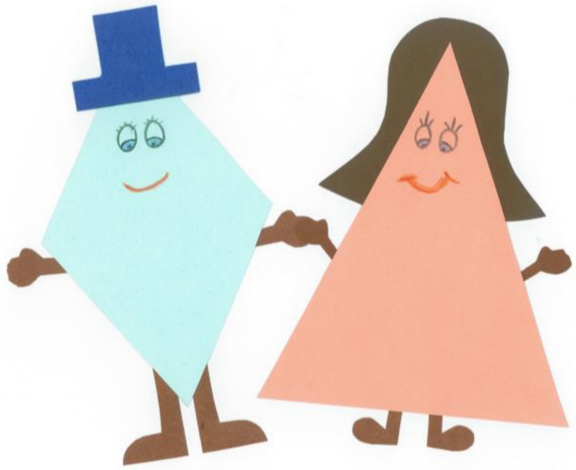
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Wenn du probiert hast, dann beschreibe wie. Achte darauf, eine Frage in der Aufgabe mit einem Antwortsatz zu beantworten. Wenn möglich, prüfe dein Ergebnis mit einer Probe. Es genügt auch, wenn du nicht zu allen Aufgaben eine Lösung einsendest.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünschen dir
Annemarie Maßalsky und Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Herr Raute, Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato – waren im Freibad. Herr Raute forderte die anderen drei heraus, mit ihm um die Wette zu schwimmen. Jeder sollte einmal durch das Schwimmbecken und wieder zurück schwimmen. Am Ende verglichen sie die Zeiten, die sie für diese Strecke benötigten. Dabei waren alle unterschiedlich lange unterwegs, sodass es eine eindeutige Reihenfolge gab.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen kann es geben, wenn Herr Raute absichtlich etwas langsamer schwamm, um nicht zu gewinnen, und Kreisa schneller als Quadrato schwamm? Schreibe alle Reihenfolgen auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es gibt 9 verschiedene Reihenfolgen.

Es wurde in der Aufgabe gefordert, alle möglichen Reihenfolgen aufzuschreiben, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Dafür kannst du zunächst alle möglichen Reihenfolgen von Frau Dreieck (abgekürzt mit D), Herrn Raute (R), Kreisa (K) und Quadrato (Q) aufschreiben. Beginne mit Platz 1, dann Platz 2, Platz 3 bis Platz 4.

Anschließend musst du alle Reihenfolgen streichen, bei denen Herr Raute gewann (R steht auf Platz 1) oder bei denen Quadrato schneller als Kreisa war (Q steht vor K):

DRKQ ~~DRQK~~ DKRQ DKQR ~~DQKR~~ ~~DQRK~~
~~RDKQ~~ ~~RDQK~~ ~~RKDQ~~ ~~RKQD~~ ~~RQDK~~ ~~RQKD~~
KDRQ KDQR KRDQ KRQD KQRD KQDR
~~QDRK~~ ~~QDKR~~ ~~QRDK~~ ~~QRKD~~ ~~QKDR~~ ~~QKRD~~

Es bleiben 9 Reihenfolgen stehen.

Lösungsvariante: Weil Herr Raute nicht gewinnen wollte, steht Herr Raute nicht an erster Stelle. Weil Quadrato langsamer als Kreisa war, steht auch Quadrato nicht an erster Stelle. Es genügt also, nur die folgenden Reihenfolgen zu untersuchen:

DRKQ ~~DRQK~~ DKRQ DKQR ~~DQKR~~ ~~DQRK~~
KDRQ KDQR KRDQ KRQD KQRD KQDR

Jetzt sind nur 3 Reihenfolgen zu streichen und es verbleiben wieder 9 verschiedene Reihenfolgen.

Lösungsvariante:

- Wenn Kreisa gewonnen hat, erfüllt jede weitere Reihenfolge die Bedingungen der Aufgabe. Dafür gibt es ($3 \cdot 2 \cdot 1 =$) 6 Möglichkeiten, denn auf dem zweiten Platz kann jeder der drei anderen Familienmitglieder stehen, auf dem dritten Platz sind es noch zwei Möglichkeiten und der eine, der übrig bleibt wird 4.
- Wenn Frau Dreieck gewinnt und Kreisa Zweite wird, gibt es insgesamt ($2 \cdot 1 =$) 2 Möglichkeiten, entweder Herr Raute auf Platz 3 und Quadrato auf Platz 4 oder Quadrato auf Platz 3 und Herr Raute auf Platz 4.
- Wenn Frau Dreieck gewinnt und Kreisa Dritte wird, gibt es nur 1 Möglichkeit: Herr Raute wurde Zweiter und Quadrato kam auf Platz 4.

Zusammen sind es ($6 + 2 + 1 =$) 9 Möglichkeiten.

Hinweis: Weil es in der Aufgabe ausdrücklich gefordert war, musst du bei dieser Variante trotzdem alle 9 Möglichkeiten aufschreiben.

****

Aufgabe 2. Quadrato nahm an einem Schwimmwettbewerb in seiner Altersklasse teil. Insgesamt 31 Schwimmer starteten. Als Quadrato im Ziel ankam, waren viermal so viele Teilnehmer noch im Wasser unterwegs wie schon vor ihm das Ziel erreicht hatten.

Welchen Platz hat Quadrato erreicht? Beschreibe, wie du dein Ergebnis gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Quadrato belegte den 7. Platz.

Probe: Es waren 6 Schwimmer vor Quadrato im Ziel und (31 – 6 – 1 =) 24 Schwimmer noch im Wasser. Es gilt: $4 \cdot 6 = 24$.

Herleitung: Diese Aufgabe kannst du durch Probieren lösen. Nutze dafür eine Tabelle. Schreibe auf, wie viele Schwimmer vor Quadrato sein könnten und wie viele Schwimmer dann noch im Wasser wären. Prüfe, ob die Anzahl aller Schwimmer 31 ergibt, wenn du auch Quadrato zählst.

Anzahl Schwimmer vor Quadrato	Anzahl Schwimmer nach Quadrato	Platz von Quadrato	Anzahl aller Schwimmer
1	$4 \cdot 1 = 4$	2	$1 + 4 + 1 = 6$
2	$4 \cdot 2 = 8$	3	$2 + 8 + 1 = 11$
3	$4 \cdot 3 = 12$	4	$3 + 12 + 1 = 16$
4	$4 \cdot 4 = 16$	5	$4 + 16 + 1 = 21$
5	$4 \cdot 5 = 20$	6	$5 + 20 + 1 = 26$
6	$\mathbf{4 \cdot 6 = 24}$	**7**	$\mathbf{6 + 24 + 1 = 31}$
7	$4 \cdot 7 = 28$	8	$7 + 28 + 1 = 36$

Nur wenn Quadrato den 7. Platz belegt hat, stimmt die Anzahl aller Schwimmer mit der Aufgabenstellung überein.

Lösungsvariante: Da viermal so viele Schwimmer noch im Wasser waren wie schon das Ziel erreichten, kannst du die Anzahl der Schwimmer ohne Quadrato, also (31 – 1 =) 30, in 5 Teile teilen: 30 : 5 = 6. Dann ist ein Teil (6 Schwimmer) schon im Ziel und 4 Teile ($4 \cdot 6 =$ 24 Schwimmer) noch im Wasser. Also wurde Quadrato 7.

Lösungsvariante: Du kannst die Aufgabe aber auch mit einer Gleichung lösen. Schreibe X für die Anzahl der Schwimmer, die vor Quadrato ins Ziel kamen. Dann gilt laut Aufgabenstellung

Anzahl Schwimmer vor Quadrato	+	Quadrato	+	Anzahl Schwimmer nach Quadrato	=	Anzahl aller Schwimmer
X	+	1	+	$4 \cdot X$	=	31

Aus $X + 1 + 4 \cdot X = 31$

erhältst du $5 \cdot X = 30$,

also $X = 6$.

Somit waren 6 Schwimmer vor Quadrato im Ziel und Quadrato belegte den 7. Platz.

****

Aufgabe 3. Im Schwimmbad gab es ein 1-Meter-Brett, ein 3-Meter-Brett und einen 5-Meter-Turm. Kreisa und Quadrato sprangen je dreimal ins Wasser. Jeder summierte die Meterzahlen, aus welcher Höhe sie gesprungen sind. Danach erzählten sie schmunzelnd Frau Dreieck und Herrn Raute:

Quadrato: „Meine Höhensumme ist größer als 8 Meter.“
Kreisa: „Meine Höhensumme ist zwei Meter größer als Quadratos Summe.“
Quadrato: „Kreisa und ich sind zusammen weniger als 20 Höhenmeter gesprungen.“
Kreisa: „Die Zahl der Höhenmeter, die wir zusammen gesprungen sind, ist ein Vielfaches von 7“.

Frau Dreieck lachte: „Aber Quadrato, wenn Kreisa die Wahrheit sagt, hast du dich bestimmt verrechnet!“ Hast du es auch bemerkt? Erkläre, warum eine Aussage von Quadrato falsch sein muss. Herr Raute freute sich: „Wenn aber eine Aussage von Quadrato stimmt, kann ich die Höhensumme von Quadrato und Kreisa ermitteln.“ Kannst du es auch? Aus welchen Höhen sind beide jeweils gesprungen? Schreibe auf, wie du das Ergebnis gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Die zweite Aussage von Quadrato ist falsch. Quadrato sprang einmal vom 3-Meter-Brett und zweimal vom 5-Meter-Turm. Kreisa sprang dreimal vom 5-Meter-Turm.

Probe: Quadrato sprang (3 + 5 + 5 =) 13 Höhenmeter, Kreisa sprang (3 · 5 =) 15 Höhenmeter, also 2 Meter mehr als Quadrato. Die Summe beider Höhenmeter ergibt 28, also ein Vielfaches von 7. Die erste Aussage von Quadrato ist richtig (13 > 8), die zweite Aussage von Quadrato ist falsch (28 > 20).

Herleitung: Die gemeinsamen Höhenmeter können nur 7, 14, 21 oder 28 sein, weil die Zahl nach Keisas Aussage ein Vielfaches von 7 ist und beide zusammen nicht mehr als 30 Höhenmeter springen konnten.

Wenn Quadratos erste Aussage richtig ist, sprang er mindestens 9 Höhenmeter. Weil Kreisa aber 2 m mehr sprang, waren es bei ihr mindestens 11 Höhenmeter. Insgesamt erreichten sie zusammen mindestens 20 Höhenmeter – also ist die zweite Aussage von Quadrato falsch.

Wenn dagegen Quadratos erste Aussage falsch wäre, gibt es nur folgende Möglichkeiten für die drei Sprünge für Quadrato:

1 m + 1 m + 1 m = 3 m
1 m + 1 m + 3 m = 5 m
1 m + 1 m + 5 m = 7 m
1 m + 3 m + 3 m = 7 m

Gemeinsam erreichten sie in diesen Fällen

3 m + (3 m + 2 m) = 8 m
5 m + (5 m + 2 m) = 12 m
7 m + (7 m + 2 m) = 16 m

Diese Höhenmeter sind kein Vielfaches von 7. Also kann die erste Aussage von Quadrato nicht falsch sein. Kreisa und Quadrato sind deshalb zusammen entweder 21 oder 28 Höhenmeter gesprungen.

Die ungerade Zahl 21 lässt sich nicht in zwei Zahlen aufteilen, wenn eine dieser Zahlen um 2 größer ist als die andere Zahl. Somit kann die Lösung nur 28 Höhenmeter sein. Dies ist auch möglich, wenn Quadrato 13 Höhenmeter und Kreisa 15 Höhenmeter sprangen.

Lösungsvariante: Wenn Kreisa die Wahrheit sagt, kannst du zuerst alle Vielfache von 7 als mögliche Höhenmeter untersuchen. Sicher hast du bemerkt, dass die Summe immer eine gerade Zahl ergibt:
Da jeder Sprung eine ungerade Höhe hat, ist die Summe aus drei Sprüngen für Quadrato als auch für Kreisa ebenfalls eine ungerade Zahl. Deshalb ist die Summe aus den Höhenmetern von Quadrato und den Höhenmetern von Kreisa eine gerade Zahl.

Möglichkeit 1: Beide sprangen zusammen 14 Höhenmeter. Also sprang Quadrato 6 Höhenmeter und Kreisa 8 Höhenmeter – aber das ist nicht möglich, weil jeder eine ungerade Anzahl von Höhenmeter sprang.

Möglichkeit 2: Beide sprangen zusammen 28 Höhenmeter. Also sprang Quadrato 13 Höhenmeter und Kreisa 15 Höhenmeter – diese Angaben erfüllen alle Bedingungen.

Da es nur diese Lösung gibt, ist nun auch bekannt: Quadratos erste Aussage ist richtig, aber seine zweite Aussage ist falsch.

****

Aufgabe 4. Zum Abschluss wurde zu einem Staffelwettbewerb aufgerufen. 18 Kinder haben sich gemeldet. Schnell haben sich Freunde zusammengefunden und drei Gruppen gebildet. Doch in diesen Gruppen waren unterschiedlich viele Kinder. Also wechselten 2 Kinder von Gruppe 1 in Gruppe 2 und 3 Kinder von Gruppe 2 in Gruppe 3. Jetzt waren in jeder Gruppe gleich viele Starter und der Staffelwettbewerb konnte beginnen.

Wie viele Kinder waren vor dem Wechsel in jeder der Gruppen? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Vor dem Wechsel waren 8 Kinder in der Gruppe 1, 7 Kinder in der Gruppe 2 und 3 Kinder in der Gruppe 3.

Probe: 8 + 7 + 3 = 18.
8 – 2 = 6 7 + 2 – 3 = 6 3 + 3 = 6

Herleitung: Wenn 18 Kinder in drei Gruppen aufgeteilt werden sollen, müssen in jeder Gruppe (18 : 3 =) 6 Kinder sein.

Da aus 1. Gruppe 2 Kinder in die Gruppe 2 wechselten, waren vor dem Wechsel (6 + 2 =) 8 Kinder in der Gruppe 1.

Da in die 3. Gruppe 3 Kinder aus der Gruppe 2 wechselten, waren vor dem Wechsel (6 – 3 =) 3 Kinder in der Gruppe 3.

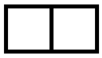
Folglich müssen in der 2. Gruppe vor dem Wechsel (18 – 8 – 3 =) 7 Kinder sein.

Die Probe bestätigt, dass alle 18 Kinder auf diese Weise vor dem Wechsel in den Gruppen aufgeteilt waren.

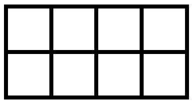
****

LOGO – Runde 1: **Quadrate und Kreise** (Teil B)

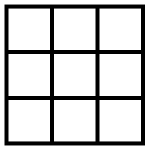
Aufgabe 1. Quadrato spielt gern mit Domino-Steinen, denn ein Domino-Stein besteht aus zwei aneinander gefügten Quadraten. Quadrato hat zwei Vorlagen gezeichnet, ein 2 x 4-Rechteck und ein 3 x 3-Quadrat.



Domino-Stein



2 x 4-Rechteck

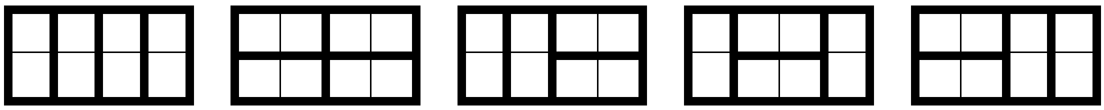


3 x 3-Quadrat

Aufgabe 1a) Es ist nicht schwer, auf das 2 x 4-Rechteck einige Domino-Steinen so zu legen, dass sie nicht aufeinander liegen und alle Teilquadrate des Rechtecks bedecken. Quadrato bemerkt, dass er verschiedene Möglichkeiten hat, die Domino-Steine aufzulegen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, das Rechteck mit Domino-Steinen auf diese Weise zu bedecken? Gib alle Möglichkeiten an.

Aufgabe 1b) Warum gelingt es Quadrato nicht, das 3 x 3-Quadrat nach diesen Regeln mit Domino-Steinen zu bedecken?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es gibt 5 verschiedene Möglichkeiten, das 2 x 4 –Rechteck mit Dominosteinen zu bedecken.

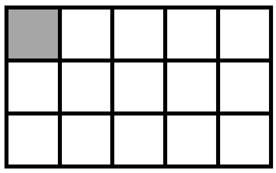


Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Da jeder Dominostein zwei Felder bedeckt, kannst du mit Dominosteinen nur Flächen bedecken, die eine gerade Anzahl von Feldern haben. Das 3x3-Quadrat umfasst aber (3 · 3 =) 9 Felder, also eine ungerade Anzahl. Somit bleibt stets ein Feld frei.

****

Aufgabe 2. Nun verwendet Quadrato ein 3 x 5-Rechteck als neue Vorlage. Wieder will er diese Vorlage mit Domino-Steinen belegen und sperrt die linke obere Ecke. Schnell hat er alle freien Teilquadrate mit 7 Domino-Steinen bedeckt.

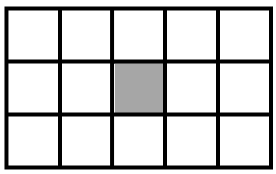
Aufgabe 2a) Zeige, wie Quadrato die Steine aufgelegt haben könnte.



Vorlage für (a)

Nun sperrt Quadrato das mittlere Teilquadrat und wundert sich, dass er die freien Teilquadrate mit Domino-Steinen nicht vollständig bedecken kann.

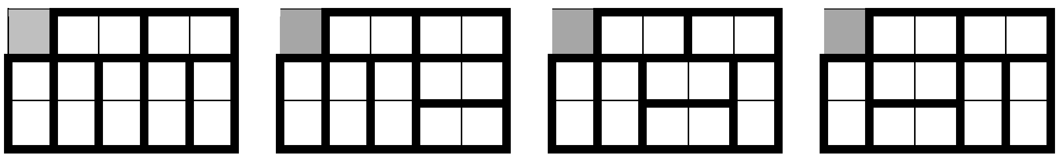
Aufgabe 2b) Erkläre, warum es Quadrato nicht gelingen kann.

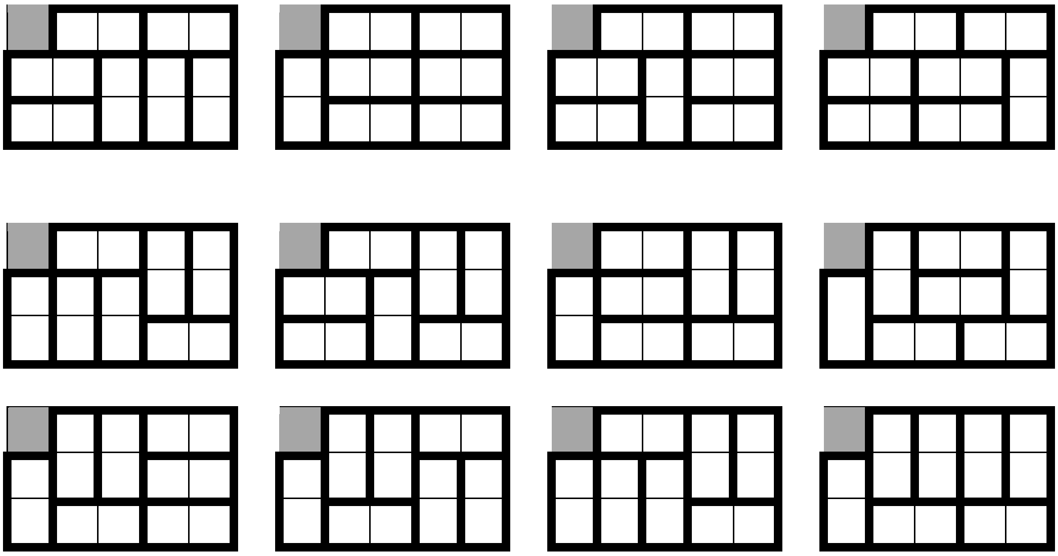


Vorlage für (b)

Aufgabe 2c) Findest du noch ein anderes Teilquadrat, das Quadrato sperren kann, sodass damit keine Bedeckung mit Domino-Steinen gelingt? Begründe dein Ergebnis.

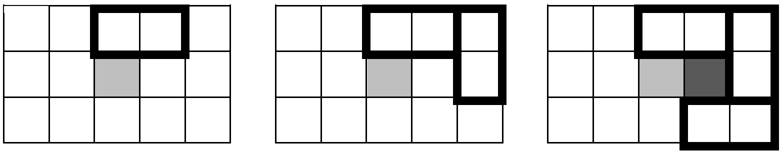
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Es gibt viele Möglichkeiten, die Vorlage für Aufgabe 2a mit Dominosteinen zu bedecken. Laut Aufgabenstellung genügte es, eine anzugeben.





Lösungshinweise zu Aufgabe 2b): Um zu begründen, dass die Bedeckung nicht gelingen kann, musst du eine Bedeckung angeben, bei der die Lage der Dominosteine Stein für Stein festgelegt ist.

- Um das Feld über dem Sperrfeld zu bedecken, kann der 1. Dominostein darauf gelegt werden. Dann bedeckt er auch ein benachbartes Feld, beispielsweise rechts.
- Um nun auch das rechte obere Feld zu bedecken, gibt es nur eine Möglichkeit, den 2. Dominostein aufzulegen.
- Um nun auch das rechte untere Feld zu bedecken, gibt es nur eine Möglichkeit, den 3. Dominostein aufzulegen.
- Nun ist schon erkennbar, dass das schwarze „eingekreiste“ Feld nicht mehr von einem Dominostein bedeckt werden kann.



6	6	1	1	2
5				2
5	4	4	3	3

Um nicht so viele Bilder zeichnen zu müssen, können Zahlen auf den Feldern die Reihenfolge der Dominosteine kennzeichnen.

2	1	1	6	6
2				5
3	3	4	4	5

Wenn der erste Dominostein jedoch so auf das Feld über dem Sperrfeld gelegt wird, dass er das benachbarte Feld links bedeckt, so wird beginnt das Auflegen in die andere Richtung.

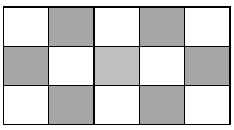
Lösungshinweise zu Aufgabe 2c): Die Beispiele 1 und 2 zeigen jeweils ein weiteres Sperrfeld. Wenn du den 1. Dominostein so legst, dass das Feld über oder neben dem Sperrfeld bedeckt wird, so ist die angegebene Reihenfolge der Dominosteine 2 bis 6 erforderlich, um keine Lücken entstehen zu lassen. Aber dann kann der 7. Dominostein nicht mehr auf die verbleibenden 2 freien Felder gelegt werden.

1	1	4	4	
	3	3		6
2	2	5	5	6

Beispiel 1

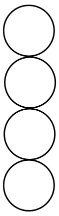
1		5	5	6
1	3	3		6
2	2	4	4	

Beispiel 2



Alle möglichen Sperrfelder

****



Aufgabe 3. Kreisa beschäftigt sich lieber mit Kreisen. Sie hat 4 Kreise untereinander gezeichnet. Nun will sie diese farbig ausmalen, jeden Kreis mit einer Farbe – gelb, blau oder rot. Wie viele Möglichkeiten hat Kreisa, die Farben zu verteilen, wenn sie alle Farben verwenden will, aber benachbarte Kreise unterschiedliche Farben haben sollen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Es gibt 18 Möglichkeiten, die Kreise wie gefordert zu färben.

Begründung: Da vier Kreise mit drei Farben zu färben sind, muss eine Farbe doppelt auftreten. Untersuche zuerst die Anzahl der Möglichkeiten, wenn zwei Kreise gelb gefärbt werden. (Bezeichne dafür den oberen Kreis mit 1, darunter mit 2, dann 3 und den untersten Kreis mit 4.)

Damit gleich gefärbte Kreise nicht nebeneinander stehen, gibt es nur die folgenden 3 Varianten, Kreise mit gelb zu färben:

Kreise 1 und 3, Kreise 1 und 4, Kreise 2 und 4.

Die verbleibenden zwei Kreise sind nun mit rot oder blau zu färben, in jeder Variante gibt es zwei Möglichkeiten: blau über rot oder rot über blau.

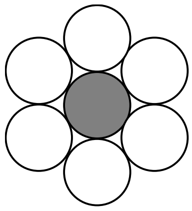
Mit zwei gelben Kreisen gibt es also insgesamt (3 · 2 =) 6 verschiedene Möglichkeiten.

Gelb	Gelb	Gelb	Gelb	Rot	Blau
Rot	Blau	Rot	Blau	Gelb	Gelb
Gelb	Gelb	Blau	Rot	Blau	Rot
Blau	Rot	Gelb	Gelb	Gelb	Gelb

Sind zwei Kreise rot oder zwei Kreise blau, gibt es ebenso jeweils 6 Möglichkeiten, insgesamt also (6 + 6 + 6 =) 18 Möglichkeiten.

****

Aufgabe 4. Kreisa hat einen Kreis gezeichnet. Um diesen Kreis zeichnete sie rundherum sechs gleichgroße Kreise, so eng wie möglich wie in der Abbildung. Nun will sie um diese sieben Kreise wieder rundherum gleichgroße Kreise so eng wie möglich zeichnen, sodass jeder neue Kreis mindestens einen der weißen Kreise berührt. Wie viele Kreise kann Kreisa so zeichnen? Zeichne, wie deine Lösung aussieht.



Kreisa verwendet Gegenstände, um die Lösung zur Aufgabe 4 zu finden. Hast du einen Tipp, was sie verwenden könnte?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Es lassen sich 12 Kreise um die Vorlage zeichnen.

Wenn du genug gleichgroße runde Gegenstände hast, zum Beispiel Münzen, Bierdeckel, Gläser, Teller, Unterleg-scheiben, Leimstifte, Dame-/Mühle-Steine,

so kannst du ausprobieren, wie die 12 (schwarzen) Kreise um die gegebenen 7 (weiße) Kreise passen.

Viele andere gute Tipps wurden gegeben – aber Bälle, Murmeln oder Äpfel eignen sich nicht richtig, weil keine kreisrunde Fläche auf dem Papier aufliegt (obwohl es von oben betrachtet so aussieht). Am besten ist aber immer eine Zeichnung mit dem Zirkel!

****

LOGO – Runde 2: **In der Backstube** (Teil A)

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Herr Raute, Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato – backen Plätzchen. Alle helfen mit, die Plätzchen aus dem Teig auszustechen. Frau Dreieck zeigt, wie es geht, und sticht einige Plätzchen aus. Danach bereitet sie den nächsten Teig vor. Herr Raute hat doppelt so viele Plätzchen wie Frau Dreieck ausgestochen. Quadrato schaffte so viele, wie Frau Dreieck und Herr Raute zusammen. Kreisa war besonders flink. Sie stach so viele Plätzchen aus, wie Quadrato und Herr Raute zusammen.

Als sie fast fertig waren, sagte Quadrato: „Da haben wir alle vier insgesamt mehr als 100 Plätzchen vorbereitet“. Frau Dreieck lacht: „Das stimmt nicht. Wenn ich aber jetzt noch 5 Plätzchen dazulege, sind es wirklich über 100“.

Wie viele Plätzchen hat Familie Geometrie insgesamt ausgestochen? Begründe dein Ergebnis.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 - Antwortsatz: Insgesamt hat Familie Geometrie 99 Plätzchen ausgestochen, bevor Frau Dreieck noch 5 Plätzchen dazu legte.

Herleitung: Eine solche Aufgabe kannst du mit einer Tabelle lösen. Wenn du eine Anzahl Plätzchen für Frau Dreieck annimmst, kannst du aufgrund der Angaben im Text die Anzahl aller Plätzchen ermitteln.

Hinweis: Kürze zur Vereinfachung der Schreibweise die Namen mit dem Anfangsbuchstaben ab und verwende diesen Buchstaben als Variable für die Anzahl der Plätzchen.

D	R = 2 · D	Q = R + D	K = Q + R	Gesamt	<100?	+5	>100?
1	2	3	5	11	Ja	16	Nein
2	4	6	10	22	Ja	27	Nein
...							
8	16	24	40	88	Ja	93	Nein
9	**18**	**27**	**45**	**99**	**Ja**	**104**	**Ja**
10	20	30	50	110	Nein		

Nur wenn Frau Dreieck 9 Plätzchen ausstach, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die entsprechende Zeile in der Tabelle beinhaltet zugleich die Probe.

Lösungsvariante: Verwendest du wieder die Anfangsbuchstaben als Variablen für die Anzahlen der ausgestochenen Plätzchen, so findest du folgende Zusammenhänge:

$$R = 2 \cdot D,\ Q = R + D = 2 \cdot D + D = 3 \cdot D,\ K = Q + R = 3 \cdot D + 2 \cdot D = 5 \cdot D$$
$$D + R + Q + K = D + 2 \cdot D + 3 \cdot D + 5 \cdot D = 11 \cdot D$$

Nun soll gelten $11 \cdot D < 100$, aber $11 \cdot D + 5 > 100$.

Diese Ungleichungen sind nur für $D = 9$ erfüllt. Prüfe nun mittels Probe, dass $D = 9$ tatsächlich zu Lösung führt.

****

Aufgabe 2. Frau Dreieck füllte einige Kekse in eine Dose und stellte diese in die Küche. Als Quadrato am nächsten Tag aus der Schule kam, nahm er sich den dritten Teil der Kekse heraus. Von den verbleibenden Keksen nahm sich Kreisa die Hälfte der Kekse heraus. Auch Herr Raute naschte, aber vier Kekse weniger als Quadrato. Als danach Frau Dreieck in die Dose schaute, waren nur noch so viele Kekse drin, wie sich Herr Raute herausgenommen hatte.

Wie viele Kekse waren anfangs in der Keks-Dose?

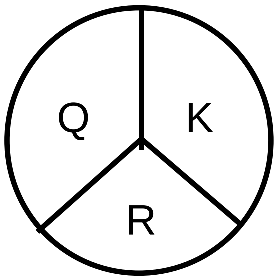
Lösungshinweise zu Aufgabe 2 - Antwortsatz: Am Anfang waren 24 Kekse in der Dose.

Herleitung: Auch diese Aufgabe kannst du durch Probieren lösen. Trage in eine Tabelle ein, wie viele Kekse jeder aus der Dose genommen hat, wenn anfangs eine bestimmte Anzahl Kekse in der Dose war. Prüfe dabei, ob alle Bedingungen erfüllt sind.
Da Quadrato ein Drittel der Kekse nahm, muss die Anzahl der Kekse in der Dose eine durch 3 teilbare Zahl sein.

Kekse in der Dose	Q: ein Drittel	Rest	K: die Hälfte	Rest	R = Q - 4	Rest	Rest = R?
3	1	2	1	1	Geht nicht		
6	2	4	2	2	Geht nicht		
9	3	6	3	3	Geht nicht		
12	4	8	4	4	0	4	Nein
15	5	10	5	5	1	4	Nein
18	6	12	6	6	2	4	Nein
21	7	14	7	7	3	4	Nein
24	**8**	**16**	**8**	**8**	**4**	**4**	**Ja**
27	9	18	9	9	5	4	Nein

Nur wenn anfangs 24 Kekse in der Dose waren, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Die entsprechende Zeile in der Tabelle beinhaltet zugleich die Probe.

Lösungsvariante: Veranschauliche dir die Anteile, die sich Quadrato, Kreisa und Herr Raute nahmen, in einer Grafik:



Quadrato nahm sich ein Drittel. Übrig bleiben zwei Drittel.

Davon nahm sich Kreisa die Hälfte, also ebenfalls ein Drittel von der Anzahl, die anfangs in der Dose waren Kreisa nahm sich also genau so viele Kekse wie Quadrato.

Herr Raute nahm sich vom Rest die Hälfte, denn es waren ja noch so viele in der Dose wie sich Herr Raute genommen hat. Also hat Herr Raute halb so viele Kekse genommen wie Quadrato, doch das waren 4 Kekse weniger als Quadrato. Doch nur wenn Quadrato 8 Kekse nahm, ergeben 4 Kekse weniger die Hälfte davon.

Also waren am Anfang (3 · 8 =) 24 Kekse in der Dose.

****

Aufgabe 3. Am nächsten Tag füllte Frau Dreieck wieder eine Keks-Dose. Aber diesmal versteckte sie diese. Wie überrascht war sie, als sie feststellte, dass doch wieder jemand genascht hat!

Frau Dreieck schimpfte: „Quadrato war es natürlich. Wie immer.“
Quadrato wehrte sich: „Das war ganz sicher Kreisa.“
Kreisa erwiderte: „Ich würde so etwas niemals machen.“
Schließlich behauptete Herr Raute: „Ich war es nicht.“

Wenn alle vier die Wahrheit sagten, ließe sich der Übeltäter nicht eindeutig bestimmen, denn es könnten Quadrato oder Kreisa gewesen sein.

Aber wenn nur einer die Wahrheit sagte und die anderen drei logen, ist es nicht schwer, den Übeltäter zu ermitteln. Hast du ihn schon erkannt? Erkläre, wie du ihn gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Herr Raute war der Übeltäter.

Probe: Wenn Herr Raute der Übeltäter war, hat er gelogen. Auch Frau Dreieck hat gelogen (sie verdächtigte Quadrato). Quadrato hat auch gelogen (er verdächtigte Kreisa). Dagegen sagte Kreisa die Wahrheit. Also hat nur eine die Wahrheit gesagt und die anderen drei logen – die Bedingungen der Aufgabe sind erfüllt.

Hinweis: Jedoch ist mit der Probe noch nicht nachgewiesen, dass es nicht noch eine andere Lösung geben könnte. Deshalb ist eine Herleitung erforderlich.

Variante 1: Nimm der Reihe nach an, wer die Wahrheit gesagt haben könnte. Prüfe in jedem Fall, ob die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Beachte, dass die anderen drei gelogen haben.

(1) Wenn Frau Dreieck die Wahrheit sagte, war Quadrato der Übertäter. Aber dann hätten Kreisa und Herr Raute auch die Wahrheit gesagt – was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(2) Wenn Quadrato die Wahrheit sagte, dann war es Kreisa. Aber dann hätte auch Herr Raute die Wahrheit gesagt – was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(3) Wenn Kreisa die Wahrheit sagte, dann war sie nicht der Übeltäter. Dann hat Quadrato gelogen. Da sowohl Frau Dreieck als auch Herr Raute gelogen haben müssen, ist Herr Raute der Übeltäter.
(4) Wenn Herr Raute die Wahrheit sagte, haben entweder Quadrato oder Kreisa auch die Wahrheit gesagt - was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Nur im Fall (3) sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllbar und Herr Raute ist somit als Übeltäter überführt.

Bestimmt ist dir aufgefallen, dass sich die Aussagen von Quadrato und Kreisa widersprechen – sie können nicht beide gleichzeitig Recht haben. Also hat einer von ihnen die Wahrheit gesagt und der andere hat gelogen. Mit dieser Feststellung verkürzt sich die Auswertungen:

- Entweder sagte Quadrato die Wahrheit, dann gilt das Ergebnis von (2),
- oder Kreisa sagte die Wahrheit, dann gilt das Ergebnis von (3).
- Da nur einer die Wahrheit sagt, sind keine weiteren Fälle möglich.

Variante 2: Nimm der Reihe nach an, wer der Übeltäter gewesen sein könnte. Prüfe in jedem Fall, ob die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

(1) Wenn Frau Dreieck der Übeltäter war, dann haben Kreisa und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(2) Wenn Quadrato der Übeltäter war, dann haben Kreisa und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

(3) Wenn Kreisa der Übeltäter war, dann haben Quadrato und Herr Raute die Wahrheit gesagt– was nicht die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
(4) Wenn Herr Raute der Übeltäter war, dann sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllbar.

Aufgabe 4. Nach dem Backen der Plätzchen wollten Quadrato und Kreisa die Plätzchen noch verzieren. Sie hatten dafür Schokoladenguss, Zuckerguss, Haselnüsse, Mandeln und bunte Streusel. Auf jedes Plätzchen kam mindestens eine Zutat. Natürlich sollte nicht gleichzeitig Schokoladenguss und Zuckerguss verwendet werden. Auch sollten auf den Plätzchen nicht gleichzeitig Haselnüsse und Mandeln sein.

Wie viele verschiedene Verzierungen konnten beide Kinder gestalten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Wenn die Zutaten nur halten, wenn ein Guss verwendet wird, sind es 12 verschiedene Möglichkeiten. Kann dagegen jede Zutat auch ohne Guss verwendet werden, sind es insgesamt 17 Möglichkeiten.

Begründung: Kürze die Zutaten zur Vereinfachung der Schreibweise ab, zum Beispiel so:

Schokoguss – SG, Zuckerguss – ZG, Mandeln – M,
Haselnüsse – H und bunte Streusel – BS.

Verwenden Quadrato und Kreisa SG, dann sind folgende 6 Verzierungen möglich:

SG, SG + M, SG + H, SG + BS, SG + M + BS, SG + H + BS

Verwenden sie ZG, dann sind folgende 6 Verzierungen möglich:

ZG, ZG + M, ZG + H, ZG + BS, ZG + M + BS, ZG + H + BS

Das sind insgesamt (6 + 6 =) 12 Verzierungen.

Wenn es möglich ist, die Plätzchen auch ohne SG oder ZG zu verzieren, dann sind auch noch folgende 5 Verzierungen möglich:

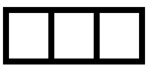
M, H, BS, M + BS, H + BS

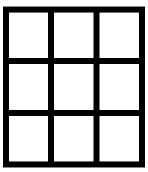
Dann sind es insgesamt (12 + 5 =) 17 Verzierungen.

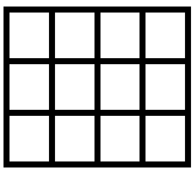
****

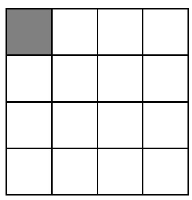
LOGO – Runde 2: **Flächen bedecken** (Teil B)

In der ersten Runde spielte Quadrato mit Domino-Steinen. Diesmal verwendet er Dreier-Steine. Es ist natürlich nicht schwierig, ein 3 x 3-Quadrat oder ein 3 x 4-Rechteck mit Dreier-Steinen zu bedecken.


Dr4eier-Stein


3 x 3-Quadrat


3 x 4-Quadrat



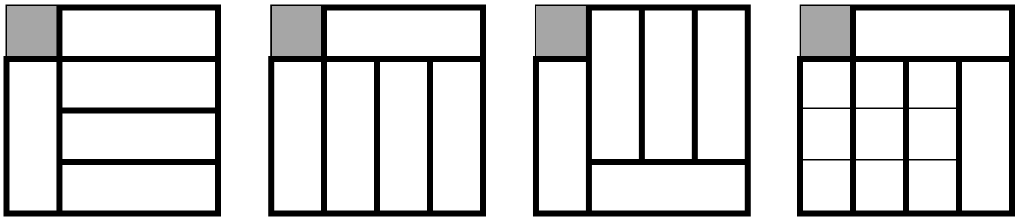
Aufgabe 1. Nun will Quadrato auf ein 4 x 4-Quadrat die Dreier-Steine so legen, dass sie nicht aufeinander liegen und alle Felder des Quadrates bedecken. Da das Quadrat 16 quadratische Felder umfasst, sperrt er das linke obere Feld.

Aufgabe 1a). Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Quadrato, die freie Fläche mit fünf Dreier-Steinen zu bedecken. Gib alle Möglichkeiten an!

Aufgabe 1b). Quadrato möchte nun ein anderes Feld sperren. Aber nur, wenn er ein Eckfeld sperrt, kann er die Fläche mit Dreier-Steinen bedecken.

Zeige, warum es bei Sperrfeldern, die kein Eckfeld sind, nicht gelingen kann, die freie Fläche mit fünf Dreier-Steinen zu bedecken.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten.



Begründung: Nach einigen Versuchen erkennst du:

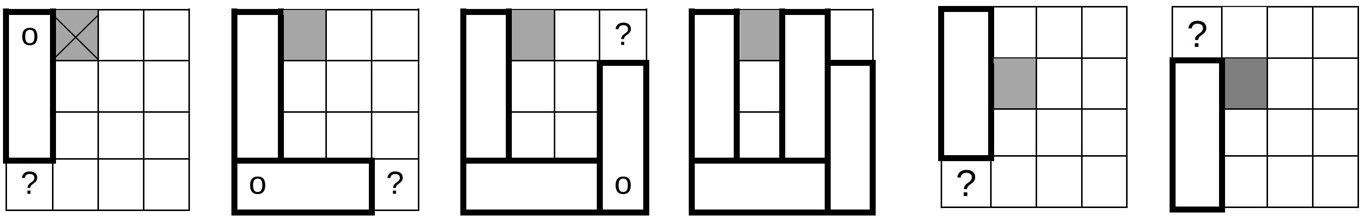
- An die linke Seite passt genau ein Stein senkrecht unter das gesperrte Feld. Dann kann der Rest der Fläche durch 4 waagegerechte Steine bedeckt werden (Beispiel A).
- Soll dagegen auf dem Rest der Fläche ein Stein senkrecht liegen, dann gelingt dies nur wie in den Beispielen B oder C.
- Soll dagegen an den linken Rand ein Stein waagerecht gelegt werden, ist nur die Belegung wie im Beispiel D möglich.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Nur bei gesperrten Eckfeldern ist eine Bedeckung möglich.

Begründung: Zeige, dass mit der Lage des ersten Steines bereits die Lage der anderen Steine vorgegeben ist.

Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe genügt es, die Beispiele zu zeichnen, wenn damit alle möglichen Versuche abgebildet werden. Die folgende ausführliche Lösungsdarstellung wird nicht erwartet.

Möglichkeit 1: Quadrato versucht, ein Randfeld neben einem Eckfeld zu sperren. Dann muss der erste Stein so an den Rand gelegt werden, dass das abgegrenzte Eckfeld (o) bedeckt wird. Dann entsteht aber links unten ein neues abgegrenztes Eckfeld (?). Der nächste Stein muss dieses Feld bedecken. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit. Dann entsteht aber rechts unten ein neues abgegrenztes Eckfeld (?), sodass der nächste Stein dieses Feld bedecken muss. Nun ist nur noch für einen Stein Platz übrig, es bleiben drei nicht zusammenhängende Felder frei.

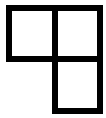


Möglichkeit 2: Sperrt Quadrato ein mittleres Feld, so muss er daneben einen Stein legen. In jedem Fall entstehen wieder abgegrenzte Eckfelder (?). Damit ist die Lage des nächsten Steins bereits festgelegt und führt zum Ergebnis wie in der ersten Möglichkeit.

Warum genügt es, nur diese beiden Möglichkeiten zu untersuchen?

- Jedes andere Randfeld kann durch Drehung oder Spiegelung des 4x4-Quadrates auf die Lage wie im Fall A gebracht werden.
- Jedes andere Mittelfeld kann durch Drehung oder Spiegelung des 4x4-Quadrates auf die Lage wie im Fall B gebracht werden.

****



Winkel-Stein

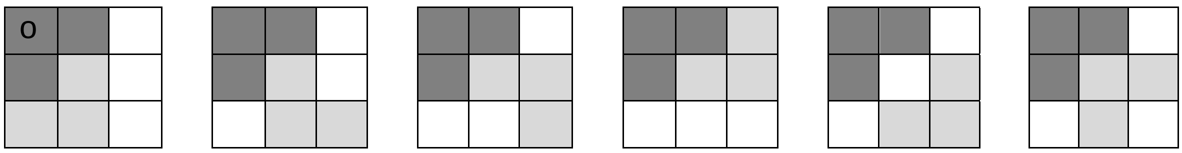
Aufgabe 2. Kreisa schlägt Quadrato vor, statt Dreier-Steine Winkel-Steine zu verwenden. Dabei dürfen die Winkel-Steine beim Auflegen auch gedreht werden.

Aufgabe 2a) Untersuche, ob Quadrato die 9 Felder eines 3 x 3-Quadrat mit Winkel-Steinen bedecken kann.

Aufgabe 2b) Untersuche, ob Quadrato die 12 Felder eines 3 x 4-Rechtecks mit Winkel-Steinen bedecken kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Es gelingt nicht, ein 3x3-Quadrat mit drei Winkelsteinen zu bedecken.

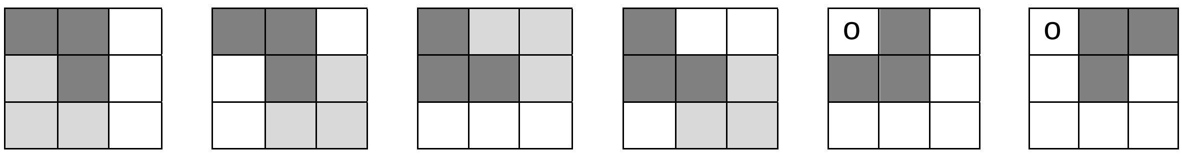
Begründung:
Variante 1: Finde alle Möglichkeiten, zunächst zwei Winkelsteine auf das 3x3-Quadrat zu legen. Wenn du einen Winkelstein so legst, dass die linke obere Ecke (o) bedeckt wird, passt der zweite Winkelstein in 6 verschiedenen Möglichkeiten auf das 3x3-Quadrat. Du erkennst, dass dann für einen dritten Winkelstein kein Platz mehr ist.



A1 B1 C1 D1 E1 F1

Wenn du den ersten Winkelstein wie in Abbildung A2 oder A3 legst, gibt es jeweils nur zwei Möglichkeiten, den zweiten Winkelstein (A2 oder B2 bzw. A3 und B3) zu legen – und wieder passt kein dritter Winkelstein auf das 3x3-Feld.

Bleibt aber das linke obere Eckfeld (o) unbedeckt wie in den Abbildungen A4 und A5, erkennst du, dass dieses Feld durch keinen anderen Winkelstein mehr bedeckt werden kann.

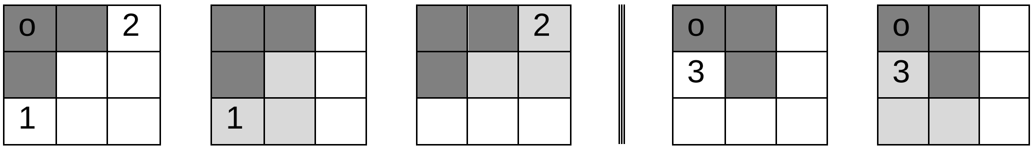


A2 B2 A3 B3 A4 A5

Variante 2: Du kannst versuchen, das 3x3-Quadrat lückenlos zu bedecken. Dabei muss das linke obere Eckfeld (o) mit einem Winkelstein bedeckt werden.

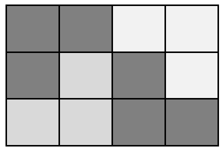
Du kannst einen Winkelstein wie in Abbildung A1 legen. Im nächsten Schritt muss das Eckfeld 1 oder 2 bedeckt werden. Das geht aber nur wie in Abbildung B1 oder C1 – es bleibt immer ein Streifen aus 3 Feldern übrig, die nicht mit einem Winkelstein bedeckt werden können.

Du kannst aber auch einen Winkelstein wie in Abbildung A2 legen. Im nächsten Schritt ist das Feld 3 zu bedecken – das geht aber nur wie in Abbildung B2 – und wieder bleibt ein Streifen aus 3 Feldern wie schon bei Abbildung B1 übrig.



A1 B1 C1 A2 B2

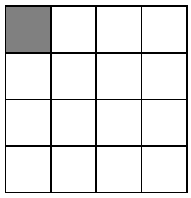
Aufgabe 2b – Antwortsatz: Quadrato kann ein 3x4-Rechteck mit 4 Winkelsteinen bedecken.



Zur Begründung genügt die Angabe eines Beispiels.

****

Aufgabe 3. Nun will Quadrato auf ein 4 x 4-Quadrat fünf Winkel-Steine legen. Da das Quadrat 16 quadratische Felder umfasst, sperrt er wieder das linke obere Feld.



Aufgabe 3a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Quadrato, die freie Fläche mit fünf Winkel-Steinen zu bedecken. Gib alle Möglichkeiten an!

Aufgabe 3b) Quadrato möchte nun ein anderes Feld sperren. Finde alle Felder, die er sperren kann, so dass trotzdem eine Bedeckung mit fünf Winkel-Steinen gelingt.

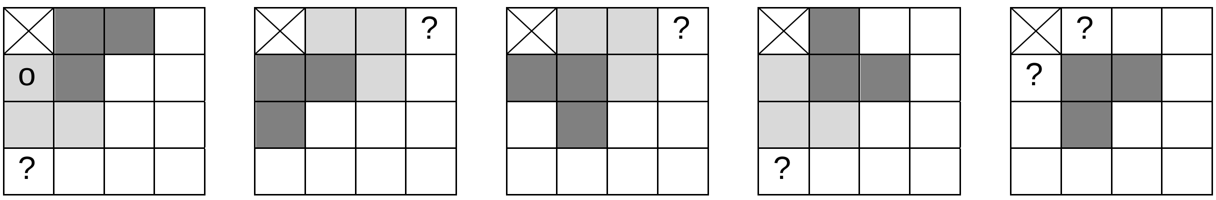
Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) - Antwortsatz: Es gibt nur eine Möglichkeit, das 4x4-Quadrat mit Winkelsteinen vollständig zu überdecken, wenn das linke obere Eckfeld gesperrt ist.

Begründung: Lege einen Winkelstein an das Sperrfeld und untersuche, ob du dann das 4x4-Quadrat bedecken kannst.

Wenn im Beispiel A der dunkle Stein zuerst liegt, muss der helle Stein wie angegeben gelegt werden, damit das abgegrenzte Randfeld (o) bedeckt wird. Doch dann kann das Eckfeld links unten (?) nicht bedeckt werden.

Das Beispiel B entspricht dem Beispiel A.

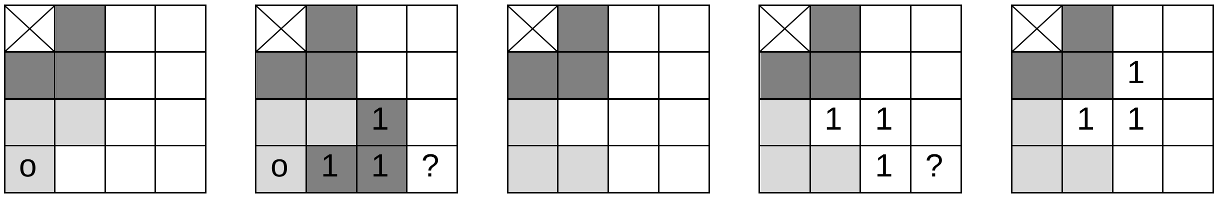
Mit gleicher Begründung sind auch die Beispiele C und D nicht erfolgreich fortsetzbar. Im Beispiel E sind sogar sofort in der linken Spalte und in der oberen Zeile nicht bedeckbare Felder zu erkennen.



A *B* *C* *D* *E*

Wenn es eine Bedeckung gibt, muss der erste Stein das gesperrte Eckfeld offenbar umschließen. Nun gibt es nur zwei Möglichkeiten, das Eckfeld links unten (o) zu bedecken. Legst du den Winkelstein wie im Beispiel F, ist schon mit dem nächsten Stein (1) zu erkennen, dass das 4x4-Quadrat nicht bedeckt werden kann (Beispiel G), weil das nächste Eckfeld (?) nicht mehr bedeckt werden kann.

Versuche es also mit dem 2. Winkelstein wie im Beispiel H. Der nächste Stein darf aber nicht wie im Beispiel I gelegt werden (1), weil dann die rechte untere Ecke (?) nicht mehr belegt werden kann. Dagegen kann das Beispiel J erfolgreich bedeckt werden.

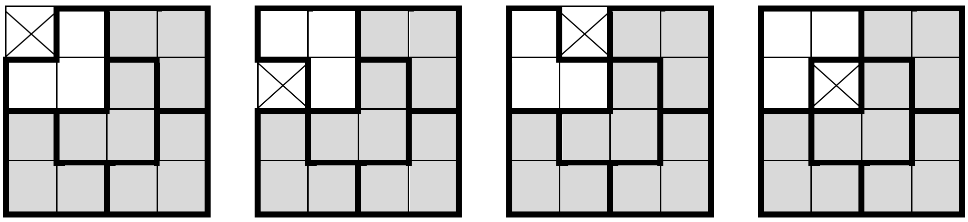


F *G* *H* *I* *J*

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Quadrato kann jedes Feld des 4x4-Quadrates sperren. In jedem Fall lässt sich die verbleibende Fläche mit 5 Winkelsteinen bedecken.

Zur Begründung genügt die Angabe geeigneter Beispiele.

Für ein gesperrtes Eckfeld ist die Möglichkeit in Aufgabe 3a bereits gezeigt. Für ein gesperrtes Randfeld und für ein gesperrtes Mittelfeld findest du schnell eine passende Bedeckung:



Für jedes andere gesperrte Feld musst du das 4x4-Quadrat nur solange drehen, bis die Lage des gesperrten Feldes eines der obigen Beispiele entspricht. Ist dir aufgefallen, dass die grauen Winkelsteine ihre Lage nicht verändern, auch wenn das gesperrte Feld geändert wurde?

****

LOGO – Runde 3: **Gute Aussicht** **(Teil A)**

Aufgabe 1. Familie Geometrie wanderten im naheliegenden Wald. Ihr Ziel ist der Aussichtsturm. In der ersten Stunde liefen sie recht langsam. Herr Raute drängelte deshalb, sodass sie in der zweiten Stunde doppelt so viele Kilometer liefen. Dieses Tempo hielten sie in der dritten Stunde durch, hatten aber für 30 min eine Pause eingelegt. Am Ende der vierten Stunde (in der sie noch einmal so viele Kilometer liefen wie in der ersten Stunde) erreichten sie ein Schild mit dem Hinweis: „Bis zum Aussichtsturm noch 3 km“. Da motivierte Herr Raute seine Familie: „Jetzt haben wir schon fünfmal so viele Kilometer geschafft wie wir noch laufen müssen.“

Wie viele Kilometer lief Familie Geometrie in der ersten Stunde? Erkläre deinen Lösungsweg.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 - Antwortsatz: Familie Geometrie lief in der ersten Stunde 3 km.

Probe: In der 1. Stunde liefen sie 3 km. In der 2. Stunde liefen sie doppelt so viele Kilometer, also ($2 \cdot 3 =$) 6 km. In der 3. Stunde behielten sie das Tempo bei. Sie waren aber nur eine halbe Stunde unterwegs und liefen deshalb nur ($6 : 2 =$) 3 km. In der 4. Stunde waren es noch einmal 3 km. Insgesamt liefen sie in 4 Stunden ($3 + 6 + 3 + 3 =$) 15 km. Das ist das 5-fache von der Angabe auf dem Hinweisschild ($5 \cdot 3 =$) 15 km.

Herleitung: Nach Aussage von Herrn Raute lief Familie Geometrie in 4 Stunden insgesamt ($5 \cdot 3 =$) 15 km. Mit diesem Hinweis kannst du diese Aufgabe durch systematisches Probieren lösen. Wähle eine Anzahl Kilometer aus, die Familie Geometrie in der 1. Stunde gelaufen sein könnte. Ermittle anhand der Angaben in der Aufgabe, wie viele Kilometer sie dann in der 2., 3. und 4. Stunde gelaufen wären. Überprüfe, ob dann die Aussage von Herrn Raute erfüllt ist. Trage deine Ergebnisse in eine Tabelle ein.

km in der 1. Stunde	km in der 2. Stunde	km in der 3. Stunde	km in der 4. Stunde	km insgesamt	Vergleich
1	$2 \cdot 1 = 2$	$2 : 2 = 1$	1	$1 + 2 + 1 + 1 = 5$	$5 < 5 \cdot 3$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$4 : 2 = 2$	2	$2 + 4 + 2 + 2 = 10$	$10 < 5 \cdot 3$
3	$\mathbf{2 \cdot 3 = 6}$	$\mathbf{6 : 2 = 3}$	**3**	$\mathbf{3 + 6 + 3 + 3 = 15}$	$\mathbf{15 = 5 \cdot 3}$
4	$2 \cdot 4 = 8$	$8 : 2 = 4$	4	$4 + 8 + 4 + 4 = 20$	$20 > 5 \cdot 3$

Nur wenn sie in der ersten Stunden 3 km liefen, ist die Aussage von Herrn Raute erfüllt. (In der Tabelle ist die Probe bereits zu sehen.)

Lösungsvariante: Die Überlegungen für das Ausfüllen der Tabelle kannst du auch für das Aufstellen einer Gleichung nutzen. Bezeichne die Anzahl der Kilometer der Wegstrecke in der ersten Stunde mit x. Dann findest du folgende Zusammenhänge:

2. Stunde: $2 \cdot x$ 3. Stunde: x 4. Stunde: x
Gesamt: $x + 2 \cdot x + x + x = 5 \cdot x = 15$.

Mit $x = 15 : 5 = 3$ ist die Lösung gefunden. Vergiss nicht bei dieser Variante die Probe!

****

Aufgabe 2. Am Aussichtsturm angekommen, staunten sie über dessen Höhe. Viele Stufen führten auf die Aussichtsplattform. Beim Aufstieg zählt jeder die Stufen. Oben angekommen, hatte jeder eine andere Anzahl gezählt:

Frau Dreieck sagt: „Ich habe 132 Stufen gezählt."
Herr Raute meinte: „Ich habe nur 121 Stufen gezählt."
Quadrato informierte: „Ich bin auf 128 Stufen gekommen."
Schließlich sagte Kreisa: „Ich habe nur 119 Stufen gezählt."

Ein anderer Wanderer war bereits auf der Plattform und hörte diese Aussagen. Er wandte sich an Familie Geometrie und erklärte: „Ich kenne die Anzahl der Stufen – keiner hat beim Aufstieg richtig gezählt. Eine Zahl ist um 4 zu niedrig, eine andere Zahl um 3 zu viel, die nächste Zahl ist um 6 zu niedrig und eine Zahl ist sogar um 7 zu hoch."

Weißt du jetzt, wie viele Stufen es wirklich waren? Erkläre, wie du die Lösung gefunden hast. Prüfe dein Ergebnis mit einer Probe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 - Antwortsatz: Es waren 125 Stufen.

Herleitung: Frau Dreieck hat die meisten Stufen gezählt. Ihre Anzahl ist deshalb am höchsten von der wirklichen Anzahl entfernt. Also muss ihre Anzahl um 7 Stufen zu hoch sein: 132 – 7 = 125.

Probe: Du musst kontrollieren, ob auch die anderen Zählergebnisse wie angegeben korrigiert werden können:

121 + 4 = 125   128 – 3 = 125   119 + 6 = 125

Damit sind alle Aussagen der Aufgaben erfüllt.

****

Aufgabe 3. Von der Aussichtsplattform konnten sie weit ins Land schauen. In der Ferne erkannten sie den Schornstein, den Kirchturm, das Rathaus und die Autobahnbrücke. Alle standen in unterschiedlicher Entfernung vom Aussichtsturm. Sie rätselten nun, wie weit wohl diese Bauwerke entfernt seien.

Quadrato meinte: „Der Schornstein ist näher als das Rathaus“.
Kreisa glaubte: „Der Kirchturm ist weiter weg als die Autobahnbrücke“.
Frau Dreieck erwiderte: „Die Autobahnbrücke ist näher als der Schornstein“.
Herr Raute mischte sich ein: „Das Rathaus steht doch vor der Autobahnbrücke.“

Nach kurzer Pause merkte Quadrato: „Das kann nicht stimmen. Die Antworten passen nicht zusammen.“

Was war Quadrato aufgefallen? Wer hat sich verschätzt, wenn nach Änderung seiner Aussage die Reihenfolge der Entfernungen eindeutig ermittelt werden konnte?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 - Antwortsatz. Quadrato hat bemerkt, dass seine Aussage nicht mit den Aussagen von Frau Dreieck und Herrn Raute zusammenpasst. Frau Dreieck hat sich verschätzt. Der Schornstein steht am nächsten, dann das Rathaus, dann die Autobahnbrücke und am weitesten ist der Kirchturm entfernt.

Herleitung: Kürze die Bauwerke ab, zum Beispiel so: S = Schornstein, R = Rathaus, A = Autobahnbrücke und K = Kirchturm. Verwende für „ist näher als“ oder „steht doch vor“ das Zeichen $<$ und für „weiter weg“ das Zeichen $>$. Damit kannst du die vier Aussagen ganz kurz aufschreiben:

Quadrato:	$S < R$	Kreisa:	$K > A$
Frau Dreieck:	$A < S$	Herr Raute:	$R < A$

Wenn du die Aussagen von Quadrato, Herrn Raute und Frau Dreieck hintereinander schreibst, erhältst du folgende Ungleichungskette:

$S < R$, $R < A$, $A < S$

Es ist aber nicht möglich, dass S sowohl am Anfang als auch am Ende dieser Kette steht. Einer von ihnen muss sich folglich verschätzt haben.

Es wird in der Aufgabestellen angegeben, dass die Reihenfolge eindeutig ermittelt werden kann. Weil Kreisa sich nicht verschätzt hat (es soll sich ja nur einer verschätzt haben), $A < K$ ist also richtig. Wenn auch Frau Dreieck mit ihrer Aussage ($A < S$) recht hätte, wäre sowohl $K < S$ als auch $S < K$ möglich. Die Reihenfolge könnte also nicht eindeutig ermittelt werden. Deshalb hat sich Frau Dreieck verschätzt.

Wenn du die Aussagen von Quadrato, Herrn Raute und Kreisa hintereinander schreibst, erhältst du folgende Ungleichungskette:

$S < R$, $R < A$, $A < K$.

Die geänderte Aussage von Frau Dreieck ($S < A$) ist darin enthalten. Also ist die Reihenfolge eindeutig ermittelt.

Lösungsvariante: Probiere aus, ob eine Reihenfolge eindeutig ermittelt werden kann, wenn sich Quadrato, Kreisa, Frau Dreieck oder Herr Raute verschätzt haben:

Wenn sich Quadrato verschätzt hat (also eigentlich $R < S$ richtig wäre), so kannst du die Aussagen von Frau Dreieck und Herrn Raute in einer Ungleichungskette zusammenfassen: $R < A$, $A < S$. Nur mit der Aussage von Kreisa kann aber nicht eindeutig ermittelt werden, wo der Kirchturm steht: $R < A < S < K$ oder $R < A < K < S$.

Wenn sich Kreisa verschätzt hat (also eigentlich $K < A$ richtig wäre), bleibt der Widerspruch bestehen, der Quadrato aufgefallen war. So gibt es dafür keine Lösung.

Wenn sich Frau Dreieck verschätzt hat (also eigentlich $S < A$ richtig wäre), konnte bereits die eindeutige Reihenfolge $S < R < A < K$ gefunden werden.

Wenn sich Herr Raute verschätzt hat (also eigentlich $A < R$ richtig wäre), so kannst du die Aussagen von Quadrato und Frau Dreieck in einer Ungleichungskette zusammenfassen: $A < S$, $S < R$. Nur mit der Aussage von Kreisa kann aber nicht eindeutig ermittelt werden, wo der Kirchturm steht: $A < S < R < K$ oder $A < S < K < R$ oder $A < K < S < R$.

****

Aufgabe 4. Für den Rückweg hatte Frau Dreieck für jeden etwas zum Naschen eingepackt: 3 Äpfel, 2 Bananen, 2 Tütchen Gummibärchen, 3 Schokoladenriegel und 2 Vollkornbrötchen. Es reichte also, dass jeder 3 verschiedene Dinge erhalten könnte.

Wie viele Möglichkeiten der Verteilung gab es, wenn

- keiner zwei oder drei gleiche Dinge erhalten sollte,
- Herr Raute keine Süßigkeiten wollte,
- und Frau Dreieck zwei Mal Obst nahm.

Gib alle Möglichkeiten an!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 - Antwortsatz: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Dinge entsprechend den Hinweisen zu verteilen.

Herleitung: Du könntest diese Aufgabe lösen, indem du alle Möglichkeiten einer Verteilung der 12 Dinge auf 4 Personen aufschreibst und dann alle Kombinationen durchstreichst, die eine der Bedingungen nicht erfüllen. Doch es wären sehr viele Möglichkeiten, die du untersuchen musst! Deshalb ist es günstiger, zunächst die Bedingungen genauer zu betrachten.

Kürze die Naschereien ab, zum Beispiel so: A = Apfel, B = Banane, S = Schokoriegel, T = Tütchen Gummibärchen und V = Vollkornbrötchen.

Da Herr Raute keine Süßigkeiten wollte und es drei verschiedene Dinge sein sollen, gibt es für ihn nur eine Auswahlkombination: 1 A, 1 B, 1 V.

Da es 3 S sind und niemand etwas mehrfach erhalten soll, müssen Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato jeweils 1 S nehmen.

Da Frau Dreieck zweimal Obst wollte, gibt es für sie nur eine Auswahlkombination: 1 A, 1 B, 1 S.

Weil die Verteilung an Frau Dreieck und Herrn Raute bereits eindeutig festgelegt ist, kannst du ermitteln, welche Dinge für Kreisa und Quadrato übrigbleiben:

1 A, 0 B, 2 S, 2 T, 1 V.

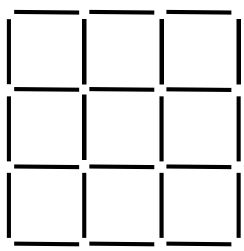
Weil Kreisa und Quadrato 3 verschiedene Dinge erhalten sollen, muss sowohl Kreisa als auch Quadrato jeweils 1 S und 1 T nehmen. Somit gibt es nur noch zwei verschiedene Möglichkeiten, 1 A und 1 V zu verteilen:

	Möglichkeit 1						Möglichkeit 2				
	A	B	S	T	V		A	B	S	T	V
Herr Raute	1	1	-	-	1		1	1	-	-	1
Frau Dreieck	1	1	1	-	-		1	1	1	-	-
Kreisa	**1**	-	1	1	-		-	-	1	1	**1**
Quadrato	-	-	1	1	**1**		**1**	-	1	1	-
Probe	3	2	3	2	2		3	2	3	2	2

Mit der Probe in der letzten Zeile der Tabelle kannst du prüfen, ob bei jeder Möglichkeit die Anzahl der verteilten Dinge mit der Aufgabenstellung übereinstimmt

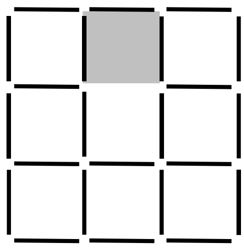
****

LOGO – Runde 3: Noch einmal viele Quadrate (Teil B)



Aufgabe 1. Quadrato hat aus Legestäbchen die nebenstehende Figur gelegt.

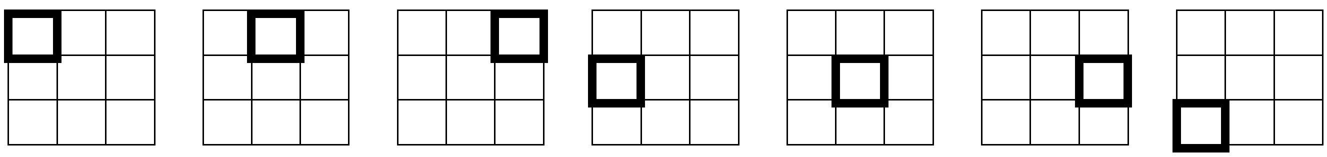
Aufgabe 1a) Er fordert Kreisa auf, die Anzahl der darin versteckten Quadrate zu zählen. Wie viele Quadrate hast du gezählt? Pass aber auf, die Quadrate können unterschiedliche Größen haben?

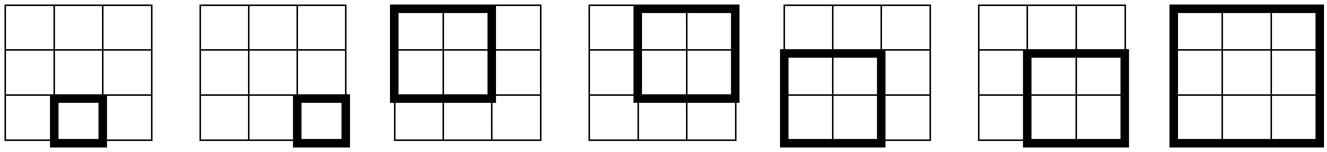


Aufgabe 1b) Kreisa hat die richtige Anzahl gefunden. Sie nimmt nun ein Legestäbchen aus der Mitte weg. Jetzt sind nicht mehr alle Quadrate vollständig (beispielsweise ist das grau markierte Quadrat nicht mehr vollständig). Wie viele vollständige Quadrate sind es noch?

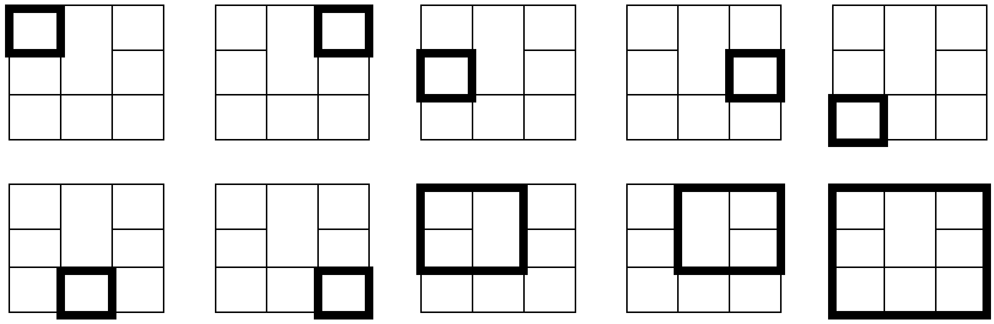
Aufgabe 1c) Wie viele Legestäbchen musst du wegnehmen, damit gar keine vollständigen Quadrate mehr übrig bleiben? Nimm aber möglichst wenige Legestäbchen weg. Zeige, wie deine Figur dann aussieht.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz. Es sind 14 Quadrate: 9 kleine 1x1 – Quadrate, 4 mittlere 2x2 – Quadrate und 1 großes 3x3 – Quadrat.

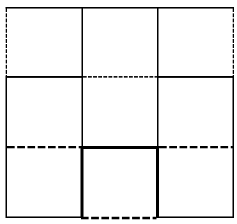




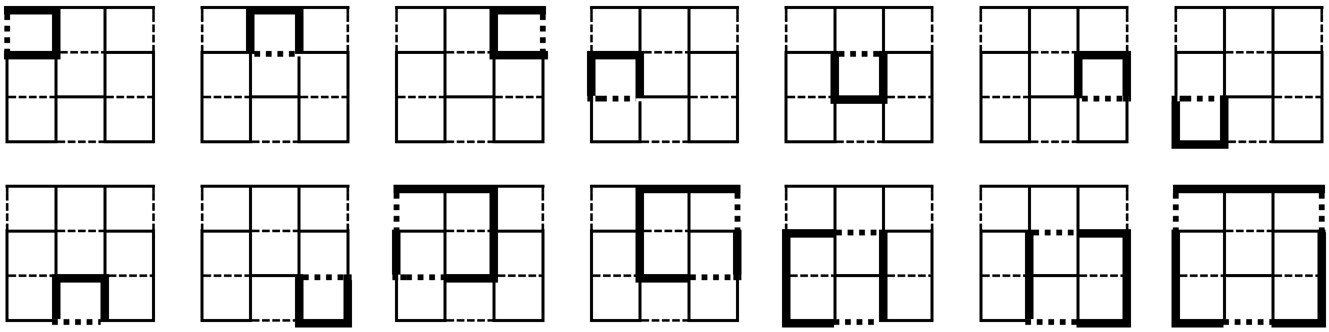
Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Es sind jetzt nur 10 Quadrate: 7 kleine 1x1 – Quadrate, 2 mittlere 2x2 – Quadrate und 1 großes 3x3 – Quadrat.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Es gibt viele Möglichkeiten, 6 Legestäbchen wegzunehmen (gestrichelte Linien), sodass keine vollständigen Quadrate mehr zu sehen sind, beispielsweise so:

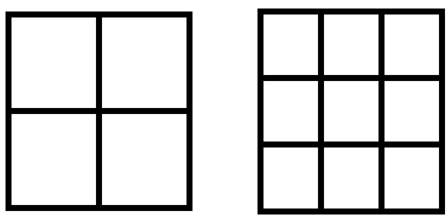


Um sicher zu sein, dass alle 14 Quadrate auch tatsächlich betroffen sind, zeichne sie in die Felder ein:



****

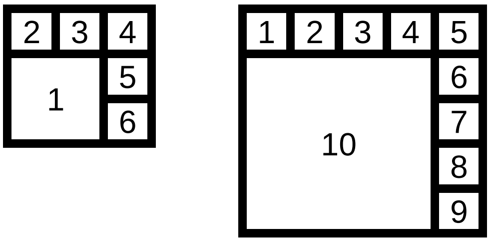
Aufgabe 2. Quadrato hat ein neues Rätsel für Kreisa vorbereitet. Sie soll in ein Quadrat kleinere Quadrate einzeichnen, so dass das vorgegebene Quadrat vollständig ausgefüllt ist und die kleinen Quadrate sich nicht überschneiden. Es ist kein Problem, vier oder neun gleichgroße Quadrate einzuzeichnen.



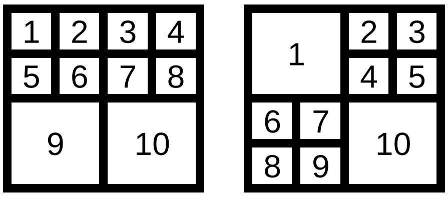
Aufgabe 2a) Aber Kreisa soll 6 kleinere Quadrate einzeichnen, die aber nicht alle gleich groß sein müssen. Hilf ihr – zeichne eine Lösung des Rätsels.

Aufgabe 2b) Findest du auch eine Lösung mit 10 kleineren Quadraten? Zeichne deine Lösung.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Bei dieser Aufgabenstellung genügt es, Zerlegungen in 6 bzw. 10 kleinere Quadrate anzugeben. Beachte, dass sich die kleineren Quadrate nicht gegenseitig überdecken dürfen. So zählen in der Abbildung die Quadrate 1, 2, 5 und 6 nur einzeln, das Quadrat aus diesen 4 kleinen Quadraten wird nicht extra gezählt.



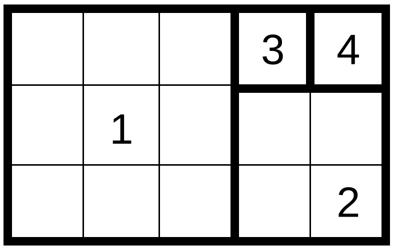
Lösungshinweise zu Aufgabe 2b): Es gibt weitere Lösungen, beispielsweise:



****

Aufgabe 3. Quadrato überlegt sich, wie er aus einem Papierstreifen verschiedene Quadrate erhalten kann. Er schneidet schrittweise immer das größtmögliche Quadrat ab.

In der Abbildung ist der Streifen 5 Kästchen lang und 3 Kästchen breit. Davon könnte Quadrato nacheinander die Quadrate 1, 2 und 3 abschneiden. Das Quadrat 4 bleibt übrig. Er erhält insgesamt 4 Quadrate in 3 verschiedenen Größen.



Aufgabe 3a) Wie viel Quadrate erhält Quadrato, wenn er einen Papierstreifen mit 23 cm Länge und 10 cm Breite verwendet?

Aufgabe 3b) Welche Maße muss ein Papierstreifen haben, damit Quadrato insgesamt 7 Quadrate in 5 verschiedenen Größen erhält?

Aufgabe 3c) Was stellst du fest, wenn du ein beliebiges Blatt aus einem Schreibblock als Papierstreifen nimmst? Bleibt da auch ein Quadrat übrig, wenn du nacheinander die größtmöglichen Quadrate abgeschnitten hast?

Kreisa behauptet, sie braucht kein Lineal, um das größtmögliche Quadrat von einem Papierstreifen zu finden. Hast du einen Tipp, wie es ohne Lineal gehen könnte?

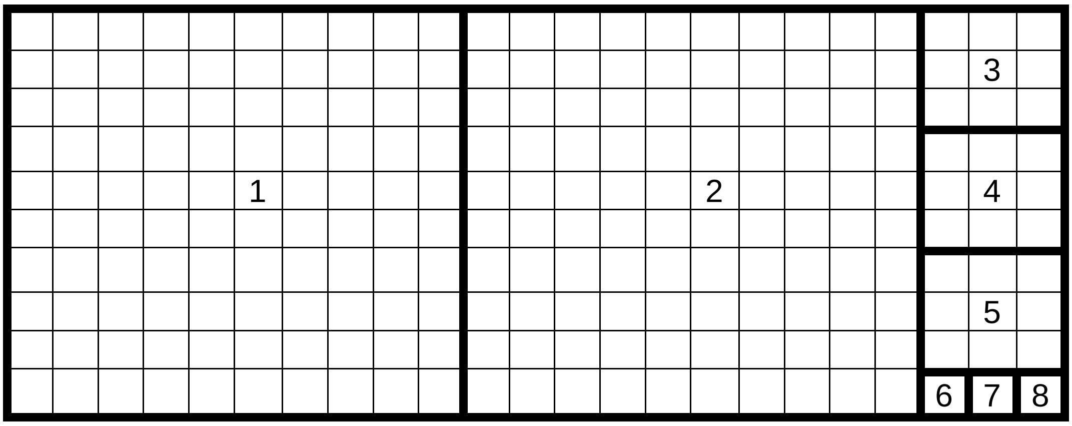
Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Quadrato erhält 8 Quadrate.

Beweis: Bestimmt hast du es wie Quadrato einfach ausprobiert. Nacheinander kann Quadrato folgende Quadrate mit jeweils einem Schnitt abschneiden (statt der Längeneinheit cm zählen wir nur die Kästchen):

1: 10 x 10 - Quadrat, es verbleibt ein 13 x 10 - Rechteck
2: 10 x 10 - Quadrat, es verbleibt ein 3 x 10 - Rechteck
3: 3 x 3 - Quadrat, es verbleibt ein 3 x 7 - Rechteck
4: 3 x 3 - Quadrat, es verbleibt ein 3 x 4 - Rechteck
5: 3 x 3 - Quadrat, es verbleibt ein 3 x 1 - Rechteck

6: 1 x 1 - Quadrat, es verbleibt ein 1 x 2 - Rechteck
7: 1 x 1 - Quadrat, es verbleibt ein 1 x 1 - Quadrat
8: 1 x 1 - Quadrat

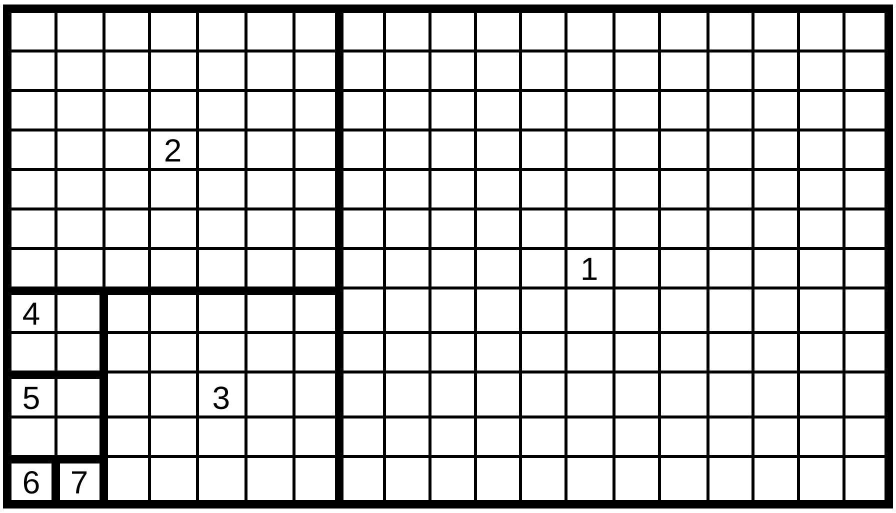
Für die vollständige Lösungsdarstellung genügt aber auch eine Zeichnung:



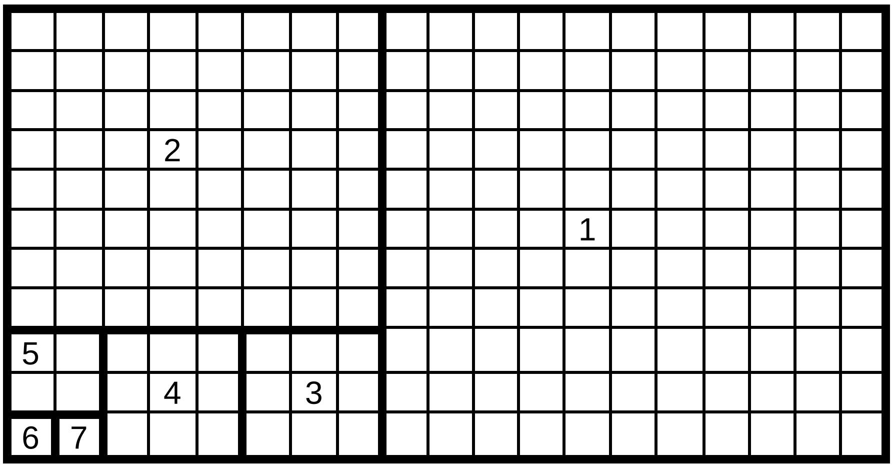
Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Es gibt verschiedene Größen, sodass Quadrato 7 Quadrate in 5 Größen abschneiden kann:

Papierstreifen mit 19 Kästchen Länge und 12 Kästchen Breite
Papierstreifen mit 19 Kästchen Länge und 11 Kästchen Breite
Papierstreifen mit 18 Kästchen Länge und 13 Kästchen Breite
Papierstreifen mit 21 Kästchen Länge und 8 Kästchen Breite
Papierstreifen mit 18 Kästchen Länge und 11 Kästchen Breite

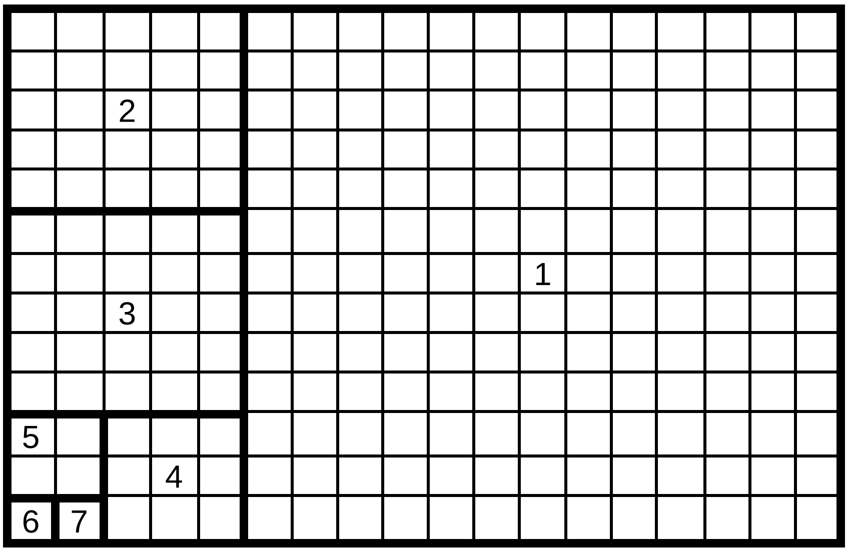
Beweis: Bei einem 19 x 12 - Rechteck kann Quadrato nacheinander 7 Quadrate in 5 Größen mit jeweils einem Schnitt abschneiden:



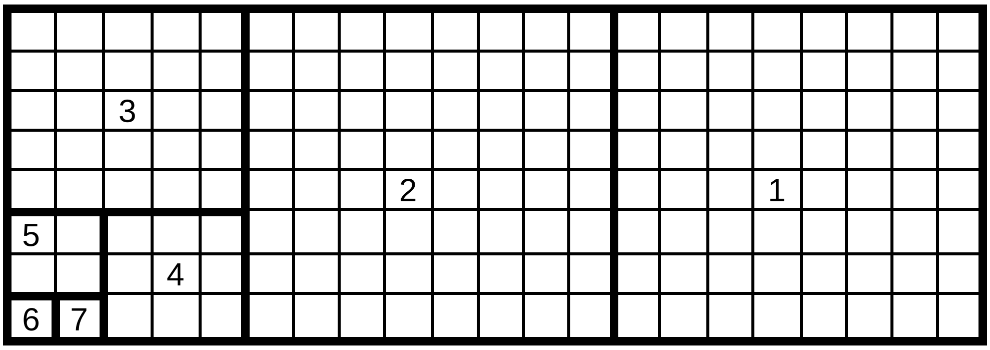
Bei einem 19 x 11 - Rechteck kann Quadrato nacheinander 7 Quadrate in 5 Größen mit jeweils einem Schnitt abschneiden:



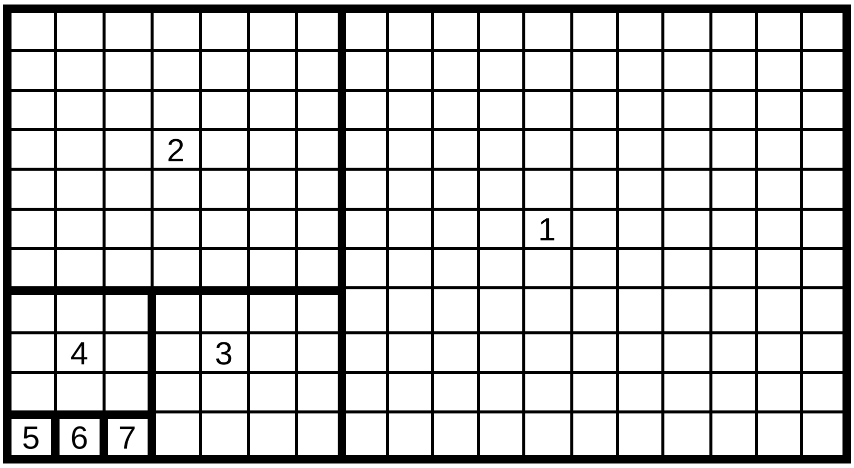
Bei einem 18 x 13 - Rechteck kann Quadrato nacheinander 7 Quadrate in 5 Größen mit jeweils einem Schnitt abschneiden:



Bei einem 21 x 8 - Rechteck kann Quadrato nacheinander 7 Quadrate in 5 Größen mit jeweils einem Schnitt abschneiden:



Bei einem 18 x 11 - Rechteck kann Quadrato nacheinander 7 Quadrate in 5 Größen mit jeweils einem Schnitt abschneiden:



Lösungshinweise zu Aufgabe 3c) – Antwortsatz: Wenn du das Abschneiden der Quadrate ausprobierst, erhältst du einen immer kleiner werdenden Streifen, von dem du wieder ein Quadrat abschneiden kannst. Ob du aber so genau schneiden und messen kannst, dass das übrigbleibende Stück wirklich ein Quadrat ist?

Ohne Abschneiden geht es, wenn du die Größe des Blattes ermittelst und dann die Größe des übrigbleibenden Stücks berechnest.

Vielleicht ist dein Blatt 30 cm x 21 cm groß? Dann kannst du folgende 5 Quadrate berechnen: 21 x 21, 9 x 9, 9 x 9, 3 x 3, 3 x 3 und es bleibt 3 x 3 übrig.

Vielleicht hast du genauer gemessen und dein Blatt ist 297 mm x 210 mm groß? Dann kannst du folgende 10 Quadrate berechnen: 210 x 210, 87 x 87, 87 x 87, 36 x 36, 36 x 36, 15 x 15, 15 x 15, 6 x 6, 6 x 6, 3 x 3 und es bleibt 3 x 3 übrig.

Immer wenn die gemessene Länge und die Breite deines Blattes eine ganze Zahl ist, wird am Ende ein Quadrat übrigbleiben! Probiere doch einfach noch einige Beispiele.

****

Kreisa bedankt sich für die vielen Tipps! *„Kästchen auszählen“* kann nützlich sein. Aber wenn die Kästchen selbst keine Quadrate sind oder am Rand die Kästchen nicht vollständig zu sehen sind, funktioniert dieser Tipp nicht. *„Mit einem Zirkel“* ist es auch möglich, aber ohne Lineal sicherlich kompliziert. Am einfachsten: *„Falte das Papier“* so, dass die linke kurze Seite genau auf der oberen langen Seite zum Liegen kommt.