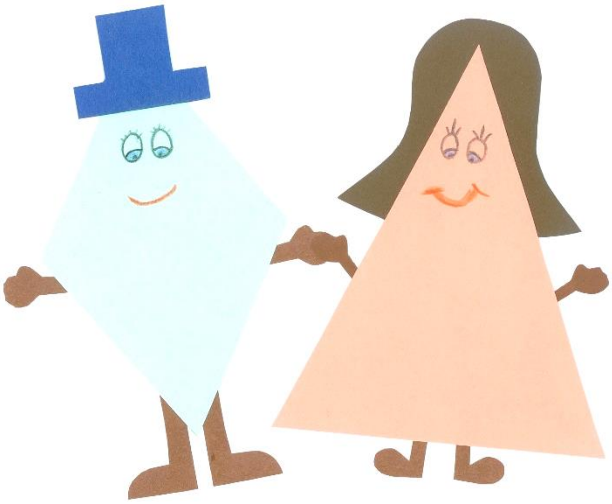
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Beachte bitte die Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Wenn du probiert hast, dann beschreibe wie. Achte darauf, eine Frage in der Aufgabe mit einem Antwortsatz zu beantworten. Wenn möglich, prüfe dein Ergebnis mit einer Probe. Es genügt auch, wenn du nicht zu allen Aufgaben eine Lösung einsendest.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünschen dir
Annemarie Maßalsky und Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie unternahm im Sommer einen Fahrradausflug. Ihr erstes Ziel lag 9 Kilometer entfernt. Die vier Familienmitglieder fuhren immer in einer Reihe hintereinander. Auf dem ersten Kilometer führte Quadrato die Gruppe an. Anschließend übernahm Frau Dreieck die Spitze und fuhr doppelt so weit vorn wie Quadrato. Danach war Kreisa die Erste und durfte genauso weit wie Frau Dreieck an der Spitze fahren. Den Rest der Strecke führte Herr Raute die Familie an.

Wie viele Kilometer fuhr Herr Raute an der Spitze? Schreibe auf, wie du die Lösung berechnet hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Herr Raute fuhr 4 Kilometer an der Spitze.

Herleitung: Quadrato fuhr 1 km vorn. Weil Frau Dreieck doppelt so weit vorn fuhr wie Quadrato, fuhr Frau Dreieck 2 km vorn. Kreisa fuhr genauso weit vorn wie Frau Dreieck, also auch 2 km.

Zusammen fuhren die drei (1 + 2 + 2 =) 5 km vorn.

Der Rest der Strecke beträgt (9 – 5 =) 4 km.

****

Aufgabe 2. Nach einer Pause fanden sie einen Weg abseits der Straße, auf dem sie um die Wette fahren durften. Über den Ausgang der Wettfahrt ist bekannt:

> Quadrato war schneller als Kreisa.
> Als Herr Raute ins Ziel kam, war Quadrato schon da.
> Frau Dreieck erreichte das Ziel erst nach Kreisa.
> Kreisa schaffte es nicht, Herrn Raute zu überholen.

Wer hat die Wettfahrt gewonnen? Wer wurde Letzter? Schreibe die Reihenfolge des Zieleinlaufs auf und beginne mit dem Gewinner. Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato gewann die Wettfahrt, Frau Dreieck wurde Letzte. Herr Raute wurde Zweiter, Kreisa wurde Dritte.

Herleitung: Frau Dreieck hat die Wettfahrt nicht gewonnen, weil sie erst nach Kreisa ins Ziel kam. Weil Quadrato schneller als Kreisa war und vor Herrn Raute ins Ziel kam, gewann somit Quadrato diese Wettfahrt.

Weil Kreisa Herrn Raute nicht überholen konnte, wurde Herr Raute Zweiter vor Kreisa. Letzte wurde Frau Dreieck, weil sie erst nach Kreisa ins Ziel kam.

Lösungsvariante: Wir schreiben die vier Aussagen anders auf, sodass die Formulierungen sehr ähnlich klingen:

Quadrato war schneller als Kreisa.	→ (1) Quadrato kam vor Kreisa ins Ziel.
Als Herr Raute ins Ziel kam, war Quadrato schon da.	→ (2) Quadrato kam vor Herrn Raute ins Ziel.
Frau Dreieck erreichte das Ziel erst nach Kreisa.	→ (3) Kreisa kam vor Frau Dreieck ins Ziel.
Kreisa schaffte es nicht, Herrn Raute zu überholen.	→ (4) Herr Raute kam vor Kreisa ins Ziel.

Wir ordnen jetzt die neuen Aussagen so, dass wir die Reihenfolge ablesen können (2) – (4) – (3).

Lösungsvariante: Wir verwenden die Anfangsbuchstaben der Namen als Abkürzungen und schreiben statt neu formulierter Sätze Ungleichungen:

(1) Q < K ; (2) Q < R ; (3) K < D ; (4) R < K

Daraus kannst du Q < R < K < D ablesen.

****

Aufgabe 3. Vor der Heimfahrt berieten sie, in welcher Reihenfolge sie hintereinanderfahren wollten.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der vier Radfahrer?
b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn Herr Raute stets als Letzter fahren will?
c) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn Quadrato und Kreisa stets direkt hintereinanderfahren wollen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Es gibt 24 Möglichkeiten.

Begründung: Wir kürzen die Namen wieder mit ihren Anfangsbuchstaben ab D, K, Q, R (du kannst auch die geometrischen Figuren als Abkürzung verwenden) und schreiben alle Möglichkeiten auf.

DKQR	DKRQ	DQKR	DQRK	DRKQ	DRQK
KDQR	KDRQ	KQDR	KQRD	KRDQ	KRQD
QDKR	QDRK	QKDR	QKRD	QRDK	QRKD
RDKQ	RDQK	RKDQ	RKQD	RQDK	RQKD

Um wirklich alle Möglichkeiten zu finden, musst du beim Aufschreiben systematisch vorgehen. So stehen in der ersten Zeile alle Möglichkeiten, bei denen Frau Dreieck vorn fährt, usw.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Es gibt 6 Möglichkeiten.

Begründung: Wir streichen in der Übersicht in der Lösung zu Aufgabe a) alle Möglichkeiten, bei denen am Ende kein R steht. Es bleiben 6 Möglichkeiten übrig.

DKQR	~~DKRQ~~	**DQKR**	~~DQRK~~	~~DRKQ~~	~~DRQK~~
KDQR	~~KDRQ~~	**KQDR**	~~KQRD~~	~~KRDQ~~	~~KRQD~~
QDKR	~~QDRK~~	**QKDR**	~~QKRD~~	~~QRDK~~	~~QRKD~~
~~RDKQ~~	~~RDQK~~	~~RKDQ~~	~~RKQD~~	~~RQDK~~	~~RQKD~~

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c) – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten.

Begründung: Wir streichen in der Übersicht in der Lösung zu Aufgabe a) alle Möglichkeiten, bei denen zwischen Q und K oder zwischen K und Q andere Buchstaben stehen. Es bleiben 12 Möglichkeiten übrig.

DKQR	~~DKRQ~~	**DQKR**	~~DQRK~~	**DRKQ**	**DRQK**
~~KDQR~~	~~KDRQ~~	**KQDR**	**KQRD**	~~KRDQ~~	~~KRQD~~
~~QDKR~~	~~QDRK~~	**QKDR**	**QKRD**	~~QRDK~~	~~QRKD~~
RDKQ	**RDQK**	~~RKDQ~~	**RKQD**	~~RQDK~~	**RQKD**

Statt eine Möglichkeit zu streichen, kannst du auch in der Übersicht in der Lösung zu Aufgabe a) die passenden Möglichkeiten farbig markieren.

Beachte: Die Bedingung „Quadrato und Kreisa fahren direkt hintereinander“ ist erfüllt, wenn Quadrate direkt vor Kreisa fährt, aber auch, wenn Kreisa direkt vor Quadrato fährt.

Lösungsvariante zu Aufgabe 3a): Zuerst entscheiden wir, wer vorn fahren darf – dafür gibt es 4 Möglichkeiten: Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa oder Quadrato.

Nun entscheiden wir, wer von den anderen drei an zweiter Stelle fährt – dafür gibt es noch 3 Möglichkeiten (für die Spitze ist ja einer bereits eingeteilt).

Nun entscheiden wir, wer von den verbleibenden zwei an dritter Stelle fährt – dafür gibt es noch 2 Möglichkeiten. Wer übrig bleibt, fährt am Schluss.
Insgesamt gibt es also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante zu Aufgabe 3b): An letzter Stelle fährt Herr Raute. Wir müssen also nur noch drei Plätze aufteilen.

Zuerst entscheiden wir, wer vorn fahren darf – dafür gibt es 3 Möglichkeiten (Frau Dreieck, Kreisa oder Quadrato).

Nun entscheiden wir, wer von den anderen drei an zweiter Stelle fährt – dafür gibt es noch 2 Möglichkeiten. Wer übrig bleibt, fährt an dritter Stelle.

Insgesamt gibt es also $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante zu Aufgabe 3c); Wir stellen fest, dass unter diesen Bedingungen Kreisa und Quadrato als Geschwister-Gruppe fahren. Wir suchen also die Anzahl der Möglichkeiten der Reihenfolge für Frau Dreieck, Herr Raute und die Geschwister-Gruppe. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten, weil wir es wie in Teilaufgabe b) ermitteln können.

Nun wissen wir aber, dass es in der Geschwister-Gruppe 2 Reihenfolgen gibt (K vor Q und Q vor K). Also müssen wir die Anzahl der Reihenfolgen noch mit 2 multiplizieren: Insgesamt gibt es $2 \cdot 6 = 12$ Möglichkeiten.

****

Aufgabe 4. Wieder zu Hause angekommen, schließt Quadrato sein Fahrrad mit einem Zahlenschloss an. An diesem Schloss können drei Ziffern jeweils von 0 bis 9 eingestellt werden. Quadrato hat sich eine Auswahl von drei Ziffern ausgedacht, die folgende Bedingungen erfüllen:

Alle Ziffern sind verschieden.
Die Summe der drei Ziffern beträgt 13.
Die Differenz zwischen der größten Ziffer und der kleinsten Ziffer beträgt 5.

Ist mit diesen Bedingungen die Auswahl der drei Ziffern eindeutig? Schreibe die Ziffern auf, die sich Quadrato ausgedacht haben kann. Prüfe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wir suchen alle Auswahlen von drei Ziffern, die zusammen in der Summe 13 ergeben. Wir achten darauf, dass in jeder Gleichung jede Ziffer nur einmal auftritt. Die Reihenfolge der Ziffern ist bei der Addition egal, also schreiben wir zuerst den größten Summanden, dann den zweitgrößten Summanden und als dritten den kleinsten Summanden auf. Wir finden 10 Möglichkeiten, die Zahl 13 als Summe von drei Ziffern aufzuschreiben

$9 + 4 + 0 = 13$	$9 + 3 + 1 = 13$	$8 + 5 + 0 = 13$	$8 + 4 + 1 = 13$
$8 + 3 + 2 = 13$	$7 + 6 + 0 = 13$	$7 + 5 + 1 = 13$	$7 + 4 + 2 = 13$
$6 + 5 + 2 = 13$	$6 + 4 + 3 = 13$		

Weitere Möglichkeiten gibt es nicht, denn wenn die größte Ziffer 5 ist, kann die Summe nicht größer als $5 + 4 + 3 = 12$ werden. Nun prüfen wir die Differenz zwischen dem größten und kleinsten Summanden:

$9 - 0 = 9$	$9 - 1 = 8$	$8 - 0 = 8$	$8 - 1 = 7$
$8 - 2 = 6$	$7 - 0 = 7$	$7 - 1 = 6$	$7 - 2 = 5$
$6 - 2 = 4$	$6 - 3 = 3$		

Nur bei der Auswahl 7, 4, 2 ist diese Differenz $7 - 2 = 5$. Die Auswahl ist also eindeutig. Weil wir alle Summen und Differenzen ausrechneten, haben wir geprüft, dass alle Bedingungen erfüllt sind.

Wie viele richtig bemerkt haben, ist der Zahlencode aber nicht eindeutig, denn dabei kommt es ja noch auf die Reihenfolge der Ziffern an. Dafür gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten: 247, 274, 427, 472, 724, 742.

Lösungsvariante: Wir suchen zuerst zwei Ziffern, deren Differenz 5 ist. Wir prüfen dann, welche dritte Ziffer für die Summe 13 passt. Wir beginnen mit der kleinsten möglichen Ziffer.

Kleinste Ziffer	Größte Ziffer mit Differenz 5	Dritte Ziffer mit Summe 13	Hinweis
0	5	8	Dritte Ziffer ist größer als die größte Ziffer
1	6	6	Zwei Ziffern sind gleich
2	7	4	Erfüllt die Bedingungen
3	8	2	Dritte Ziffer ist kleiner als die kleinste Ziffer
4	9	0	Dritte Ziffer ist kleiner als die kleinste Ziffer.

Nur für die Auswahl 2, 4, 7 sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

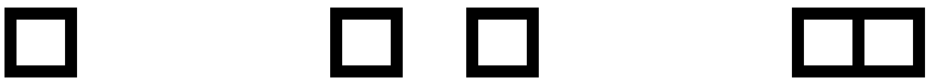
****

Runde 1 Gut aufgelegt (Teil B)

Quadrato und Kreisa spielen gern mit gleichlangen Legestäbchen und denken sich verschiedene Aufgaben aus. Quadrato möchte natürlich immer Quadrate legen.

Für ein einzelnes Quadrat benötigt er vier Legestäbchen.
Für zwei Quadrate sind acht Legestäbchen erforderlich.
Wenn er aber die Quadrate aneinanderlegt, genügen schon sieben Legestäbchen, um zwei Quadrate zu erkennen.

In der Abbildung bedeuten die dick gezeichneten Linien jeweils ein Legestäbchen. Die Stäbchen sollen dabei nicht eng nebeneinander oder gar übereinander liegen. Es werden nur gleichgroße Quadrate gezählt.



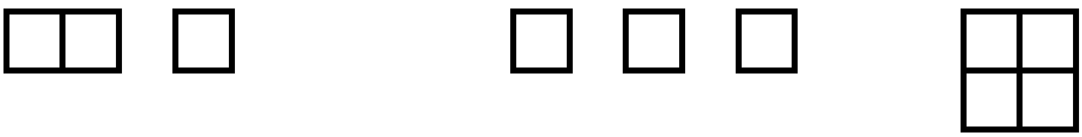
1 Quadrat 4 Stäbchen | 2 Quadrate 8 Stäbchen | 2 Quadrate 7 Stäbchen

Aufgabe 1. Quadrato hat viele Legestäbchen.

a) Kann er 11 Legestäbchen so legen, dass nur vollständige Quadrate zu sehen sind?
b) Kann er 12 Legestäbchen so legen, dass nur vollständige Quadrate zu sehen sind?
c) Kann er 9 Legestäbchen so legen, dass nur vollständige Quadrate zu sehen sind?

Zeichne zu jeder Antwort eine Möglichkeit auf, wie Quadrato seine Legestäbchen legen könnte oder begründe, warum es Quadrato nicht gelingen kann.

Lösungshinweise zu Aufgaben 1a) und 1b): Im Aufgabentext waren Beispiele dargestellt. Daran konntest du erkennen, dass die vollständigen Quadrate zusammenhängend sein durften oder auch getrennt stehen konnten.



a) 11 Legestäben:
3 vollständige
Quadrate

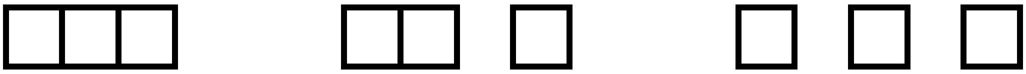
b) 12 Legestäben
3 vollständige Quadrate oder 4 vollständige Quadrate

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c): Mit 9 Legestäbchen kann Quadrato keine vollständigen Quadrate legen. Für zwei Quadrate benötigt er 7 oder 8 Legestäbchen. In der linken Abbildung kann er mit weiteren 2 Legestäbchen kein vollständiges Quadrat erreichen. Auch in der rechten Abbildung kann er mit 1 weiteren Legestäbchen kein vollständiges Quadrat erreichen.

7 Legestäben 8 Legestäbchen

So ist vollständig begründet, dass es mit 9 Legestäbchen nicht gelingt.

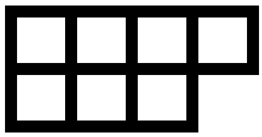
Zur Kontrolle kannst du zusätzlich probieren, wie viele Legestäbchen Quadrato für drei vollständige Quadrate benötigt: 10, 11 oder 12 Legestäben. Das sind immer mehr als 9 Legestäbchen.



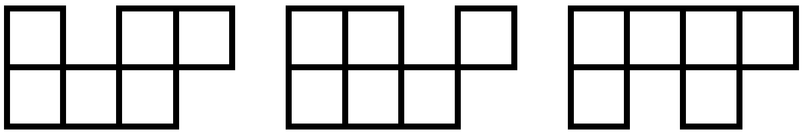
10 Legestäbchen 11 Legestäben 12 Legestäbchen

****

Aufgabe 2. Quadrato hat die abgebildete Figur aus 20 Legestäbchen gelegt. Es sind 7 Quadrate zu erkennen. Welches Legestäbchen könnte er wegnehmen, dass trotzdem nur vollständige Quadrate zu sehen sind, ohne andere Legestäbchen umzulegen? Übertrage die Figur auf dein Lösungsblatt und markiere alle Legestäbchen, die Quadrato wegnehmen könnte.



Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Es gibt drei Möglichkeiten, jeweils ein Legestäbchen zu entfernen, sodass immer noch vollständige Quadrate zu sehen sind:



Es ist nicht richtig, innere Legestäbchen zu entfernen: Es müssten gleich 4 Legestäbchen entfern werden und das entstehende Quadrat wird größer als die anderen Quadrate (linke Abbildung). Legestäbchen, die am Rand an anderer Stelle entfernt werden, führen zu unvollständigen Quadraten (rechte Abbildung).

Wenn auf dem Aufgabenblatt stand, dass die Ausgangsfigur 21 Legestäbchen zeigt, gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) Quadrato hat sich verzählt, denn es sind nur 20 Legestäbchen zu sehen. Das ist schade, die Aufgabe kann aber wie beschrieben gelöst werden.

(2) Quadrato hat an einer Stelle zwei Legestäbchen übereinander gelegt. Das ist nicht regelgerecht, aber du kannst dieses zusätzliche Legestäbchen entfernen und es bleiben vollständige Quadrate zu sehen.

****

Aufgabe 3. Quadrato und Kreisa haben sich ein Spiel ausgedacht. Es wird eine Figur gelegt. Abwechselnd darf jeder ein Legestäbchen von einem noch vollständigen Quadrat aus dieser Figur entfernen. Quadrato darf anfangen. Gewonnen hat, wer kein vollständiges Quadrat mehr findet und deshalb kein Legestäbchen mehr entfernen kann. So könnte ein Spiel verlaufen sein:

Ausgangsfigur — *Quadrato entfernt an der Seite rechts oben* — *Kreisa entfernt an der Seite rechts unten* — *Quadrato entfernt links in der Mitte*

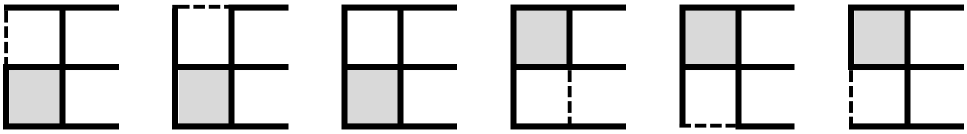
Nun hat Kreisa gewonnen, denn es ist kein vollständiges Quadrat mehr zu sehen.
Welches Legestäbchen hätte Quadrato entfernen können, damit das Spiel noch nicht endet? Wer gewinnt, wenn Quadrato ein anderes Legestäbchen entsprechend der Spielregeln entfernt hätte?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Quadrato kann entsprechend der Spielregeln keines der drei Legestäbchen entfernen, die in die rechte Hälfte der Figur zeigen, denn sie gehören nicht mehr zu einem vollständigen Quadrat.

Entfernt dagegen Quadrato ein anderes Legestäbchen in der linken Hälfte der Figur (gestrichelt gezeichnet), bleibt immer ein vollständiges Quadrat übrig (grau ausgefüllt). Kreisa kann also noch ein Legestäbchen entfernen. Danach ist aber kein vollständiges Quadrat mehr zu sehen – Quadrato hat gewonnen.

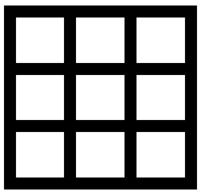
Quadrato hat also 6 Möglichkeiten, ein anderes Legestäbchen zu entfernen, um das Spiel zu gewinnen.

Es genügt bei dieser Aufgabenstellung, ein Beispiel anzugeben.



****

Aufgabe 4. Bestimmt findest du jemand, der mit dir dieses Spiel spielt. Verwende als Ausgangsfigur das abgebildete 3x3-Quadrat aus 24 Legestäbchen

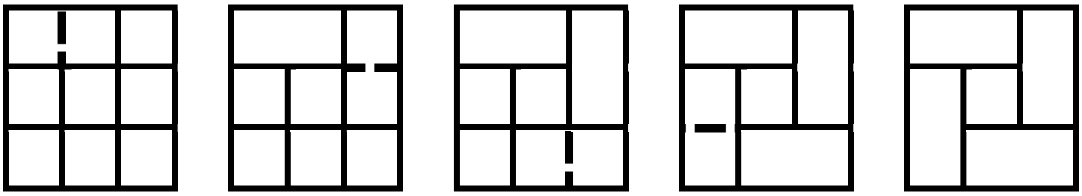


a) Wie groß ist die kleinste Anzahl von Legestäbchen, die entfernt werden muss, damit der Sieger schon feststeht?
b) Wie groß ist die größte Anzahl von Legestäbchen, die entfernt werden kann, damit der Sieger möglichst spät feststeht?

Schreibe für beide Antworten auf, wie der Spielverlauf gewesen sein könnte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Es müssen mindestens 5 Legestäbchen entfernt werden, damit der Sieger feststeht.

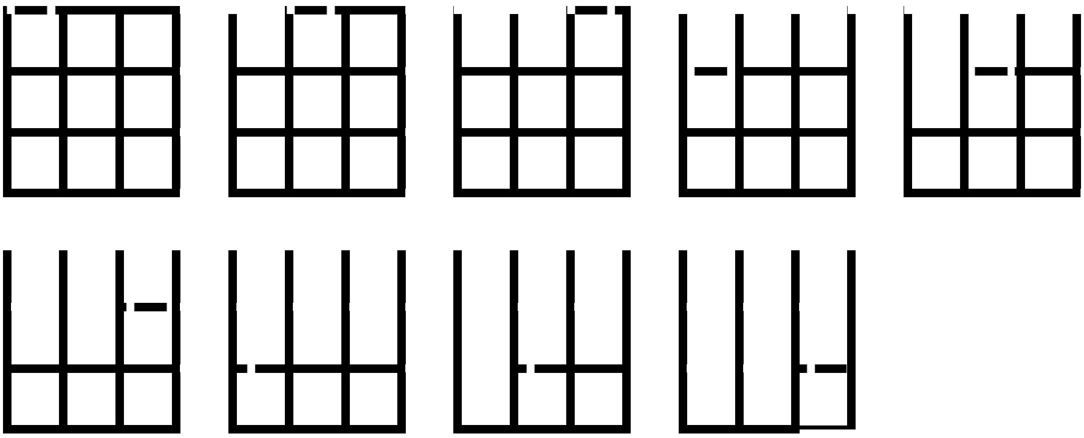
Begründung: Durch Angabe eines Spielverlaufes wird das Ergebnis bestätigt. Du kannst die Lösung durch Probieren finden. Aber weil du am Anfang 9 kleine Quadrate siehst und du durch Wegnahme eines Legestäbchen höchsten 2 Quadrate gleichzeitig zerstörst, bleibt nach 4 entfernten Legestäbchen mindestens ein vollständiges Quadrat übrig.



Natürlich steht der Sieger auch schon nach 4 entfernten Legestäbchen fest, denn dann gibt es nur noch ein vollständiges Quadrat, das mit dem nächsten zu entfernenden Legestäbchen zerstört wird.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Es können höchstens 9 Legestäbchen entfernt werden, dann steht der Sieger fest.

Begründung: Durch Angabe eines Spielverlaufes wird das Ergebnis bestätigt. Du kannst die Lösung durch Probieren finden. Aber weil du am Anfang 9 kleine Quadrate siehst und durch Wegnahme eines Legestäbchen immer ein Quadrat zerstört wird, können nach 9 entfernten Legestäbchen keine vollständigen Quadrate mehr übrig sein.



Natürlich steht der Sieger auch schon nach 8 entfernten Legestäbchen fest, denn dann gibt es nur noch ein vollständiges Quadrat, das mit dem nächsten zu entfernenden Legestäbchen zerstört wird.

****

Runde 2 **Murmel-Spiele** (Teil A)

Aufgabe 1. Familie Geometrie wollte mit Murmeln spielen. Herr Raute verteilte 50 Murmeln. Er gab Kreisa doppelt so viele Murmeln wie Frau Dreieck. Quadrato erhielt halb so viele Murmeln, wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen erhielten. Für Herrn Raute blieben dann halb so viele Murmeln übrig, wie er Frau Dreieck gegeben hatt.

Wie viele Murmeln erhielt jeder? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Quadrato erhielt 15 Murmeln, Kreisa 20 Murmeln, Frau Dreieck 10 Murmeln und Herr Raute 5 Murmeln.

Probe: Zeige, dass alle Bedingungen des Aufgabentextes durch diese Aufteilung erfüllt werden:

- Kreisa erhielt doppelt so viele Murmeln wie Frau Dreieck: $2 \cdot 10 = 20$
- Quadrato erhielt halb so viele Murmeln wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen: $(10 + 20) : 2 = 15$
- Herr Raute erhielt halb so viele Murmel wie Frau Dreieck: $0 : 2 = 5$
- Insgesamt waren es 50 Murmeln: $15 + 20 + 10 + 5 = 50$

Herleitung: Bei dieser Aufgabe kannst du die Lösung durch systematisches Probieren finden. Es genügt aber nicht, nur aufzuschreiben „Ich habe probiert." Du musst bei der Lösungsdarstellung aufschreiben, wie du probiert hast!

Für das Probieren eignet sich eine Tabelle, in die du deine Versuche einträgst. Da die Anzahl der Murmeln immer auf Frau Dreieck bezogen wird, erscheint es günstig, die Anzahl der Murmeln von Frau Dreieck anzunehmen (erste Spalte). Dann kannst du entsprechend des Aufgabentextes berechnen, wie viele Murmeln die anderen erhielten.

Da Herr Raute halb so viele Murmeln wie Frau Dreieck erhielt, muss die Anzahl der Murmeln von Frau Dreieck eine gerade Zahl sein.

Anzahl Murmeln Frau Dreieck	Anzahl Murmeln Kreise	Anzahl Murmeln Quadrato	Anzahl Murmeln Herr Raute	Gesamtzahl der Murmeln
2	2 · 2 = 4	(2 + 4) : 2 = 3	2 : 2 = 1	2+ 4+ 3+1=10
4	2 · 4 = 8	(4 + 8) : 2 = 6	4 : 2 = 2	4+ 8+ 6+2=20
6	2 · 6 = 12	(6 + 12) : 2 = 9	6 : 2 = 3	6+12+ 9+3=30
8	2 · 8 = 16	(8 + 16) : 2 = 12	8 : 2 = 4	8+16+12+4=40
10	**2 · 10 = 20**	**(10 + 20) : 2=15**	**10 : 2 = 5**	**10+20+15+5=50**
12	2 · 12 = 24	(12 + 24) : 2=18	12 : 2 = 6	12+24+18+6=60

Nur wenn Frau Dreieck 10 Murmeln erhielt, wurden insgesamt 50 Murmeln ausgegeben.

Beim Ausfüllen der Tabelle ist dir bestimmt aufgefallen, dass 2 Murmeln mehr für Frau Dreieck zu insgesamt 10 Murmeln mehr führt. Damit kannst du nach den ersten Zeilen die Lösung bereits erraten.

In dieser Tabelle sind alle Informationen der Probe enthalten – es ist also keine weitere Probe erforderlich.

Lösungsvariante: Zerlege die Anzahl der Murmeln in Teile.

- Da Frau Dreieck eine gerade Anzahl von Murmeln haben muss, erhielt sie 2 Teile.
- Kreisa erhielt doppelt so viele Teile wie Frau Dreieck, also 4 Teile.
- Quadrato erhielt halb so viele Teile wie Kreisa und Frau Dreieck zusammen, also (4 + 2) : 2 = 3 Teile.
- Schließlich erhielt Herr Raute halb so viele Teile wie Frau Dreieck, also 1 Teil.

Zusammen wurden (2 + 4 + 3 +1 =) 10 Teile verteilt. Da es insgesamt 50 Murmeln sind, umfasst jedes Teil 5 Murmeln. Nun kannst du leicht ermitteln, wie viele Murmeln jeder erhielt.

Lösungsvariante: Wenn du mit den Anfangsbuchstaben Q, K, D und R die jeweilige Anzahl der erhaltenen Murmeln bezeichnest, kannst du aus dem Aufgabentext folgende Gleichungen aufstellen:

$$K = 2 \cdot D, \quad Q = (K + D) : 2, \quad R = D : 2, \quad 50 = K + Q + D + R$$

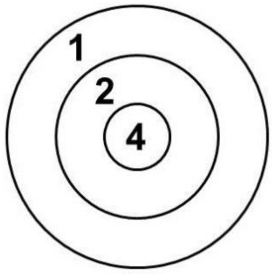
Ersetze nun in der letzten Gleichung über die Gesamtanzahl die Variablen durch Ausdrücke mit D:

$$50 = K + Q + D + R = 2 \cdot D + (2 \cdot D + D) : 2 + D + D : 2 = 5 \cdot D$$

Also findest du D = 10. Nun kannst du leicht ermitteln, wie viele Murmeln jeder erhielt.

****

Aufgabe 2. Herr Raute, Kreisa und Quadrato spielten Ziel-Murmeln. Dafür hatten sie auf den Tisch eine Zielscheibe gelegt, die aus drei Ringen bestand. Wenn eine Murmel auf einem Ring liegen blieb, gab es die angegebene Punktzahl 1, 2 oder 4. Jeder durfte zwei Murmeln rollen. Sie trafen immer die Zielscheibe und addierten die Punkte. Sie stellten am Ende des Spiels fest, dass jeder der drei Spieler eine andere Punktsumme erreichte.



Als Frau Dreieck fragte, wie viele Punkte jeder erreichte, erhielt sie folgende Antwort: „Kreisa hat 3 Punkte mehr als Herr Raute. Quadrato hat zweimal so viele Punkte wie Herr Raute.“

Konnte Frau Dreieck aus diesen Angaben die Punkte ermitteln? Hilf ihr und gib die Punktzahlen an, die Herr Raute, Kreisa und Quadrato bei diesem Spiel erreichten. Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Frau Dreieck konnte die Punktzahlen ermitteln: Herr Raute erreichte 2 Punkte, Quadrato 4 Punkte und Kreisa 5 Punkte.

Probe: Prüfe, ob alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

- Kreisa hatte 3 Punkte mehr als Herr Raute: $2 + 3 = 5$
- Quadrato hatte doppelt so viele Punkte wie Herr Raute: $2 \cdot 2 = 4$.

Herleitung: Überlege zuerst, wie viele Punkte jeder mit zwei Würfen erhalten kann. Es sind nur die folgenden 6 Punktsummen möglich:

$1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $1 + 4 = 5$, $2 + 2 = 4$, $2 + 4 = 6$, $4 + 4 = 8$

Die höchste Punktsumme, die mit zwei Würfen möglich ist, beträgt 8. Nun prüfe (am besten wieder mit einer Tabelle), welche Punktsumme Herr Raute haben könnte:

Punktsumme Herr Raute	Punktsumme Kreisa	Punktsumme Quadrato	Auswertung
2	**2 + 3 = 5**	**2 · 2 = 4**	**Einzige Lösung der Aufgabe**
3	3 + 3 = 6	2 · 3 = 6	Kreisa und Quadrato haben die gleiche Punktsumme, gilt nicht.
4	4 + 3 = 7		Punktsumme 7 nicht möglich
5	5 + 3 = 8	2 · 5 = 10	Nicht möglich, weil 10 > 8
6	6 + 3 = 9		Nicht möglich, weil 9 > 8
8	8 + 3 = 11		Nicht möglich, weil 11 > 8

Du kannst aber auch prüfen, wie viele Punkte Quadrato haben könnte. Dabei ist ja schon bekannt, dass Quadrato nur eine gerade Punktzahl haben kann (das Doppelte von Herrn Raute):

Punktsumme Quadrato	Punktsumme Herr Raute	Punktsumme Kreisa	Auswertung
2	2 : 2 = 1		Nicht möglich, da Herr Raute mindestens 2 Punkte haben muss
4	**4 : 2 = 2**	**2 + 3 = 5**	**Einzige Lösung der Aufgabe**
6	6 : 2 = 3	3 + 3 = 6	Nicht möglich, weil Kreisa und Quadrato die gleiche Punktsumme haben.
8	8 : 2 = 4	4 + 3 = 7	Punktsumme 7 nicht möglich

****

Aufgabe 3. Nach einem anderen Spiel, an dem alle vier teilnahmen, stritten sich Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und Quadrato, wer denn nun gewonnen habe.

> Frau Dreieck: „Kreisa hat gewonnen."
> Herr Raute: „Ich habe gewonnen."
> Quadrato: „Kreisa hat nicht gewonnen."
> Kreisa: „Frau Dreieck hat nicht gewonnen"

Herr Raute stellt fest, dass nicht alle vier Aussagen gleichzeitig richtig sein können. Warum hat Herr Raute Recht? Fällt es dir auch auf? Schreibe es auf.

Frau Dreieck behauptet, nur eine der vier Aussagen ist falsch, die anderen drei Aussagen sind dagegen richtig. Finde heraus, wer unter dieser Bedingung der Sieger gewesen ist und begründe deine Entscheidung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Es können nicht alle Aussagen gleichzeitig richtig sein, weil sich die Aussagen von Frau Dreieck und Quadrato widersprechen. Es kann nicht gleichzeitig Kreisa gewonnen und nicht gewonnen haben.

Wenn nur eine der Aussagen falsch ist (wie Frau Dreieck behauptet), ist entweder die Aussage von Frau Dreieck oder die Aussage von Quadrato falsch. Also ist die Aussage von Herrn Raute auf jeden Fall richtig: Herr Raute ist der Gewinner.

Wenn Herr Raute alleine gewonnen hat, dann war die Aussage von Frau Dreieck falsch. Wenn es aber möglich war, dass es mehr als einen Gewinner gab (zum Beispiel bei Punktegleichstand), dann können bei drei richtigen und einer falschen Aussage auch Herr Raute und Kreisa gleichzeitig Gewinner sein und die Aussage von Quadrato war falsch.

Lösungsvariante: Wenn es nur einen Gewinner geben darf, dann findest du für solche Aufgaben die Lösung auch mit der Untersuchung aller Möglichkeiten, wer denn der Gewinner gewesen sein könnte.

Erstelle dafür eine Tabelle für alle Möglichkeiten, wer der Gewinner war und prüfe, wie viele Aussagen dann wahr oder falsch sind:

Gewinner	Quadrato	Kreisa	Frau Dreieck	**Herr Raute**
Frau Dreieck: „Kreisa gewann"	falsch	richtig	falsch	**falsch**
Herr Raute: „Ich gewann"	falsch	falsch	falsch	**richtig**
Quadrato: „Kreisa gewann nicht"	richtig	falsch	richtig	**richtig**
Kreisa „Frau Dreieck gewann nicht"	richtig	richtig	falsch	**richtig**

Nur wenn Herr Raute gewann, sind drei Aussagen richtig und eine Aussage falsch.

****

Aufgabe 4. Am Ende des Tages wollte Kreisa 9 Murmeln in eine Schachtel mit 9 Fächern legen. Es waren vier rote Murmeln, vier blaue Murmeln und eine gelbe Murmel. Sie fragte Quadrato, in welches Fach sie die gelbe Murmel legen kann, damit in der Schachtel an keiner Stelle zwei gleichfarbige Murmeln nebeneinander liegen.

N	N	
		J
	J	

(Hinweis: In der Abbildung dürfen die Fächer mit „N" nicht mit zwei gleichfarbigen Murmeln belegt werden. Eine Belegung der Fächer mit „J" ist mit gleichfarbigen Murmeln erlaubt.)

Gib auch du ein Fach an, in das die gelbe Murmel gelegt werden kann. Wenn es verschiedene Möglichkeiten gibt – finde alle. Begründe auch, warum die gelbe Murmel in andere Fächer nicht gelegt werden kann, ohne die Bedingung zu verletzen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4.
Lege in die Mitte eine gelbe Murmel (G) und in die linke obere Ecke eine blaue Murmel (B). Um die Bedingungen einzuhalten, kannst du nun reihum abwechselnd rote (R) und blaue Murmeln legen. Auch wenn du in der linken oberen Ecke eine rote Murmel legst, kannst du die Schachtel entsprechend der Regel belegen.

B	R	B
R	G	R
B	R	B

Lege in die linke obere Ecke eine gelbe Murmel und links daneben eine blaue Murmel. Bei Einhaltung der Regeln kannst du nun abwechselnd rote und blaue Murmeln legen, bis die Schachtel gefüllt ist. Auch wenn du neben der gelben Murmel mit einer roten Murmel beginnst, lässt sich die Schachtel entsprechend der Regeln füllen.

G	B	R
B	R	B
R	B	R

Legst du aber die gelbe Murmel in eine andere Ecke, drehe einfach die Schachtel so, dass die gelbe Murmel wieder links oben liegt – es funktioniert also auch bei einer beliebigen Ecke, ohne die Regeln zu verletzen.

Legst du dagegen die gelbe Murmel in das mittlere Feld der linken Spalte, so kannst du zwar beginnen, links oben eine blaue Murmel und dann abwechselnd eine rote und blaue Murmel entsprechend der Regeln zu legen. Aber die letzte Murmel hat die gleiche Farbe wie die im Nachbarfeld liegende Murmel. Und so ist es auch in allen mittleren Randfeldern.

B	R	B
G	B	R
?	R	B

X		X
	X	
X		X

Murmeln gleicher Farbe können nur auf den Diagonalen (X in der linken Abbildung) oder auf den anderen Fächern (X in der rechten Abbildung) liegen.

Rechts passen nur 4 gleichfarbige Murmeln in die Schachtel, deshalb darf keine der Murmeln durch die gelbe Murmel ersetzt werden.

	X	
X		X
	X	

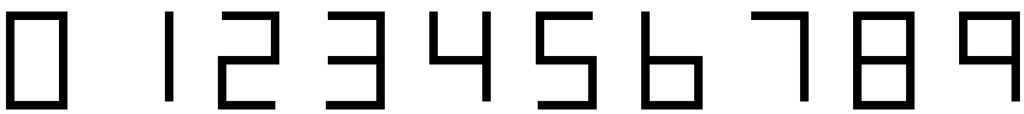
Links würden aber 5 gleichfarbige Murmeln hineinpassen – also kann an jeder Stelle mit einem Kreuz eine gelbe Murmel liegen, denn es bleibt Platz für vier gleichfarbige Murmeln.

****

Runde 2 **Noch einmal gut aufgelegt** (Teil B)

Wieder spielen Quadrato und Kreisa mit gleichlangen Legestäbchen und denken sich verschiedene Aufgaben aus. Kreisa schlägt vor, Zahlen zu legen. Da mit Legestäbchen keine Rundungen gelegt werden können, gibt sie vor, wie die Ziffern von 0 bis 9 aussehen sollen:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nun legen sie einstellige oder mehrstellige Zahlen. Sie können Zahlen auch in Additionsaufgaben legen, wobei jedoch das Plus-Zeichen und das Gleichheitszeichen geschrieben werden (also nicht mit Legestäbchen zu legen sind).

Aufgabe 1.

Aufgabe 1a) Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa insgesamt, um alle zehn Zahlen von 0 bis 9 gleichzeitig aufzulegen?

Aufgabe 1b) Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa mindestens, damit sie jede zweistellige Zahl, die sich Quadrato aussucht, legen kann? (Natürlich muss sie für manche Zahlen nicht alle Legestäbchen verwenden.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es werden insgesamt 47 Legestäbchen benötigt.

Herleitung: Addiere alle Anzahlen der Legestäbchen je Ziffer:

$$6 + 2 + 5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 3 + 7 + 5 = 47$$

(Der Punkt wurde auch gegeben, wenn nicht ausdrücklich erläutert wurde, dass diese Summe der 10 Anzahlen zu bilden ist.)

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Kreisa benötigt mindestens 14 Legestäbchen, um jede zweistellige Zahl legen zu können.

Begründung: Die Ziffer 8 benötigt mit 7 Legestäbchen die größte Anzahl. Folglich erfordert die Zahl 88 die größte Gesamtanzahl, nämlich 7 + 7 = 14 Legestäbchen. (Im Gegensatz zu Aufgabe 1a) ist diese Begründung aber erforderlich, um die Lösung vollständig darzustellen.)

****

Aufgabe 2.

Aufgabe 2a) Welche Zahlen kann Quadrato mit sechs Legestäbchen legen, wenn er für jede dieser Zahlen jeweils alle sechs Legestäbchen verwenden soll?

Aufgabe 2b) Kreisa behauptet, es gibt mehr als 15 Zahlen, die mit sieben Legestäbchen dargestellt werden. Hat sie Recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Quadrato kann die Zahlen 0, 14, 41, 77 und 111 legen.

Begründung:

- Es gibt nur die Ziffer 0, die mit 6 Legestäbchen gelegt werden kann.
- Besteht eine Zahl aus zwei Ziffern, so lassen sich 6 Legestäbchen entweder zu 2 und 4 oder zu 3 und 3 aufteilen. Damit steht fest, dass nur 14 und 41 oder 77 möglich ist.
- Besteht eine Zahl aus drei Ziffern, so kann nur 111 eine Lösung sein, weil es keine Ziffer mit nur einem Legestäbchen gibt.
- Aus diesem Grund kann es auch keine Zahl mit mehr als 3 Ziffern geben, die man mit nur 6 Legestäbchen legen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Kreisa hat Recht, es gibt 16 Zahlen, die sich mit sieben Legestäbchen legen lassen:

Herleitung:

- Zahl mit einer Ziffer: 8
- Zahlen mit zwei Ziffern (Aufteilung 2 und 5 Stäbchen): 12, 13, 15, 16, 19, 21, 31, 51, 61, 91
- Zahlen mit zwei Ziffern (Aufteilung 3 und 4 Stäbchen): 47, 74
- Zahlen mit drei Ziffern (Aufteilung 2, 2 und 3 Stächen) 117, 171, 711.

Dies sind genau 16 Zahlen, weitere gibt es nicht.

(Eine so ausführliche Herleitung war nicht erforderlich, um alle Punkte zu erhalten – es mussten aber alle möglichen Zahlen angegeben werden.)

****

Aufgabe 3. Kreisa stellt fest, dass es richtig gerechnete Additionsaufgaben gibt, bei der auch die Anzahl der zu aufzulegenden Legestäbchen übereinstimmt.

Ein Beispiel: 7 + 7 = 14. Sie benötigt auf der linken Seite der Gleichung zweimal drei Legestäbchen (für jede 7 drei) und auf der rechten Seite zwei Legestäbchen für die 1 und vier Legestäbchen für die 4. Links und rechts vom Gleichheitszeichen liegen also 6 Legestäbchen.

Aufgabe 3a) Finde zwei andere Additionsaufgaben, die diese Eigenschaft haben.

Aufgabe 3b) Finde eine Additionsaufgabe mit dieser Eigenschaft, bei der sowohl links als auch rechts vom Gleichheitszeichen zwei Summanden stehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a): Es gibt viele Möglichkeiten, hier einige Beispiele:

3 + 7 = 10	(Legestäbchen: 5 + 3 = 2 + 6)
4 + 16 = 20	(Legestäbchen: 4 + 2 + 5 = 5 + 6)
6 + 17 = 23	(Legestäbchen: 5 + 2 + 3 = 5 + 5)
14 + 14 = 28	(Legestäbchen: 2 + 4 + 2 + 4 = 5 + 7)
19 + 11 = 30	(Legestäbchen: 2 + 5 + 2 + 2 = 5 + 6)

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b): Auch hierfür gibt es viele Beispiele. Da keine weiteren Einschränkungen zu diesen geforderten Gleichungen genannt wurden, wären Beispiele wie

3 + 4= 4 + 3 (Vertauschen der Summanden)

oder sogar

2 + 2 = 2 + 2 (nur gleiche Summanden)

Lösungen der Aufgabe. Aber interessanter sind folgende Beispiele:

6 + 9 = 7 + 8	(Legestäbchen: 5 + 5 = 3 + 7)
2 + 9 = 5 + 6	(Legestäbchen: 5 + 5 = 5 + 5)
1 + 8 = 4 + 5	(Legestäbchen: 2 + 7 = 4 + 5)
2 + 6 = 3 + 5	(Legestäbchen: 5 + 5 = 5 + 5)

****

Aufgabe 4. Quadrato hat 15 Legestäbchen.

Aufgabe 4a) Wie lautet die kleinste dreistellige Zahl, die Quadrato legen kann, wenn er alle 15 Legestäbchen verwenden soll, aber die drei Ziffern unterschiedlich sind?

Aufgabe 4b) Wie lautet die größte vierstellige Zahl, die Quadrato legen kann, wenn er alle 15 Legestäbchen verwenden soll, aber die vier Ziffern unterschiedlich sind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Die kleinste dreistellige Zahl mit 15 Legestäbchen ist 108.

Herleitung: Beginne mit den kleinsten dreistelligen Zahlen

102 (Legestäbchen: 2 + 6 + 5 = 13), 103 (Legestäbchen: 2 + 6 + 5 = 13),
104 (Legestäbchen: 2 + 6 + 4 = 12), 105 (Legestäbchen: 2 + 6 + 5 = 13),
106 (Legestäbchen: 2 + 6 + 5 = 13), 107 (Legestäbchen: 2 + 6 + 3 = 11),
108 (Legestäbchen: 2 + 6 + 7 = 15),

Ohne alle diese Zahlen zu probieren, findest du die Lösung auch mit folgender Überlegung: Wenn die Zahl klein sein soll, beginne mit niedriger Hunderter- und Zehner-Ziffern, also mit 10. Dafür benötigst du bereits 2 + 6 = 8 Legestäbchen. Es verbleiben noch 7 Legestäbchen. Da nur die Ziffer 8 mit 7 Legestäbchen gelegt werden kann, hast du die kleinste Zahl gefunden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Die größte vierstellige Zahl mit 15 Legestäbchen ist 9761.

Herleitung: Um eine möglichst große Zahl zu bilden, sollten die tausender- und Hunderter-Ziffer möglichst groß sein.

- Beginnst du mit 98, so benötigst du bereits 5 + 7 = 12 Legestäbchen und es verbleiben noch 3 Legestäbchen. Damit kannst du keine zwei weiteren Ziffern legen.
- Beginne deshalb mit 97. Dafür benötigst du 5 + 3 = 8 Legestäbchen und es verbleiben noch 7 Legestäbchen. Die Ziffer 8 kann nicht gewählt werden, weil dann keine Legestäbchen für die dritte und vierte Ziffer übrig bleiben.
- Versuchst du nun die Zehner-Ziffer 6, dann benötigst du 5 + 3 + 5 = 13 Legestäbchen und es verbleiben noch 2 Legestäbchen, mit denen du noch eine 1 legen kannst.

****

Runde 3 **Leseratten** (Teil A)

Aufgabe 1. Quadrato hat vor sich ein Buch mit 32 Seiten liegen. Die Seiten sind also mit „1“ bis „32“ nummeriert.

a) Wie viele Ziffern muss Quadrato schreiben, wenn er alle Seitenzahlen hintereinander schreibt?
b) Wie oft schreibt Quadrato dabei die Ziffer 2?
c) Quadrato addiert in der Reihe der 32 Seitenzahlen zuerst alle geradzahligen Ziffern und dann alle ungeradzahligen Ziffern. Welche Summe ist größer?

Erkläre jeweils, wie du die Ergebnisse gefunden hast!

Hinweis: Die einstelligen Zahlen 0, 1, ..., 9 nennen wir Ziffern, Zahlen setzten sich aus Ziffern zusammen. Zum Beispiel besteht die Zahl 47 aus den Ziffern 4 und 7.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Quadrato muss 55 Ziffern schreiben, wenn er alle Seitenzahlen von 1 bis 32 hintereinander schreibt.
Herleitung: Schreibe ebenfalls alle Seitenzahlen auf:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32

Nun musst du nur alle Ziffern zählen und du kommst auf 55 Ziffern.

Lösungsvariante: Du kannst das Ergebnis aber auch fast ohne Zählen finden:

- Von 1 bis 9 sind es neun einstellige Zahlen, also 9 Ziffern.
- Von 10 bis 19 sind es 10 zweistellige Zahlen, also 20 Ziffern.
- Von 20 bis 29 sind es 10 zweistellige Zahlen, also 20 Ziffern.
- Von 30 bis 32 sind es 3 zweistellige Zahlen, also 6 Ziffern.

Insgesamt sind es also (9 + 20 + 20 + 6 =) 55 Ziffern.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Quadrato schreibt dabei 14 Mal die Ziffer 2.

Herleitung: Es genügt, in der Liste der Seitenzahlen von 1 bis 32 die Ziffern 2 zu zählen – so findest du 14 Mal die Ziffer 2. Beachte: bei 22 wird zweimal eine 2 geschrieben.

Lösungsvariante:

- Zwischen 1 und 9 gibt es einmal die Ziffer 2 an der Einerstelle.
- Zwischen 10 und 19 gibt es einmal die Ziffer 2 an der Einerstelle.
- Zwischen 20 und 29 gibt es einmal die Ziffer 2 an der Einerstelle.
- Zwischen 20 und 29 gibt es zehnmal die Ziffer 2 an der Zehnerstelle.
- Zwischen 30 und 32 gibt es einmal die Ziffer 2 an der Einerstelle.

Insgesamt sind es also (1 + 1 + 1 + 10 + 1 =) 14 Mal die Ziffer 2.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Die Summe der ungeradzahligen Ziffern ist größer als die Summe der geradzahligen Ziffern.

Beachte: Bei der Summe geht es nur um die Ziffern – nicht um ungerade oder gerade Seitenzahlen!

Herleitung: Natürlich kannst du einfach in der Liste der Seitenzahlen von 1 bis 32 alle geraden Ziffern und alle ungeraden Ziffern herausschreiben und die Summen bilden. Aber es geht auch so:

Ungerade Ziffern:

- Zwischen 1 und 9, zwischen 10 und 19 und zwischen 20 und 29 gibt es die Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 an der Einerstelle, jeweils mit der Summe $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, insgesamt also $3 \cdot 25 = 75$,
- Zwischen 30 und 32 gibt es die Ziffer 1 an der Einerstelle, jeweils mit der Summe 1,
- Zwischen 10 und 19 gibt es zehnmal die Ziffer 1 an der Zehnerstelle mit der Summe $10 \cdot 1 = 10$.
- Zwischen 30 und 32 gibt es dreimal die Ziffer 3 an der Zehnerstelle mit der Summe $3 \cdot 3 = 9$.

Insgesamt beträgt die Summe der ungeraden Ziffern (75 + 1 + 10 + 9 =) 95.

Gerade Ziffern:

- Zwischen 1 und 9, zwischen 10 und 19 und zwischen 20 und 29 gibt es die Ziffern 0, 2, 4, 6, 8 an der Einerstelle, jeweils mit der Summe 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20, insgesamt also 3 · 20 = 60,
- Zwischen 30 und 32 gibt es die Ziffern 0 und 2 an der Einerstelle, jeweils mit der Summe 2,
- Zwischen 20 und 29 gibt es zehnmal die Ziffer 2 an der Zehnerstelle mit der Summe 10 · 2 = 20.

Insgesamt beträgt die Summe der geraden Ziffern (60 + 2 + 20 =) 82.

Es gilt 82 < 95.

****

Aufgabe 2. Kreisa schenkte Quadrato am Samstag ein Buch. Quadrato begann sofort einige Seiten zu lesen. Am Sonntag las Quadrato in diesem Buch dreimal so viele Seiten wie am Samstag. Am Montag konnte er nur zweimal so viele Seiten lesen wie am Samstag. Dafür las er am Dienstag sechs Seiten mehr als am Montag. Am Mittwoch hatte er wenig Zeit und las nur drei Seiten. Am Donnerstag las er 5 Seiten weniger als am Montag. Insgesamt hatte er bis dahin weniger als 100 Seiten gelesen. Als Quadrato am Freitag noch acht Seiten las, hatte er schon mehr als 100 Seiten gelesen und das Buch durchgelesen.

Wie viele Seiten hat Quadrato am ersten Tag, am Samstag, gelesen? Wie viele Seiten hatte das Buch. Erkläre, wie du deine Ergebnisse gefunden hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato hat am Samstag 9 Seiten gelesen. Das Buch hatte 102 Seiten.

Herleitung: Solche Aufgaben kannst du mittels systematischen Probierens lösen. Wähle eine Anzahl Seiten, die Quadrato am Samstag gelesen haben könnte. Ermittle nun anhand der Aussagen im Aufgabentext, wie viele Seiten er dann jeden Tag gelesen hat. Prüfe, ob mit der gewählten Anzahl die Schlussbedingungen erfüllt sind.

Günstig ist es, wenn du dafür eine Tabelle anfertigst, zum Beispiel so:

Samstag	Sonntag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Summe
x	3 · x	2 · x	2 · x + 6	3	2 · x – 5	
7	21	14	20	3	9	74
8	24	16	22	3	11	84
9	**27**	**18**	**24**	**3**	**13**	**94**
10	30	20	26	3	15	104
11	33	22	28	3	17	114

Hätte Quadrato nur 8 (oder weniger Seiten) gelesen, käme er bis Freitag nicht über 100 Seiten.

Wenn Quadrato am Samstag 10 (oder mehr) Seiten gelesen hätte, wären es am Donnerstag bereits über 100 Seiten. Das wären also zu viele Seiten.

Quadrato könnte also 9 Seiten gelesen haben. Dann hätte er am Donnerstag bereits 94 Seiten gelesen. Wenn er dann am Freitag weitere 8 Seiten gelesen hat, kam er tatsächlich über 100.

Die ***Probe*** ist in der Tabelle bereits enthalten.

Lösungsvariante: In der zweiten Zeile der Tabelle kannst du erkennen, wie die Lösung mit einer Variablen x gefunden werden kann. Laut Aufgabentext soll nämlich gelten:

$$x + 3 \cdot x + 2 \cdot x + 2 \cdot x + 6 + 3 + 2 \cdot x - 5 < 100$$
$$x + 3 \cdot x + 2 \cdot x + 2 \cdot x + 6 + 3 + 2 \cdot x - 5 + 8 > 100$$

Wenn du zusammenfasst, so sind dies Ungleichungen gleichbedeutend zu

$10 \cdot x + 4 < 100$ also $10 \cdot x < 96$ d.h. $x < 10$
$10 \cdot x + 12 > 100$ also $10 \cdot x > 88$ d.h. $x > 8$

Also kann nur $x = 9$ die Lösung sein. Prüfe das Ergebnis nun mit einer **Probe**.

****

Aufgabe 3. Quadrato und Kreisa lasen am Sonntagvormittag. Danach unterhielten sie sich:

- Quadrato sagte zu Kreisa: „Ich habe 10 Seiten weniger als du gelesen".
- Kreisa antwortete: „Ja, ich habe doppelt so viele Seiten wie du gelesen".
- Quadrato ergänzte: „Ich habe mehr als 7 Seiten gelesen."
- Kreisa meinte: „Zusammen haben wir 20 Seiten gelesen."

Herr Raute hatte aufmerksam zugehört und stellte fest: „Na Kreisa, eine deiner Aussagen ist aber nicht richtig!".

Ermittle, wie viele Seiten Quadrato und Kreisa gelesen haben, wenn eine Aussage von Kreisa falsch ist und die anderen drei Aussagen alle wahr sind. Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadrato hat 10 Seiten und Kreisa hat 20 Seiten gelesen.

Herleitung: Herr Raute hat nicht gesagt, welche Aussage von Kreisa falsch ist. Prüfe also zuerst, welche ihrer Aussagen falsch sein könnte.

Quadrato sagte, dass er mehr als 7 Seiten gelesen hat. Außerdem hat er 10 Seiten weniger als Kreisa gelesen. Da seine Aussagen wahr waren, hat Quadrato mindestens 8 Seiten gelesen und Kreisa hat mindestens (8 + 10 =) 18 Seiten gelesen. Zusammen hatten sie also mindestens (8 + 18 =) 26 Seiten gelesen. Damit ist die zweite Aussage von Kreisa falsch auf alle Fälle falsch!

Weil nur eine Aussage falsch war, ist deshalb die erste Aussage von Kreisa richtig. Das bedeutet, Kreisa hat doppelt so viele Seiten wie Quadrato gelesen.

Wenn Quadrato 10 Seiten weniger als Kreisa gelesen hat, und Kreisa doppelt so viele Seiten wie Quadrato gelesen hat, dann hat Quadrato 10 Seiten gelesen – denn Kreisa hat ja so viele Seiten wie Quadrato gelesen und dazu weitere 10 Seiten.

Du kannst das Ergebnis auch wieder mit einer Tabelle finden:

	Anzahl Seiten				
Quadrato	7	8	9	**10**	11
Kreisa: 10 Seiten mehr als Quadrato	17	18	19	**20**	21
Kreisa: Doppelt so viel wie Quadrato	14	16	18	**20**	22

Nur wenn die zwei Ergebnisse von Kreisa übereinstimmen, sind die Bedingungen erfüllt.

Lösungsvariante: Auch mit Gleichungen kommst du auf das Ergebnis. Bezeichne mit Q die Anzahl der Seiten, die Quadrato gelesen hat, und mit K die Anzahl der Seiten, die Kreisa gelesen hat. Dann soll gelten

$K = Q + 10$ und $K = 2 \cdot Q$

Setze die erste Gleichung in die zweite Gleichung ein:

$Q + 10 = 2 \cdot Q$ also $10 = Q$.

Vergiss die **Probe** nicht: Alle Bedingungen sind erfüllt, denn es gilt:

$Q = K – 10$: $10 = 20 – 10$
$K = 2 \cdot Q$: $20 = 2 \cdot 10$
$Q > 7$: $10 > 7$
$Q + K = 30$ (die zweite Aussage von Kreisa ist also falsch).

****

Aufgabe 4. Kreisa las ganz vertieft in ihrem dicken Buch. Da fragte Quadrato, auf welcher Seite sie denn gerade ist. Kreisa schmunzelte und gab folgende Antwort: „Die Seitenzahl ist dreistellig. Die Hunderterziffer ist zweimal so groß wie die Einerziffer. Die Zehnerziffer ist halb so groß wie die Einerziffer. Die Summe der drei Ziffern ergibt eine gerade Zahl.“

Aus diesen Angaben konnte Quadrato die Seitenzahl ermitteln. Du auch? Gib die Seitenzahl an und begründe, warum es keine andere Seitenzahl als deine Lösung sein kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Die Seitenzahl lautet 824.

Herleitung: Bezeichne mit H die Ziffer an der Hunderterstelle, mit Z die Ziffer an der Zehnerstelle und mit E die Ziffer an der Einerstelle. Dann gilt laut Aufgabestellung

$H = 2 \cdot E$ und $Z = E : 2$.

Du kannst die Bedingung auch so schreiben

$E = Z \cdot 2$ und $H = E \cdot 2$

- Wäre $Z = 0$, wären auch $E = 0$ und $H = 0$ – das ergibt keine Seitenzahl.
- Wäre $Z = 1$, dann wären $E = 2$ und $H = 4$, aber $1 + 2 + 4 = 7$ ergibt eine ungerade Zahl.
- Wäre $Z = 2$, dann wären $E = 4$ und $H = 8$, die Summe $2 + 4 + 8 = 14$ ergibt eine gerade Zahl.
- Wäre $z = 3$ oder größer, dann wären $E = 6$ (oder größer) und $H = 12$ (oder größer), das bedeutet, H wäre keine Ziffer mehr.

Diese Untersuchung kannst du auch übersichtlich in einer Tabelle anordnen:

Z	E = 2 · Z	H = 2 · E	Bemerkung
1	2	4	1 + 2 + 4 = 7: ungerade Summe
2	4	8	2 + 4 + 8 = 14: gerade Summe
3	6	12	H ist keine Ziffer
>3	>6	>12	H ist keine Ziffer

Also findest du nur $Z = 2$ eine Lösung: HZE = 824.

****

Runde 3 — So viele Dreiecke und Quadrate — (Teil B)

Wieder spielen Quadrato und Kreisa mit gleichlangen Legestäbchen. Diesmal legen sie Dreiecke und Quadrate.

Aufgabe 1. Kreisa hat sich eine Anzahl Legestäbchen genommen und versucht daraus einzelne Dreiecke oder einzelne Quadrate zu legen, ohne dass ein Legestäbchen übrigbleibt. Es können nur Dreiecke sein, oder nur Quadrate oder Dreiecke und Quadrat.

Sie behauptet, dass ihr das bei jeder Anzahl gelingt, wenn es nur mehr als 5 Legestäbchen sind.

a) Prüfe Kreisas Aussage für 6, 7 und 8 Legestäbchen.
b) Gilt Kreisas Aussage auch für 17 Legestäben? Begründe deine Antwort.
c) Zeige, dass Kreisa mindestens vier verschiedene Möglichkeiten hat, die Aufgabe mit 51 Legestäbchen zu lösen.

Hinweis: Zwei Möglichkeiten sind verschieden, wenn die Anzahl der Dreiecke oder Quadrate verschieden ist.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a):

- Kreisa kann mit 6 Legestäbchen zwei Dreiecke (2 · 3) legen (vergleiche Aufgabentext von Aufgabe 3, rechte Abbildung).

- Sie kann mit 7 Legestäben ein Dreieck und ein Quadrat legen (3 + 4). Sie kann aber auch mit 7 Legestäbchen zwei aneinandergefügte Quadrate legen (vergleiche Aufgabentext von Aufgabe 2, mittlere Abbildung). Sie kann aber auch drei aneinandergefügte Dreiecke legen (3 + 2 + 2).

- Sie kann mit 8 Legestäbchen zwei Quadrate legen (vergleiche Aufgabetext zu Aufgabe 2, rechte Abbildung, 2 · 4). Sie kann aber auch eine gemischte Anordnung aus zwei aneinandergefügten Dreiecken und einem einzelnen Dreieck legen (vergleiche Aufgabentext zu Aufgabe 3, linke Abbildung, 5 + 3)

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Ja, es geht mit 17 Legestäbchen.

Kreisa könnte versuchen, nur einzelne Quadrate zu legen.

- Bei 4 Quadraten (4 · 4 = 16 Legestäbchen) bleibt (17 – 1 =) 1 Legestäbchen übrig.
- Bei 3 Quadraten (3 · 4 = 12 Legestäbchen) bleiben (17 – 12 =) 5 Legestäbchen übrig.
- Bei 2 Quadraten (2 · 4 = 8 Legestäbchen) bleiben (17 – 8 =) 9 Legestäbchen übrig – daraus kann sie 3 einzelne Dreiecke legen.

Es gibt aber auch viele andere Möglichkeiten, beispielsweise:

- die gemischte Anordnung aus dem Aufgabentext zu Aufgabe 2 (rechte Abbildung) und 2 einzelne Dreiecke (11 + 2 · 3 = 17),
- die gemischte Anordnung aus dem Aufgabetext zu Aufgabe 3 (rechte Abbildung) und 3 weitere einzelne Dreiecke (8 + 3 · 3 = 17),
- 2 Mal aneinandergefügte Quadrate (Aufgabentext zu Aufgabe 2, mittlere Abbildung) und 1 einzelnes Dreieck (2 · 7 + 3 = 17).

Lösungshinweise zu Aufgabe 1c): Kreisa kann 17 einzelne Dreiecke legen, dafür benötigt sie (17 · 3 =) 51 Legestäbchen (1. Möglichkeit). Nun kann sie jeweils 4 Dreiecke (4 · 3 = 12) in 3 Quadrate (3 · 4 = 12) umtauschen, ohne die Anzahl der Legestäbchen zu verändern:

2. Möglichkeit: (17 – 4 =) 13 Dreiecke, (0 + 3 =) 3 Quadrate (13·3 + 3·4 = 51),
3. Möglichkeit: (13 – 4 =) 9 Dreiecke, (3 + 3 =) 6 Quadrate (9·3 + 6·4 = 51),
4. Möglichkeit: (9 – 4 =) 5 Dreiecke, (6 + 3 =) 9 Quadrate (5·3 + 9·4 = 51),
5. Möglichkeit: (5 – 4 = 1 Dreiecke, (9 + 3 =) 12 Quadrate (1·3 + 12·4 = 51).

Lösungsvariante 1: Kreisa legt zunächst zwei aneinandergefügte Quadrate (7 Legestäbchen) und fügt dann weitere Quadrate an, wofür sie immer 3 weitere Legestäbchen legt. Dafür benötigt sie also insgesamt 4 + 3 + 3 + ... Legestäbchen – bis eine durch 4 teilbare Zahl übrig bleibt. Mit 51 Legestäbchen ist somit folgende Lösung möglich:

$$4 + 13 \cdot 3 + 4 + 4 = 51$$

also 14 aneinandergefügte Quadrate und 2 einzelne Quadrate.

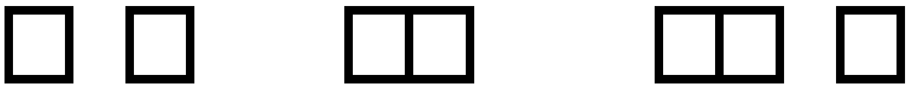
Lösungsvariante 2: Kreisa legt zunächst zwei aneinandergefügte Dreiecke (5 Legestäbchen) und fügt dann weitere Dreiecke an, wofür sie immer 2 weitere Legestäbchen legt. Dafür benötigt sie also insgesamt 3 + 2 + 2 + 2 + ... Legestäbchen. Mit 51 Legestäbchen ist somit folgende Lösung möglich:

$$3 + 24 \cdot 2,$$

also 25 aneinandergefügte Dreiecke.

****

Aufgabe 2. Quadrato legt nur Quadrate. Es können einzelne Quadrate, aneinandergefügte Quadrate oder eine Mischung aus beiden sein.



einzelne Quadrate (8 Stäbchen) *aneinandergefügte Quadrate (7 Stäbchen)* *gemischte Anordnung (11 Stäbchen)*

Quadrato hat mehr als 9 Legestäbchen. Er behauptet, dass er alle Legestäbchen zu Quadraten legen kann, ohne dass ein Legestäbchen übrigbleibt.

Aufgabe 2a) Zeige, wie Quadrato die Legestäbchen legen muss, wenn er 17 Legestäbchen hat.

Aufgabe 2b) Erkläre, warum es Quadrato auch gelingt, wenn er 101 Legestäbchen hat.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a). Quadrato könnte 3 aneinandergefügte Quadrate (10 Legestäbchen) und 2 aneinandergefügte Quadrate (7 Legestäbchen) legen (10 + 7 = 17).

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b). Nur mit einzelnen Quadraten kann Quadrato die Aufgabe nicht lösen, weil 101 nicht durch 4 teilbar ist. Nun gibt es viele Varianten, eine Lösung zu finden, beispielsweise so:

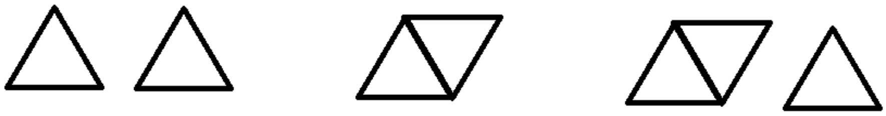
- Legt Quadrato zuerst 2 aneinandergefügte Quadrate (7 Legestäbchen), verbleiben noch (101 – 7 =) 94 Legestäbchen. Doch 94 ist auch nicht durch 4 teilbar.
- Legt Quadrato zuerst 3 aneinandergefügte Quadrate (10 Legestäbchen), verbleiben noch (101 – 10 =) 91 Legestäbchen. Doch 91 ist auch nicht durch 4 teilbar.
- Legt Quadrato zuerst 4 aneinandergefügte Quadrate (13 Legestäbchen), verbleiben noch (101 – 13 =) 88 Legestäbchen. Daraus kann Quadrato aber 22 einzelne Quadrate legen.

Für 4 aneinandergefügte Quadrate und 22 einzelne Quadrate werden (13 + 22 · 4 =) 101 Legestäbchen benötigt.

Hinweis: Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, aus 101 Legestäbchen Quadrate zu legen.

****

Aufgabe 3. Kreisa legt Dreiecke.



einzelne Dreiecke (6 Stäbchen) — *aneinandergefügte Dreiecke (5 Stäbchen)* — *gemischte Anordnung (8 Stäbchen)*

Natürlich benötigt sie mindestens 3 Legestäbchen, um mindestens ein Dreieck legen zu können. Kreisa behauptet nun, dass sie alle Legestäbchen zu Dreiecken legen kann, wenn sie mindestens 3 Legestäbchen hat.

Aufgabe 3a) Weise nach, dass sich Kreisa irrt! Finde eine Anzahl von Legestäbchen, die sie nicht vollständig zu Dreiecken legen kann.

Aufgabe 3b) Zeige, wie Kreisa die Legestäbchen legen muss, wenn sie 17 Legestäbchen hat.

Aufgabe 3c) Erkläre, warum es Kreisa auch gelingt, wenn sie 101 Legestäbchen hat.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a): Aus 3 Legestäbchen kann Kreisa 1 Dreieck legen. Legt sie das vierte Legestäbchen an, entsteht kein weiteres Dreieck – erst wenn sie zwei Legestäbchen anlegt, gelingen vollständige Dreiecke (vergleiche Aufgabentext zu Aufgabe 3, mittlere Abbildung). Legt sie das vierte Legestäbchen getrennt, entsteht erst recht kein weiteres Dreieck.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b): Kreisa könnte 4 einzelne Dreiecke (12 Legestäbchen) und zwei aneinandergefügte Dreiecke (5 Legestäbchen) legen (12 + 5 = 17).

Lösungshinweise Aufgabe 3c): Nur mit einzelnen Dreiecken kann Kreisa die Aufgabe nicht lösen, weil 101 nicht durch 3 teilbar ist. Nun gibt es viele Varianten, eine Lösung zu finden, beispielsweise so:

- Legt Kreisa zuerst 2 aneinandergefügte Dreiecke (5 Dreiecke), verbleiben noch (101 – 5 =) 96 Legestäbchen. Daraus kann sie 32 einzelne Dreiecke legen.

Für 2 aneinandergefügte Dreiecke und 32 einzelne Dreiecke werden $(5 + 32 \cdot 3 =)$ 101 Legestäbchen benötigt.

Hinweis: Es gibt noch viele andere Möglichkeiten, aus 101 Legestäbchen Dreiecke zu legen.