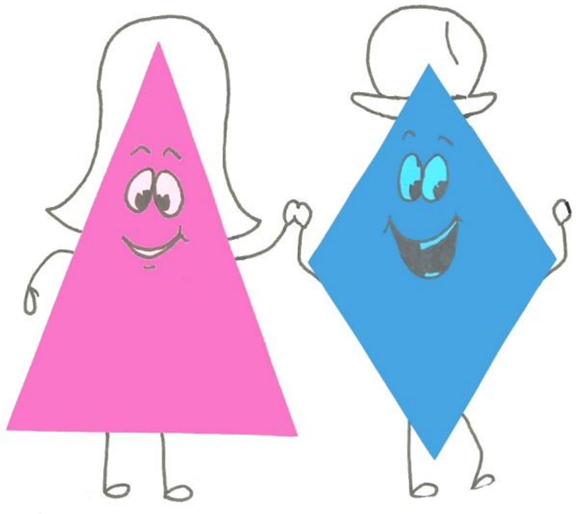
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler, die Freude an Mathematik haben.



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Überlege dir für jede Aufgabe einen Lösungsweg und schreibe deine Rechnungen und Lösungen auf. **Erkläre**, wie du deine Lösung gefunden hast! Wenn du probiert hast, dann beschreibe wie. Achte darauf, eine Frage in der Aufgabe mit einem **Antwortsatz** zu beantworten. Wenn möglich, prüfe dein Ergebnis mit einer **Probe**. Es genügt auch, wenn du nicht zu allen Aufgaben eine Lösung einsendest.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

www.mathe-logo.org

LOGO-Team: Annemarie Maßalsky, und Norman Bitterlich

Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute, Kreisa und ihr kleiner Bruder Quadrato – bereiten wie jedes Jahr ein Gartenfest vor.

Aufgabe 1. Frau Dreieck hat Kuchen gebacken, und zwar Pflaumenkuchen, Apfelkuchen und Schokoladenkuchen. Sie schneidet den Kuchen in Stücke, insgesamt 46 Stück. Beim Verteilen auf die Kuchenteller stellt sie fest:

- Es sind doppelt so viele Stücke Schokoladenkuchen wie Pflaumenkuchen.
- Es sind 6 Stücke Apfelkuchen mehr als Pflaumenkuchen.

Wie viele Stücke Kuchen sind es von jeder Sorte? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz. Es sind 10 Stück Pflaumenkuchen, 16 Stück Apfelkuchen und 20 Stück Schokoladenkuchen.

Probe: Insgesamt sind es (10 + 16 + 20 =) 46 Stück Kuchen. Es sind doppelt so viele Stück Schokoladenkuchen wie Pflaumenkuchen (20 = 10 · 2) und 6 Stück Apfelkuchen mehr als Pflaumenkuchen (16 = 10 + 6).

Herleitung: Für eine vollständige Lösung musst du aufschreiben, wie du die Lösung gefunden hast. Solche Aufgaben kannst du mit Hilfe einer Tabelle lösen. Da in beiden Angaben Pflaumenkuchen eine Rolle spielt, kannst du systematisch probieren, ob es bei Erfüllung beider Bedingungen insgesamt 46 Stück Kuchen sind.

Stück Pflaumen-kuchen	Stück Schokoladen-kuchen	Stück Apfel-Kuchen	Gesamtzahl aller Kuchenstücke	Vergleich mit 46
8	2 · 8 = 16	8 + 6 = 14	8 + 16 + 14 = 38	38 < 46
9	2 · 9 = 18	9 + 6 = 15	9 + 18 + 15 = 42	42 < 46
10	**2 · 10 = 20**	**10 + 6 = 16**	**10 + 20 + 16 = 46**	**46 = 46**
11	2 · 11 = 22	11 + 6 = 17	11 + 22 + 17 = 50	50 > 46

Nur wenn es 10 Stück Pflaumenkuchen sind, werden alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Eine zusätzliche Probe ist nicht erforderlich, weil sie in der Tabelle enthalten ist.

Lösungsvariante: Nimm zunächst die 6 Stück Apfelkuchen weg, so sind es noch 40 Stück Kuchen. Diese 40 Stück kannst du nun in vier Teile aufteilen: 2 Teile mit Schokoladenkuchen, 1 Teil mit Pflaumenkuchen und 1 Teil mit Apfelkuchen. Somit sind in jeden Teil genau (40 : 4 =) 10 Stück. Nun musst du nur noch die zusätzlichen 6 Stück Kuchen zum Apfelkuchen dazurechnen und du findest die Lösung.

Lösungsvariante: Du kannst die Lösung auch finden, wenn du eine Gleichung aufstellst. Wenn du die Stückzahl jeder Kuchensorte mit den Anfangsbuchstaben abkürzt, so findest du folgende Gleichungen:

$$S = 2 \cdot P$$
$$A = P + 6$$
$$S + A + P = 46$$

Nun kannst du in der dritten Gleichung die beiden anderen Gleichungen einsetzen. So erhältst du eine Gleichung, in der nur noch die Variabel P vorkommt:

$$S + A + P = (2 \cdot P) + (P + 6) + P = 46$$

Es ist sicherlich nicht schwer, im mittleren Teil zusammenzufassen und dann den richtigen Wert für P zu finden:

$4 \cdot P + 6 = 46, \qquad \text{also} \quad P = 10.$

Wenn du diesen Lösungsweg gewählt hast, darfst du die Probe nicht vergessen.

****

Aufgabe 2a). Herr Raute hängt im Garten Lampions in einer Reihe auf. Er hat vier rote Lampions, zwei grüne Lampions und einen blauen Lampion.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Herr Raute für die Reihenfolge der Farben, wenn er links mit einem roten Lampion beginnt und nirgends zwei Lampions gleicher Farbe nebeneinander hängen?

Aufgabe 2b). Leider ist ein roter Lampion kaputt gegangen. Herr Raute findet noch einen grünen Lampion, so dass er wieder 7 Lampions aufhängen kann.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten für die Reihenfolgen der Farben hat Herr Raute nun, wenn er links wieder mit einem roten Lampion beginnt und nirgends zwei Lampions gleicher Farbe nebeneinander hängen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz. Herr Raute hat 3 Möglichkeiten, die 7 Lampions entsprechend den Bedingungen aufzuhängen.

Herleitung: Verwende für das Aufschreiben der Möglichkeiten zum Beispiel die Anfangsbuchstaben der Farben.

Herr Raute stellt fest, dass er die 4 roten Lampions auf Lücke hängen muss, also zwischen zwei roten Lampions immer eine Stelle frei lassen muss.

Stelle	1	2	3	4	5	6	7
Möglichkeit	R	?	R	?	R	?	R

Wäre zwischen zwei roten Lampions eine größere Lücke, hingen an anderer Stelle zwei rote Lampions direkt nebeneinander.

Nun fällt es dir nicht schwer, alle Möglichkeiten aufzuschreiben.

Stelle	1	2	3	4	5	6	7
Möglichkeit 1	R	B	R	G	R	G	R
Möglichkeit 2	R	G	R	B	R	G	R
Möglichkeit 3	R	G	R	G	R	B	R

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz. Herr Raute hat nun 8 Möglichkeiten, die 7 Lampions entsprechend den Bedingungen aufzuhängen.

Herleitung: Da die Anzahl der roten und grünen Lampions gleich groß ist, spielt der blaue Lampion sicher eine besondere Rolle. Wenn Herr Raute ihn an die zweite Stelle hängt (an der ersten Stelle hängt ja schon ein roter Lampion), muss an dritter Stelle ein grüner Lampion hängen, damit nicht zwei grüne Lampions nebeneinander hängen (Möglichkeit 1).

Will Herr Raute den blauen Lampion an dritte Stelle hängen, muss an zweiter Stelle ein grüner Lampion hängen. Nun gibt es zwei Möglichkeiten (2 und 3), die Reihe fortzusetzen, entweder an vierter Stelle ein roter Lampion oder an vierter Stelle ein grüner Lampion. Die danach folgenden Auswahlen sind damit bereits festgelegt.

Nun findest du auch die anderen Möglichkeiten, die du in einer Tabelle zusammenträgst.

Stelle	1	2	3	4	5	6	7
Möglichkeit 1	R	B	G	R	G	R	G
Möglichkeit 2	R	G	B	R	G	R	G
Möglichkeit 3	R	G	B	G	R	G	R
Möglichkeit 4	R	G	R	B	G	R	G
Möglichkeit 5	R	G	R	G	B	G	R
Möglichkeit 6	R	G	R	G	B	R	G
Möglichkeit 7	R	G	R	G	R	B	G
Möglichkeit 8	R	G	R	G	R	G	B

****

Aufgabe 3. Alle hoffen auf schönes Wetter mit warmen Temperaturen.

- Frau Dreieck erinnert sich: „Gestern stand in der Zeitung, dass es heute zwischen 24 und 26 Grad werden soll."
- Kreisa erzählt: „Ich habe gerade auf das Thermometer im Garten geschaut, es sind schon 25 Grad - da wird es noch wärmer werden."
- Herr Raute ergänzt; „Ich habe heute früh im Internet gelesen, dass es sogar 27 bis 29 Grad werden sollen."
- Quadrato zweifelt: „Es wird bestimmt nicht wärmer als 26 Grad."

Frau Dreieck behauptet, dass nicht alle Aussagen richtig sein können. Ist es dir auch aufgefallen? Welche Aussage passt nicht zu den drei anderen Aussagen?

Wie warm wird es werden, wenn die drei anderen Aussagen alle richtig sind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz. Trage die Angaben der vier Familienmitglieder in eine Tabelle ein:

	23 Grad	24 Grad	25 Grad	26 Grad	27 Grad	28 Grad	29 Grad
Frau Dreieck		✓	✓	✓			
Kreisa				✓	✓	✓	✓
Herr Raute					✓	✓	✓
Quadrato	✓	✓	✓	✓			

Die Aussage von Herrn Raute passt nicht zu der von Frau Dreieck und der von Quadrato. Außer Herr Raute ist bei allen anderen die Temperatur 26 Grad möglich. Wenn deren Angaben richtig sind, wird es also 26 Grad warm.

****

Aufgabe 4. Kreisa und Quadrato gestalteten vor zwei Tagen Einladungen für das Gartenfest. Kreisa erinnert sich, dass sie im Vorjahr 10 Einladungen bastelte und dafür 30 min benötigte. Quadrato hatte in 20 min nur 4 Einladungen geschafft. Dieses Jahr wollten sie gemeinsam 20 Einladungen herstellen.

Wenn wieder jeder so lange benötigt wie im Vorjahr – um wie viel Uhr mussten sie spätestens beginnen, damit sie ab 15:00 Uhr die 20 Einladungen in der Nachbarschaft verteilen konnten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz. Kreisa und Quadrato mussten um 14:21 Uhr beginnen, damit sie gemeinsam bis 15:00 Uhr 20 Einladungen schafften.

Herleitung: Wenn Kreisa im Vorjahr für 10 Einladungen 30 min benötigte, konnte sie eine Einladung in 3 min gestalten. Wenn Quadrato in 20 min 4 Einladungen schaffte, benötigte er für eine Einladung 5 min.

Zusammen schaffen sie also dieses Jahr in 30 min 16 Einladungen, nämlich 10 von Kreisa und 6 von Quadrato. Nun müssen sie noch 4 Einladungen gestalten.

– Bastelt Kreisa allein diese 4 Einladungen, benötigt sie (4 · 3 =) 12 Minuten.
– Bastelt Kreisa 3 Einladungen, benötigt sie (3 · 3 =) 9 Minuten. In dieser Zeit hat Quadrato die vierte Einladung auch geschafft.
– Bastelt Kreisa 2 Einladungen, benötigt sie (2 · 3 =) 6 Minuten. Quadrato muss die 2 anderen Einladungen basteln, wofür er aber (2 · 5 =) 10 Minuten benötigt. Deshalb sind die 4 Einladungen erst nach 10 Minuten fertig.
– Bastelt Kreisa nur 1 Einladungen, benötigt sie (1 · 3 =) 3 Minuten. Quadrato muss aber die 3 anderen Einladungen basteln, wofür er aber (3 · 5 =) 15 Minuten benötigt. Deshalb sind die 4 Einladungen erst nach 15 Minuten fertig.
– Bastelt aber Quadrato allein diese 4 Einladungen, benötigt er (4 · 5 =) 20 Minuten.

Diese Erklärung kannst du übersichtlicher in einer Tabelle angeben:

Kreisa: Anzahl Einladungen	4	**3**	2	1	0
Zeit, die Kreisa benötigt	12 min	**9 min**	6 min	3 min	0 min
Quadrato: Anzahl Einladungen	0	**1**	2	3	4
Zeit, die Quadrato benötigt	0 min	**5 min**	10 min	15 min	20 min
Letzte Einladung fertig nach	12 min	**9 min**	10 min	15 min	20 min

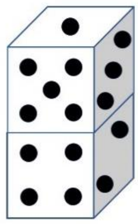
Am schnellsten werden sie also fertig, wenn Kreisa 3 Einladungen und Quadrato 1 Einladung bastelt. Insgesamt sind sie also nach (30 + 9 =) 39 Minuten mit allen 20 Einladungen fertig. Sie müssen spätestens 14:21 Uhr beginnen, um pünktlich um 15:00 Uhr fertig zu sein.

****

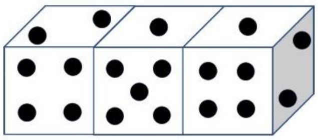
Runde 1 **Würfelspiele** Teil B

Kreisa und Quadrato spielen gern mit Spielwürfeln, auf deren sechs Würfelseiten wie gewöhnlich 1 bis 6 Punkte zu sehen sind. Hast du auch schon bemerkt, dass die Summe der Punkte auf den gegenüberliegenden Würfelseiten immer 7 ergibt?

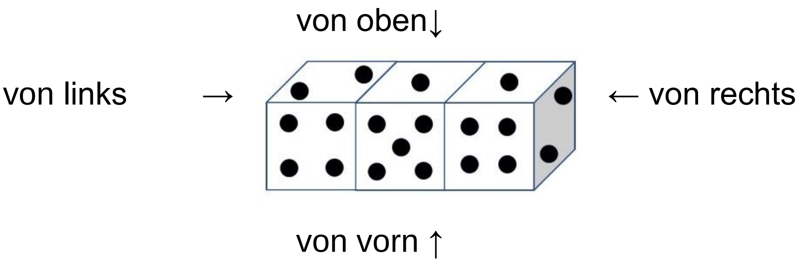
Aufgabe 1a). Quadrato hat auf einem Tisch zwei Würfel wie in der Abbildung übereinandergelegt. Wie viele Punkte sieht er insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten, wenn er um den Tisch herumläuft?



Aufgabe 1b). Nun hat Quadrato auf dem Tisch drei Würfel wie in der Abbildung nebeneinandergelegt. Wie viele Punkte könnte er jetzt insgesamt auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen, wenn er um den Tisch herumläuft?



Lösungshinweise – Vorbemerkungen: Wenn wir um den Tisch herumlaufen, sehen wir von den Würfeln, die auf dem Tisch liegen



Von hinten sehen wir die Punkte, die in dem Beispiel gegenüber von 4 – 5 – 4 liegen. Von unten können wir nicht auf den Würfel schauen.

Der Würfel, von dem wir im Beispiel die Punkte 1 – 2 – 4 sehen, ist der rechte Würfel.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Quadrato sieht 29 Punkte.

Begründung: Da auf zwei gegenüberliegenden Würfelseiten insgesamt 7 Punkte zu sehen sind, sieht Quadrato vom unteren Würfel (7 + 7 =) 14 Punkte. Er sieht vom oberen Würfel (7 + 7 + 1 =) 15 Punkte, weil zweimal gegenüberliegende Seiten und die obere Seite zu sehen sind.

Quadrato kann also insgesamt (14 + 15 =) 29 Punkte sehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Quadrato kann 28 oder 33 Punkte sehen.

Begründung: Da auf zwei gegenüberliegenden Würfelseiten insgesamt 7 Punkte zu sehen sind, sieht Quadrato bei den drei Würfeln vorn und hinten (7 + 7 + 7 =) 21 Punkte. Von oben sind zudem (2 + 1 + 1 =) 4 Punkte zu sehen. Außerdem sieht Quadrato von rechts 2 Punkte. Insgesamt sind das bereits (21 + 4 + 2 =) 27 Punkte.

Da vom linken Würfel oben eine 2 zu sehen ist, kann von links keine 5 zu sehen sein – die liegt unsichtbar auf der unteren Würfelseite gegenüber von 2.
Da vom linken Würfel vorn eine 4 zu sehen ist, kann von links keine 3 zu sehen sein – die liegt auf der hinteren Würfelseite gegenüber von 4.

Deshalb kann von links nur eine 1 oder eine 6 zu sehen sein. Quadrato kann also insgesamt (27 + 1 =) 28 oder (27 + 6 =) 33 Punkte sehen.

****

Aufgabe 2a). Kreisa hat mehrere Würfel. Sie überlegt, wie viele Würfel sie übereinanderlegen muss, um auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 33 Punkte zu sehen? Begründe, warum die erforderliche Anzahl der Würfel eindeutig ist.

Aufgabe 2b). Kreisa überlegt nun, wie viele Würfel sie nebeneinanderlegen muss, um auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt 33 Punkte zu sehen? Kann sie diese Punktzahl mit verschiedener Anzahl von Würfeln erreichen? Wenn ja, gib mindestens zwei verschiedene Möglichkeiten an.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Kreisa kann 2 Würfel so legen, dass sie insgesamt 33 Punkte sieht.

Begründung: Bei Aufgabe 1a) hast du entdeckt, dass vom obersten Würfel 14 Punkte und die von oben sichtbarer Punktzahl zu sehen sind. Von jedem darunter liegenden Würfel sieht Kreisa jeweils 14 Punkte.

Mit einem Würfel sieht Kreisa von vorn, rechts, hinten und links insgesamt 14 Punkte. Da oben höchstens eine 6 zu sehen sein kann, können es nicht mehr als (14 + 6 =) 20 Punkte sein.

Mit zwei Würfeln sieht Kreisa von vorn, rechts, hinten und links insgesamt (2 · 14 =) 28 Punkte. Wenn sie die Würfel so legt, dass oben eine 5 zu sehen ist, so sieht sie insgesamt (28 + 5 =) 33 Punkte.

Mit drei oder mehr Würfeln sieht Kreisa von vorn, rechts, hinten und links mindestens (3 · 14 =) 42 Punkte. Das sind in jedem Fall schon zu viele Punkte, um insgesamt nur 33 Punkte zu sehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Kreisa kann mit 2 oder 3 nebeneinander liegenden Würfeln die Punktsumme 33 sehen.

Herleitung: Mit einem Würfel sieht Kreisa von vorn, rechts, hinten und links insgesamt 14 Punkte. Da von oben höchstens eine 6 zu sehen sein kann, können es nicht mehr als (14 + 6 =) 20 Punkte sein.

Mit zwei Würfeln sieht Kreisa von vorn und hinten insgesamt (2 · 7 =) 14 Punkte. Wenn sie den rechten Würfel so legt, dass von oben ein 6 und von rechts ein 5 zu sehen sind, sieht sie schon insgesamt (14 + 6 + 5 =) 25 Punkte. Wenn sie den linken Würfel nun noch so legt, dass von oben ein 6 und von links ein 2 zu sehen sind, sieht sie insgesamt (25 + 6 + 2 =) 33 Punkte.

Mit drei Würfeln sieht Kreisa von vorn und hinten insgesamt (3 · 7 =) 21 Punkte. Wenn sie den rechten Würfel so legt, dass oben ein 4 und rechts ein 2 zu sehen sind, sieht sie schon insgesamt (21 + 4 + 2 =) 27 Punkte. Wenn sie den linken Würfel so legt, dass ebenfalls von oben ein 4 und von links ein 2 zu sehen sind, sieht insgesamt (27 + 4 + 2 =) 33 Punkte.

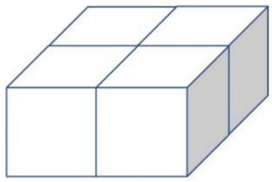
Mit vier Würfeln sieht Kreisa von vorn und hinten insgesamt (4 · 7 =) 28 Punkte. Wenn sie den rechten Würfel so legt, dass oben ein 2 und rechts ein 1 zu sehen sind, sieht sie bereits insgesamt (28 + 2 + 1 =) 31 Punkte. Es ist aber nicht möglich, den linken Würfel so zu legen, dass von oben und von links nur insgesamt 2 Punkte zu sehen sind.

Mit fünf oder mehr Würfeln sieht Kreisa von vorn und hinten bereits mindestens (5 · 7 =) 35 Punkte, also mehr als 33.

Kreisa kann mit zwei oder mit drei nebeneinander liegenden Würfeln die Punktzahl 33 erreichen.

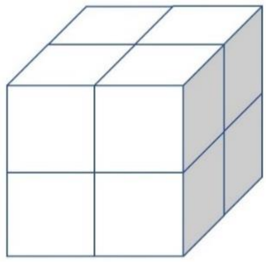
Hinweis: Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Würfel zu legen. Probiere es einfach mit richtigen Spielwürfel aus. Dabei stellst du fest, dass es bei drei Würfeln zum Beispiel nicht möglich ist, den linken Würfel noch passend zu legen, wenn vom rechten Würfel von oben 3 und von rechts 2 zu sehen sind.

****



Aufgabe 3a. Quadrato legt vier Würfel wie in der Abbildung auf den Tisch. Wie groß ist die größte Summe, die er auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen kann? Wie groß ist die kleinste Summe?

Aufgabe 3b. Kreisa legt acht Würfel wie in der Abbildung auf den Tisch, vier in der unteren Ebene und vier in der oberen Ebene. Wie groß ist nun die größte Summe, die sie auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen kann? Wie groß ist die kleinste Summe?



Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz. Die größte Summe, die Quadrato auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen kann, beträgt 60. Als kleinste Summe ist 24 möglich.

Begründung: Es ist möglich, einen Würfel so zu drehen, dass

- von oben eine 6 zu sehen ist
- von vorn (oder hinten) eine 5 zu sehen ist,
- von rechts (oder von links) eine 4 zu sehen ist.

Von jedem der vier Würfel sind dann (6 + 5 + 4 =) 15 Punkte zu sehen, also insgesamt (4 · 15 =) 60.

Es ist möglich, einen Würfel so zu drehen, dass

- von oben eine 1 zu sehen ist
- von vorn (oder hinten) eine 2 zu sehen ist,
- von rechts (oder von links) eine 3 zu sehen ist.

Von jedem der vier Würfel sind dann (1 + 2 + 3 =) 6 Punkte zu sehen, also insgesamt (4 · 6 =) 24.

Hinweis: Die Summe der größten und kleinsten Punktsumme beträgt (60 + 24 =) 84. Dies ist aber gerade der Wert, der auf allen vier Würfeln insgesamt zu sehen ist, weil auf jedem Würfel (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =) 21 Punkte zu sehen sind. Da bei der Suche nach der größten Punktsumme von jedem Würfel drei Seiten zu betrachten sind, sind bei der Suche nach der kleinsten Punktsumme die drei anderen Seiten zu betrachten. Deshalb findest du die kleinste Punktsumme auch aus der Differenz (84 – 60 =) 24.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz. Die größte Summe, die Kreisa auf allen sichtbaren Würfelseiten sehen kann, beträgt 104. Die kleinste Summe ist 36.

Begründung: Aus Aufgabe 3a) weißt du schon, dass auf den vier oberen Würfel höchstens 60 Punkt zu sehen sind. Nun kommen noch die Punktzahlen der unteren Würfel hinzu:

Es ist möglich, einen Würfel so zu drehen, dass

- von einer Seite eine 6 zu sehen ist und
- von der danebenliegenden Seite eine 5 zu sehen ist.

Von jedem der vier unteren Würfel sind dann (6 + 5 =) 11 Punkte zu sehen, also insgesamt (4 · 11 =) 44. Zusammen mit den Punkten der vier oberen Würfel sind es insgesamt höchstens (60 + 44 =) 104.

Aus Aufgabe 3a) weißt du aber auch schon, dass auf den vier oberen Würfel mindestens 24 Punkte zu sehen sind. Nun kommen noch die Punktzahlen der unteren Würfel hinzu:

Es ist möglich, einen Würfel so zu drehen, dass

- von einer Seite eine 1 zu sehen ist und

- von der danebenliegenden Seite eine 2 zu sehen ist.

Von jedem der vier unteren Würfel sind dann (1 + 2 =) 3 Punkte zu sehen, also insgesamt (4 · 3 =) 12. Zusammen mit den Punkten der vier oberen Würfel sind es insgesamt mindestens (24 + 12 =) 36.

****

Runde 2 Das Gartenfest Teil A

Aufgabe 1. Während des Gartenfestes fanden drei Spielrunden statt. Die Kinder konnten dabei Punkte sammeln. In jeder Runde gab es maximal 20 Punkte. Am Ende wurden die Punkte addiert und so der Gewinner mit den meisten Punkten ermittelt.

> In der ersten Runde erreichte Kreisa drei Punkte mehr als Quadrato.
> In der zweiten Runde konnte Quadrato einen Punkt weniger erhalten, als er schon in der ersten Runde schaffte. Kreisa erhielt 6 Punkte.
> In der dritten Runde lief es für beide gut – Kreisa erreichte so viele Punkte wie in beiden vorherigen Runden zusammen und Quadrato schaffte sogar 2 Punkte mehr als Kreisa.

Wie viele Punkte sammelten Kreisa und Quadrato, wenn bekannt ist, dass Quadrato am Ende mehr Punkte als Kreisa hatte? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Quadrato sammelte in drei Runden 37 Punkte, Kreisa sammelte 36 Punkte.

Probe: Wenn Kreisa insgesamt 36 Punkte sammelte und in der 3. Runde so viel Punkte erhielt wie in der 1. und 2. Runde zusammen, erhielt sie in der 3. Runde (36 : 2 =) 18 Punkte. Weil sie in der 2. Runde 6 Punkte erhielt, schaffte sie in der 1. Runde (18 – 6 =) 12 Punkte.

Quadrato erhielt in der 1. Runde drei Punkte weniger als Kreisa, also (12 – 3 =) 9 Punkte. In der 2. Runde erreichte Quadrato einen Punkt weniger als in der 1. Runde, also (9 – 1 =) 8 Punkte. Schließlich schaffte Quadrato in der 3. Runde 2 Punkte mehr als Kreisa, also (18 + 2 =) 20 Punkte. Insgesamt sammelte Quadrato (9 + 8 + 20 =) 37 Punkte.

Quadrato sammelte damit nach drei Runden mehr Punkte als Kreisa.

Hinweis: Für eine vollständige Lösung musst zu aufschreiben, wie du das Ergebnis gefunden hast. Auch wenn du auf einem anderen Zettel probiert hast – zeige, wie du probiert hast. Wenn du gleich beim ersten Versuch das richtige Ergebnis gefunden hast, genügt es nicht, nur den Antwortsatz zu schreiben, sondern führe eine Probe durch.

Herleitung: Probieren ist eine geeignete Möglichkeit, für solche Aufgaben die Lösung zu finden. Wichtig ist jedoch, systematisch zu probieren, um keine Lösung zu übersehen. Übersichtlich gelingt es mit einer Tabelle: Wenn du die Punktzahl für die 1. Runde (kurz 1. R) für Quadrato kennst, kannst du den gesamten Spielverlauf ausrechnen. Deshalb kannst du für jede Möglichkeit überprüfen, ob Quadrato mehr Punkte als Kreisa sammelte und in keiner Runde die maximale Punktzahl 20 überschritten wurde:

Quadrato 1. R	Kreisa 1. R	Quadrato 2. R	Kreisa 2. R	Kreisa 3. R	Quadrato 3. R	Quadrato gesamt	Kreisa gesamt
1	1+3=4	1-1=0	6	4+6=10	10+2=12	1+0+12=13	4+6+10=20
2	2+3=5	2-1=1	6	5+6=11	11+2=13	2+1+13=16	5+6+11=22
3	3+3=6	3-1=2	6	6+6=12	12+2=14	3+2+14=19	6+6+12=24

…							
7	7+3=10	7-1=6	6	10+6=16	16+2=18	7+6+18=31	10+6+16=32
8	8+3=11	8-1=7	6	11+6=17	17+2=19	8+7+19=34	11+6+17=34
9	**9+3=12**	**9-1=8**	**6**	**12+6=18**	**18+2=20**	**9+8+20=37**	**12+6+18=36**
10	10+3=13	10-1=9	6	13+6=19	19+2=21>20 nicht zulässig		

In der Tabelle erkennen wir: Nur wenn Quadrato in der 1. Runde 9 Punkte erreicht, werden alle Bedingungen erfüllt. Eine zusätzliche Probe ist nicht erforderlich, denn in der Tabelle sind alle Rechenschritte zu sehen.

Lösungsvariante: Möglicherweise errätst du gleich, dass Quadrato in der 3. Runde 20 Punkte schaffte, weil in der Aufgabenstellung auf diese Maximalzahl hingewiesen wird. Wenn du nun aufschreibst, wie du die Punkte aller Runden berechnest, sind alle Rechenschritte für eine Probe enthalten

Lösungsvariante: Kreisa hat nach der 1. Runde 3 Punkte Vorsprung. In der 3. Runde verliert sie 2 Punkte gegenüber Quadrato, hat also nur noch 1 Punkt Vorsprung. Damit Quadrato insgesamt gewinnt, muss er in der 2. Runde mindestens 2 Punkte mehr als Kreisa erreichen. Du kannst also mit der Annahme, dass Quadrato in der 2. Runde (6 + 2 =) 8 Punkte erhielt, das systematische Probieren beginnen.

Lösungsvariante: Anstelle einer Tabelle kannst du die Lösung auch mit Verwendung einer Variablen finden. Wir schreiben zum Beispiel X für die Anzahl der Punkte, die Quadrato in der 1. Runde erreichte. Dann gelten folgende Zusammenhänge:

Erreichte Punktzahl		
	Quadrato	Kreisa
1. Runde	X	$X + 3$
2. Runde	$X – 1$	6
3. Runde	$(X + 9) + 2 = X + 11$	$(X + 3) + 6 = X + 9$
gesamt	$X + (X – 1) + (X + 11) = 3 \cdot X + 10$	$(X + 3) + 6 + (X + 9) = 2 \cdot X + 18$

Aus der Punktzahl für Quadrato in der 3. Runde folgt aufgrund der Angabe zur Maximalpunktzahl $X + 11 \leq 20$. Also finden wir die Einschränkung $X \leq 9$.

Da Quadrato insgesamt mehr Punkte sammelte als Kreisa, folgt aus den Angaben für die Gesamtpunktzahl

$$3 \cdot X + 10 > 2 \cdot X + 18$$

Das bedeutet aber $X > 8$. Insgesamt erhalten wir aus den beiden Abschätzungen $8 < X$ und $X \leq 9$. Also gibt es nur für $X = 9$ eine Lösung. Indem wir diesen Wert anstelle der Variablen in die Tabelle einsetzen, bestätigen wir die Lösung:

Erreichte Punktzahl		
	Quadrato	Kreisa
1. Runde	9	9 + 3 = 12
2. Runde	9 – 1 = 8	6
3. Runde	18 + 2 = 20	12 + 6 = 18
gesamt	9 + 8 + 20 = 37	12 + 6 + 18 = 36

****

Aufgabe 2. Frau Dreieck hatte Kuchen gebacken, 20 Stück Schokoladenkuchen, 16 Stück Apfelkuchen und 10 Stück Pflaumenkuchen. Er hat offenbar gut geschmeckt, denn es wurde alles aufgegessen. Es stellte sich heraus, dass einige Gäste drei Stück Kuchen aßen, von jeder Sorte eins. Die anderen Gäste aßen jeweils zwei Stück verschiedenen Kuchen.

Wie viele Gäste haben Kuchen gegessen? Wie viele Gäste haben Schokoladen- und Pflaumenkuchen gegessen? Hinweis: Frau Dreieck beobachtete, dass die Anzahl der Gäste eine ungerade Zahl war. Gib an, wie du die Lösung gefunden hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Es haben 21 Gäste Kuchen gegessen, darunter 4 Gäste von jeder Sorte ein Stück und 5 Gäste nur Schokoladen- und Pflaumenkuchen.

Probe: Wenn 4 Gäste von jeder Kuchensorte ein Stück und 5 Gäste nur Schokoladen- und Pflaumenkuchen aßen, haben sie zusammen 4 Stück Apfelkuchen, 9 Stück Schokoladenkuchen und 9 Stück Pflaumenkuchen gegessen. Dann sind noch

(20 – 9 =) 11 Stück Schokoladenkuchen (abgekürzt SK),
(16 – 4 =) 12 Stück Apfelkuchen (AK) und
(10 – 9 =) 1 Stück Pflaumenkuchen (PK) übrig.

Diese Kuchenstücke können nun so verteilt werden, dass 11 Gäste nur Schokoladen- und Apfelkuchen und 1 Gast nur Apfel- und Pflaumenkuchen essen. Insgesamt waren es (4 + 5 + 11 + 1 =) 21 Gäste. Diese Zahl ist – wie von Frau Dreieck angegeben – eine ungerade Zahl.

Herleitung: Auch für diese Aufgabe können wir die Lösung durch systematisches Probieren finden. Da es 46 Stück Kuchen sind (also eine gerade Zahl) und die Gäste mit jeweils 2 Stück verschiedenen Kuchen auch insgesamt eine gerade Anzahl von Kuchenstücken aßen, stellen wir fest, dass die Anzahl der Gäste, die 3 Stück Kuchen aßen, auch eine gerade Zahl sein muss.

Anzahl Gäste mit 3 Stück	Verbleibende Kuchenstücke:			Mögliche Verteilung auf Gäste:			Anzahl Gäste
	SK	AK	PK	SK/AK	SK/PK	AK/PK	
2	18	14	8	12	6	2	2+12+6+2 = 22
4	**16**	**12**	**6**	**11**	**5**	**1**	**4+11+5+1 = 21**
6	14	10	4	10	4	0	6+10+4+0 = 20
8	12	8	0	Das ist nicht auf 2 Stück verschiedene Kuchen aufteilbar			

Nur wenn 4 Gäste von jeder Sorte ein Stück aßen, lassen sich die verbleibenden Kuchenstücke mit je zwei verschiedenen Kuchenstücken aufteilen, so dass insgesamt 21 Gäste Kuchen aßen.

Lösungsvariante: Wir können aber auch die Tabelle mit der größtmöglichen Anzahl von Gästen mit 3 Stück verschiedenen Kuchen beginnen. Da es nur 10 Stück Pflaumenkuchen waren, kann diese Anzahl nicht größer als 10 sein.

Anzahl Gäste mit 3 Stück	Verbleibende Kuchenstücke:			Mögliche Verteilung auf Gäste:			Anzahl Gäste
	SK	AK	PK	SK/AK	SK/PK	AK/PK	
10	10	6	0	Das ist nicht auf 2 Stück verschiedene Kuchen aufteilbar			
8	12	8	0	Das ist nicht auf 2 Stück verschiedene Kuchen aufteilbar			
6	14	10	4	10	4	0	6+10+4+0 = 20
4	**16**	**12**	**6**	**11**	**5**	**1**	**4+11+5+1 = 21**
2	18	14	8	12	6	2	2+12+6+2 = 22

Lösungsvariante: Du kannst aber auch verschiedenfarbige Spielsteine oder Perlen oder selbst gebastelte Kuchensymbole verwenden, um auszuprobieren, welche Verteilungen von 46 Gegenständen möglich ist. Schreibe dabei auf, wie du probiert hast.

****

Aufgabe 3. Viele Gäste brachten Lampions mit. So leuchteten am Abend rote, grüne, blaue und orange Lampions. Familie Geometrie schätzte die Anzahlen:

> Frau Dreieck sagte: „Es sind mehr rote als orange Lampions."
> Kreisa ergänzte: „Es sind mehr grüne als blaue Lampions."
> Quadrato meinte: „Es sind mehr orange als grüne Lampions."
> Herr Raute behauptete: „Es sind mehr blaue als rote Lampions."

Nach einer Weile wurde Kreisa stutzig: „Unsere Aussagen können aber nicht gleichzeitig alle richtig sein." Was ist Kreisa aufgefallen?

Kreisa hat gezählt und festgestellt, dass die meisten Lampions grün waren. Wer hat sich also verschätzt, wenn die anderen drei Aussagen alle richtig waren? Korrigiere die falsche Aussage und ermittle die Reihenfolge der Anzahlen aller farbigen Lampions. Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadratos Aussage muss zu „Es sind mehr grüne als orange Lampions" korrigiert werden. Die meisten Lampions sind grün, dann blau, dann rot und am wenigsten orange.

Hinweis: Wir schreiben das Zeichen „>" für die Aussage „mehr … als …". Damit bedeutet die Schreibweise „Rot > Orange" das gleiche wie „Es sind mehr rote als orange Lampions".

Begründung: Nehmen wir an, dass alle Aussagen wahr sind.

- Wir betrachten zuerst die Aussage von Frau Dreieck, die die Anzahl der roten und orangen Lampions vergleicht (Rot > Orange).
- Wir schließen die Aussage von Quadrato an, weil er die Anzahlen der orangen und grünen Lampions vergleicht (Orange > Grün).
- Nun können wir die Aussage von Kreisa betrachten, weil sie die Anzahlen der grünen und blauen Lampions vergleicht (Grün > Blau).
- Schließlich passt die Aussage von Herrn Raute, weil er die Anzahlen der blauen und roten Lampions vergleicht (Blau > Rot).

Auf diese Weise erfahren wir, dass die roten Lampions sowohl die größte Anzahl (ganz links) als auch die kleinste Anzahl (ganz rechts) sind. Das kann aber nicht sein!

Frau Dreieck		Quadrato		Kreisa		Herr Raute		
Rot	>	Orange	>	Grün	>	Blau	>	Rot

Obwohl damit bereits nachgewiesen ist, dass nicht alle Aussagen richtig sein können, kannst du diese Überlegung auch mit jeder der anderen Personen beginnen:

Kreisa		Herr Raute		Frau Dreieck		Quadrato		
Grün	>	Blau	>	Rot	>	Orange	>	Grün
Quadrato		Kreisa		Herr Raute		Frau Dreieck		
Orange	>	Grün	>	Blau	>	Rot	>	Orange

Herr Raute		Frau Dreieck		Quadrato		Kreisa		
Blau	>	Rot	>	Orange	>	Grün	>	Blau

In jeder Zeile der Tabelle steht eine Farbe sowohl ganz links (die größte Anzahl) als auch ganz rechts (die kleinste Anzahl). Das ist nicht möglich!

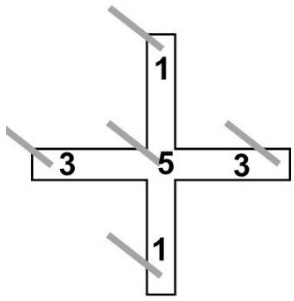
Da Kreisa durch Zählen festgestellt hat, dass die meisten Lampions grün waren, können es nicht mehr orange als grüne Lampions sein. Quadratos Aussage ist also falsch. Wir ordnen die Reihenfolge und beginnen mit der Aussage von Kreisa:

Kreisa		Herr Raute		Frau Dreieck		
Grün	>	Blau	>	Rot	>	Orange

Somit ist die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Die korrigierte Aussage von Quadrato passt dazu, denn es sind wirklich mehr grüne als orange Lampions.

****

Aufgabe 4. Familie Geometrie spielte zum Gartenfest „Ringe werfen“. Jeder konnte drei Ringe auf die Haken des abgebildeten Kreuzes werfen. Blieb ein Ring an einem der Haken hängen, gab es die angegebene Punktzahl 1, 3 oder 5. Es durften mehrere Ringe an einem Haken hängen. Jeder durfte so lange werfen, bis die drei Ringe auf einem der Haken hingen.



Kreisa gewann. Frau Dreieck hatte mehr Punkte als Quadrato und Herr Raute zusammen. Quadrato hatte mehr als vier Punkte Vorsprung vor Herrn Raute. Wie viele Punkte hatte jeder erreicht, wenn jeder eine verschiedene Punktzahl hatte, so dass die Reihenfolge eindeutig feststand?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Herr Raute schaffte 3 Punkte, Quadrato erreichte 9 Punkte, Frau Dreieck kam auf 13 Punkte und Kreisa gewann mit 15 Punkten.

Probe: Kreisa hat die meisten Punkte. Quadrato hat 6 Punkte Vorsprung vor Herrn Raute, also mehr als 4 Punkte. Frau Dreieck hat mehr Punkte als Quadrato und Herr Raute zusammen (13 > 3 + 9).

Herleitung: Wir schreiben zuerst auf, wie viele Punkte mit drei Ringen erreicht werden können:

Anzahl 1 Punkt	Anzahl 3 Punkte	Anzahl 5 Punkte	Gesamt
3	0	0	3
2	1	0	5
2	0	1	7
1	2	0	7
1	1	1	9
1	0	2	11
0	3	0	9
0	2	1	11
0	1	2	13
0	0	3	15

Als Ergebnis kann jeder nur eine ungerade Punktzahl zwischen 3 und 15 erreichen.

Nun ermitteln wir die Reihenfolge:

- Kreisa gewann, sie hatte damit die höchste Punktzahl.
- Frau Dreieck hatte mehr Punkte als Quadrato und Herr Raute zusammen, also mehr als Quadrato und mehr als Herr Raute. Deshalb wurde Frau Dreieck Zweite.
- Quadrato hatte mehr als vier Punkte Vorsprung vor Herrn Raute. Er wurde also Dritter.
- Damit war Herr Raute der Letzte.

Nun wollen wir die konkreten Punktzahlen ermitteln.

- Wir nehmen an, Herr Raute hat 3 Punkte erreicht (weniger ist nicht möglich).
- Da Quadrato mehr als 4 Punkte Vorsprung hatte (also mindestens 5 Punkte Vorsprung hatte), hat er mindestens (3 + 5 =) 8 Punkte erreicht. Das geht nur, wenn er 9 Punkte oder mehr erreicht hat.
- Wenn Quadrato 9 Punkte erreicht hat, so hat Frau Dreieck mehr als (3 + 9 =) 12 Punkte erreicht. Das geht nur, wenn sie mindestens 13 Punkte erreicht hat.
- Kreisa gewann, wenn sie 15 Punkte erreichte.

Damit haben wir ein Ergebnis gefunden: Wenn Herr Raute 3 Punkte, Quadrato 9 Punkte, Frau Dreieck 13 Punkte und Kreisa 15 Punkte erreichten, sind alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Wir untersuchen nun aber noch, ob es weitere Möglichkeiten für die erreichten Punktzahlen gibt.

Hat Herr Raute 3 Punkte erreicht, könnte Quadrato auch 11 Punkte erreicht haben, um mehr als 4 Punkte Vorsprung zu haben. Dann müsste Frau Dreieck mindestens (3 + 11 =) 14 Punkte, erreicht haben. Das geht aber nur, wenn sie mindestens 15 Punkte erreicht hat. Dann hat aber Kreisa nicht gewonnen, da es nicht möglich ist, mehr als 15 Punkte zu erreichen.

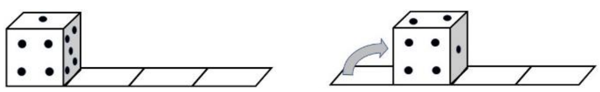
Hätte Herr Raute aber 5 Punkte erreicht, muss Quadrato 11 Punkte oder mehr erreicht haben, um mehr als 4 Punkte Vorsprung zu haben. Dann müsste Frau Dreieck mindestens (3 + 11 =) 14 Punkte, erreicht haben. Dies ist aber nicht möglich, wie eben schon gesehen.

Also sind keine anderen als die ermittelten Punktzahlen möglich.

****

Runde 2 — Würfel auf Kippstrecken — Teil B

Quadrato spielt mit einem Würfel. Dazu legt er den Würfel auf das linke Feld seiner Kippstrecke und kippt den Würfel über eine Kante, so dass der Würfel nun auf dem zweiten Feld der Kippstrecke liegt. Dann kippt er immer wieder, bis er das Ende der Kippstrecke erreicht. Er notiert jedes Mal, welche Punktzahl von oben zu sehen ist, wenn der Würfel auf einem Feld liegt.



Quadrato zeichnete ein lange Kippstrecke mit vielen Felder nebeneinander (hier nur sechs Felder dargestellt).

Quadrato hat den Würfel mit 1 nach oben auf das linke Feld seiner Kippstrecke gelegt und bereits zweimal gekippt. Er notierte die jeweils oben liegenden Zahlen.

1	**2**	**6**			

Aufgabe 1a. Welche Zahl erscheint oben, wenn er den Würfel noch einmal kippt?

Aufgabe 1b. Wie oft muss er den Würfel weiter kippen, um in der Summe aller notierten Zahlen 37 zu erhalten?

Aufgabe 1c. Kann Quadrato den Würfel so oft weiter kippen, dass die Summe aller notierten Zahlen den Wert 47 erreicht? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) – Antwortsatz: Es erscheint die Zahl 5.

Begründung: Weil die Zahl 5 der Zahl 2 gegenüberliegt, erscheint sie ausgehend von 2 nach zweimaligen geradlinigen Kippen oben.

1	**2**	**6**	**5**		

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Quadrato muss den Würfel 7 Mal weiter kippen (oder insgesamt 10 Mal kippen), um in der Summe aller notierten Zahlen 37 zu erhalten.

Begründung: Wir kippen so lange, bis wir die Summe 37 erreichen:

Zahlen auf Kippstrecke	**1**	**2**	**6**	**5**	**1**	**2**	**6**	**5**	**1**	**2**	**6**	
Summe der Zahlen	1	3	9	14	15	17	23	28	29	31	37	
Kippnummer		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

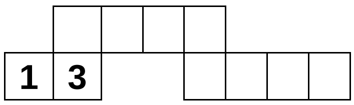
Lösungshinweise zu Aufgabe 1c) – Antwortsatz: Quadrato kann den Würfel nicht so oft kippen, dass die Summe aller notierten Zahlen den Wert 47 erreicht.

Begründung: Wir setzen das Kippen aus Aufgabe 1b) fort. Nach dem 13. Kippen beträgt die Summe 45. Nach dem nächsten Kippen liegt die Zahl 6 oben. Damit erhöht sich die Summe auf 51. Der Wert 47 ist also nicht möglich.

Zahlen auf Kippstrecke	**1**	**2**	**6**	**5**	**1**	**2**	**6**	**5**	**1**	**2**	**6**	**5**	**1**	**2**	**6**
Kippnummer		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Summe der Zahlen	1	3	9	14	15	17	23	28	29	31	37	42	43	45	51

****

Aufgabe 2a. Quadrato hat jetzt in seine Kippstrecke einen Umweg eingezeichnet.

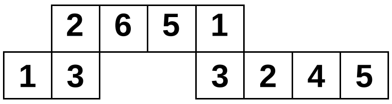


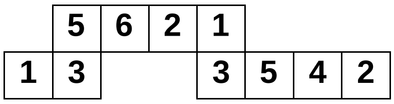
Wie groß ist die Summe aller notierten Zahlen, wenn Quadrato das rechte Feld dieser Kippfläche erreicht und auch die Punktzahl an dieser Position eingetragen hat?

Aufgabe 2b. Kann Quadrato seine Kippstrecke nach rechts geradlinig verlängern, so dass die Summe aller notierten Zahlen genau 50 beträgt? Wenn ja, zeichne die Verlängerung und trage alle Zahlen in die Kippstrecke ein. Andernfalls begründe, warum es Quadrato nicht gelingen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Die Summe aller notierten Zahlen beträgt 32.

Begründung: Es gibt Würfel, bei denen nach dem Kippen nach oben die Zahl 2 zu sehen ist. Dann sieht die vollständige Kippstrecke wie in der linken Abbildung aus. Aber es gibt auch Würfel, bei denen nach dem Kippen nach oben die Zahl 5 zu sehen ist. Dann sieht die vollständige Kippstrecke wie in der rechten Abbildung aus.





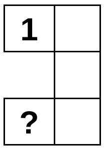
Die Summe aller Zahlen auf der Kippfläche ist in beiden Fällen 32. Sowohl auf den 4 oberen Feldern (2-6-5-1 bzw. 5-6-2-1) als auch auf den 4 rechten Feldern (3-2-4-5 bzw. 3-5-4-2) ergeben sich jeweils die Teilsummen 14. Somit ergibt die Summe auf den 10 Feldern (4 + 14 + 14 =) 32.

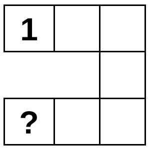
Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Quadrato kann bei verlängerter Kippstrecke nicht die Summe 50 erhalten.

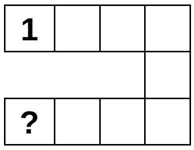
Begründung: Kippst du noch viermal, kommen weitere 14 Punkte hinzu, also (32 + 14 =) 46. Nach nochmaligen Kippen liegt wieder die Zahl 3 oben und die Gesamtsumme beträgt (46 + 3 =) 49. Beim nächsten Kippen kann aber keine 1 erscheinen.

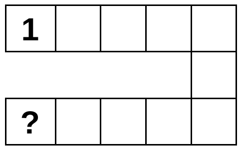
****

Aufgabe 3a. Quadrato zeichnete nun Kippstrecken, die zur Ausgangslinie zurückkehren:









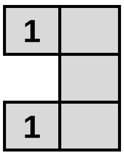
Welche Zahlen sind jeweils auf den Feldern mit „?“ zu sehen, wenn Quadrato vollständig den Würfel über die Kippstrecken gekippt hat?

Aufgabe 3b. Quadrato versucht Kippstrecken zu zeichnen, die zur Ausgangslinie zurückkehren und bei denen am Ende der Kippstrecke eine vorher festgelegte Zahl oben liegt. Dabei darf er mehrere Ecken legen, wenn dies erforderlich ist.

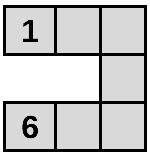
Hilf ihm und zeichne eine Kippstrecke, auf der er mit 1 startet und am Ende 2 oben liegt. Erkläre, wie der Würfel am Anfang liegen muss.

Findest du auch Kippstrecken, bei denen er mit 1 startet und am Ende die Zahlen 3, 4 oder 5 oben liegen? Zeichne solche Kippstrecken und trage alle Zahlen ein.

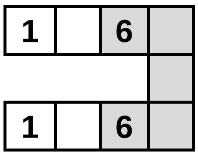
Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Am Ende der Kippstrecken liegen die Zahl 1 (Fälle 1 und 3) und die Zahl 6 (Fälle 2 und 4) oben.



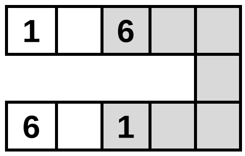
Fall 1



Fall 2



Fall 3



Fall 4

Begründung:

- Fall 1: Nach dem Kippen nach rechts ist die 1 an der rechten Seite zu sehen. Beim Kippen nach unten bleibt die 1 an der rechten Seite. Nach dem Kippen nach links erscheint die 1 wieder oben. Im Fall 1 wird also die Startzahl am Ende wieder zu sehen sein.

- Fall 2: Nach zweimaligen Kippen nach rechts ist oben die 6 zu sehen, weil sie der 1 gegenüberliegt. Nach zweimaligen Kippen nach unten ist oben die 1 zu sehen, weil sie der 6 gegenüberliegt. Schließlich ist nach zweimaligen Kippen nach links oben die 6 zu sehen, weil sie der 1 gegenüberliegt. Im Fall 2 wird also die der Startzahl gegenüberliegende Zahl am Ende zu sehen sein.

- Fall 3: Nach zweimaligen Kippen nach rechts ist die 6 oben zu sehen. Weiteres Kippen führt wie im Fall 1 dazu, dass in der unteren Reihe die 6 zu sehen ist. Nach zweimaligen Kippen nach links ist oben wieder die 1 zu sehen.

- Fall 4: Nach zweimaligen Kippen nach rechts ist die 6 oben zu sehen. Weiteres Kippen führt wie im Fall 2 dazu, dass in der unteren Reihe die 1 zu sehen ist. Nach zweimaligen Kippen nach links ist oben wieder die 6 zu sehen.

Anstelle dieser Erklärungen genügt es für die Lösungsdarstellung, eine komplett ausgefüllte Kippstrecke zu zeigen. Dafür gibt es viele Möglichkeiten, zum Beispiel:

1	**2**
	3
1	**5**

Fall 1

1	**2**	**6**
		3
6	**2**	**1**

Fall 2

1	**2**	**6**	**5**
			3
1	**5**	**6**	**2**

Fall 3

1	**2**	**6**	**5**	**1**
				3
6	**2**	**1**	**5**	**6**

Fall 4

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Es gibt viele Möglichkeiten, solche Kippstrecken zu zeichnen.

1	**2**	
		6
		5
5		**2**

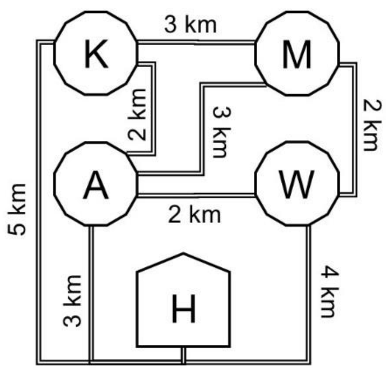
Begründung: Wenn nach dem ersten Kippen oben die Zahl 2 zu sehen ist, ist nach dem Kippen um die Ecke oben die Zahl 5 zu sehen. Nach zweimaligen Kippen nach unten ist dann wieder die Zahl 2 zu sehen. Nach zweimaligen Kippen nach links die Zahl 5 oben zu sehen.

- Wenn zu Beginn (wenn die Zahl 1 oben liegt) von links die Zahl 2 zu sehen ist, liegt am Ende der Kippstrecke die Zahl 5 oben.
- Wenn zu Beginn von links die Zahl 3 zu sehen ist, liegt am Ende der Kippstrecke die Zahl 4 oben.
- Wenn zu Beginn von links die Zahl 4 zu sehen ist, liegt am Ende der Kippstrecke die Zahl 3 oben.
- Wenn zu Beginn von links die Zahl 5 zu sehen ist, liegt am Ende der Kippstrecke die Zahl 2 oben.

****

Runde 3 — Auf Wanderung — Teil A

Aufgabe 1. Familie Geometrie bereiten sich auf eine Wanderung vor. Auf der skizzierten Wanderkarte sind beliebte Wanderwege mit Aussichtsturm (A), Kirche (K), Museum (M) und Wildgehege (W). eingezeichnet. Herr Raute schlägt vor, die Wanderroute so zu wählen, dass sie von zu Hause (H) starten, jedes der vier Ziele genau einmal erreichen und erst am Abend wieder zu Hause ankommen.



Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Wanderroute auszuwählen, wenn sie nur die in der Skizze angegebenen Wanderwege benutzen? Schreibe alle möglichen Wanderrouten auf!

Auf der Wanderkarte sind die Entfernungen entlang der Wanderwege angegeben. Quadrato meint: „Diese Angaben sind unwichtig. Da wir alle vier Ziele besuchen, ist die Gesamtlänge der Wanderung immer gleich, egal in welcher Reihenfolge wir die Ziele erreichen.“ Was meinst du, stimmt Quadratos Aussage? Wenn seine Aussage richtig ist, begründe es. Wenn diese Aussage aber falsch ist, so schreibe eine möglichst kurze Wanderroute auf und gib an, wie viele Kilometer sie wandern müssen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es gibt 8 verschiedene Wanderrouten. Die kürzesten Routen sind 14 km lang.

Herleitung: Jede Wanderung startet von zu Hause (H). Familie Geometrie hat drei Möglichkeiten, das erste Wanderziel auszuwählen. Nur das Museum können sie nicht auf direktem Weg erreichen.

Möglichkeiten 1) Sie wandern zuerst zum Wildgehege. Dann könnten sie die Wanderung mit diesen Varianten fortsetzen

H – W – M – K – A – H ; H – W – M – A – K – H ; H – W – A – M – K – H

Wir stellen fest: Würden sie von A aus direkt nach K wandern, müssten sie nach M bei einem anderen Wanderziel ein zweites Mal vorbeikommen.

Möglichkeiten 2) Sie wandern zuerst zum Aussichtsturm. Dann könnten sie die Wanderung mit diesen Varianten fortsetzen

H – A – K – M – W – H ; H – A – W – M – K – H

Wir stellen fest: Würden sie von A aus direkt nach M wandern, könnten sie K und W nur erreichen, wenn sie noch einmal bei M oder A vorbeikommen.

Möglichkeiten 3) Sie wandern zuerst zur Kirche. Dann könnten sie die Wanderung mit diesen Varianten fortsetzen

H – K – M – A – W – H ; H – K – M – W – A – H ; H – K – A – M – W – H

Wir stellen fest: Würden sie von A direkt nach W wandern, müssten sie nach M bei einem anderen Wanderziel ein zweites Mal vorbeikommen.

Somit finden wir insgesamt 8 Möglichkeiten, die Wanderroute zu planen.

Lösungsvariante: Wir schreiben alle 24 Möglichkeiten auf, die Reihenfolge der vier Wanderziele festzulegen (siehe Tabelle).

Zuerst streichen wir alle Wanderrouten, bei denen M als erstes Wanderziel oder als letztes Wanderziel erscheint, weil es keinen direkten Weg zwischen H und M gibt (in der Zeile mit X markiert).

Danach streichen wir noch alle Wanderrouten, in denen K und W direkt nebeneinanderstehen, weil es keinen direkten Weg zwischen K und W gibt (in der Zeile mit Y markiert).

Es bleiben 8 Möglichkeiten übrig, die den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

1	H	A	K	M	W	H
X	H	A	K	W	~~M~~	H
Y	H	A	M	~~K~~	~~W~~	H
Y	H	A	M	~~W~~	~~K~~	H

X	H	A	W	K	~~M~~	H
2	H	A	W	M	K	H
3	H	K	A	M	W	H
X	H	K	A	W	~~M~~	H
4	H	K	M	A	W	H
5	H	K	M	W	A	H
X , Y	H	~~K~~	~~W~~	A	~~M~~	H
Y	H	~~K~~	~~W~~	M	A	H
X , Y	H	~~M~~	A	~~K~~	~~W~~	H
X	H	~~M~~	A	~~W~~	~~K~~	H
X	H	~~M~~	K	A	W	H
X	H	~~M~~	K	W	A	H
X	H	~~M~~	W	A	K	H
X	H	~~M~~	W	K	A	H
X	H	W	A	K	~~M~~	H
6	H	W	A	M	K	H
X , Y	H	~~W~~	~~K~~	A	~~M~~	H
Y	H	~~W~~	~~K~~	M	A	H
7	H	W	M	A	K	H
8	H	W	M	K	A	H

Wir berechnen von jeder dieser 8 Wanderroute die Länge:

1	H	A	K	M	W	H	
		3 km	+ 2 km	+ 3 km	+ 2 km	+ 4 km	= 14 km
2	H	A	W	M	K	H	
		3 km	+ 2 km	+ 2 km	+ 3 km	+ 5 km	= 15 km
3	H	K	A	M	W	H	
		5 km	+ 2 km	+ 3 km	+ 2 km	+ 4 km	= 16 km
4	H	K	M	A	W	H	
		5 km	+ 3 km	+ 3 km	+ 2 km	+ 4 km	= 17 km

Die weiteren Wanderrouten entsprechen den anderen Wanderrouten, nur in umgekehrter Richtung. Wir müssen die Längen dieser Routen eigentlich nicht gesondert berechnen. Zur Kontrolle berechnen wir sie dennoch.

5	H	K	M	W	A	H	
		5 km	+ 3 km	+ 2 km	+ 2 km	+ 3 km	= 15 km
6	H	W	A	M	K	H	
		4 km	+ 2 km	+ 3 km	+ 3 km	+ 5 km	= 17 km
7	H	W	M	A	K	H	
		4 km	+ 2 km	+ 3 km	+ 2 km	+ 5 km	= 16 km
8	H	W	M	K	A	H	
		4 km	+ 2 km	+ 3 km	+2 km	+ 3 km	= 14 km

Wir erkennen: Quadratos Aussage ist falsch. Es gibt verschiedene Streckenlängen der Wanderrouten. Die kürzesten Wanderrouten sind Nummer 1 (H – A – K – M – W – H) und Nummer 8 (H – W – M – K – A – H), wobei bei Nummer 8 die Wanderziele in umgekehrter Reihenfolge besucht werden wie bei Nummer 1. Die Streckenlänge beträgt 14 km.

****

Aufgabe 2. In der Nähe des Wildgeheges sehen sie vier große Bäume in einer Reihe nebeneinander stehen. Auf einem Hinweisschild wird erklärt, dass es sich um eine Buche, eine Eiche, eine Kastanie und eine Linde handelt.

> Herr Raute stellt fest: „Die Kastanie steht ganz links."
> Kreisa ergänzt: „Buche und Linde stehen nicht direkt nebeneinander."
> Quadrato sagt: „Die Linde steht weiter links in der Reihe als die Eiche."
> Schließlich meint Frau Dreieck: „Buche und Kastanie stehen direkt nebeneinander."

Wie schon oft bei Familie Geometrie hat sich bei den vier Aussagen ein Fehler eingeschlichen. Begründe, warum nicht alle Aussagen gleichzeitig richtig sein können!

Frau Dreieck bestätigt: „Es stimmt, ganz links steht die Kastanie." Finde eine Aussage, die falsch sein könnte. Korrigiere diese Aussage und prüfe, ob du die Reihenfolge eindeutig ermitteln kannst, wenn nach der Korrektur alle Aussagen wahr sind. Gib die Reihenfolge an!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Wir kürzen die Baumarten mit ihren Anfangsbuchstaben ab: Buche (B), Eiche (E), Kastanie (K) und Linde (L).

Wir wissen von Frau Dreieck, dass K ganz links steht. Die Aussage von Herrn Raute (R) ist also richtig. Wir schreiben alle 6 Möglichkeiten der Reihenfolgen von links nach rechts auf und beginnen immer mit K. Bei jeder Möglichkeit untersuchen wir, ob die Aussagen von Frau Dreieck (D), Kreisa (K) und Quadrato (Q) richtig oder falsch sind.

Nr.	Reihenfolge				Wahre Aussagen	Falsche Aussagen
1	K	B	E	L	D, K	Q
2	K	B	L	E	D, Q	K
3	K	E	B	L		D, K, Q
4	K	E	L	B		D, K, Q
5	K	L	B	E	Q	D, K
6	K	L	E	B	K, Q	D

Bei jeder Reihenfolge sind Aussagen falsch. Es können also nicht alle vier Aussagen gleichzeitig war sein.

Aus der Tabelle erkennen wir aber auch: In den Zeilen 1, 2 und 6 ist nur jeweils eine Aussage falsch. Wenn wir diese Aussage korrigieren, erhalten wir eine Reihenfolge, bei der die drei vorgegebenen Aussagen und die korrigierte Aussage erfüllt ist:

Nr.	Korrigierte Aussage	Reihenfolge				Wahre Aussagen
1	Q: L steht rechts von E	K	B	E	L	R, D, K
2	K: B und L nebeneinander	K	B	L	E	R, D, Q
6	D: K und B nicht nebeneinander	K	L	E	B	R, K, Q

Lösungsvariante: Wir nehmen an, alle Aussagen sind richtig. Wir verwenden zuerst die Aussagen von Herrn Raute, Frau Dreieck und Kreisa:

Aussage von Herrn Raute: K ganz links	K			
Aussage von Frau Dreieck: B neben K	K	B		
Aussage von Kreisa: L nicht neben B, deshalb E neben B	K	B	E	
Es bleibt nur übrig: L ganz rechts. Aber: Aussage von Quadrato: L links von E → das ist falsch!	K	B	E	L

Es können also nicht alle vier Aussagen richtig sein. Es kann sein, dass Quadratos Aussage falsch war. Korrigieren wir sie zu „L steht rechts von E“, so sind alle Aussagen mit der Reihenfolge K B E L erfüllt.

Wir nehmen wieder an, alle Aussagen sind richtig. Wir verwenden zuerst die Aussagen von Herrn Raute, Kreisa und Quadrato:

Aussage von Herrn Raute: K ganz links	K			
Aussage von Kreisa: L nicht neben B (L ganz rechts ergibt die Reihenfolge wie oben)	K	L		B
Aussage von Quadrato: L links von E	K	L	E	B
Aber: Aussage von Frau Dreieck: K neben B → das ist falsch!	K	L	E	B

Es können also nicht alle vier Aussagen richtig sein. Es kann sein, dass Frau Dreiecks Aussage falsch war. Korrigieren wir sie zu „K nicht neben B“, so sind alle Aussagen mit der Reihenfolge K L E B erfüllt.

Wir nehmen wieder an, alle Aussagen sind richtig. Wir verwenden zuerst die Aussagen von Herrn Raute, Frau Dreieck und Quadrato:

Aussage von Herrn Raute: K ganz links	K			
Aussage von Frau Dreieck: B neben K	K	B		
Aussage von Quadrato: L links von E	K	B	L	E
Aber: Aussage von Kreisa: L nicht neben B → gilt nicht	K	B	L	E

Es können also nicht alle vier Aussagen richtig sein. Es kann sein, dass Kreisas Aussage falsch war. Korrigieren wir sie zu „B neben L“, so sind alle Aussagen mit der Reihenfolge K B L E erfüllt.

****

Aufgabe 3. Kurz vorm Aussichtsturm ruhen sich die Wanderer aus. Frau Dreieck holt aus ihrem Rucksack eine Büchse mit vielen kleinen Keksen. Sie sagt zu Quadrato: „Nimm dir den sechsten Teil aus der Büchse und noch 4 Kekse dazu.“ Dann reicht sie die Büchse mit den verbliebenen Keksen an Kreisa: „Nimm dir den vierten Teil aus der Büchse und noch 3 Kekse dazu.“ Danach reicht sie die Büchse mit den noch verbliebenen Keksen an Herrn Raute: „Nimm dir den dritten Teil aus der Büchse und noch 4 Kekse dazu.“ Frau Dreieck nimmt sich die noch verbliebenen Kekse.

Wie viele Kekse könnten am Anfang in der Büchse gewesen sein, damit eine solche Aufteilung erfolgen kann, ohne Kekse teilen zu müssen? Finde eine Anzahl von Keksen, so dass bei dieser Aufteilung alle gleich viele Kekse erhalten. Gib diese Anzahl an. Begründe!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Wenn am Anfang 48 Kekse in der Büchse waren, erhält jeder 12 Kekse. Eine Aufteilung ohne Kekse zu teilen ist immer möglich, wenn am Anfang die Anzahl der Kekse ein Vielfaches von 24 ist.

Probe: Wenn du in der Herleitung für die Lösung nicht die Berechnungen für die Anzahl der Kekse aufgeschrieben hast, ist eine Probe erforderlich.

- Quadrato nimmt sich 48 : 6 + 4 = 8 + 4 = 12 Kekse. Es verbleiben in der Büchse 48 – 12 = 36 Kekse.
- Kreisa nimmt sich 36 : 4 + 3 = 9 + 3 = 12 Kekse. Es verbleiben in der Büchse 36 – 12 = 24 Kekse.

- Herr Raute nimmt sich 24 : 3 + 4 = 8 + 4 = 12 Kekse. Es verbleiben in der Büchse 24 – 12 = 12 Kekse.
- Frau Raute nimmt sich den Rest, also ebenfalls 12 Kekse.

Herleitung: Die Lösung können wir durch systematisches Probieren finden. Dafür raten wir, wie viele Kekse in der Büchse am Anfang waren. Dann ermitteln wir die Anzahl der Kekse, die sich bei Anwendung der Regeln für jeden ergeben. Da Quadrato die Anzahl aller Kekse durch 6 teilen muss, nehmen wir nur durch 6 teilbare Anzahlen. Da wir außerdem eine Lösung suchen, bei der alle die gleiche Anzahl Kekse erhalten, muss die Anzahl aller Kekse auch durch 4 teilbar sein. Wir probieren deshalb mit den Zahlen 12, 24, 36, 48, 60, 72.

Kekse	Quadrato nimmt	es bleiben	Kreisa nimmt	es bleiben	Herr Raute nimmt	es bleiben
12	12:6+4=6	12-6=6	6:4 geht nicht			
24	24:6+4=8	24-8=16	16:4+3=7	16-7=9	9:3+4=7	9-7=2
36	36:6+4=10	36-10=26	26:4 geht nicht			
48	**48:6+4=12**	**48-12=36**	**36:4+3=12**	**36-12=24**	**24:3+4=12**	**24-12=12**
60	60:6+4=14	60-14=46	46:4 geht nicht			
72	72:6+4=16	72-16=56	56:4+3=17	56-17=39	39:3+4=17	39-17=22

Nur wenn in der Büchse am Anfang 48 Kekse waren, erhalten alle die gleiche Anzahl Kekse.

Lösungsvariante: Quadrato teilt die Anzahl der Kekse in 6 Teile. Wir bezeichnen die Anzahl der Kekse eines jeden dieser Teile mit X.

Quadrato nimmt sich einen Teil und noch 4 Kekse. Er nimmt sich also X + 4 Kekse. Es verbleiben in der Büchse 5 Teile, von denen 4 Kekse fehlen, also 5 · X – 4 Kekse. Wenn es möglich ist, dass alle gleich viele Kekse erhalten, müssen in der Büchse dreimal so viele Kekse verbleiben, wie sich Quadrato genommen hat, also

$$3 \cdot (X + 4) = 5 \cdot X - 4.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$12 + 4 = 5 \cdot X - 3 \cdot X, \text{ also } 16 = 2 \cdot X$$

und wir finden X = 8. Folglich müssen am Anfang (6 · 8 =) 48 Kekse in der Büchse gewesen sein. (Probe durchführen!)

Lösungsvariante: Wir können diese Rechnung auch für Herrn Raute ausführen. Da haben sich Quadrato und Kreisa schon Kekse aus der Büchse genommen. Herr Raute teilt die Anzahl der in der Büchse verbliebenen Kekse in 3 Teile. Wir bezeichnen die Anzahl der Kekse eines jeden dieser Teile mit Y.

Herr Raute nimmt sich einen Teil und noch 4 Kekse. Er erhält also Y + 4 Kekse. Es verbleiben in der Büchse 2 Teile, von denen 4 Kekse fehlen, also 2 · Y – 4 Kekse. Wenn es möglich ist, dass alle gleich viele Kekse erhalten, müssen in der Büchse so viele Kekse verbleiben, wie sich Herr Raute genommen hat, also

$$Y + 4 = 2 \cdot Y - 4.$$

Wir formen die Gleichung um

$4 + 4 = 2 \cdot Y - Y$ und finden $Y = 8$.

Bevor Herr Raute Kekse genommen hat, waren also ($3 \cdot 8 =$) 24 Kekse in der Büchse. Er nahm sich ($8 + 4 =$) 12 Kekse. Wenn auch Quadrato und Kreisa je 12 Kekse erhielten, müssen am Anfang ($4 \cdot 12 =$) 48 Kekse in der Büchse gewesen sein. (Probe durchführen!)

****

Aufgabe 4. Am Aussichtsturm angekommen steigen sie die Treppe hinauf und zählen dabei die Stufen. Bis zur ersten Plattform sind es 9 Stufen weniger als von der ersten bis zur zweiten Plattform. Von der zweiten bis zur dritten Plattform sind es so viele Stufen wie bis zur ersten Plattform. Schließlich sind es von der dritten bis zur vierten Plattform eine Stufe weniger als von der ersten bis zur dritten Plattform zusammen. Dort angekommen stöhnt Quadrato: „Das waren bestimmt über 100 Stufen!“ Doch Herr Raute lacht: „Erst wenn noch einmal so viele Stufen wie bis zur ersten Plattform zu steigen wären, sind es über 100!“

Wie viele Stufen hat der Aussichtsturm? Begründe deine Antwort.

***Lösungshinweise zu Aufgabe 4* – Antwortsatz:** Der Aussichtsturm hat 87 Stufen.

Herleitung: Wir können die Lösung durch systematisches Probieren finden und verwenden dafür eine Tabelle. Dazu raten wir die Anzahl der Stufen von der 1. bis zur 2. Plattform und berechnen gemäß den Angaben im Aufgabentext, wie viele Stufen es zwischen den anderen Plattformen sind.

bis 1. Plattform	von 1. bis 2. Plattform	von 2. bis 3. Plattform	von 3. bis 4. Plattform	gesamt	+ bis 1. Plattform
10-9= 1	10	1	10+1-1=10	1+10+1+10=22	22+1=23 <100
11-9= 2	11	2	11+2-1=12	2+11+2+12=27	27+2=29 100
20-9=11	20	11	20+11-1=30	11+20+11+30=72	72+11=83 <100
21-9=12	21	12	21+12-1=32	12+21+12+32=77	77+12=89 <100
22-9=13	22	13	22+13-1=34	13+22+13+34=82	82+13=95 <100
23-9=14	**23**	**14**	**23+14-1=36**	**14+23+14+36=87**	**87+14=101 >100**
24-9=15	**24**	**15**	**24+15-1=38**	**15+24+15+38=92**	**92+15=107 >100**
25-9=16	**25**	**16**	**25+16-1=40**	**16+25+16+40=97**	**97+16=113 >100**
26-9=17	26	17	26+17-1=42	17+26+17+42=102 >100	

Wenn es bis zur ersten Plattform 14 Stufen sind und damit der Turm 87 Stufen hat, ist Aussage von Herrn Raute richtig. Dies gilt auch, wenn es bis zur 1. Plattform 15 oder 16 Stufen sind. Sind es dagegen bis zur 1. Plattform 17 oder mehr Stufen, hätte Quadrato recht und der Turm hätte mehr als 100 Stufen.

Lösungsvariante: Wir können die Aufgabe auch mit einer Variablen lösen.

Wir bezeichnen dafür die Anzahl der Stufen von der 1. bis zur 2. Plattform mit X. Laut Aufgabentext gilt:

- Die Anzahl der Stufen bis zur 1. Plattform beträgt X – 9.
- Die Anzahl der Stufen von der 1. bis zur 2. Plattform beträgt X.
- Die Anzahl der Stufen von der 2. bis zur 3. Plattform beträgt ebenfalls X – 9.
- Die Anzahl der Stufen von der 3. und 4. Plattform ist X + (X – 9) – 1.

Insgesamt beträgt die Anzahl der Stufen des Turms

$$(X - 9) + X + (X - 9) + (X + (X - 9) - 1) = 5 \cdot X - 28.$$

Da Herr Raute der Aussage von Quadrato widerspricht, ist diese Anzahl kleiner als 100, das heißt:

$$5 \cdot X - 28 < 100, \text{ also } 5 \cdot X < 128.$$

Deshalb muss X kleiner als 26 sein, weil $5 \cdot 26 = 130$ bereits größer ist..

Aus Herrn Rautes Hinweis folgt, dass nach weiteren (X – 9) Stufen die 100 überschritten wird, das heißt, es gilt

$$5 \cdot X - 28 + (X - 9) > 100, \text{ also } 6 \cdot X - 37 > 100 \text{ oder } 6 \cdot X > 137.$$

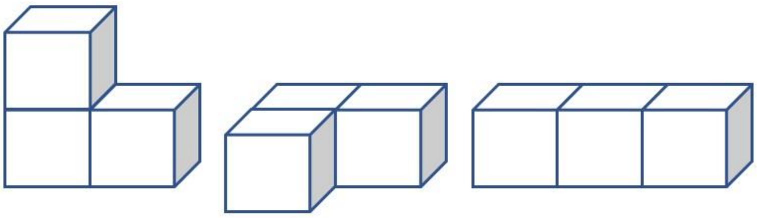
Deshalb muss X größer als 22 sein, weil $6 \cdot 22 = 132$ noch kleiner ist.

Somit können für X die Werte 23, 24 oder 25 Lösung der Aufgabe sein (Probe!)

****

Runde 3 — Würfelkörper — Teil B

Quadrato spielt wieder mit Würfeln. Er setzt sie nebeneinander oder übereinander zu Würfelkörpern zusammen, aber immer so, dass sich dabei Würfelflächen vollständig berühren. Er beginnt mit drei Würfeln und baut drei verschiedene Würfelkörper:



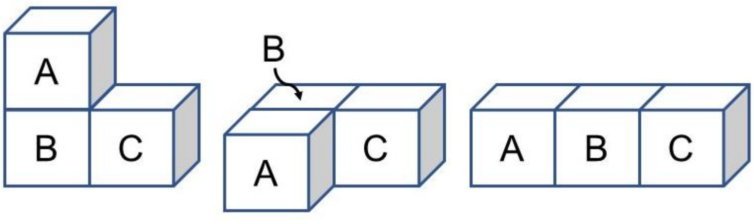
Körper 1 Körper 2 Körper 3

Aufgabe 1. Er zählt bei jedem der drei Würfelkörper die sichtbaren Würfelflächen, die er von allen Seiten und von oben sehen kann. Wie viele Würfelflächen sieht er bei jedem dieser Würfelkörper?

Lösungshinweise – Vorbemerkung:

Wir bezeichnen die Würfel

mit A, B und C:



Lösungshinweise zu Aufgabe 1, Körper 1 – Antwortsatz: Es sind 12 Seitenflächen zu sehen.

Begründung: Folgende Seitenflächen sind zu sehen:

- 3 Seitenflächen von vorn und 3 Seitenflächen von hinten
- 2 Seitenflächen von links und 2 Seitenflächen von rechts
- 2 Seitenflächen von oben

Insgesamt sehen wir (3 + 3 + 2 + 2 + 2 =) 12 Seitenflächen.

Lösungsvariante: Wir können auch die Seitenflächen zählen, die nicht sichtbar sind. Wir wissen, dass ein Würfel 6 Seitenflächen hat, deshalb haben drei Würfel insgesamt (3 · 6 =) 18 Seitenflächen. Es liegen 2 nicht-sichtbare Seitenflächen unten. Wenn zwei Würfel aneinanderstoßen, werden zwei Seitenflächen verdeckt. Da die zwei Würfel A und B sowie die zwei Würfel A und C aneinanderstoßen, sind (2 · 2 =) 4 weitere Seitenflächen verdeckt.

Insgesamt sind deshalb (18 – 2 – 4 =) 12 Seitenflächen zu sehen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1, Körper 2 – Antwortsatz: Es sind 11 Seitenflächen zu sehen.

Begründung: Folgende Seitenflächen sind zu sehen:

- 2 Seitenflächen von vorn und 2 Seitenflächen von hinten.
- 2 Seitenflächen von links und 2 Seitenflächen von rechts.
- 3 Seitenflächen von oben.

Insgesamt sehen wir (2 + 2 + 2 + 2 + 3 =) 11 Seitenflächen.

Lösungsvariante: Wir können die 3 Seitenflächen unten nicht sehen. Außerdem stoßen die zwei Würfel A und B sowie die zwei Würfel B und C aneinander, weshalb weitere (2 · 2 =) 4 Seitenflächen verdeckt sind. Insgesamt sehen wir (18 – 3 – 4 =) 11 Seitenflächen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1, Körper 3 – Antwortsatz: Es sind 11 Seitenflächen zu sehen.

Begründung: Folgende Seitenflächen sind zu sehen:

- 3 Seitenflächen von vorn und 3 Seitenflächen von hinten.
- 1 Seitenfläche von links und 1 Seitenflächen von rechts.
- 3 Seitenflächen von oben.

Insgesamt sehen wir (3 + 3 + 1 + 1 + 3 =) 11 Seitenflächen.

Lösungsvariante: Wir können die 3 Seitenflächen unten nicht sehen. Außerdem stoßen die zwei Würfel A und B sowie die zwei Würfel B und C aneinander, weshalb weitere (2 · 2 =) 4 Seitenflächen verdeckt sind. Insgesamt sehen wir (18 – 3 – 4 =) 11 Seitenflächen.

****

Aufgabe 2a. Nun summiert er bei jedem der drei Würfelkörper die Augenzahlen von allen sichtbaren Würfelflächen. Ermittle für jeden dieser Würfelkörper die größte Summe, die möglich ist. Bei welchem der drei Würfelkörper kann die Summe am größten werden?

Aufgabe 2b. Ermittle für jeden der drei Würfelkörper die größte Summe aller sichtbaren Augenzahlen, die möglich ist, wenn bei den sich berührenden Würfelflächen die gleichen Augenzahlen aneinanderstoßen.

Lösungshinweise – Vorbemerkungen: Für die Lösungsdarstellung der Aufgaben 2 und 4 genügt es, ein richtiges Beispiel zu zeigen. Du könntest also auf dem Würfelkörper die passenden Augenzahlen angeben. Eine Erklärung, wie du die Lösung gefunden hast, ist nicht erforderlich. Die folgenden ausführlichen Hinweise sollen helfen, jeweils die maximale Augensumme selbst zu finden. Die Richtungen vorn/hinten, oben/unten und links/rechts entsprechen der Blickrichtung auf die Abbildungen. Wenn möglich benutze für die Lösungsfindung richtige Spielwürfel.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) Körper 1 – Antwortsatz: Die größtmögliche Augensumme beträgt 51.

Begründung: Beim Würfel A beträgt die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten 7. Ebenso beträgt die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen links/rechts auch 7. Die sichtbare Augensumme des Würfels A ist also am größten, wenn oben 6 zu sehen ist. Insgesamt sehen wir vom Würfel A die Augensumme (7 + 7 + 6 =) 20.

Drehen wir den Würfel B so, dass von links die 6 zu sehen ist, so sehen wir vom Würfel B die Augensumme (6 + 7 =) 13, weil die Seitenflächen vorn/hinten gegenüberliegen und deshalb deren Augensumme 7 beträgt.

Drehen wir den Würfel C so, dass von oben die 6 und von rechts die 5 zu sehen ist, so sehen wir vom Würfel C die Augensumme (6 + 5 + 7 =) 18, weil die Seitenflächen vorn/hinten gegenüberliegen und deshalb deren Augensumme 7 beträgt.

Die größte Augensumme, die wir beim Körper 1 sehen können, beträgt also

(20 + 13 + 18 =) 51.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a), Körper 2 – Antwortsatz: Die größtmögliche Augensumme beträgt 51.

Begründung: Wie beim Würfel C vom Körper 1 sind auch hier bei den Würfeln A und C jeweils 4 Seitenflächen mit der maximalen Augensumme (6 + 5 + 7 =) 18 zu sehen.

Vom Würfel B sind drei Seitenflächen zu sehen – wir können den Würfel so drehen, dass auf den sichtbaren Seitenflächen die Augen 4, 5 und 6 zu sehen sind. Insgesamt ist auf dem Würfel B die Augensumme (4 + 5 + 6 =) 15 zu sehen.

Die größte Augensumme, die wir beim Körper 2 sehen können, beträgt also

(18 + 18 + 15 =) 51.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a), Körper 3 – Antwortsatz: Die größtmögliche Augensumme beträgt 49.

Begründung: Wie beim Würfel C vom Körper 1 sind auch hier bei den Würfeln A und C jeweils die maximale Augensumme (6 + 5 + 7 =) 18 zu sehen.

Vom Würfel B sind drei Seitenflächen zu sehen – wir können den Würfel so drehen, dass von oben 6 zu sehen ist. Die Summe der Augenzahlen der gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten beträgt 7. Insgesamt sehen wir vom Würfel B maximal die Augensumme (7 + 6 =) 13.

Die größte Augensumme, die wir beim Körper 3 sehen können, beträgt also

(18 + 18 + 13 =) 49.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b), Körper 1 – Antwortsatz: Wenn aneinanderstoßende Seitenflächen die gleiche Augenzahl haben, beträgt die größtmögliche Augensumme 50.

Begründung: Drehen wir den Würfel A so wie bei Aufgabe 2a, so sehen wir vom Würfel A die Augensumme 20.

Weil beim Würfel A oben die 6 zu sehen ist, liegt wegen der Anlegeregel beim Würfel B die 6 auf der nicht-sichtbaren unteren Seitenfläche. Wir können deshalb von links nur maximal 5 sehen. Somit sehen wir beim Würfel B die Augensumme (5 + 7 =) 12.

Wegen der Anlegeregel sehen wir beim Würfel C von rechts auch 5. Wir können den Würfel C nun so drehen, dass von oben 6 zu sehen ist. Weil die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten 7 beträgt, sehen wir die Augensumme der sichtbaren Seitenflächen des Würfels C (6 + 5 + 7 =) 18.

Damit können wir als Augensumme maximal (20 + 12 + 18 =) 50 sehen.

Lösungsvariante: Drehen wir aber den Würfel A so, dass von oben 5 zu sehen ist, so sehen wir vom Würfel A die maximale Augensumme (5 + 7 + 7 =) 19.

Weil nun wegen der Anlegeregel beim Würfel B die 5 auf der nicht-sichtbaren unteren Seitenfläche liegt, können wir den Würfel B so drehen, dass von links 6 zu sehen ist. Somit sehen wir beim Würfel B die Augensumme (6 + 7 =) 13.

Wegen der Anlegeregel sehen wir beim Würfel C von rechts auch 6. Wir können also den Würfel C so drehen, dass von oben 5 zu sehen ist. Weil die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten 7 beträgt, sehen wir die Augensumme der sichtbaren Seitenflächen des Würfels C (6 + 5 + 7 =) 18.

Damit können wir als Augensumme ebenfalls maximal (19 + 13 + 18 =) 50 sehen.

Wir vergleichen das Ergebnis mit der Aufgabe 2a. Die maximale Augensumme 51 haben wir erreicht, wenn wir beim Würfel A oben und beim Würfel B links jeweils eine 6 sehen. Wegen der Anlegeregel bedeutet 6 beim Würfel A oben, dass beim Würfel B die 6 unten liegt. Es ist also nicht möglich, bei den Würfeln A oben und B links gleichzeitig eine 6 zu sehen. Deshalb muss beim Körper 1 die größtmögliche Augensumme aller sichtbaren Seitenflächen in Aufgabe 2b kleiner sein als in Aufgabe 2a.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b), Körper 2 – Antwortsatz: Wenn aneinanderstoßende Seitenflächen die gleiche Augenzahl haben, beträgt die größtmögliche Augensumme 51.

Begründung: Vom Würfel B sind drei Seitenflächen zu sehen – wir können den Würfel so drehen, dass auf den sichtbaren Seitenflächen die Augen 4, 5 und 6 zu sehen sind, insgesamt also beim Würfel B die Augensumme (4 + 5 + 6 =) 15 zu sehen ist.

Liegt beim Würfel B oben 4, so gibt es Würfel, bei denen links 5 und hinten 6 zu sehen sind. Dann ist wegen der Anlegeregel beim Würfel C rechts auch 5 zu sehen. Wir können den Würfel C aber so drehen, dass oben die 6 zu sehen ist. Insgesamt sehen wir auf dem Würfel C die Augensumme (5 + 6 + 7 =) 18, weil auf den gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten die Augensumme 7 zu sehen ist.

Wenn beim Würfel B hinten 6 zu sehen ist, so ist wegen der Anlegeregel beim Würfel A vorn auch 6 zu sehen. Wir können den Würfel A aber so drehen, dass oben 5 zu sehen ist. Insgesamt sehen wir auf dem Würfel A die Augensumme (6 + 5 + 7 =) 18, weil auf den gegenüberliegenden Seitenflächen links/rechts die Augensumme 7 zu sehen ist.

Liegt beim Würfel B oben 4, so gibt es aber auch Würfel, bei denen links 6 und hinten 5 zu sehen sind. Dann ist wegen der Anlegeregel beim Würfel C rechts auch 6 zu sehen. Wir können den Würfel C aber so drehen, dass oben 5 zu sehen ist. Insgesamt sehen wir auf dem Würfel C die Augensumme (5 + 6 + 7 =) 18, weil auf den gegenüberliegenden Seitenflächen vorn und hinten die Augensumme 7 zu sehen ist.

Wenn beim Würfel B hinten 5 zu sehen ist, so ist wegen der Anlegeregel beim Würfel A vorn auch 5 zu sehen. Wir können den Würfel A aber so drehen, dass oben 6 zu sehen ist. Insgesamt sehen wir auf dem Würfel A die Augensumme (6 + 5 + 7 =) 18, weil auf den gegenüberliegenden Seitenflächen links und rechts die Augensumme 7 zu sehen ist.

Die größte Augensumme, die wir beim Körper 2 sehen können, beträgt also bei beiden Würfeltypen (18 + 18 + 15 =) 51.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b), Körper 3 – Antwortsatz: Wenn aneinanderstoßende Seitenflächen die gleiche Augenzahl haben, beträgt die größtmögliche Augensumme 46.

Begründung: Wenn drei Würfel nebeneinanderliegen, so ergibt die Augensumme der Seitenflächen von links und von rechts 7. Ebenso ist bei jedem der drei Würfel die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen vorn/hinten 7. Wir können also alle drei Würfel so drehen, dass von oben jeweils 6 zu sehen ist. Dann sehen wir insgesamt die maximale Augensumme (3 · 6 + 4 · 7 =) 46.

Wir vergleichen das Ergebnis mit der Aufgabe 2a. Wir konnten ohne Beachtung der Anlegeregel die Würfel so drehen, dass sowohl links als auch rechts jeweils 5 zu sehen ist. Anstatt links und rechts die Augensumme (5 + 5 =) 10 zu sehen, ist mit Beachtung der Anlegeregel für die beiden Seitenflächen links und rechts nur die Augensumme 7 möglich, also 3 Punkte weniger.

****

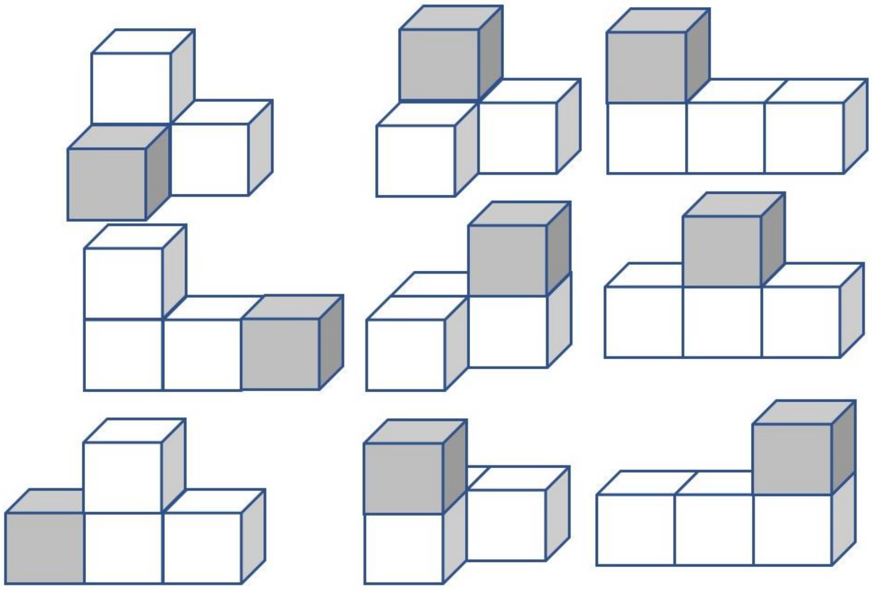
Aufgabe 3. Kann Quadrato einen Würfelkörper aus vier Würfeln so zusammensetzen, dass insgesamt genau 15 Würfelflächen zu sehen sind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Ja, es ist möglich, vier Würfel so zusammenzusetzen, dass genau 15 Seitenflächen zu sehen sind.

Begründung: Es genügt, einen Würfelkörper mit 15 Seitenflächen anzugeben. Es gibt mehrere Möglichkeiten. Wir können dafür die Körper 1 bis 3 aus Aufgabe 1 verwenden. Wir wissen, wenn zwei Würfel aneinanderstoßen, sind von den beiden Würfeln 2 Seitenflächen nicht mehr zu sehen.

Setzen wir an Körper 1 einen weiteren Würfel an, so könnten 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 2 Seitenflächen werden durch das Zusammensetzen unsichtbar. Setzen wir den Würfel so an, dass auch noch die untere Seitenfläche unsichtbar wird, erhalten wir (12 + 6 – 2 – 1 =) 15 sichtbare Seitenflächen (linke Spalte).

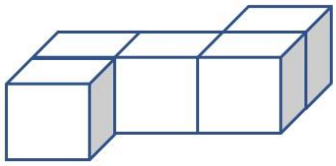
Setzen wir an Körper 2 oder Körper 3 einen weiteren Würfel an, so könnten 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 2 Seitenflächen werden durch das Zusammensetzen unsichtbar. Wir erhalten (11 + 6 – 2 =) 15 sichtbare Seitenflächen (mittlere und rechte Spalte).



Hinweis: Wir erkennen, dass die Würfelkörper, die 15 sichtbare Seitenflächen haben, sowohl aus Körper 1 als auch aus den Körpern 2 und 3 gebaut werden können.

****

Aufgabe 4. Quadrato hat nun fünf Würfel zu einem Würfelkörper wie in der Abbildung zusammengesetzt.



Wie viele Würfelflächen sind bei diesem Würfelkörper sichtbar? Wie groß ist die kleinstmögliche Summe aller sichtbaren Augenzahlen, wenn bei den sich berührenden Würfelflächen die gleichen Augenzahlen aneinanderstoßen?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Es sind 17 Seitenflächen zu sehen. Die kleinstmögliche Augensumme auf allen sichtbaren Seitenflächen beträgt 41.

Begründung: Wir sehen von vorn, von rechts, von hinten und von links jeweils 3 Seitenflächen. Außerdem sehen wir von oben 5 Seitenflächen. Insgesamt sind somit (3 + 3 + 3 + 3 + 5 =) 17 Seitenflächen zu sehen.

Zählen wir die nichtsichtbaren Seitenflächen der insgesamt (5 · 6 =) 30 Seitenflächen der 5 Würfel, so sind 5 Seitenflächen von unten nicht sichtbar. Außerdem stoßen viermal zwei Würfel aneinander, so dass (4 · 2 =) 8 weitere Seitenflächen nicht sichtbar sind. Insgesamt sehen wir also (30 – 5 – 8 =) 17 Seitenflächen.

Wir können den Würfel A so drehen, dass vorn 1 und oben 2 zu sehen sind. Weil die Augensumme der gegenüberliegenden Seitenflächen links/rechts 7 ergibt, sehen wir auf dem Würfel A die Augensumme (1 + 2 + 7 =) 10. Auch auf dem Würfel E sehen wir die Augensumme 10, wenn hinten 1 und oben 2 zu sehen sind.

Weil auf dem Würfel A vorn 1 zu sehen ist, ist beim Würfel B wegen der Anlegeregel hinten auch 1 zu sehen. Wir drehen den Würfel B so, dass 2 oben zu sehen ist. Ebenso ist beim Würfel D vorn 1 zu sehen, weil auf dem Würfel E hinten 1 zu sehen ist. Wir drehen den

Würfel D so, dass 2 oben zu sehen ist. Die Augensumme der sichtbaren Seitenflächen der Würfel B und D beträgt zusammen (1 + 2 + 1 + 2 + 7 =) 13, weil wegen der Anlegeregel die Augensumme der linken Seitenfläche von B und der rechten Seitenfläche von D wie gegenüberliegende Seitenflächen 7 ergibt.

Schließlich können wir den Würfel C so drehen, dass oben 1 zu sehen ist. Dann sehen wir auf den drei sichtbaren Seitenflächen von Würfel C die Augensumme (1 + 7 =) 8, weil die Augensumme von vorn/hinten als gegenüberliegende Seitenflächen 7 beträgt.

Insgesamt sehen wir auf den 17 sichtbaren Seitenflächen die Augensumme (10 + 10 + 13 + 8 =) 41.

Lösungsvariante: Von den sichtbaren Seitenflächen sind vier Paare gegenüberliegende Seitenflächen (Würfel A: links/rechts, Würfel C: vorn/hinten, Würfel E: links/rechts, wegen der Anlegeregel auch Würfel B links und Würfel D rechts). Die Augensumme dieser 8 Seitenflächen beträgt (4 · 7 =) 28.

Wegen der Anlegeregel sind die Augenzahlen von Würfel A vorn und Würfel B hinten gleich, ebenso von Würfel D vorn und Würfel E hinten. Die kleinste Augensumme auf diesen vier Seitenflächen ist 4, wenn jeweils auf den Seitenflächen 1 zu sehen ist.

Die Würfel A, B, D und E können wir so drehen, dass oben 2 zu sehen ist.

Den Würfel C können wir so drehen, dass oben 1 zu sehen ist.

Insgesamt sehen wir auf den 17 sichtbaren Seitenflächen die Augensumme

(28 + 4 + 4 · 2 + 1 =) 41.