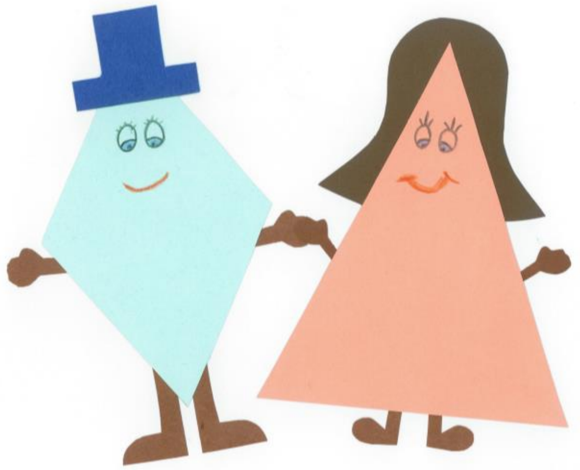
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler,
die Freude an Mathematik haben.



Mit Herrn Raute und Frau Dreieck rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise:

Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. Erkläre, wie du deine Lösung gefunden hast! Wenn du probiert hast, dann beschreibe wie. Achte darauf, eine Frage in der Aufgabe mit einem Antwortsatz zu beantworten. Wenn möglich, prüfe dein Ergebnis mit einer Probe. Es genügt auch, wenn du nicht zu allen Aufgaben eine Lösung einsendest.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünschen dir
Annemarie Maßalsky und Norman Bitterlich

www.mathe-logo.org

Aufgabe 1. Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute und die Geschwister Kreisa und Quadrato – beschäftigen sich gern mit Würfelspielen. Eines Abends spielen sie mit folgenden Regeln: Jeder darf mit einem Würfel drei Mal hintereinander würfeln und die drei Augenzahlen addieren. Wer die höchste Augensumme erreicht, hat gewonnen.
Nach dem Spiel stellen sie fest

(1) Die Augensumme von Kreisa ist dreimal so groß wie die von Frau Dreieck.
(2) Die Augensumme von Herrn Raute ist um 2 größer als die von Frau Dreieck.
(3) Die Augensumme von Quadrato ist doppelt so groß wie die von Herrn Raute.

a) Könnte es sein, dass Quadrato unter den Bedingungen (1) bis (3) das Spiel gewann? Wie groß ist in diesem Fall seine Augensumme?

b) Quadrato hat aber leider nicht gewonnen. Wer hat gewonnen und welche Augenzahl erreichte jeder der vier Spieler, wenn die Summe aller Augenzahlen 48 beträgt?

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Quadrato hat das Spiel gewonnen, wenn seine Augensumme 10 betrug.

Probe: Mit drei Würfen sind Augensummen zwischen 3 (dreimal „Eins“) und 18 (dreimal „Sechs“) möglich.

Wenn Quadrato die Augensumme 10 erreichte, dann gilt:

Nach Aussage (3) erreichte Herr Raute die Augensumme (10 : 2 =) 5.
Nach Aussage (2) betrug die Augensumme von Frau Dreieck (5 – 2 =) 3.
Nach Aussage (1) schaffte Kreisa die Augensumme (3 · 3 =) 9.

Alle Bedingungen sind erfüllt und Quadrato erreichte die höchste Augensumme.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Kreisa gewann mit der Augensumme 18 (sie würfelte also dreimal eine „Sechs“). Quadrato erreichte 16, Herr Raute 8 und Frau Dreieck 6.

Herleitung: Zur Lösung der Aufgabe kannst du in einer Tabelle alle Möglichkeiten durch systematisches Probieren untersuchen. Beginne mit der Augensumme, die Frau Dreieck erreicht haben könnte, und ermittle aufgrund der Aussagen (1) bis (3) die Augensummen der anderen Mitspieler. Wenn die Summe der vier Augensummen 48 ergibt, hast du die Lösung gefunden. Die kleinste mögliche Augensumme beträgt 3. Beginne damit deine Tabelle:

Augensumme von ...					
Frau Dreieck	Kreisa wegen (1)	Herr Raute wegen (2)	Quadrato wegen (3)	Summe	Vergleich
3	9	5	10	27	27 < 48
4	12	6	12	34	34 < 48
5	15	7	14	41	41 < 48
6	**18**	**8**	**16**	**48**	**48 = 48**
7	> 18	nicht möglich			

Nur wenn die Augensumme von Frau Dreieck 6 beträgt, ist die Summe aller Augensummen 48. Kreisa hat mit der Augensumme 18 gewonnen.

Lösungsvariante: Die Überlegungen für das Ausfüllen der Tabelle kannst du auch für das Aufstellen einer Gleichung nutzen. Bezeichne zum Beispiel die Augensummen der vier Mitspieler mit den Anfangsbuchstaben ihrer Namen (also Q, K, D, R). Dann findest du folgende Zusammenhänge:

(1) $K = 3 \cdot D$ (2) $R = D + 2$ (3) $Q = 2 \cdot R$

Das bedeutet (3) $Q = 2 \cdot (D + 2) = 2 \cdot D + 4$

Es soll gelten: $Q + K + D + R = 48.$

Ersetze: $(2 \cdot D + 4) + (3 \cdot D) + D + (D + 2) = 7 \cdot D + 6 = 48$

Also gilt: $7 \cdot D = 48 – 6 = 42$

So findest du die Lösung für Frau Dreieck: D = 6. Daraus kannst du (wie in der Tabelle) die Augensummen der anderen Mitspieler ermitteln. Prüfe das Ergebnis mit einer Probe.

****

Aufgabe 2. Quadrato und Kreisa würfeln je einmal mit einem Würfel und verdecken das Ergebnis. Herr Raute soll erraten, welche Augenzahlen die beiden Würfel zeigen. Als Hilfestellung verraten die Kinder:

Quadrato: „Meine Augenzahl ist größer als 2“.
Kreisa: „Meine Augenzahl ist halb so groß wie Quadratos Augenzahl“.
Quadrato: „Meine Augenzahl ist nicht durch 3 teilbar.“

Herr Raute hat das Rätsel schnell gelöst. Du auch? Welche Augenzahlen haben Quadrato und Kreisa gewürfelt?

Quadrato und Kreisa würfeln nun noch einmal und nennen folgende Hilfestellung:

Quadrato: „Meine Augenzahl ist größer als 4“.
Kreisa: „Meine Augenzahl ist kleiner als 4“.
Quadrato: „Die Summe beider Augenzahlen ist durch 3 teilbar.“
Kreisa: „Meine Augenzahl ist eine gerade Zahl.“

Herr Raute denkt kurz nach, doch dann behauptet er: „Das kann nicht sein! Eure Hilfestellungen können nicht alle richtig sein.“ Erkläre, warum Herr Raute Recht hat.

Lösungshinweise – Aufgabe 2 (Teil 1) – Antwortsatz: Nach dem ersten Würfeln haben Quadrato eine 4 und Kreisa eine 2 gewürfelt.

Begründung: Quadrato muss eine gerade Augenzahl gewürfelt haben, weil Kreisas Augenzahl die Hälfte von seiner Augenzahl ist. Quadrato kann also mit einem Würfel nur 2, 4 oder 6 gewürfelt haben. Wegen der ersten Aussage von Quadrato ist 2 nicht möglich. Wegen der zweiten Aussage von Quadrato ist auch 6 nicht möglich. Also hat Quadrato eine 4 gewürfelt und Kreisa eine (4 : 2 =) 2.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Teil 2) – Antwortsatz: Herr Raute hat Recht, die Aussagen nach dem zweiten Würfeln sind nicht alle gleichzeitig erfüllbar.

Begründung: Entsprechend der ersten Aussage von Kreisa ist ihre Augenzahl kleiner als 4, also 1, 2 oder 3. Nach Kreisas zweiter Aussage ist die Augenzahl eine gerade Zahl. Damit hat Kreisa eine 2 gewürfelt.

Entsprechend der ersten Aussage von Quadrato ist seine Augenzahl größer als 4, also 5 oder 6. Nach Quadratos zweiter Aussage ist die Summe beider Augenzahlen durch 3 teilbar. Es sind nur die Summen 5 + 2 = 7 oder 6 + 2 = 8 möglich. Keine dieser Summen ist durch 3 teilbar. Also hat Herr Raute Recht, die vier Aussagen können nicht alle gleichzeitig richtig sein.

****

Aufgabe 3. Quadrato überlegt: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, mit drei Würfen solche Augenzahlen zu würfeln, dass die Summe zweier Augenzahlen genau so groß ist wie die dritte Augenzahl? Kannst du ihm helfen? Schreibe alle Möglichkeiten auf!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz. Quadrato findet 9 Möglichkeiten, die die Bedingung der Aufgabe erfüllen.

Herleitung: Um alle Möglichkeiten zu finden, solltest du systematisch vorgehen. Da die dritte Augenzahl die Summe der beiden anderen Augenzahlen sein soll, muss die dritte Augenzahl am höchsten sein und kann für einen Würfel nur zwischen 1 und 6 betragen.

Dritte Augenzahl = 1	Dieser Fall ist nicht möglich, weil die Summe zweier Augenzahlen mindesten (1 + 1 =) 2 beträgt
Dritte Augenzahl = 2	1 + 1
Dritte Augenzahl = 3	1 + 2 *(oder 2 + 1)*
Dritte Augenzahl = 4	1 + 3 oder 2 + 2 *(oder 3 + 1)*
Dritte Augenzahl = 5	1 + 4 oder 2 + 3 *(oder 3 + 2 oder 4 + 1)*
Dritte Augenzahl = 6	1 + 5 oder 2 + 4 oder 3 + 3 *(oder 4 + 2 oder 5 + 1)*

Die in Klammern angegeben Summen sind natürlich auch richtig, sind aber für die Addition nicht verschieden von den entsprechenden Summen. Wenn du sie aber auch aufgeschrieben hast, so ergeben sich 15 Möglichkeiten. Wenn du sogar berücksichtigst, ob der Würfel mit der höchsten Augenzahl (also mit der Summe der beiden anderen Würfel) der erste, zweite oder dritte Würfel ist, so gibt es sogar 45 Möglichkeiten.

****

Aufgabe 4. Kreisa und Quadrato spielen folgendes Spiel: In jeder Runde darf Quadrato zweimal würfeln. Kreisa darf in der ersten Runde einmal würfeln und dann in jeder folgenden Runde einmal mehr als in der vorangegangenen Runde. Wenn jedoch Quadrato in einer Runde zweimal „6“ würfelt („Doppel-6“), darf Kreisa danach nur einmal würfeln und dann aber in jeder anderen Runde wieder einmal mehr als in der vorangegangenen Runde.

a) Quadrato beginnt. In sechs Runden hat er leider keine „Doppel-6“ gewürfelt. Wie oft würfelte Quadrato in diesen 6 Runden, wie oft Kreisa?

b) Das nächste Spiel beginnt wieder Quadrato. Diesmal schaffte er in sechs Runden genau einmal eine „Doppel-6“. Nach 6 Runden stellten sie fest, dass sie beide gleich oft würfeln konnten. In welcher Runde hat Quadrato die „Doppel-6“ gewürfelt? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Quadrato würfelte 12 Mal, Kreisa würfelte 21 Mal.

Herleitung: Quadrato durfte in jeder der sechs Runden zweimal würfeln, also insgesamt (6 · 2 =) 12 Mal. Wenn Kreisa in der ersten Runde einmal würfelte, durfte sie in der zweiten Runde zweimal, in der dritten Runde dreimal usw. bis in der sechsten Runde sechsmal würfeln, insgesamt also (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =) 21 Mal.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Quadrato würfelte in der vierten Runde eine „Doppel-6".

Begründung: Untersuche in einer Tabelle, wie oft Kreisa würfeln durfte, wenn Quadrato in einer der sechs Runden eine „Doppel-6" würfelte:

Quadratos Runde mit „Doppel-6"	Kreisas Anzahl von Würfen						
	Runde 1	Runde 2	Runde 3	Runde 4	Runde 5	Runde 6	Summe
Runde 1	1*	2	3	4	5	6	21
Runde 2	1	1*	2	3	4	5	16
Runde 3	1	2	1*	2	3	4	13
Runde 4	**1**	**2**	**3**	**1***	**2**	**3**	**12**
Runde 5	1	2	3	4	1*	2	13
Runde 6	1	2	3	4	5	1*	16

Mit * wird die Runde markiert, in der Kreisa nur einmal würfeln durfte.

Nur wenn Quadrato in der vierten Runde eine „Doppel-6" würfelte, durfte Kreisa nur 12 Mal würfeln. In der Tabelle ist die Probe zu diesem Ergebnis enthalten.

In der Aufgabenstellung wird geschrieben, dass Kreisa nach der „Doppel-6" nur einmal würfeln durfte. Da Quadrato immer die Runden begann, ist die vierte Runde (und nicht die dritte) die korrekte Lösung.

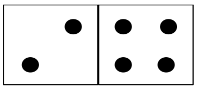
Hinweis: Vielleicht hast du das Ergebnis einfach erraten. Dann darfst du aber nicht die Probe vergessen! Trotzdem bleibt deine Lösung unvollständig, weil beim Erraten einer Lösung nicht sicher ist, ob es vielleicht noch eine andere Lösung gibt.

Löse zur Übung die Aufgabe doch auch für den Fall, dass das Spiel nur über vier Runden geht! Was stellst du fest? Und welche Lösung erhältst du, wenn das Spiel über acht Runden gehen würde?

****

LOGO – Runde 1 **Domino-Steine** (Teil B)

Ein Domino-Spiel besteht aus 28 Spielsteinen, die jeweils in zwei quadratische Felder geteilt sind. Auf diesen Feldern sind Punkte so angebracht, dass jede mögliche Kombination aus zwei Zahlen von 0 bis 6 genau einmal dargestellt ist. Statt Punkte auf die Spielsteine zu zeichnen, können wir auf die Felder Zahlen schreiben. Ein leeres Feld bedeutet „0".



2	4

Für den nebenstehenden Spielstein schreiben wir kurz 2-4. Jede Kombination gibt es aber nur einmal, also ist 4-2 derselbe Spielstein wie 2-4.

Die Regeln beim Domino-Spiel besagen, dass sich bei aneinanderstoßenden Spielsteinen nur Felder mit gleicher Punktzahl berühren dürfen (Anlege-Regel). Die zwei Spielsteine der oberen Reihe erfüllen die Anlege-Regel. Die zwei Spielsteine der unteren Reihe erfüllen die Anlege-Regel nicht.

0	1	1	4
2	3	0	5

Aufgabe 1a). Wie viele der 28 Spielsteine eines Domino-Spiels haben weder eine 2 noch eine 5 auf einem Feld?

Aufgabe 1b). Kreisa fragt Quadrato: „Was denkst du – gibt es mehr Spielsteine, deren Summe der Zahlen beider Felder geradzahlig ist, als Spielsteine, deren Summe der Zahlen ungeradzahlig ist?". Was meinst du? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz. Insgesamt 15 der 28 Spielsteine eines Domino-Spiels zeigen weder eine 2 noch eine 5.

Begründung: Schreibe alle 28 Spielsteine auf und streiche die Spielsteine, auf denen eine 2 oder eine 5 (oder beide Zahlen) zu sehen sind. Es bleiben 15 Spielsteine übrig.

0 - 0	0 - 1	~~0 - 2~~	0 - 3	0 - 4	~~0 - 5~~	0 - 6
	1 - 1	~~1 - 2~~	1 - 3	1 - 4	~~1 - 5~~	1 - 6
		~~2 - 2~~	~~2 - 3~~	~~2 - 4~~	~~2 - 5~~	~~2 - 6~~
			3 - 3	3 - 4	~~3 - 5~~	3 - 6
				4 - 4	~~4 - 5~~	4 - 6
					~~5 - 5~~	~~5 - 6~~
						6 - 6

Hinweis: Wenn du richtige Spielsteine eines Domino-Spiels zur Lösung der Aufgabe verwendet hast, konntest du die Spielsteine in zwei Haufen aufteilen:

- einen Haufen mit Spielsteinen ohne 2 oder 5,
- einen Haufen mit Spielsteinen mit 2 oder 5.

Die Anzahl der Spielsteine in jedem Haufen sind dann nur noch zu zählen.

Lösungsvariante: Es gibt 7 Spielsteine, auf denen eine (oder zwei) 2 zu sehen sind, nämlich mit 0, mit 1, ..., oder mit 6. Es gibt 7 Spielsteine, auf denen eine (oder zwei) 5 zu sehen sind, nämlich mit 0, mit 1, ..., oder mit 6. Dabei wird aber der Spielstein 2 – 5 doppelt gezählt. Also gibt es (7 + 7 – 1 =) 13 Spielsteine, auf denen 2 oder 5 zu sehen sind. Somit gibt es (28 – 13 =) 15 Spielsteine ohne 2 und ohne 5.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz. Es gibt mehr Spielsteine mit einer geraden Augensumme als Spielsteine mit einer ungeraden Augensumme.

Begründung: Schreibe wieder alle Spielsteine auf und streiche diejenigen Spielsteine durch, deren Augensumme ungeradzahlig ist.

0 - 0	~~0 - 1~~	0 - 2	~~0 - 3~~	0 - 4	~~0 - 5~~	0 - 6
	1 - 1	~~1 - 2~~	1 - 3	~~1 - 4~~	1 - 5	~~1 - 6~~
		2 - 2	~~2 - 3~~	2 - 4	~~2 - 5~~	2 - 6
			3 - 3	~~3 - 4~~	3 - 5	~~3 - 6~~
				4 - 4	~~4 - 5~~	4 - 6
					5 - 5	~~5 - 6~~
						6 - 6

Es wurden 12 Spielsteine durchgestrichen und somit bleiben (28 – 12 =) 16 Spielsteine übrig, deren Augensumme geradzahlig ist. Wegen 16 > 12 gibt es mehr Spielsteine mit geradzahliger Augensumme als Spielsteine mit ungeradzahliger Augensumme.

Hinweis: Wenn du richtige Spielsteine eines Domino-Spiels zur Lösung der Aufgabe verwendet hast, konntest du die Spielsteine in zwei Haufen aufteilen:

- einen Haufen mit Spielsteinen mit gerader Augensumme,
- einen Haufen mit Spielsteinen mit ungerader Augensumme.

Die Anzahlen der Spielsteine in jedem Haufen sind dann nur noch zu vergleichen.

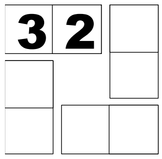
Lösungsvariante: Die Augensummen der Spielsteine können zwischen 0 und 12 variieren. Schreibe für alle möglichen ungeradzahligen Summen die passenden Spielsteine auf:

Summe = 1:	0 – 1											
Summe = 3:	0 – 3	oder	1 – 2									
Summe = 5:	0 – 5	oder	1 – 4	oder	2 – 3							
Summe = 7:			1 – 6	oder	2 – 5	oder	3 – 4					
Summe = 9:								3 – 6	oder	4 – 5		
Summe = 11:												5 – 6

Auf diese Weise findest du ebenfalls 12 Spielsteine mit ungerader Augensumme.

Hinweis: Sicher hast du beobachtet, dass es mehr gerade Zahlen (0, 2, 4 oder 6) als ungerade Zahlen (1, 3 oder 5) gibt. Deshalb lässt sich vermuten, dass es mehr gerade Augensummen als ungerade Augensummen gibt. Aber dieser Zusammenhang muss genauer erklärt werden.

****

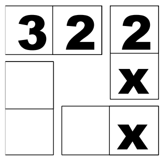


Aufgabe 2. Quadrato möchte das kleine „Fenster“ aus 4 Spielsteinen so mit Spielsteinen bedecken, dass die Anlege-Regel immer erfüllt ist und auf jeder Seite des Fensters die gleiche Punktsumme zu sehen ist. Er hat den ersten Spielstein bereits aufgelegt.

a) Versuche, die Belegung zu vollenden. Was stellst du fest?

b) Wähle einen anderen Spielstein für die linke obere Ecke und versuche es damit. Was stellst du fest?

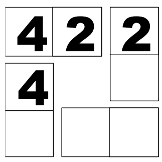
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz. Es kann Quadrato nicht gelingen, das kleine Fenster wie gefordert mit Spielsteinen zu bedecken.



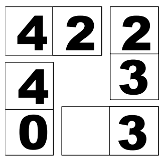
Begründung: Wegen der Anlegeregel muss Quadrato für die rechte obere Ecke einen Spielstein mit einer 2 legen. Damit beträgt die Punktsumme in der oberen Seite (3 + 2 + 2 =) 7. Für die gleiche Punktsumme auf der rechten Seite fehlen noch (7 – 2 =) 5 Punkte. Um die Anlegeregel zu erfüllen, müssen beide fehlende Felder der rechten Seite mit der gleichen Zahl x bedeckt werden. Das kann für die ungerade Zahl 5 aber nicht gelingen, weil $2 \cdot x$ eine gerade Zahl ergibt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz. Auch mit jedem anderen ersten Spielstein kann es Quadrato nicht gelingen, das kleine Fenster wie gefordert mit Spielsteinen zu bedecken.

Hinweis: Bei einer solchen Aufgabenstellung „Wähle einen anderen Spielstein ...“ genügt es, ein weiteres Beispiel zu untersuchen.



Begründung: Wählst du einen ersten Spielstein, bei dem die Augensumme eine ungerade Zahl ist, so erkennst du, dass die Begründung von Aufgabe 2 (a) ebenfalls gilt: Die Summe der beiden Felder mit x müsste ebenfalls eine ungerade Zahl ergeben.



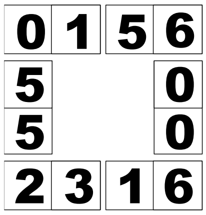
Versuche es deshalb mit einem ersten Spielstein, dessen Augensumme geradzahlig ist, zum Beispiel mit 4 – 2. Wegen der Anlegeregel sind weitere Felder bereits festgelegt: Rechts oben muss das Feld mit der 2 bedeckt werden. Die Punktsumme der oberen Seite beträgt 8. In der Mitte der linken Seite muss das Feld mit 4 bedeckt werden.

Nun musst du das linke untere Feld mit 0 bedecken, um auf der linken Seite die Punktsumme 8 zu erhalten. Außerdem musst du die beiden freien Felder der rechten Seite jeweils mit 3 bedecken, um auf der rechten Seite ebenfalls die Punktsumme 8 zu erhalten und dabei die Anlegeregel zu beachten.

Um auch auf der unteren Seite die Punktsumme 8 zu erhalten, müsstest du das freie Feld mit einer 5 bedecken. Um aber die Anlege-Regel zu beachten, müsstest du das freie Feld mit einer 0 bedecken. Beides ist nicht gleichzeitig möglich. Also kann Quadrato auch dieses Beispiel nicht zu einem Fenster ergänzen, das den Bedingungen entspricht.

Bestimmt hast du auch weitere Beispiele untersucht – in keinem Fall kann es gelingen, das Fenster wie gefordert zu vervollständigen.

****

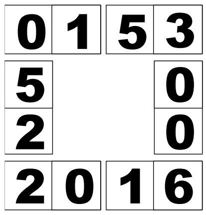


Aufgabe 3. Ohne auf die Anlege-Regel zu achten, ist die Belegung eines „Fensters“ mit Spielsteinen kein Problem. Quadrato hat 6 Spielsteine so aufgelegt, dass an jeder Seite die Punktsumme 12 beträgt.

a) Suche auch 6 Spielsteine aus einem Domino-Spiel, mit denen du dieses Fenster mit der Seitensumme 12 belegen kannst. Verwende dabei aber nicht den Spielstein 5-6.

b) Wie groß muss die Summe auf jeder Seite mindestens sein? Findest du ein solches „Fenster“, bei dem die Summe so klein wie möglich ist?

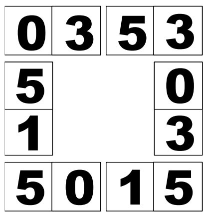
Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Es gibt viele Möglichkeiten, solche Fenster mit Spielsteinen zu bedecken.



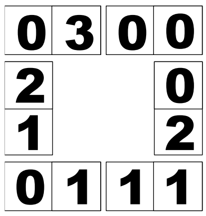
Hinweis: Bei dieser Aufgabenstellung „Suche auch 6 Spielsteine aus einem Domino-Spiel ...“ genügt es, ein Beispiel anzugeben.

Führe aber eine ***Probe*** durch, ob alle vier Seiten die gleiche Punktsumme haben:

oben:	0 + 1 + 5 + 3 = 9	rechts:	3 + 0 + 0 + 6 = 9
links:	0 + 5 + 2 + 2 = 9	unten:	2 + 0 + 1 + 6 = 9

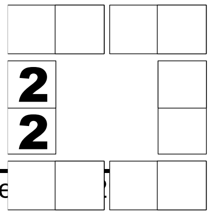


Achte aber auch darauf, dass kein Spielstein mehrfach benutzt wird. Im nebenstehenden Fenster sind zwar die Punktsummen auf allen vier Seiten gleich 11, aber die Spielsteine 0 – 3 und 1 – 5 werden jeweils zweimal verwendet. Damit ist dieses Beispiel <u>keine</u> Lösung der Aufgabe!



Aufgabe 3 (b) – Antwortsatz: Die Punktsumme eines solchen Fensters muss mindesten 3 betragen.

Begründung: Wähle aus dem Domino-Spiel die sechs Spielsteine mit den kleinsten Augensummen. Das sind: 0 – 0, 0 – 1, 1 – 1, 0 – 2, 1 – 2 und 0 – 3. Es gelingt, damit ein Fenster mit der Punktsumme 3 auf jeder Seite zu belegen.



Würdest du aber einen dieser Spielsteine durch einen anderen Spielstein austauschen, so hätte dieser eine Augensumme größer als 3. Zum Beispiel wäre für den Spielstein 2 – 2 die Augensumme 4. Dieser Spielstein liegt im

Fenster aber auf einer der vier Seiten, in der Abbildung beispielsweise auf der linken Seite. Somit beträgt die Punktsumme der linken Seite bereits mindestens 4. Es kann also keine kleinere Punktsumme geben.

Hinweis: Wenn du als kleinstmögliche Punktsumme die Zahl 4 gefunden hast, ist dies auch ein gutes Ergebnis, zum Beispiel mit den Spielsteinen 0 – 0, 0 – 1, 1 – 1, 0 – 2, 1 – 2 und 2 – 2.

****

Aufgabe 4. Kreisa entdeckt: Wenn sie die Spielsteine wie zweistellige Zahlen betrachtet, kann sie aus drei Spielsteinen eine richtig gerechnete Additionsaufgabe legen (vergleiche das Beispiel in nebenstehender Abbildung: 23 + 21 = 44).

Wie viele verschiedene Aufgaben kann Kreisa aus drei Spielsteinen eines Domino-Spiels legen, wenn sie nur Spielsteine verwendet, auf denen keine 4, 5 oder 6 zu sehen ist?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Es gibt 58 verschiedene Möglichkeiten.

Herleitung: Die Lösung ist eigentlich gar nicht so schwer zu finden. Weil es aber sehr viele verschiedene Möglichkeiten gibt, kommt es darauf an, eine geschickte Aufstellung aller Fälle zu führen, um keine Möglichkeiten zu übersehen.

Wir wissen, dass es gleiche Summanden nicht geben kann, weil jeder Spielstein nur einmal vorkommt. Wir suchen deshalb nur solche Möglichkeiten, bei denen der obere Summand kleiner als der untere Summand ist. Durch Vertauschen der Summanden einer richtig gerechneten Aufgabe erhältst du eine weitere Möglichkeit.

Wir wissen auch, dass der Spielstein 0-0 nicht verwendet werden kann, weil dann der zweite Summand und die Summe übereinstimmen, aber jeder Spielstein nur einmal vorkommt.

Wir müssen zudem darauf achten, dass die beiden Summanden nicht durch Vertauschen der Einer- und Zehnerziffer entstehen, weil dies den gleichen Spielstein bedeuten würde, aber jeder Spielstein nur einmal vorkommt.

Nun untersuchen wir, wie die möglichen Summen durch Zahlen aus Spielsteinen erzeigt werden können.

Summe	Geeignete Additionsaufgaben							Anzahl
00								0
01								0
10								0
11	~~01+10~~							0
02								0
12	01+11	02+10						2
21	01+20	10+11						2
22	01+21	~~02+20~~	10+12					2
03	01+02							1
30	10+20							1
13	01+12	02+11	03+10					3
31	01+30	10+21	11+20					3
23	01+22	02+21	03+20	10+13	11+12			5
32	01+31	02+30	10+22	11+21	12+20			5
33	01+32	02+31	~~03+30~~	10+23	11+22	~~12+21~~	13+20	5

Es gibt 29 verschiedene Möglichkeiten, bei denen der erste Summand kleiner als der zweite Summand ist. Durch Vertauschen der Summanden entstehen weitere 29 verschiedene Möglichkeiten, insgesamt also 58 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wir untersuchen, welche Summen möglich sind, wenn wir den oberen Summanden festlegen.

Oberer Summand	Geeignete Additionsaufgaben, bei denen der untere Summand größer als der obere Summand ist:							Anzahl
00								0
01	+02=03	~~+10=11~~	+11=12	+12=13	+20=21	+21=22	+22=23	9
	+30=31	+31=32	+32=33					
10	+11=21	+12=22	+13=23	+20=30	+21=31	+22=32	+23=33	7
11	+12=23	+20=31	+21=32	+22=33				4
02	+10=12	+11=13	~~+20=22~~	+21=33	+30=32	+31=33		5
12	+20=32	~~+21=33~~						1
21								0
22								0
03	+10=13	+20=23	~~+30=33~~					2
13	+20=33							1
31								0
23								0
32								0
33								0

Es gibt 29 verschiedene Möglichkeiten. Durch Vertauschen der Summanden entstehen weitere 29 verschiedene Möglichkeiten, insgesamt also 58 Möglichkeiten.

Hinweis: Wenn du viele richtige Aufgaben erkannt und aufgeschrieben hast, wurde bereits die volle Punktzahl vergeben, auch wenn die Lösung nicht ganz vollständig war.

****

LOGO – Runde 2 **Bunte Herbstblätter** (Teil A)

Aufgabe 1. Bei einem Herbstspaziergang der Familie Geometrie sammelten Kreisa und Quadrato schön gefärbte Blätter. Es waren Blätter von Ahorn-, Buchen-, Eichen- und Kastanienbäumen. Zu Hause angekommen, stellten sie fest:

(1) Es waren zweimal so viele Kastanienblätter wie Eichenblätter.
(2) Es waren zwei Ahornblätter weniger als Eichenblätter.
(3) Es waren dreimal so viele Buchenblätter wie Ahornblätter.
(4) Es waren genauso viele Kastanienblätter wie Buchenblätter.

Wie viele Blätter sammelten Kreisa und Quadrato insgesamt? Beschreibe, wie du dein Ergebnis gefunden hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Kreisa und Quadrato sammelten insgesamt 34 Blätter.

Hinweis: Um die Schreibweise abzukürzen, verwenden wir in allen Aufgaben für die Anzahl der Blätter nur die Anfangsbuchstaben der Bezeichnungen:

A ... Ahornblätter, B ... Buchenblätter, E ... Eichenblätter, K ... Kastanienblätter.

Herleitung: So eine Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Erstelle dafür eine Tabelle, in der du deine Versuche einträgst. Prüfe bei jedem Versuch, ob alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt sind.

Da es zwei Ahornblätter weniger sind als Eichenblätter, müssen es mindestens 2 Eichenblätter sein. Beginne also die Tabelle mit E = 2.

Annahme	Aussage (1)	Aussage (2)	Aussage (3)	Aussage (4)
E	$K = 2 \cdot E$	$A = E - 2$	$B = 3 \cdot A$	K = B?
2	4	0	0	4 > 0
3	6	1	3	6 > 1
4	8	2	6	8 > 6
5	10	3	9	10 > 9
6	**12**	**4**	**12**	**12 = 12**
7	14	5	15	14 < 15

Weil die Anzahl der Kastanienblätter in jeder Zeile um 2 größer wird, aber die Anzahl der Buchenblätter in jeder Zeile um 3 steigt, werden es ab E = 7 immer mehr Buchen- als Kastanienblätter sein. Nur wenn im Blätterstrauß 6 Eichenblätter sind, sind es genauso viele Kastanien- wie Buchenblätter. In diesem Fall sind es insgesamt (6 + 12 + 4 + 12 =) 34 Blätter.

In der Tabelle ist die Probe enthalten, denn alle 4 Aussagen sind berücksichtigt.

Hinweis: Vielleicht hast du Glück gehabt und die Lösung gleich beim ersten Mal richtig erraten. Dann ist die Probe besonders wichtig!

Lösungsvariante: Wie schon in der Tabelle in der zweiten Zeile aufgeschrieben, kannst du die Aussagen (1), (2) und (3) in einer Gleichung darstellen. Es soll nämlich gelten

(1) $K = 2 \cdot E$ (2) $A = E - 2$ (3) $B = 3 \cdot A$ (4) $K = B$

Wenn du mit Hilfe der Aussage in Gleichung (2) die Anzahl A in der Gleichung (3) ersetzt, findest du die neue Gleichung

$$B = 3 \cdot (E - 2) = 3 \cdot E - 6$$

Nach Aussage (4) soll aber K = B gelten, also $2 \cdot E = 3 \cdot E - 6$.

Aus dieser Gleichung findest du leicht den Wert E = 6. Nun musst du noch K, A und B berechnen, um die Summe zu ermitteln und die Probe durchführen zu können.

****

Aufgabe 2. Kreisa möchte aus drei Ahornblättern, zwei Eichenblättern und einem Kastanienblatt eine Girlande basteln. Am linken Ende der Schnur beginnt Kreisa mit einem Ahornblatt und möchte nach rechts die anderen Blätter anbringen. Wie viele verschiedene Girlanden könnte sie basteln, wenn Blätter einer Art nicht direkt nebeneinander hängen sollen? Begründe dein Ergebnis!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 - Antwortsatz: Kreisa kann 7 verschiedene Girlanden basteln.

Herleitung: Kreisa hat die 6 Plätze für ihre Blätter markiert und links ein A platziert. Weil zwei A nicht benachbart sein dürfen, erkennt sie drei Möglichkeiten, die drei Ahornblätter anzuordnen:

(1)	A	?	A	?	?	A
(2)	A	?	?	A	?	A
(3)	A	?	A	?	A	?

Betrachten wir die Zeile (1): Da die beiden benachbarten Fragezeichen nicht mit zwei E ersetzt werden können, gibt es hierfür zwei verschiedene Möglichkeiten für die Girlande:

A	E	A	E	K	A
A	E	A	K	E	A

Betrachten wir nun die Zeile (2): Da die beiden benachbarten Fragezeichen nicht mit zwei E ersetzt werden können, gibt es hierfür zwei verschiedene Möglichkeiten für die Girlande:

A	E	K	A	E	A
A	K	E	A	E	A

In Zeile (3) können an keiner Stelle zwei Blätter der gleichen Art nebeneinander hängen. Es gibt also 3 Möglichkeiten, ein Fragezeichen durch K zu ersetzen. Dann sind die Plätze für E bereits festgelegt:

A	K	A	E	A	E
A	E	A	K	Á	E
A	E	A	E	A	K

Es gibt also insgesamt (2 + 2 + 3 =) 7 verschiedene Girlanden.

Bestimmt ist es dir auch aufgefallen, oder? *Frau Dreieck meint zu Herrn Raute: „Kannst du nicht bis fünf zählen?“ Herr Raute entschuldigt sich: „Ja, es waren fünf und nicht vier Aussagen! Da habe ich leider nicht aufgepasst.“*

****

Aufgabe 3. Frau Dreieck sammelte ebenfalls bunte Ahorn-, Buchen-, Eichen- und Kastanienblätter. Von den vier Sorten waren alle Blätterzahlen verschieden.

a) Quadrato wollte nun wissen, welche Sorte in diesem bunten Herbststrauß am häufigsten vorkommt. Frau Dreieck antwortete:

   (1) Es waren mehr Kastanienblätter als Buchenblätter.
   (2) Es waren mehr Ahornblätter als Buchenblätter.
   (3) Es waren mehr Buchenblätter als Eichenblätter.
   (4) Es waren mehr Eichenblätter als Ahornblätter.
   (5) Es waren mehr Eichenblätter als Kastanienblätter.

   Herr Raute hörte aufmerksam zu und bemerkte: „Diese fünf Angaben können nicht alle richtig sein.“ Ist es dir auch aufgefallen? Warum hat Herr Raute recht?

b) Frau Dreieck hatte sich tatsächlich geirrt. Eine ihrer Aussagen war nicht wahr. Sie hat diese falsche Aussage geändert, so dass nun alle Aussagen richtig waren. Jetzt konnte Quadrato die Blattsorte bestimmen, die am häufigsten vorkam. Was hat Quadrato wohl herausbekommen? Erkläre, wie er die Lösung gefunden haben könnte!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Die Aussagen (1), (3) und (5) können nicht gleichzeitig richtig sein. Auch die Aussagen (2), (3) und (4) können nicht gleichzeitig richtig sein.

Begründung: Wir schreiben die fünf Aussagen als Ungleichungen:

(1) K > B (2) A > B (3) B > E (4) E > A (5) E > K

Schreiben wir die Ungleichungen (1), (3) und (5) hintereinander, also K > B, B > E, E > K, so steht von links nach rechts gelesen, dass es mehr Blätter K als B und E gibt, aber von rechts nach links gelesen, dass es weniger Blätter K als E und B gibt. Dies kann aber nicht gleichzeitig gelten.

Schreiben wir die Ungleichungen (2), (3) und (4) hintereinander, also A > B, B > E, E > A, so steht von links nach rechts gelesen, dass es mehr Blätter A als B und E gibt, aber von rechts nach links gelesen, dass es weniger Blätter A als E und B gibt. Dies kann ebenfalls nicht gleichzeitig gelten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz. Frau Dreieck hat die Aussage (3) geändert. Dann konnte Quadrato feststellen, dass die Eichenblätter am häufigsten vorkamen.

Herleitung: Wenn Frau Dreieck die Aussage (1) oder die Aussage (5) änderte, dann sind die Aussagen (2), (3) und (4) nicht gleichzeitig wahr, also sind nicht alle Aussagen wahr.

Wenn Frau Dreieck die Aussage (2) oder die Aussage (4) änderte, dann sind die Aussagen (1), (3) und (5) nicht gleichzeitig wahr, also sind nicht alle Aussagen wahr.

Wenn Frau Dreieck die Aussage (3) änderte, dann ist nach Aussage (4) E > A, nach Aussage (5) E > K und nach der geänderten Aussage (3) E > B.

Also sind die Eichenblätter am häufigsten.

Nur wenn Frau Dreieck die Aussage (3) änderte, können alle Aussagen wahr sein.

****

Aufgabe 4. Quadrato hatte eine Anzahl Blätter vor sich liegen. Da schlug Kreisa folgendes Spiel vor: „Ich habe 30 Blätter. In der ersten Runde gebe ich dir so viele Blätter von meinen Blättern, dass sich deine Anzahl verdoppelt. Dafür gibt's du mir 1 Blatt zurück. In der zweiten Runde verdopple ich deine neue Anzahl und du gibst mir dafür 2 Blätter zurück. In der dritten Runde verdopple ich deine neue Anzahl und du gibst mir dafür doppelt so viele Blätter zurück, wie du in der zweiten Runde gegeben hast (also 4 Blätter). Das spielen wir immer so weiter: Ich verdopple in der nächsten Runde deine Anzahl und du gibst mir dafür doppelt so viele Blätter zurück, wie du in der vorangegangenen Runde gegeben hast. Wer zuerst nicht genug Blätter hat, um die Regeln zu erfüllen, oder sogar gar keine Blätter mehr hat, verliert."

a) Quadrato hat 2 Blätter. Er ist sich sicher, bei diesem Spiel nicht verlieren zu können. Prüfe nach – gewinnt Quadrato? Schreibe den Spielverlauf auf!

b) Wie viele Blätter muss Quadrato am Anfang des Spiels haben, damit er das Spiel gewinnen kann? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz. Hat Quadrato am Anfang 2 oder 3 Blätter, so verliert er. Hat aber Quadrato 4 oder mehr Blätter, so verliert Kreisa.

Begründung: Wir schreiben die Spielverläufe auf. Dabei beachten wir, dass Kreisa immer so viele Blätter an Quadrato gibt, wie er gerade hat (um seine Anzahl zu verdoppeln). Quadrato gibt immer doppelt so viele Blätter an Kreisa, wie er zuvor gegeben hat.

Kreisa	Kreisa an Quadrato	Quadrato an Kreisa	Quadrato
30			**2**
30 – 2 = 28	2	→	2 + 2 = 4
28 + 1 = 29	←	1	4 – 1 = **3**
29 – 3 = 26	3	→	3 + 3 = 6
26 + 2 = 28	←	2 = 2 · 1	6 – 2 = **4**
28 – 4 = 24	4	→	4 + 4 = 8
24 + 4 = 28	←	4 = 2 · 2	8 – 4 = **4**
28 – 4 = 24	4	→	4 + 4 = 8
24 + 8 = 32	←	8 = 2 · 4	8 – 8 = **0**
		Quadrato hat verloren	

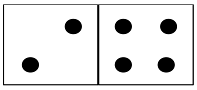
Kreisa	Kreisa an Quadrato	Quadrato an Kreisa	Quadrato
30			**3**
30 – 3 = 27	3	→	3 + 3 = 6
27 + 1 = 28	←	1	6 – 1 = **5**
28 – 5 = 23	5	→	5 + 5 = 10
23 + 2 = 25	←	2 = 2 · 1	10 – 2 = **8**
25 – 8 = 17	8	→	8 + 8 = 16
17 + 4 = 21	←	4 =2 · 2	16 – 4 = **12**
21 – 12 = 9	12	→	12 + 12 = 24
9 + 8 = 17	←	8 = 2 · 4	24 – 8 =**16**
17 – 16 = 1	16	→	16 + 16 =32
1 + 16 = 17	←	16 = 2 · 8	32 – 16 =**16**
17 – 16 = 1	16	→	16 + 16 = 32
		32 = 2 · 16	32 – 32 = **0**
		Quadrato hat verloren	

Kreisa	Kreisa an Quadrato	Quadrato an Kreisa	Quadrato
30			**4**
30 – 4 = 26	4	→	4 + 4 = 8
26 + 1 = 27	←	1	8 – 1 = **7**
27 – 7 = 20	7	→	7 + 7 = 14
20 + 2 = 22	←	2 = 2 · 1	14 – 2 = **12**
22 – 12 = 10	12	→	12 + 12 = 24
10 + 4 = 14	←	4 = 2 · 2	24 – 4 = **20**
14 – 20 geht nicht	20		
Kreisa hat verloren			

****

Noch mehr Domino-Steine

Ein Domino-Spiel besteht aus 28 Spielsteinen, die jeweils in zwei quadratische Felder geteilt sind. Auf diesen Feldern sind Punkte so angebracht, dass jede mögliche Kombination aus zwei Zahlen von 0 bis 6 genau einmal dargestellt ist. Statt Punkte auf die Spielsteine zu zeichnen, können wir auf die Felder Zahlen schreiben. Ein leeres Feld bedeutet „0“.



2	**4**

Für den nebenstehenden Spielstein schreiben wir kurz 2-4. Jede Kombination gibt es aber nur einmal, also ist 4-2 derselbe Spielstein wie 2-4.

Aufgabe 1. Kreisa addiert die beiden Zahlen von einem Spielstein und nennt dies die Summe des Spielsteines. Beispielsweise ist die Summe des Spielsteines 5-2 gleich 7.

a) Wie viele Spielsteine eines Domino-Spiels haben eine Summe, die 7 oder größer als 7 ist? Schreibe auf, wie du das Ergebnis gefunden hast!

b) Kreisa stellt fest, dass verschiedene Spielsteine eine gleichgroße Summe haben können. Für welche Summe gibt es die meisten verschiedenen Spielsteine und wie viele Spielsteine sind es genau, die diese Summe haben? Begründe dein Ergebnis!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz. Es gibt 12 Domino-Steine mit einer Summe gleich oder größer als 7.

Begründung: Schreibe alle 28 Spielsteine auf und streiche die Spielsteine, auf denen die Summe beider Zahlen kleiner als 7 ist. Es bleiben 12 Spielsteine übrig.

~~0 - 0~~	~~0 - 1~~	~~0 - 2~~	~~0 - 3~~	~~0 - 4~~	~~0 - 5~~	~~0 - 6~~
	~~1 - 1~~	~~1 - 2~~	~~1 - 3~~	~~1 - 4~~	~~1 - 5~~	1 - 6
		~~2 - 2~~	~~2 - 3~~	~~2 - 4~~	2 - 5	2 - 6
			~~3 - 3~~	3 - 4	3 - 5	3 - 6
				4 - 4	4 - 5	4 - 6
					5 - 5	5 - 6
						6 - 6

Hinweis: Wenn du richtige Spielsteine eines Domino-Spiels zur Lösung der Aufgabe verwendet hast, konntest du die Spielsteine in zwei Haufen aufteilen:

- einen Haufen mit Spielsteinen, deren Summe kleiner als 7 ist,
- einen Haufen mit Spielsteinen, deren Summe gleich 7 oder größer als 7 ist.

Die Anzahl der Spielsteine in jedem Haufen sind dann nur noch zu zählen.

Lösungsvariante: Du kannst die Anzahl der gesuchten Domino-Steine auch durch folgende Überlegung finden:

- Ist auf einem Domino-Stein eine 0 zu sehen, kann die Summe nicht größer als 6 werden. In diesem Fall gibt es also keinen Domino-Stein.
- Ist auf einem Domino-Stein eine 1 zu sehen, kann die Summe 7 nur erreicht werden, wenn auf dem Stein auch eine 6 zu sehen ist. In diesem Fall gibt es also 1 Domino-Stein (1 – 6).
- Ist auf einem Domino-Stein eine 2 zu sehen, kann die Summe 7 nur erreicht oder übertroffen werden, wenn auf dem Stein auch eine 5 oder eine 6 zu sehen ist. In diesem Fall gibt es also 2 Domino-Steine (2 – 5, 2 – 6).

- Ist auf einem Domino-Stein eine 3 zu sehen, kann die Summe 7 nur erreicht oder übertroffen werden, wenn auf dem Stein auch eine 4, eine 5 oder eine 6 zu sehen ist. In diesem Fall gibt es also 3 Domino-Stein (3 – 4, 3 – 5, 3 – 6).
- Sind auf einem Domino-Stein nur die Zahlen 4, 5 oder 6 zu sehen, ist die Summe beider Zahlen stets größer als 7. Es gibt 6 solche Domino-Steine (4 – 4, 4 – 5, 4 – 6, 5 – 5, 5 – 6, 6 – 6).

Insgesamt gibt es also (0 + 1 + 2 + 3 + 6 =) 12 Domino-Steine, die eine Summe gleich oder größer als 7 haben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz. Am häufigsten tritt die Summe 6 auf, 4 Domino-Steine haben diese Summe.

Begründung: Schreibe wieder alle Spielsteine auf. Alle Domino-Steine, die unter einer der gestrichelten Linien stehen, haben die gleiche Summe. Bei der Summe 6 ist diese Linie am längsten und unter dieser Linie stehen 4 Domino-Steine.

Summe:	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0 - 0	0 - 1	0 – 2	0 - 3	0 - 4	0 - 5	0 - 6	**7**
	1 - 1	1 - 2	1 - 3	1 - 4	1 - 5	1 - 6	**8**
		2 - 2	2 - 3	2 - 4	2 - 5	2 - 6	**9**
			3 - 3	3 - 4	3 - 5	3 - 6	**10**
				4 - 4	4 - 5	4 - 6	**11**
					5 - 5	5 - 6	**12**
						6 - 6	

Lösungsvariante: Die Augensummen der Spielsteine können zwischen 0 und 12 variieren. Schreibe für alle möglichen Summen die passenden Spielsteine auf. Achte darauf, dass du keine Steine doppelt verwendest. Dies gelingt dir, wenn bei unterschiedlichen Zahlen die kleinere Zahl stets an erster Stelle steht. Zähle alle aufgeschriebenen Zahlen, um zu prüfen, dass alle 28 Domino-Steine berücksichtigt wurden:

Summe = 0: 0 – 0
Summe = 1: 0 – 1
Summe = 2: 0 – 2 / 1 – 1
Summe = 3: 0 – 3 / 1 – 2
Summe = 4: 0 – 4 / 1 – 3 / 2 – 2
Summe = 5: 0 – 5 / 1 – 4 / 2 – 3
Summe = 6: 0 – 6 / 1 – 5 / 2 – 4 / 3 – 3

Summe = 7: 1 – 6 / 2 – 5 / 3 – 4
Summe = 8: 2 – 6 / 3 – 5 / 4 – 4
Summe = 9: 3 – 6 / 4 – 5
Summe = 10: 4 – 6 / 5 – 5
Summe = 11: 5 – 6
Summe = 12: 6 – 6

****

Aufgabe 2. Frau Dreieck legt acht Spielsteine auf ein Quadrat mit 4 x 4-Feldern und achtet darauf, dass die Summe aus den Punkten in jeder der vier waagerechten Reihen und in jeder der vier senkrechten Reihen den gleichen Wert ergibt. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nennt man es „magisches Quadrat“.

a) Frau Dreieck möchte mit den Spielsteinen 2-3, 2-4, 2-5, 3-4, 3-5, 3-6, 4-4 und 5-5 das Quadrat so bedecken, dass sich in jeder waagerechten Reihe und in jeder senkrechten Reihe die Punktsumme 15 ergibt. Zwei Spielsteine hat sie schon gelegt – hilf ihr, das magische Quadrat zu vervollständigen. Gib an, wie du die Spielsteine gelegt hast!

4	2		
2	5		

b) Herr Raute behauptet, dass Frau Dreieck mehrere Möglichkeiten hat, diese Aufgabe zu lösen. Hat er recht? Wenn ja, wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

(*Hinweis: Zwei Lösungen sind verschieden, wenn an der Stelle eines Spielsteines der einen Lösung ein anderer Spielstein der anderen Lösung liegt.)*

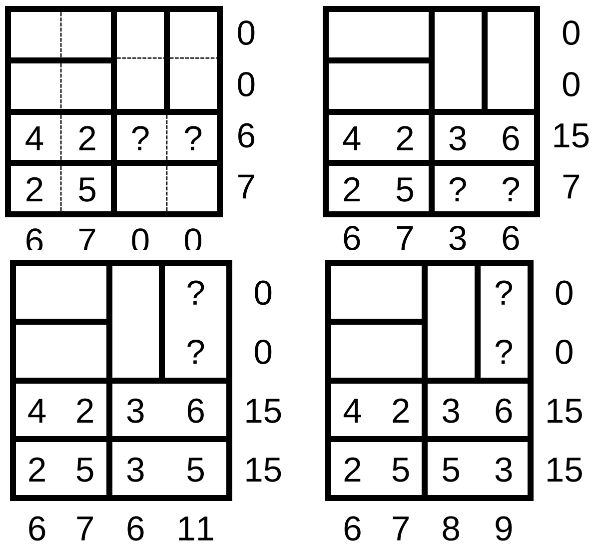
Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Es genügt bei dieser Aufgabenstellung, eine korrekte Belegung aufzuschreiben, bei der also jede Zeilensumme und jede Spaltensumme 15 beträgt.

Herleitung: Bei dieser Aufgabenstellung musst du nicht beschreiben, wie du die Lösung gefunden hast. Vielleicht hast du dir die genannten Domino-Steine genommen und probiert – dass ist ein richtiger Weg zur Lösungsfindung!

Wir wollen hier aber untersuchen, wie wir gezielt eine Lösung finden können. Dazu schreiben wir zunächst die ausgewählten Domino-Steine auf und berechnen deren Summen. Wir streichen die Domino-Steine durch, die bereits aufgelegt sind:

Domino-Stein	2 – 3	~~2 – 4~~	~~2 – 5~~	3 – 4	3 – 5	4 – 4	3 – 6	5 – 5
Summe	5	~~6~~	~~7~~	7	8	8	9	10

An den rechten und unteren Rand schreiben wir die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen, die bereits erreicht sind.



1. Schritt: Betrachten wir die dritte Zeile. Damit diese Zeilensumme 15 ergibt, muss die Summe für die zwei Fragezeichen (15 – 4 – 2 =) 9 ergeben. Dies ist nur mit dem Stein 3 – 6 möglich. Wir legen den Stein in dieser Reihenfolge auf.

2. Schritt: Betrachten wir nun die vierte Zeile. Damit diese Zeilensumme 15 ergibt, muss die Summe für die zwei Fragezeichen (15 – 2 – 5 =) 8 ergeben. Dafür stehen zwei Domino-Steine zur Verfügung.

Wir versuchen zunächst, den Stein 3 – 5 aufzulegen, und zwar so, dass die 5 unter der 6 steht. Dann fehlen in der vierten Spalte noch (15 – 6 – 5 =) 4 bis zur Summe 15. Dafür steht kein Domino-Stein zur Verfügung.

Legen wir jedoch den Stein 3 – 5 so, dass die 3 unter der 6 steht. Dann fehlen in der vierten Spalte noch (15 – 6 – 3 =) 6 bis zur Summe 15. Doch der Domino-Stein mit der Summe 6 liegt schon. Auch so kann es mit dem Stein 3 – 5 nicht gelingen.

Wir müssen also in die vierte Zeile den Domino-Stein 4 – 4 legen. Nun sind noch die 4 verbleibenden Domino-Steine aufzulegen. Der 2. Schritt ist also eindeutig bestimmt.

Domino-Stein	2 – 3	~~2 – 4~~	~~2 – 5~~	3 – 4	3 – 5	~~4 – 4~~	~~3 – 6~~	5 – 5
Summe	5	~~6~~	~~7~~	7	8	~~8~~	~~9~~	10

Da keine der verbleibenden Summen mehrfach vorkommt, wird die weitere Auswahl schrittweise eindeutig bestimmt sein.

3. Schritt: Um in der vierten Spalte die Summe 15 zu erreichen, benötigen wir einen Stein mit der Summe (15 – 6 – 4 =) 5, also den Domino-Stein 2 – 3. Wir legen ihn so, dass die 2 rechts oben steht.

4. Schritt: Um auch in der dritten Spalte die Summe 15 zu erreichen, benötigen wir einen Stein mit der Summe (15 – 4 – 3 =) 8, also den Domino-Stein 3 – 5. Legen wir den Stein so, dass die 5 oben liegt, fehlt in der ersten Zeile der Stein mit der Summe (15 – 5 – 2 =) 8, doch dafür ist kein Stein mehr zur Verfügung. So geht es also nicht.

Legen wir den Stein dagegen so, dass die 3 oben liegt, fehlt in der ersten Zeile der Stein mit der Summe (15 – 3 – 2 =) 10, also der Stein 5 – 5. Der 4. Schritt ist also eindeutig bestimmt.

5. Schritt: Zum Schluss legen wir den Stein 3 – 4 auf und prüfen, ob alle Zeilensummen und Spaltensummen tatsächlich 15 betragen. Auch der 5. Schritt ist eindeutig bestimmt.

Wir haben nun eine Lösung gefunden.

			?	0
			?	0
4	2	3	6	15
2	5	4	4	15
6	7	7	10	

		3	2	5
		5	3	8
4	2	3	6	15
2	5	4	4	15
6	7	15	15	

5	5	3	2	15
4	3	5	3	15
4	2	3	6	15
2	5	4	4	15
15	15	15	15	

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz. Es gibt 4 Möglichkeiten, das Quadrat mit den Domino-Steinen zu bedecken, sodass alle Zeilensummen und Spaltensummen gleich 15 sind.

Herleitung: Bestimmt hast du fleißig probiert und die vier verschiedenen Möglichkeiten entdeckt. Bei dieser Aufgabenstellung genügt es aber nicht, alle gefundenen Möglichkeiten aufzuschreiben. Du musst auch begründen, warum es keine weiteren Möglichkeiten geben kann. Das ist der schwierigste Teil dieser Aufgabe! Wenn du aber wie in der Lösungsdarstellung zu Aufgabe 2a eine Lösung hergeleitet hast, findest du die richtige Begründung.

5	5	3	2	15
4	3	5	3	15
4	2	3	6	15
2	5	4	4	15
15	15	15	15	

5	5	2	3	15
4	3	3	5	15
4	2	6	3	15
2	5	4	4	15
15	15	15	15	

Im 1. Schritt haben wir den Domino-Stein 3 – 6 in dieser Richtung aufgelegt. Wir können den Stein aber auch in der Richtung 6 – 3 auflegen. Wir erhalten auf diese Weise eine zweite Lösung, weil alle anderen Erklärungen weiterhin richtig bleiben.

Im 3. Schritt haben wir den Domino-Stein 2 – 3 so aufgelegt, dass die 2 oben liegt. Wir können den Stein aber auch so auflegen, dass die 3 oben liegt. Wir erhalten auf diese Weise für jede der beiden bereits gefundenen Lösungen eine weitere Lösung.

Es gibt also insgesamt 4 verschiedene Lösungen. Mehr kann es aber nicht geben, weil die Belegung durch die anderen Domino-Steine immer eindeutig festgelegt war.

4	3	5	**3**	15
5	5	3	**2**	15
4	2	3	6	15
2	5	4	4	15
15	15	15	15	

4	3	**3**	5	15
5	5	**2**	3	15
4	2	6	3	15
2	5	4	4	15
15	15	15	15	

****

Aufgabe 3. Quadrato legt 4 Spielsteine senkrecht nebeneinander und addiert die oberen vier Zahlen und die unteren vier Zahlen, zum Beispiel

$$\begin{array}{ccccccccc} 5 & + & 3 & + & 6 & + & 0 & = & 14 \\ 1 & + & 3 & + & 1 & + & 2 & = & 7 \end{array}$$

a) Quadrato legt fest, dass die obere Summe doppelt so groß sein soll, wie die untere Summe. Findest du die kleinste untere Summe, die unter dieser Bedingung möglich ist? Gib ein Beispiel an! Warum kann es keine kleinere Summe als in deinem Beispiel geben?

b) Quadrato möchte wieder, dass die obere Summe doppelt so groß ist wie die untere Summe. Außerdem möchte er, dass die obere Summe aus vier gleichen Summanden besteht. Wie viele Möglichkeiten hat Quadrato, dafür vier Spielsteine des Domino-Spieles auszuwählen? Begründe dein Ergebnis!
(*Hinweis: Die Reihenfolge der Spielsteine spielt für die Addition keine Rolle.)*

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Die kleinste untere Summe beträgt 2.

Herleitung: Um zu zeigen, dass die untere Summe möglich ist, musst du ein Beispiel angeben. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Bedingungen der Aufgabe mit der unteren Summe 2 zu erfüllen.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & 1 & = & 4 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 3 & + & 0 & = & 4 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 1 & + & 2 & = & 4 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 3 & + & 0 & + & 1 & = & 4 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 2 & + & 0 & + & 2 & = & 4 \\ 0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & = & 2 \end{array}$$

Nun musst du aber noch begründen, warum es keine kleinere Summe geben kann. Die untere Summe kann nicht 0 sein. In diesem Fall wäre das Doppelte der unteren Summe ebenfalls 0 und es müssten vier Domino-Steine 0 – 0 verwendet werden.

Wenn die untere Summe 1 wäre, könnten in der oberen Reihe zwei Einsen stehen, doch dann müssen zwei Steine 0 – 0 oder zwei Steine 1 – 0 verwendet werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & = & 1 \end{array}$$

Wenn die untere Summe 1 wäre, könnte in der oberen Reihe eine 2 stehen, doch dann müssen mindestens zwei Steine 0 – 0 verwendet werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 0 & + & 0 & + & 2 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & 0 & + & 2 & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 1 & = & 1 \end{array}$$

Da keine Steine mehrfach verwendet werden dürfen, kann also die untere Summe weder 0 noch 1 sein.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Quadrato hat 12 Möglichkeiten, gemäß der Spielregeln vier Domino-Steine auszuwählen.

Begründung: Wenn in der oberen Reihe vier gleiche Zahlen stehen, müssen in der unteren Reihe 4 verschiedene Zahlen stehen (weil es keinen Domino-Stein mehrfach gibt). Somit entsteht die kleinste Summe, die in der unteren Reihe möglich ist, durch Addition der Zahlen 0, 1, 2 und 3. Die kleinste Summe beträgt also 6. Das Doppelte davon ist (2 · 6 =) 12. Dies kann in der oberen Reihe durch viermal 3 erreicht werden. Damit haben wir bereits eine Möglichkeit gefunden.

In einer Tabelle kannst du nun alle Möglichkeiten aufschreiben, wenn du alle Zerlegungen der unteren Summen in vier verschiedene Summanden findest:

Obere Reihe	Obere Summe	Untere Summe	Zerlegung der unteren Summe in vier verschiedene Summanden (zwischen 0 und 6)				
3+3+3+3	12	6	0+1+2+3				
4+4+4+4	16	8	0+1+2+5	0+1+3+4			
5+5+5+5	20	10	0+1+3+6	0+1+4+5	0+2+3+5	1+2+3+4	
6+6+6+6	24	12	0+1+5+6	0+2+4+6	0+3+4+5	1+2+3+6	1+2+4+5

****

LOGO – Runde 3 **Zahlenspielereien** (Teil A)

Aufgabe 1. Quadrato hat sich eine Zahl ausgedacht. Im ersten Schritt verdoppelt er diese Zahl und subtrahiert dann 10. Im zweiten Schritt verdoppelt er das Ergeb-nis aus dem ersten Schritt und subtrahiert 10. Im dritten Schritt verdoppelt er das Ergebnis aus dem zweiten Schritt und subtrahiert erneut 10. Er erhält ein Ergebnis, das größer als 20 ist. Im Schritt davor war das Ergebnis noch kleiner als 20.

Finde heraus, welche Zahl sich Quadrato am Anfang ausgedacht hat. Erkläre, wie du die Lösung gefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Quadrato hat sich am Anfang die Zahl 12 ausgedacht.

Probe: Im ersten Schritt erhält Quadrato die Zahl (2 · 12 – 10 =) 14.
Im zweiten Schritt erhält er die Zahl (2 · 14 – 10 =) 18. Sie ist kleiner als 20.
Im dritten Schritt erhält er die Zahl (2 · 18 – 10 =) 26. Sie ist größer als 20.

Herleitung: Eine solche Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Beachte: Der Satz „Ich habe probiert“ genügt nicht. Schreibe auf, wie du probiert hast!

Um die Ergebnisse des Probierens übersichtlich aufzuschreiben, solltest du eine Tabelle verwenden. Trage in jeder Zeile ein, welche Ergebnisse Quadrato erhält, wenn er mit einer ausgedachten Zahl beginnt. Da in jedem Schritt 10 subtrahiert wird, kannst du zum Beispiel mit der ausgedachten Zahl 10 beginnen:

Ausgedachte Zahl	1. Schritt	2. Schritt	Vergleich mit 20	3. Schritt	Vergleich mit 20
10	2·10-10=10	2·10-10=10	10 < 20	2·10-10=10	10 < 20
11	2·11-10=12	2·12-10=14	14 < 20	2·14-10=18	18 < 20
12	**2·12-10=14**	**2·14-10=18**	**18 < 20**	**2·18-10=26**	**26 > 20**
13	2·13-10=16	2·16-10=22	22 > 20	2·22-10=34	34 > 20

Nur wenn sich Quadrato die Zahl 12 ausgedacht hat, ist der Vergleich mit 20 nach dem zweiten und nach dem dritten Schritt richtig.

Hinweis: Auch wenn du in der Tabelle in der Zeile mit der ausgedachten Zahl 12 eine Lösung gefunden hast, beende noch nicht das Probieren. So kannst du nämlich feststellen, dass nur die ausgedachte Zahl 12 Lösung der Aufgabe ist.

Lösungsvariante: Du kannst die Lösung auch finden, indem du rückwärts rechnest. Wir bezeichnen dafür mit A die ausgedachte Zahl, mit B das Ergebnis nach dem ersten Schritt, mit C das Ergebnis nach dem zweiten Schritt und mit D das Ergebnis nach dem dritten Schritt.

Weil D größer als 20 sein soll, finden wir eine Abschätzung für C: $D = 2 \cdot C - 10 > 20$,
also $C > (20 + 10) : 2 = 15$.
Damit C größer als 15 wird, finden wir für B: $C = 2 \cdot B - 10 > 15$,
also $B > (15 + 10) : 2 > 12$.

Damit B größer als 12 wird, gilt für die ausgedachte Zahl A: $B = 2 \cdot A - 10 > 12$,
also $A > (12 + 10) : 2 = 11$.

Damit das Ergebnis nach dem dritten Schritt größer als 20 wird, muss die ausgedachte Zahl größer als 11 sein. Nun gibt es aber noch eine zweite Bedingung: Das Ergebnis C nach dem zweiten Schritt muss kleiner als 20 sein. Damit finden wir für B:

Weil C kleiner als 20 sein soll, finden wir eine Abschätzung für B: $C = 2 \cdot B - 10 < 20$,
also $B < (20 + 10) : 2 = 15$.

Um das zu erreichen, muss für die ausgedachte Zahl A gelten: $B = 2 \cdot A - 10 < 15$,
also $A < (15 + 10) : 2 < 13$.

Somit findest du für die ausdachte Zahl A die Beschränkung $11 < A < 13$. Die Lösung der Aufgabe kann also nur 12 sein. Das Ergebnis musst du noch mit einer Probe bestätigen.

****

Aufgabe 2a). Kreisa hat sich sechs Zahlenkarten gebastelt – auf jeder dieser Karten steht eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6. Sie hat alle sechs Zahlen verwendet. Sie will die Karten so in einer Reihe anordnen, dass folgende Eigenschaft erfüllt ist: Jede Summe von drei nebeneinander liegenden Karten ist ein Vielfaches von 3. Sie beginnt links mit der Karte „1“ und legt die anderen Karten rechts daneben.

Quadrato hat Kreisa beobachtet und bemerkt: „Da gibt es mindestens drei verschiedene Anordnungen, die mit „1“ beginnen und die geforderte Eigenschaft haben!“ Hat Quadrato Recht? Findest du auch drei verschiedene Anordnungen? Gib drei Anordnungen an, die du gefunden hast.

Aufgabe 2b). Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es insgesamt, die die geforderte Eigenschaft haben und bei denen links eine „1“ steht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 2c). Plötzlich jubelt Kreisa: „Ich habe einen Trick gefunden, wie ich aus einer Anordnung mit „1“ an der linken Seite eine Anordnung finden kann, die diese Eigenschaft auch hat und links mit „2“ beginnt, ohne bei jeder Karte neu nachdenken zu müssen!“ Was könnte Kreisa entdeckt haben? Hast du auch einen solchen Trick gefunden? Beschreibe, wie dein Trick funktioniert!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Es gibt 8 verschiedene Anordnungen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen und mit 1 beginnen.

Herleitung: Bezeichne die sechs Plätze mit A, B, C, D, E und F. Laut Aufgabe muss A = 1 gewählt werden. An der zweiten Stelle B kannst du nun jeder der Zahlen 2 bis 6 probieren. Bilde dazu die Summe A + B und ermittle, mit welcher noch nicht verwendeten Zahl eine durch 3 teilbare Summe entsteht. Beginne mit B = 2. Weil die Summe A + B = 1 + 2 = 3 ist, kannst du für C nur die Zahlen 3 oder 6 auswählen. Versuche es mit C = 3. Dann ist A + B + C = 1 + 2 + 3 =6 durch 3 teilbar.

Um die Reihe fortzusetzen, muss nun die Summe B + C + D durch 3 teilbar sein. Die Summe von B + C = 2 + 3 = 5 kennst du schon. Es könnte also D = 1 sein (das geht aber nicht, weil die 1 schon ausgewählt wurde) oder D = 4 sein.

Um die Reihe weiter fortzusetzen, muss nun die Summe C + D + E durch 3 teilbar sein. Die Summe von C + D = 3 + 4 = 7 kennst du schon. Es könnte also E = 2 sein (das geht aber nicht, weil die 2 schon ausgewählt wurde) oder D = 5 sein.

Für F bleibt nun nur noch F = 6 übrig. Die Summe D + E + F = 4 + 5 + 6 = 15 ist aber tatsächlich auch durch 3 teilbar. So hast du die Reihenfolge 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 gefunden, die alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Du kannst aber nach A = 1 und B = 2 auch mit C = 6 fortsetzen. Auf diese Weise findest du eine zweite Reihenfolge: 1 – 2 – 6 – 4 – 5 – 3.

Für B = 3 gibt es zwei Möglichkeiten: 1 – 3 – 2 – 4 – 5 – 6; 1 – 3 – 5 – 4 – 6 – 2.
Für B = 5 gibt es zwei Möglichkeiten: 1 – 5 – 3 – 4 – 2 – 6; 1 – 5 – 6 – 4 – 2 – 3.
Für B = 6 gibt es zwei Möglichkeiten: 1 – 6 – 2 – 4 – 3 – 5; 1 – 6 – 5 – 4 – 3 – 2.

Dagegen gibt es für B = 4 keine Reihenfolge. Die Summe A + B = 1 + 4 = 5 kann nur durch 1 oder durch 4 zu einer durch 3 teilbaren Summe ergänzt werden – doch beide Zahlen sind bereits ausgewählt.

Also gibt es insgesamt genau 8 verschiedenen Reihenfolgen, die links mit 1 beginnen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Wenn du zuerst die Aufgabe 2b) bearbeitest und dabei mindestens 3 Möglichkeiten findest, ist damit natürlich auch die Aufgabe 2a) gelöst. Es genügt bei einer solchen Fragestellung, drei richtige Reihenfolgen aufzuschreiben. Probe nicht vergessen!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2c) Wenn du die Möglichkeiten gefunden hast, bei denen an erster Stelle eine 1 steht, findest du natürlich auch alle Möglichkeiten, bei denen an erster Stelle eine 2 steht. Bestimmt musst du dabei gar nicht viel nachdenken, weil du erkannt hast, wie du systematisch die Reihenfolge festlegen musst.

Aber es gibt tatsächlich mathematische Tricks, aus einer Möglichkeit mit 1 an erster Stelle eine Möglichkeit mit 2 an erster Stelle zu zaubern:

Variante 1: Wähle eine Reihenfolge mit 1 an erster Stelle: 1 – 3 – 2 – 4 – 6 – 5.
Addiere zu jeder Zahl den Wert 1: 2 – 4 – 3 – 5 – 7 – 6.
Ersetze die Zahl 7 durch 1 – fertig: 2 – 4 – 3 – 5 – 1 – 6.

(Prüfe auch an anderen Beispielen, ob die Bedingungen immer alle erfüllt sind!)

Variante 2: Nimm alle Zahlen weg, die vor der 2 stehen, und hänge sie hinten an.
So wird aus **1 – 3 –** 2 – 4 – 6 – 5 die Reihenfolge 2 – 4 – 6 – 5 **– 1 – 3.**

(Prüfe auch an anderen Beispielen, ob die Bedingungen immer alle erfüllt sind!)

****

Aufgabe 3. Kreisa und Quadrato spielen mit mehreren Zahlenkarten, die so auf dem Tisch liegen, dass die Zahlen zu sehen sind. Abwechselnd ziehen sie eine Karte, bis alle Karten verteilt sind. Dann vergleichen sie die Summen der gezogenen Karten. Ist bei beiden die Summe jeweils eine gerade Zahl, so endet das Spiel unentschieden. Ist bei beiden die Summe jeweils eine ungerade Zahl, so endet das Spiel ebenfalls unentschieden. Ist jedoch bei einem die Summe eine ungerade Zahl und beim anderen eine gerade Zahl, so gewinnt derjenige, dessen Summe eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 3a). Auf dem Tisch liegen die Zahlenkarten 1, 2, 3 und 4. Kreisa darf immer beginnen. Nach einer Weile stellen Kreisa und Quadrato erstaunt fest, dass noch keiner gewonnen hat. Kannst du erklären, warum das so ist?

Aufgabe 3b). Nun liegen die Zahlenkarten 1, 2, 3, 4, 5 und 6 auf dem Tisch. Wieder darf Kreisa immer beginnen. Nun wundert sich Quadrato, dass Kreisa immer gewinnt. Wie gelingt es Kreisa, immer zu gewinnen? Erkläre, welche Karten Kreisa ziehen muss. Warum kann Quadrato den Sieg von Kreisa nicht verhindern!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Egal, welche Karten Kreisa und Quadrato nehmen, sie haben entweder beide eine gerade Summe ihrer Zahlenkarten oder beide eine ungerade Summe ihrer Zahlenkarten.

Begründung: Schreibe auf, welche Karten Kreisa gezogen haben könnte und berechne die Kartensumme. Die Karten, die übrig bleiben, hat Quadrato gezogen. Berechne auch seine Kartensumme. In der Tabelle wird das Ergebnis sichtbar: Entweder haben beide eine ungerade Kartensumme oder sie haben beide eine gerade Kartensumme. Das Spiel endet also immer unentschieden.

Kreisas Karten		Kreisas Summe		Quadratos Karten		Quadratos Summe	
1	2	3	ungerade	3	4	7	ungerade
1	3	4	gerade	2	4	6	gerade
1	4	5	ungerade	2	3	5	ungerade
2	3	5	ungerade	1	4	5	ungerade
2	4	6	gerade	1	3	4	gerade
3	4	7	ungerade	1	2	3	ungerade

Lösungsvariante: Die Summe aller Karten beträgt (1 + 2 + 3 + 4 =) 10. Die Zahl 10 ist eine gerade Zahl. Da die Karten vollständig auf Kreisa und Quadrato aufgeteilt werden, ergibt die Summe von Kreisas Kartensumme und Quadratos Kartensumme zusammen 10. Deshalb gilt:

- Wenn Kreisa mit ihren zwei Karten eine gerade Summe hat, muss auch Quadratos Kartensumme eine gerade Zahl sein, damit die Summe geradzahlig wird.
- Wenn dagegen Kreisa mit ihren zwei Karten eine ungerade Summe hat, muss auch Quadratos Kartensumme eine ungerade Zahl sein, damit die Gesamtsumme geradzahlig wird.

Du kannst es aber auch so begründen: Wenn es einen Gewinner gibt, muss seine Kartensumme eine gerade Zahl ergeben und die Kartensumme seines Gegenspielers muss eine ungerade Zahl ergeben. Jedoch ist die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl nicht geradzahlig, kann also nicht 10 ergeben. Es ist also nicht möglich, dass es bei diesen Spielregeln einen Gewinner gibt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Wenn Kreisa beginnen darf, kann sie immer so spielen, dass sie gewinnt.

Begründung: Die Summe aller Karten beträgt (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =) 21. Die Zahl 21 ist eine ungerade Zahl. Da die Karten vollständig aufgeteilt werden, ergibt die Summe von Kreisas Kartensumme und Quadratos Kartensumme zusammen 21. Deshalb gilt:

- Weil nur die Summe einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl ungeradzahlig ist, gibt es in jedem Spiel einen Gewinner.

Kreisa kann gewinnen, wenn sie zwei ungerade und eine gerade Zahl zieht. Wenn Kreisa als erstes eine ungerade Zahl zieht, könnte zwar Quadrato bei seinem ersten Zug auch eine ungerade Zahl ziehen. Dann liegen nur noch eine ungerade Zahl und drei gerade Zahlen auf dem Tisch. Wenn Kreisa nun im zweiten Zug diese ungerade Zahl zieht, kann Quadrato nicht verhindern, dass Kreisa als dritte Zahl eine gerade Zahl zieht, weil ja nach Kreisas Zug nur noch gerade Zahlen auf dem Tisch liegen.

Kreisa kann also immer gewinnen – egal welche Karten Quadrato nimmt – wenn sie im ersten Zug eine ungerade Zahl zieht, im zweiten Zug eine ungerade Zahl zieht und im dritten Zug eine gerade Zahl zieht.

Was würde aber passieren, wenn Kreisa in ihrem ersten Zug eine gerade Zahl nimmt? Dann könnte Quadrato mit seinem ersten Zug eine ungerade Zahl nehmen.

- Zieht Kreisa mit ihrem zweiten Zug nun eine ungerade Zahl, kann auch Quadrato mit seinem zweiten Zug noch eine ungerade Zahl nehmen. Dann liegen nur noch gerade Zahlen auf dem Tisch – Kreisa hätte zum Spielende zwei gerade und eine ungerade Zahl – hätte also verloren.

- Zieht Kreisa dagegen mit ihrem zweiten Zug noch eine gerade Zahl, kann Quadrato mit seinem zweiten Zug die letzte gerade Zahl nehmen. Dann liegen nur noch ungerade Zahlen auf dem Tisch – Kreisa hätte zum Spielende zwei gerade und eine ungerade Zahl – hätte also auch verloren.

****

LOGO – Runde 3 **Domino-Bedeckungen** (Teil B)

Kreisa und Quadrato spielen wieder mit Domino-Steinen. Du erinnerst dich? Ein Domino-Spiel besteht aus 28 Spielsteinen, die jeweils in zwei quadratische Felder geteilt sind. Auf diesen Feldern sind Punkte so angebracht, dass jede mögliche Kombination aus zwei Zahlen von 0 bis 6 genau einmal dargestellt ist.

Aufgabe 1. Finde alle Domino-Steine, die folgende Eigenschaften gleichzeitig erfüllen:

(1) Die Summe der beiden Zahlen auf dem Domino-Stein ist kleiner als 9.
(2) Das Produkt der beiden Zahlen ist größer als 13.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Nur die zwei Domino-Steine 3-5 und 4-4 erfüllen beide Bedingungen gleichzeitig.

Herleitung: Wir bezeichnen die Summe der beiden Zahlen auf einem Domino-Stein als Punktsumme, das Produkt beider Zahlen als Punktprodukt.

Wenn du mit richtigen Domino-Steinen probierst, ist es ganz einfach: Teile die 28 Spielsteine auf – in einen Haufen mit Steinen, deren Punktprodukt höchstens 13 ist, und in einen Haufen mit Steinen, deren Punktprodukt größer als 13 ist. Der Haufen mit Punktprodukt größer als 13 enthält die acht Steine 3-5, 3-6, 4-4, 4-5, 4-6, 5-5, 5-6 und 6-6.

~~0-0~~	~~0-1~~	~~0-2~~	~~0-3~~	~~0-4~~	~~0-5~~	~~0-6~~
	~~1-1~~	~~1-2~~	~~1-3~~	~~1-4~~	~~1-5~~	~~1-6~~
		~~2-2~~	~~2-3~~	~~2-4~~	~~2-5~~	~~2-6~~
			~~3-3~~	~~3-4~~	**3-5**	~~3-6~~
				4-4	~~4-5~~	~~4-6~~
					~~5-5~~	~~5-6~~
						~~6-6~~

Lege von diesem Haufen alle Spielsteine zur Seite, deren Punktsumme mindestens 9 ist. Es verbleiben nur die genannten Steine.

Lösungsvariante: Auch ohne Domino-Steine kannst du die Auswahl in ähnlicher Weise vornehmen. Schreibe alle 28 Spielsteine auf. Markiere die Steine, deren Punkt-summen mindestens 9 sind (streiche sie von links unten nach rechts oben durch). Markiere nun alle Steine, deren Punkt-produkte höchsten 13 ist (streiche sie von links oben nach rechts unten durch). Nur die Steine, die noch nicht markiert sind, erfüllen beide Bedingungen gleichzeitig.

Lösungsvariante: Du kannst das systematische Probieren einschränken, wenn du dir zunächst folgendes überlegst: Ist auf einem Domino-Stein eine 0, 1 oder 2 zu sehen, kann das Punktprodukt nicht größer als 13 werden, weil das größte Punktprodukt dieser Steine den Wert (2 · 6 =) 12 nicht übertrifft.

Sind auf einem Domino-Stein nur die Zahlen 5 und 6 zu sehen, kann die Punktsumme nicht kleiner als 9 sein, weil die kleinste Punktsumme dieser Steine nicht unter (5 + 5 =) 10 liegt. So verbleiben nur noch 7 Steine, die du untersuchen musst. Du findest schnell die zwei Steine, die beide Bedingungen erfüllen, wenn du von jedem dieser Steine das Punktprodukt und die Punktsumme ausrechnest:

Domino-Stein	3-3	3-4	**3-5**	3-6	**4-4**	4-5	4-6
Summe	6	7	**8**	9	**8**	9	10
Produkt	9	12	**15**	18	**16**	20	24

****

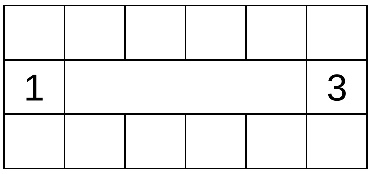
Aufgabe 2a). Quadrato hat sich die sieben Domino-Steine 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-5, 5-5 und 4-6 genommen und möchte damit den gezeichneten Ring bedecken. Dabei achtet er auf die Anlege-Regel: Zwei aneinanderstoßende Felder benachbarter Domino-Steine zeigen die gleiche Zahl.

Er will die bereits eingetragenen Zahlen von einer Domino-Hälfte mit der entsprechenden Zahl bedecken. Schreibe auf, wie Quadrato die Domino-Steine auflegen muss. Erstaunt stellt Quadrato fest, dass er aufgrund der Anlege-Regel nur eine Möglichkeit hat, den Ring zu bedecken. Erkläre, warum keine andere Bedeckung möglich ist.

	4				
6				3	

Aufgabe 2b). Auch Kreisa möchte den Ring bedecken und wählt sich die sieben Domino-Steine 1-2, 1-4, 2-3, 2-4, 2-5, 3-4 und 4-5. Sie stellt fest, dass es trotz beachteter Anlege-Regel verschiedene Möglichkeiten gibt. Wie viele verschiedene Bedeckungen findest du? Schreibe deine Lösungen auf.

Aufgabe 2c). Nun möchte auch Herr Raute so eine Aufgabe lösen. Quadrato gibt ihm die sieben Domino-Steine 1-2, 1-3, 2-3, 2-5, 3-4, 3-5 und 4-5. Nach einer Weile stöhnt Herr Raute: „Die Aufgabe ist nicht lösbar!“ Hat er Recht? Begründe deine Antwort.



Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Da Quadrato nur zwei Domino-Steine mit einer 4 hat, versuche zuerst diese aufzulegen. Liegt der Domino-Stein 2-4 so wie in der Abbildung 1, müssen als nächstes die Domino-Steine 2-6 und 4-6 aufgelegt werden. Doch nun hat Quadrato keine Domino-Steine mehr mit 4, so dass er die Anlegeregeln nicht mehr erfüllen kann.

Verwendest du den Domino-Stein 4-6 wie in der Abbildung 2, ist zur Füllung der Lücke der Domino-Stein 6-6 erforderlich, doch der steht Quadrato nicht zur Verfügung.
Legst du dagegen den Domino-Stein 4-6 wie in Abbildung 3, dann hat Quadrato keine weiteren Domino-Steine mit 6, sodass er die Anlegeregeln nicht erfüllen kann.

Abb. 1

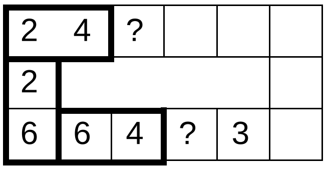


Abb. 2

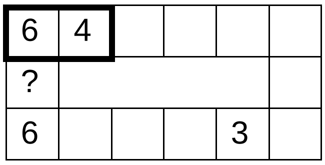
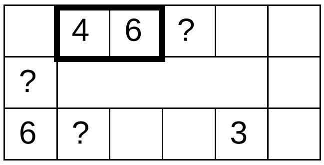


Abb. 3



Wenn es eine Möglichkeit gibt, so muss diese mit dem Domino-Stein 2-4 wie in Abbildung 4 beginnen. Um den linken Rand zu vervollständigen, kannst du wegen der Anlegeregel zur 4 sofort den Domino-Stein 4-6 auflegen. Auf der unteren Linie kannst du nun nur mit dem Domino-Stein 2-6 fortsetzen, um an die 6 anzulegen (Abbildung 4).

Um weiter die Anlegeregel zu erfüllen, können die zwei Fragezeichen in Abbildung 5 nur durch den Domino-Stein 2-3 belegt werden.

Nun hat Quadrato nur noch einen Domino-Stein mit 2, nämlich 2-5, den er in der oberen Reihe anlegen muss. Außerdem hat Quadrato nur noch einen Domino-Stein mit 3, nämlich 3-5, den er in der unteren Reihe anlegen muss. (Abbildung 6). In die verbleibende Lücke passt der Domino-Stein 5-5.

Abb. 4

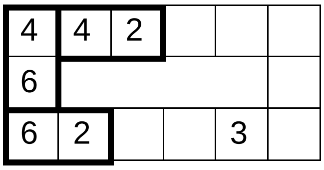


Abb. 5

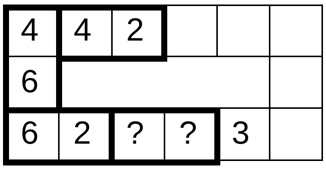
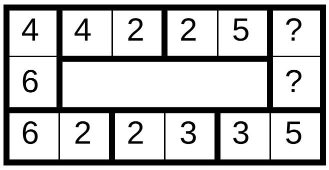


Abb. 6



Wir haben gesehen, dass es in jedem Schritt nur eine Möglichkeit gab, den nächsten Domino-Stein auszuwählen. Also kann es keine weitere Möglichkeit geben, auf den Ring die verfügbaren Domino-Steine aufzulegen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) Es gibt sehr viele verschiedene Möglichkeiten. Mit dieser Aufgabenstellung wurde aber nicht verlangt, alle Möglichkeiten zu finden. Um möglichst viele Möglichkeiten anzugeben, musst du systematisch vorgehen:

Beispielsweise kannst du mit dem Domino-Stein 2-1 links oben beginnen. Wegen der Anlegeregel muss als nächstes der Domino-Stein 1-4 aufgelegt werden. Doch nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder mit dem Domino-Stein 3-4 oder mit dem Domino-Stein 4-5 fortzusetzen. In Abbildung 7 wurde mit 3-4 fortgesetzt, sodass der nächste Domino-Stein 2-3 sein muss. Nun verbleiben noch die Domino-Steine 2-5, 2-4, 4-5, die auf zwei verschiedene Weisen aufgelegt werden können (Abbildung 8 und Abbildung 9).

Abb. 7

2	1	1	4	4	3
					3
					2

Abb. 8

2	1	1	4	4	3
2					3
4	4	5	5	2	2

Abb. 9

2	1	1	4	4	3
2					3
5	5	4	4	2	2

In Abbildung 10 wurde mit dem Domino-Stein 4-5 fortgesetzt, sodass der nächste Domino-Stein 2-5 sein muss. Nun verbleiben noch die Domino-Steine 2-3, 2-4, 3-4, die auf zwei verschiedene Weisen aufgelegt werden können (Abbildung 11 und Abbildung 12).

Abb. 10

2	1	1	4	4	5
					5
					2

Abb. 11

2	1	1	4	4	5
2					5
4	4	3	3	2	2

Abb. 12

2	1	1	4	4	5
2					5
3	3	4	4	2	2

Insgesamt sind es schon 4 Möglichkeiten, wenn du mit dem Domino-Stein 1-2 beginnst.

Beginne nun mit dem Domino-Stein 2-3 links oben. Wegen der Anlegeregel muss als nächstes der Domino-Stein 3-4 aufgelegt werden. Doch nun gibt es wieder zwei Möglichkeiten: Entweder mit dem Domino-Stein 1-4 oder mit dem Domino-Stein 4-5 fortzusetzen. In Abbildung 13 wurde mit 1-4 fortgesetzt, sodass der nächste Domino-Stein 1-2 sein muss. Nun verbleiben noch die Domino-Steine 2-4, 2-5, 4-5, die auf zwei verschiedene Weisen aufgelegt werden können (Abbildung 14 und Abbildung 15).

Abb. 13

2	3	3	4	4	1
					1
					2

Abb. 14

2	3	3	4	4	1
2					1
4	4	5	5	2	2

Abb. 15

2	3	3	4	4	1
2					1
5	5	4	4	2	2

In Abbildung 16 wurde mit dem Domino-Stein 4-5 fortgesetzt, sodass der nächste Domino-Stein 2-5 sein muss. Nun verbleiben noch die Domino-Steine 1-2, 1-4, 2-4, die auf zwei verschiedene Weisen aufgelegt werden können (Abbildung 17 und Abbildung 18).

Abb. 16

2	3	3	4	4	5
					5
					2

Abb. 17

2	3	3	4	4	5
2					5
1	1	4	4	2	2

Abb. 18

2	3	3	4	4	5
2					5
4	4	1	1	2	2

Insgesamt sind es weitere 4 Möglichkeiten, wenn du mit 2-3 beginnst.

Du kannst aber auch noch mit dem Domino-Stein 2-5 links oben beginnen. Noch einmal findest du 4 weitere Möglichkeiten:

Abb. 19

2	5	5	4	4	1
					1
					2

Abb. 20

2	5	5	4	4	1
2					1
3	3	4	4	2	2

Abb. 21

2	5	5	4	4	1
2					1
4	4	3	3	2	2

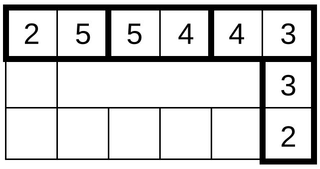


Abb. 22

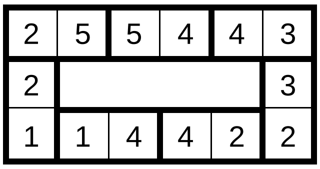


Abb. 23

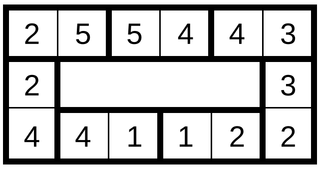


Abb. 24

Somit hast du insgesamt schon (4 + 4 + 4 =) 12 Möglichkeiten gefunden.

Jede Möglichkeit kannst du aber umdrehen (Abbildung 26 ist das gedrehte Bild von Abbildung 25). So erhältst du eine weitere Möglichkeit, sodass du auf diese Weise noch einmal 12 Belegungen angeben kannst – insgesamt gibt es also 24 verschiedene Möglichkeiten.

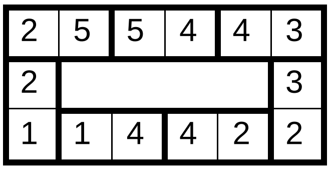


Abb. 25

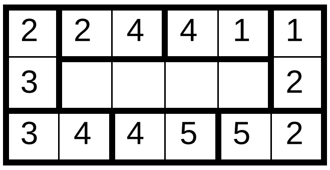


Abb. 26

Wenn du mehr als 8 Möglichkeiten gefunden hast, ist das ein sehr gutes Ergebnis. So eine lange Begründung wie hier dargestellt, wurde dabei nicht erwartet.

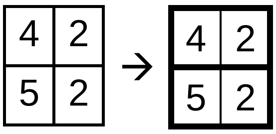
Lösungshinweise zu Aufgabe 2c) – Antwortsatz: Herr Raute hat Recht, er kann mit den vorgegebenen Steinen den Ring nicht bedecken, wenn er die Anlegeregel beachtet.

Begründung: Die Anlegeregel fordert, dass zwei aneinanderstoßende Felder benachbarter Steine die gleiche Zahl zeigen. Das bedeutet aber, dass jede Zahl in geradzahliger Anzahl vorliegen muss. Es gibt aber auf den Steinen dreimal 2 und dreimal 5. Deshalb kann die Anlegeregel nicht überall erfüllt werden.

Lösungsvariante: Du kannst natürlich auch probieren, den Ring zu bedecken, und stellst schnell fest, dass es dir nicht gelingt. Allerdings ist die Antwort „Ich habe keine Möglichkeit gefunden“ nicht ausreichend. Du könntest ja eine Möglichkeit übersehen haben. Also musst du vollständig aufschreiben, wie du probiert hast.

****

Kreisa hat sich ein neues Spiel ausgedacht. Sie gibt Quadrato die Domino-Steine 2-4 und 2-5 und fordert ihn auf, ein Zahlenfeld so zu bedecken, dass über jeder Zahl eine Domino-Hälfte mit der entsprechenden Zahl liegt. Bei Zahlenfeld (1) ist es ganz einfach.



(1)

Aufgabe 3a). Warum kann es Quadrato nicht gelingen, weitere Domino-Steine auswählen, um das Zahlenfeld (2) zu bedecken, wenn er von Kreisa bereits die Steine 2-4 und 2-5 erhielt?

4	2	5	3
2	5	2	4

(2)

Aufgabe 3b). Welche Domino-Steine benötigt Quadrato für das Zahlenfeld (3), wenn er von Kreisa schon 2-4 und 2-5 erhielt? Markiere, wie die Domino-Steine auf das Zahlenfeld zu legen sind.

1	3	2	2
6	4	2	2
5	6	5	2
4	1	3	1

(3)

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) Die vorgegebenen Zahlen erfordern, dass entweder der Domino-Stein 2-4 oder der Domino-Stein 2-5 zweifach benötigt wird. Deshalb kann Quadrato das Zahlenfeld nicht bedecken.

Begründung: Es gibt drei Möglichkeiten, den Domino-Stein 2-4 aufzulegen.

Möglichkeit 1

4	2	5	3
2	5	2	4

Möglichkeit 2

4	2	5	3
2	5	2	4

Möglichkeit 3

4	2	5	3
2	5	2	4

Möglichkeit 1: Liegt dieser Domino-Stein links oben, so kann links unten nur der Domino-Stein 2-5 liegen. Auf den verbleibenden 4 Feldern lassen sich nur

- waagerecht die Domino-Steine 2-4 und 3-5 auflegen, aber der Domino-Stein 2-4 liegt schon an anderer Stelle, oder
- senkrecht die Domino-Steine 2-5 und 3-4 auflegen, aber der Domino-Stein 2-5 liegt schon an anderer Stelle.

Möglichkeit 2: Liegt dieser Domino-Stein in der linken Spalte, so kann das mittlere 2x2-Feld nur mit zwei Domino-Steinen 2-5 belegt werden, sowohl waagerecht als auch senkrecht.

Möglichkeit 3: Liegt dieser Domino-Stein rechts unten, so kann das linke 2x2-Feld nur mit den Domino-Steinen 2-4 und 2-5 belegt werden, sowohl waagerecht oder senkrecht. Aber der Domino-Stein 2-4 liegt schon an anderer Stelle.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Quadrato benötigt die Domino-Steine 1-3, 1-4, 1-6, 2-2, 2-3, 5-6.

1	3	2	2
6	4	2	2
5	6	5	2
4	1	3	1

1	3	2	2
6	4	2	2
5	6	5	2
4	1	3	1

Begründung: Es gibt nur eine Stelle, an der 2 und 4 aneinanderstoßen. Also kann der Domino-Stein 4-2 nur auf diese Felder gelegt werden.

Weil nun diese beiden Felder bereits belegt sind, gibt es nur noch eine Stelle, an der 2 und 5 aneinanderstoßen. Der Domino-Stein 5-2 kann also auch nur auf diese Stelle gelegt werden.

Nun sind aber auch die Domino-Steine 2-2, 2-3, 1-6 und 1-3 eindeutig bestimmt. Es verbleibt noch die linke untere Ecke mit vier Feldern. Waagerecht passen die Domino-Steine 5-6 und 1-4 darauf. Senkrecht könnten auch die Domino-Steine 4-5 und 1-6 darauf passen – aber den Domino-Stein 1-6 gibt es nur einmal und der wurde schon gelegt