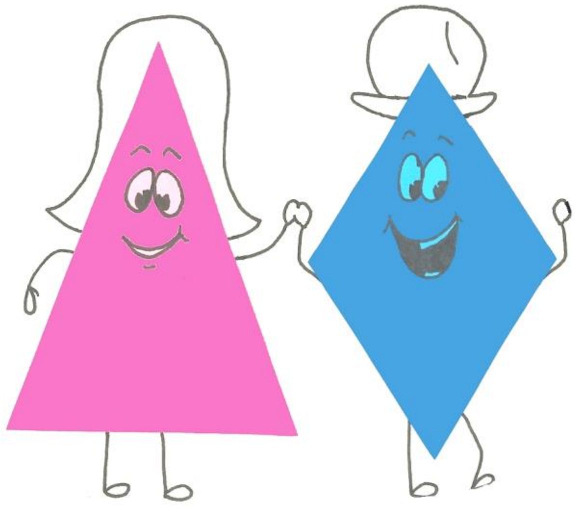
Mathe macht Spaß - ist doch LOGO

Knobelaufgaben mit der Post für alle Grundschüler, die Freude an Mathematik haben.



Mit Frau Dreieck und Herrn Raute rechnen und knobeln!

Beachte bitte folgende Hinweise: Für eine vollständige Lösung genügt es nicht, nur das Ergebnis anzugeben. Schreibe einen Antwortsatz, führe wenn möglich eine Probe durch und erkläre, wie du die Lösung gefunden hast, oder zeichne zur Begründung deine Lösung. Auf der Rückseite dieses Blattes sind einige Hinweise für die Lösungsdarstellung angegeben.

Einsendungen und Hinweise an

LOGO-Korrespondenzzirkel
c/o Dr. Norman Bitterlich
Draisdorfer Str. 21
09114 Chemnitz

oder

norman.bitterlich@t-online.de

Bitte vergiss nicht, auf deiner Einsendung deinen Vor- und Familiennamen sowie den Namen und den Ort deiner Schule anzugeben!

Viel Spaß beim Rechnen und Tüfteln wünscht dir das LOGO-Team.

www.mathe-logo.org

Während der Sommerferien nahm Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute und ihre Kinder Quadrato und Kreisa – an einem Sportfest teil.

Aufgabe 1. Bei diesem Sportfest gab es 60-m-Lauf, Weitsprung, Ballzielwurf und Staffellauf. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Reihenfolge der vier Wettkämpfe für die Jungen festzulegen, wenn der 60-m-Lauf und der Staffellauf nicht unmittelbar nacheinander absolviert werden sollen? Schreibe alle Möglichkeiten auf!

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Reihenfolge der vier Wettkämpfe für die Mädchen festzulegen, wenn für die Jungen bereits die Reihenfolge „(1) Weitsprung, (2) 60-m-Lauf, (3) Ballzielwurf und (4) Staffellauf“ bekannt gegeben wurde? Beachte dabei, dass die Mädchen und Jungen die Laufbahn, die Weitsprunganlage und den Wurfkreis nicht gleichzeitig nutzen können, und dass auch für die Mädchen der 60-m-Lauf und der Staffellauf nicht unmittelbar nacheinander absolviert werden sollen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es gibt 12 Möglichkeiten, die Reihenfolge der vier Wettkämpfe für die Jungen festzulegen. Wurde eine Reihenfolge festgelegt, gibt es 4 Möglichkeiten, die Reihenfolge der vier Wettkämpfe für die Mädchen festzulegen.

Herleitung: Wir kürzen die Wettkämpfe mit Buchstaben ab und schreiben L für 60-m-**L**auf, W für **W**eitsprung, B für **B**allzielwurf und S für **S**taffellauf.

In einer Tabelle tragen wir alle Möglichkeiten von Reihenfolgen der Wettkämpfe für die Jungen ein. Wir finden 24 verschiedene Reihenfolgen. Wir streichen nun alle Spalten, in denen L direkt über S steht oder S direkt über L steht.

Reihenfolge		✓		✓			✓	✓			✓	✓
1	~~B~~	**B**	~~B~~	**B**	~~B~~	~~B~~	**L**	**L**	~~L~~	~~L~~	**L**	**L**
2	~~L~~	**L**	~~S~~	**S**	~~W~~	~~W~~	**B**	**B**	~~S~~	~~S~~	**W**	**W**
3	~~S~~	**W**	~~L~~	**W**	~~L~~	~~S~~	**S**	**W**	~~B~~	~~W~~	**B**	**S**
4	~~W~~	**S**	~~W~~	**L**	~~S~~	~~L~~	**W**	**S**	~~W~~	~~B~~	**S**	**B**

Reihenfolge	✓	✓			✓	✓			✓		✓	
1	**S**	**S**	~~S~~	~~S~~	**S**	**S**	~~W~~	~~W~~	**W**	~~W~~	**W**	~~W~~
2	**B**	**B**	~~L~~	~~L~~	**W**	**W**	~~B~~	~~B~~	**L**	~~L~~	**S**	~~S~~
3	**L**	**W**	~~B~~	~~W~~	**B**	**L**	~~L~~	~~S~~	**B**	~~S~~	**B**	~~L~~
4	**W**	**L**	~~W~~	~~B~~	**L**	**B**	~~S~~	~~L~~	**S**	~~B~~	**L**	~~B~~

Es verbleiben 12 Spalten, die alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen (mit ✓ markiert).

Lösungsvariante: Wir legen jeweils den ersten Wettkampf für die Jungen fest und betrachten deshalb vier Fälle:

Fall 1: Als ersten Wettkampf für die Jungen setzen wir B. Damit L und S nicht direkt nacheinander durchgeführt werden, muss der zweite Wettkampf L oder S sein (würde W an zweiter Stelle stehen, wären L und S an dritter und vierter Stelle).

- Wenn an erster Stelle B und an zweiter Stelle L stehen, muss an dritter Stelle W und an vierter Stelle S stehen.
- Wenn an erster Stelle B und an zweiter Stelle S stehen, muss an dritter Stelle W und an vierter Stelle L stehen.

Es gibt im Fall 1 **zwei Möglichkeiten**.

Fall 2: Als ersten Wettkampf für die Jungen setzen wir L. Damit L und S nicht direkt nacheinander durchgeführt werden, muss der zweite Wettkampf B oder W sein.

- Wenn an erster Stelle L und an zweiter Stelle B stehen, kann an dritter Stelle W und an vierter Stelle S stehen
- oder es kann an dritter Stelle S und an vierter Stelle W stehen.
- Wenn an erster Stelle L und an zweiter Stelle W stehen, kann an dritter Stelle B und an vierter Stelle S stehen
- oder es kann an dritter Stelle S und an vierter Stelle B stehen.

Es gibt im Fall 2 **vier Möglichkeiten**.

Fall 3: Als ersten Wettkampf für die Jungen setzen wir S. Damit L und S nicht direkt nacheinander durchgeführt werden, muss der zweite Wettkampf B oder W sein.

- Wenn an erster Stelle S und an zweiter Stelle B stehen, kann an dritter Stelle W und an vierter Stelle L stehen
- oder es kann an dritter Stelle L und an vierter Stelle W stehen.
- Wenn an erster Stelle L und an zweiter Stelle W stehen, kann an dritter Stelle B und an vierter Stelle S stehen
- oder es kann an dritter Stelle S und an vierter Stelle B stehen.

Es gibt im Fall 3 **vier Möglichkeiten**.

Fall 4: Als ersten Wettkampf für die Jungen setzen wir W. Damit L und S nicht direkt nacheinander durchgeführt werden, muss der zweite Wettkampf L oder S sein (würde B an zweiter Stelle stehen, wären L und S an dritter und vierter Stelle).

- Wenn an erster Stelle W und an zweiter Stelle L stehen, muss an dritter Stelle B und an vierter Stelle S stehen.
- Wenn an erster Stelle W und an zweiter Stelle S stehen, muss an dritter Stelle B und an vierter Stelle L stehen.

Es gibt im Fall 4 zwei Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also (2 + 4 + 4 + 2 =) **12 Möglichkeiten**.

Es ist nun eine Reihenfolge der Wettkämpfe für die Jungen festgelegt. Die Mädchen können L und S nur absolvieren, wenn die Jungen nicht auf der Laufbahn sind.

Wenn also bei Jungen in der Reihenfolge W steht, kann bei den Mädchen entweder S oder L stehen (**zwei Möglichkeiten**). Dann muss aber, wenn bei den Jungen B steht, bei den Mädchen die andere Laufdisziplin stehen, also L oder S.

Weiterhin gilt: Wenn bei Jungen in der Reihenfolge L steht, kann bei den Mädchen entweder B oder W stehen (**zwei Möglichkeiten**). Dann muss aber, wenn bei den Jungen S steht, bei den Mädchen W oder B stehen (zwei Möglichkeiten).

Damit gibt es insgesamt ($2 \cdot 2 =$) 4 Möglichkeiten.

Reihenfolge	Jungen (Beispiel)	Mädchen			
1	W	S	L	S	L
2	L	B	B	W	W
3	B	L	S	L	S
4	S	W	W	B	B

****

Aufgabe 2. Kreisa nahm mit ihren Freundinnen Anke, Barbara und Claudia am Weitsprung teil. Jedes der vier Mädchen schaffte eine andere Weite.

Alle sprangen über 3 Meter. Die Zweitplatzierte schaffte 6 Zentimeter mehr als die Letzte. Der Vorletzten fehlten nur 3 Zentimeter, dann wäre sie vor ihrer Kontrahentin Zweite geworden. Die Erste und die Letzte sprangen zusammen so weit wie die Zweit- und Drittplatzierte zusammen. Die Summe aller vier Weiten betrug 12,40 m.

Untersuche, ob du aus diesen Angaben die Weiten für jedes der Mädchen berechnen kannst. Wenn ja, gib diese Weiten an.

Welchen Platz erreichte Kreisa, wenn ihre Summe der drei Ziffern, die für die Weitenangabe zu schreiben sind, den kleinsten Wert aller vier Ergebnisse hat?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Die Mädchen sprangen 3,15 m, 3,11 m, 3,09 m und 3,05 m weit. Kreisa belegte den zweiten Platz.

Probe: Wir verkürzen die Schreibweise mit E für **E**rstplatzierte, Z für **Z**weitplatzierte, D für **D**rittplatzierte (Vorletzte) und V für **V**iertplatzierte (Letzte).

Alle sprangen über 3 m.	
Z schaffte 6 cm mehr als V.	3 m 11 cm = 3 m 5 cm + 6 cm
D fehlten nur 3 cm, dann wäre sie Z.	3 m 9 cm + 3 cm > 3 m 11 cm
E und V sprangen zusammen so weit wie Z und D zusammen.	3 m 15 cm + 3 m 5 cm = 3 m 11 cm + 3 m 5 cm = 6 m 20 cm
Die Summe aller vier Weiten betrug 12 m 40 cm.	3 m 15 cm + 3 m 11 cm + 3 m 9 cm + 3 m 5 cm = 12 m 40 cm

Herleitung: Wir können alle Aussagen aus der Aufgabenstellung so aufschreiben:

1	Z schaffte 6 Zentimeter mehr als V.	Z = V + 6
2	D fehlten nur 3 Zentimeter, dann wäre sie Z geworden (das bedeutet: sie wäre 1 cm weiter gesprungen als Z).	D + 3 = Z +1 also D = Z – 2
3	E und V sprangen zusammen so weit wie Z und D zusammen.	E + V = Z + D
4	Die Summe aller vier Weiten betrug 12,40 m.	E + Z + D + V = 12,40

Wir finden die Lösung durch systematisches Probieren und verwenden dafür eine Tabelle. Wir nehmen in der ersten Spalte eine Weite für V an und achten auf die Angaben in der Aufgabenstellung. So können wir alle Spalten ausfüllen und prüfen in jeder Zeile, ob in der letzten Spalte die Aussage 54erfüllt ist.

Weil alle über 3 m sprangen, können wir mit einer Weite über 3 m beginnen.

V	Z = V + 6	D = Z – 2	Z + D	E = Z + D - V	E + Z + D + W
3 m 1 cm	3 m 7 cm	3 m 5 cm	6 m 12 cm	3 m 11 cm	12 m 24 cm
3 m 2 cm	3 m 8 cm	3 m 6 cm	6 m 14 cm	3 m 12 cm	12 m 28 cm
3 m 3 cm	3 m 9 cm	3 m 7 cm	6 m 16 cm	3 m 13 cm	12 m 32 cm
3 m 4 cm	3 m 10 cm	3 m 8 cm	6 m 18 cm	3 m 14 cm	12 m 36 cm
3 m 5 cm	**3 m 11 cm**	**3 m 9 cm**	**6 m 20 cm**	**3 m 15 cm**	**12 m 40 cm**
3 m 6 cm	3 m 12 cm	3 m 10 cm	6 m 22 cm	3 m 16 cm	12 m 44 cm

Nur wenn V die Weite 3,05 m schaffte, ergibt die Summe aller vier Weiten den Wert 12,40 m. Somit betrugen die Weiten

Erstplatzierte	3,15 m	
Zweitplatzierte	3,11 m	
Drittplatzierte	3,09 m	(Vorletzte)
Viertplatzierte	3,05 m	(Letzte)

Nun berechnen wir die Summen der Ziffern jeder Weitenangabe:

	E	Z	D	V
Weite	3 m 15 cm	3 m 11 cm	3 m 9 cm	3 m 5 cm
Ziffernsumme	3 + 1 + 5 = 9	3 + 1 + 1 = 5	3 + 9 = 12	3 + 5 = 8

Für Z ist die Summe der Ziffern ihrer Weite am kleinsten. Kreischa belegte also den zweiten Platz.

Lösungsvariante: Wir können auch mit den Variablen rechnen. Die Gleichung aus Aussage 4 können wir mit Gleichung aus Aussage 3 vereinfachen:

$$E + Z + D + V = (E + V) + (Z + D) = (Z + D) + (Z + D) = 2 \cdot (Z + D) = 12 \text{ m } 40 \text{ cm}$$

Wir erhalten

$$Z + D = 6 \text{ m } 20 \text{ cm}$$

In dieser Gleichung können wir die Variable D durch die Aussage 2 ersetzen

$$Z + (Z – 2) = 6 \text{ m } 20 \text{ cm}$$
$$Z + (Z – 2) = 2 \cdot Z – 2 = 6 \text{ m } 20 \text{ cm, also } 2 \cdot Z = 6 \text{ m } 22 \text{ cm}$$

Wir erhalten

$$Z = 3 \text{ m } 11 \text{ cm}$$

Nun können wir noch die anderen Weiten berechnen und die Probe durchführen.

****

Aufgabe 3. Quadrato lief mit Emil, Franz und Gustaf im 60-m-Lauf um die Wette. Herr Raute konnte den Zieleinlauf nicht genau beobachten. Deshalb fragte er danach die Jungen, wer denn gewonnen hat. Er erhielt folgende Antworten:

Emil: „Gustaf kam vor mir ins Ziel."
Franz: „Ich war schneller als Quadrato."
Gustaf: „Emil wurde nicht Letzter."
Quadrato: „Ich wurde Zweiter."

Herr Raute überlegte kurz. Dann sagte er: „Das kann nicht stimmen!" Wieso hat Herr Raute recht? Warum können nicht alle vier Aussagen gleichzeitig wahr sein?

Frau Dreieck hat die Gespräche verfolgt und korrigierte: „Quadrato, du wurdest nicht Zweiter". Finde heraus, welchen Platz Quadrato wirklich erreichte, wenn die anderen drei Aussagen richtig waren.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadrato wurde Letzter.

Begründung: Wir nehmen an, alle vier Aussagen sind wahr.

Wir stellen zuerst fest: Wenn Quadrato Zweiter wurde (Aussage von Quadrato) und Franz schneller als Quadrato war (Aussage von Franz), hat Franz gewonnen.

Möglichkeit 1 für die Fortsetzung der Begründung: Somit belegten Emil und Gustaf die Plätze 3 und 4. Emil wurde nicht Letzter (Aussage von Gustaf), also wurde Emil Dritter und Gustaf Vierter. Dann ist aber die Aussage von Emil nicht erfüllt.

Möglichkeit 2 für die Fortsetzung der Begründung: Wenn Emil nicht Letzter wurde (Aussage von Gustaf), wurde Emil Dritter. Gustaf war aber noch schneller (Aussage von Emil). Da aber Gustaf nicht Zweiter war (Aussage von Quadrato), hat Gustaf gewonnen. Es kann aber nicht sein, dass sowohl Franz als auch Gustaf gewonnen haben.

Bei beiden Möglichkeiten sehen wir: Es können nicht alle Aussagen wahr sein.

Nun suchen wir die Platzierung von Quadrato. Nach der Aussage von Frau Dreieck wissen wir: Quadrato wurde nicht Zweiter. Wir wissen außerdem: Quadrato wurde nicht Erster (denn Franz war schneller als Quadrato).

Nehmen wir nun an, dass Quadrato Dritter wurde.

- Somit wurde Quadrato nicht Letzter.
- Auch Emil wurde nicht Letzter (Aussage von Gustaf).
- Aber auch Franz wurde nicht Letzter (er war schneller als Quadrato, Aussage von Franz).
- Ebenso wurde Gustaf nicht Letzter (er war schneller als Emil, Aussage von Emil).

Es kann aber nicht sein, dass es keinen Letzten gab. Deshalb ist es nicht richtig, dass Quadrato Dritter worden.

Es bleibt nur die Möglichkeit, dass Quadrato Vierter (also Letzter) wurde. Damit ist die Aufgabe gelöst.

Ergänzung: Allerdings kennt Herr Raute nun noch nicht die Reihenfolge im Zieleinlauf, denn es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, so dass die Aussagen von Emil, Franz und Gustaf wahr sind.

Platz	Variante 1	Variante 2	Variante 3
1	Gustaf	Gustaf	Franz
2	Emil	Franz	Gustaf
3	Franz	Emil	Emil
4	Quadrato	Quadrato	Quadrato

****

Aufgabe 4. Beim Ballzielwurf konnten die Teilnehmenden vier Bälle durch unterschiedlich große Ringe werfen. Die Ringe gab es in drei verschiedenen Größen. Je nach Größe der getroffenen Ringe wurden 3, 4 oder 5 Punkte vergeben. Kreisa und Quadrato unterhielten sich anschließend über ihre erreichten Punktsummen. Dabei stellten sie fest, dass jede ihrer Punktsummen eine ungerade Zahl war und Kreisa 6 Punkte mehr als Quadrato erreichte.

Welche Ringe könnten Quadrato und Kreisa getroffen haben, wenn jeder Wurf traf?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa traf dreimal die Ringgröße mit 5 Punkten und einmal die Ringgröße mit 4 Punkten. Quadrato traf dreimal die Ringgröße mit 3 Punkten und einmal die Ringgröße mit 4 Punkten.

Probe: Die Punktsumme von Kreisa beträgt (3 · 5 + 4 =) 19 Punkte. Die Punktsumme von Quadrato beträgt (3 · 3 + 4 =) 13 Punkte. Somit hat Kreisa (19 – 13 =) 6 Punkte mehr als Quadrato.

Herleitung: Wir erstellen zuerst eine Übersicht, welche Punktsummen mit vier Würfen erreichbar waren. Dafür verteilen wir die vier Würfe auf die drei Ringgrößen.

3 Punkte	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
4 Punkte	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
5 Punkte	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Summe	12	13	14	14	15	16	15	16	17	18	16	17	18	19	20

Als ungerade Punktsummen können nur die Zahlen 13, 15, 17 und 19 auftreten. Da Kreisa 6 Punkte mehr als Quadrato erreichte, haben Kreisa 19 Punkte und Quadrato 13 Punkte erreicht. Für beide Punktsummen gibt es jeweils nur eine eindeutige Aufteilung der getroffenen Ringgrößen.

Lösungsvariante: Wir betrachten eine Punktsumme und unterscheiden 5 Fälle.

Fall 1: Die Ringgröße mit 4 Punkten wurde **nicht getroffen**. Dann entsteht die Punktsumme aus der Addition von vier ungeraden Zahlen. Diese Punktsumme ist eine gerade Zahl. Das trifft für Kreisa und Quadrato nicht zu.

Fall 2: Die Ringgröße mit 4 Punkten wurde genau **einmal getroffen**. Es gibt vier Möglichkeiten, mit vier Würfen genau einmal die Ringgröße mit 4 Punkten zu treffen (Spalten a bis d).

Fall 3: Die Ringgröße mit 4 Punkten wurde genau **zweimal getroffen**. Dann entsteht die Punktsumme aus der Addition von zwei geraden und zwei ungeraden Zahlen. Diese Punktsumme ist eine gerade Zahl. Das trifft für Kreisa und Quadrato nicht zu.

Fall 4: Die Ringgröße mit 4 Punkten wurde genau **dreimal getroffen**. Es gibt zwei Möglichkeiten, mit vier Würfen genau dreimal die Ringgröße mit 4 Punkten zu treffen (Spalten e und f).

Fall 5: Die Ringgröße mit 4 Punkten wurde genau **viermal getroffen**. Dann beträgt die Punktsumme 16 und ist eine gerade Zahl. Das trifft für Kreisa und Quadrato nicht zu.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
3 Punkte	3	2	1	0	1	0
4 Punkte	1	1	1	1	3	3
5 Punkte	0	1	2	3	0	1
Summe	13	15	17	19	15	17

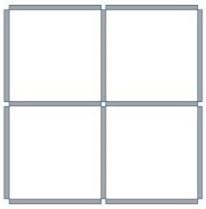
Aus der Tabelle erkennen wir, dass für Kreisa und Quadrato nur die Punktsummen 13, 15, 17 und 19 möglich waren. Da Kreisa 6 Punkte mehr als Quadrato erreichte, schafften Kreisa 19 Punkte und Quadrato 13 Punkte.

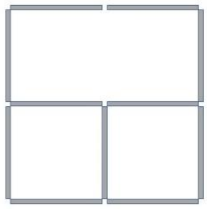
****

Runde 1 — Gut aufgelegt — (Teil B)

Quadrato und Kreisa spielen mit Legestäbchen. Alle Stäbchen sind gleich lang. Sie legen damit verschiedene Figuren und achten darauf, dass dabei keine Stäbchen übereinander liegen.

Natürlich möchte Quadrato mit seinen Legestäbchen Quadrate legen. Wie in der linken Abbildung zu sehen, kann er 12 Legestäbchen in zwei Zeilen und zwei Spalten so legen, dass er vier kleine und ein großes Quadrat sieht, also insgesamt fünf Quadrate. Er könnte in den zwei Zeilen und zwei Spalten auch weniger Legestäbchen legen. In der rechten Abbildung sieht er mit 11 Legestäbchen insgesamt drei Quadrate, nämlich zwei kleine und ein großes.

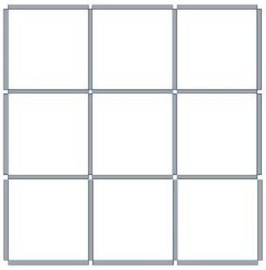




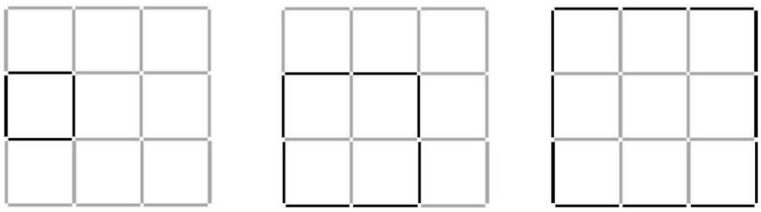
Aufgabe 1a). Quadrato legt nun 24 Legestäben in drei Zeilen und drei Spalten. Wie viele Quadrate sieht er insgesamt? Wie viele verschiedene Größen von Quadraten sind entstanden? Gib für jede Größe die Anzahl der Quadrate an!

Aufgabe 1b). Wie viele Legestäbchen muss er von seiner Figur wegnehmen, damit insgesamt nur noch 7 Quadrate zu sehen sind (die natürlich auch unterschiedliche Größen haben können)? Zeige, wie seine Figur dann aussieht!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a): Mit 24 Legestäbchen in drei Zeilen und drei Spalten kann Quadrato eine Figur wie in nebenstehender Abbildung legen.



Wir sehen 9 kleine Quadrate, 4 mittlere Quadrate (die jeweils aus vier kleinen Quadraten bestehen) und ein großes Quadrat (das aus allen 9 kleinen Quadraten besteht), also insgesamt (9 + 4 + 1 =) 14 Quadrate.



kleines, *mittleres,* *großes Quadrat*

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b). Es genügt, zwei Legestäbchen wegzunehmen, um nur noch 7 Quadrate zu sehen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, zum Beispiel:

In Abbildung 1 sehen wir 6 kleine Quadrate und 1 großes Quadrat.
In Abbildung 2 sehen wir 7 kleine Quadrate.

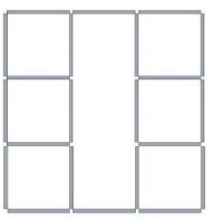


Abbildung 1

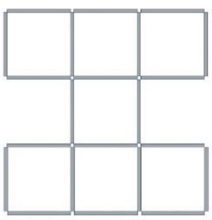
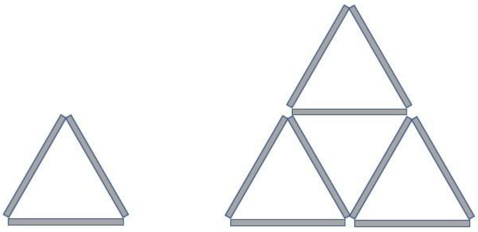


Abbildung 2

****

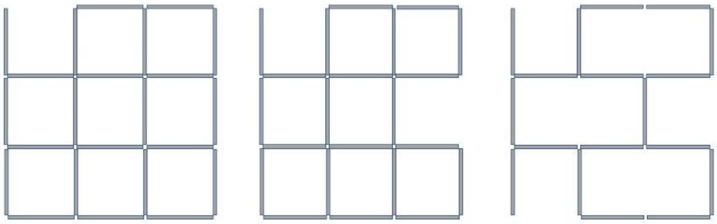
Aufgabe 2. Quadrato legt wieder 24 Legestäben in drei Zeilen und drei Spalten. Nun möchte er aber davon Legestäbchen so wegnehmen, dass gar kein vollständiges Quadrat mehr zu sehen ist. Dabei sollen aber so viele Legestäbchen wie möglich liegen bleiben. Mit wie vielen Legestäbchen schaffst du diese Aufgabe? Zeige, wie deine Figur aussieht, bei der kein vollständiges Quadrat zu sehen ist.

Kreisa kann mit den Legestäbchen leider keine Kreise legen. Deshalb beschäftigt sie sich mit Dreiecken. Sie legt Pyramiden. In der linken Abbildung hat sie eine einstöckige Pyramide aus 3 Legestäbchen gelegt. In der rechten Abbildung ist eine zweistöckige Pyramide aus 9 Legestäbchen zu sehen.



Lösungshinweise zu Aufgabe 2 - Antwortsatz: Es können 6 Legestäbchen so weggenommen werden, dass kein vollständiges Quadrat mehr zu sehen ist.

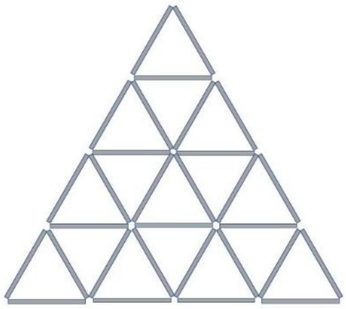
Begründung: Es genügt, ein Beispiel zu zeichnen. Nehmen wir zuerst ein Legestäbchen oben weg (linke Abbildung), bleiben 3 mittlere und 8 kleine Quadrate sichtbar. Nehmen wir nun noch ein Legestäbchen rechts weg (mittlere Abbildung), bleiben 1 mittleres und 7 kleine Quadrate sichtbar. Nun müssen wir noch 4 Legestäbchen wegnehmen, bis kein vollständiges Quadrat sichtbar bleibt.



****

Aufgabe 3. Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa, damit sie eine vierstöckige Pyramide vollständig legen kann? Erkläre, wie du die Lösung gefunden hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Kreisa benötigt 30 Legestäbchen.



Herleitung: Wir finden die erforderliche Anzahl, wenn wir eine solche Figur legen (siehe nebenstehende Abbildung) und die Legestäbchen zählen.

Lösungsvariante: Wir wollen nun die Anzahl der erforderlichen Legestäbchen berechnen.

Wir erkennen in der Abbildung der Aufgabenstellung, dass die 2-stöckige Pyramide 2 Dreiecke mehr als die 1-stöckige Pyramide hat. Deshalb sind bei der 2-stöckigen Pyramide (2 · 3 =) 6 Legestäbchen mehr erforderlich als bei der 1-stöckigen Pyramide.

Wir erkennen an der abgebildeten größeren Pyramide, dass die 3-stöckige Pyramide 3 Dreiecke mehr hat als die 2-stöckige Pyramide. Deshalb sind bei der 3-stöckigen Pyramide (3 · 3 =) 9 Legestäbchen mehr erforderlich als bei der 2-stöckigen Pyramide.

Wir vermuten nun, dass eine 4-stöckige Pyramide 4 Dreiecke mehr hat als die 3-stöckige Pyramide. (Das erkennen wir auch an der Abbildung.) Deshalb sind bei der 4-stöckigen Pyramide (3 · 4 =) 9 Legestäbchen mehr erforderlich als bei der 3-stöckigen Pyramide.

Diese Erkenntnisse fassen wir in einer Tabelle zusammen:

Pyramide	Anzahl Dreiecke	Anzahl Lagestäbchen
1-stöckig	**1**	3 · **1** = 3
2-stöckig	1 + **2** = 3	3 + 3 · **2** = 9
3-stöckig	3 + **3** = 6	9 + 3 · **3** = 18
4-stöckig	6 + **4** = 10	18 + 3 · **4** = 30

Wir prüfen unsere Vermutung für die 4-stöckige Pyramide, indem wir die Anzahl der erforderlichen Legestäbchen an der Figur auszählen.

****

Aufgabe 4. Kreisa will mit 72 Legestäbchen gleichzeitig verschiedene Pyramiden dieser Art legen, jedoch von jeder Größe nur eine. Dabei müssen nicht alle Größen entstehen. Sie möchte aber alle 72 Stäbchen verwenden. Wie viele Möglichkeiten hat sie, die Aufgabe zu lösen? Beschreibe oder zeichne jede Möglichkeit, die du gefunden hast!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa hat zwei verschiedene Möglichkeiten, mit 72 Legestäbchen die Aufgabe zu lösen. So kann sie eine 6-stöckige und eine 2-stöckige Pyramide gleichzeitig legen. Sie kann aber auch eine 5-stöckige, eine 3-stöckige und eine 2-stöckige Pyramide gleichzeitig legen.

Herleitung: Wir setzen zunächst die Tabelle fort und berechnen die erforderliche Anzahl von Legestäbchen bei mehrstöckigen Pyramiden.

Pyramide	Anzahl Dreiecke	Anzahl Legestäbchen
5-stöckig	10 + 5 = 15	30 + 3 · 5 = 45
6-stöckig	15 + 6 = 21	45 + 3 · 6 = 63
7-stöckig	21 + 7 = 28	63 + 3 · 7 = 84

Mit 72 Legestäbchen kann Kreisa höchsten eine 6-stöckige Pyramide legen. Dann bleiben (72 – 63 =) 9 Legestäbchen übrig. Mit diesen 9 Legestäbchen kann Kreisa noch eine 2-stöckige Pyramide legen. Damit haben wir eine Möglichkeit gefunden (Variante 1). Eine andere Möglichkeit gibt es nicht, wenn Kreisa mit einer 6-stöckigen Pyramide beginnt.

Legt Kreisa zunächst eine 5-stöckige Pyramide, so verbleiben ihr (72 – 45 =) 27 Legestäbchen. Mit diesen kann sie noch eine 3-stöckige und eine 2-stöckige Pyramide bauen (Variante 2), weil sie dafür (18 + 9 =) 27 Legestäbchen benötigt. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht, wenn Kreisa mit einer 5-stöckigen Pyramide beginnt.

Legt Kreisa zunächst eine 4-stöckige Pyramide, so verbleiben ihr (72 – 30 =) 42 Legestäbchen. Wenn sie nun noch eine 1-stöckige, eine 2-stöckige und eine 3-stöckige Pyramide legen würde, kann sie nicht alle Legestäbchen verwenden, denn sie benötigt dafür nur (3 + 9 + 18 =) 30 Legestäbchen. Da jede Größe nur einmal gelegt werden darf, gibt es keine weiteren Möglichkeiten.

****

Aufgabe 1. Herr Raute, Kreisa und Quadrato waren Pilze sammeln. Sie habe sehr viele gefunden. Jeder brachte einen Korb voll Pilze nach Hause. Darunter waren auch einige Steinpilze. Zuhause erzählten sie Frau Dreieck:

- Kreisa: „Quadrato und Herr Raute fanden zusammen zwei Steinpilze mehr als ich."
- Quadrato: „Wenn Kreisa mir zwei Steinpilze von ihrem Korb in meinen Korb gibt, haben Kreisa und ich die gleiche Anzahl Steinpilze in unseren Körben."
- Herr Raute: „Kreisa und Quadrato fanden zusammen doppelt so viele Steinpilze wie ich."

Frau Dreieck freut sich: „Toll, da habt Ihr alle zusammen ja viele Steinpilze gefunden. Aus euren Aussagen kann ich herausfinden, wie viele Steinpilze jeder von euch gefunden hat."

Kannst du es auch? Wie viele Steinpilze hat jeder gefunden? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz. Quadrato fand 4 Steinpilze, Kreisa fand 8 Steinpilze und Herr Raute fand 6 Steinpilze.

Hinweis. Zur Abkürzung der Schreibweise schreiben wir für die Anzahl der Steinpilze für Quadrato Q, für die Anzahl der Steinpilze für Kreisa K und für die Anzahl der Steinpilze für Herrn Raute R. Dann können die Aussagen so geschrieben werden:

Aussage von Kreisa: $Q + R = K + 2$
Aussage von Quadrato: $Q + 2 = K - 2$
Aussage von Herrn Raute: $Q + K = 2 \cdot R$

Probe: Aussage von Kreisa ist erfüllt, denn es gilt $4 + 6 = 8 + 2$.
Aussage von Quadrato ist erfüllt, denn es gilt $4 + 2 = 8 - 2$.
Aussage von Herrn Raute ist erfüllt, denn es gilt $8 + 4 = 2 \cdot 6$.

Herleitung: Solche Aufgaben lassen sich durch systematisches Probieren lösen. In einer Tabelle kannst du für jeden die Anzahlen der Steinpilze übersichtlich darstellen, die es nach den Aussagen von Quadrato und Herrn Raute sein müssten. Dann kannst du überprüfen, ob mit diesen Anzahlen auch die Aussage von Kreisa erfüllt ist.

Da Quadratos Anzahl in allen Aussagen vorkommt, probieren wir systematisch die möglichen Anzahlen von Quadrato. Wir beginnen mit Q = 1.

	Aussage Quadrato		Aussage Herr Raute		Aussage Kreisa		Vergleich
Q	Q + 2 = K – 2	K	Q + K	R	Q + R	K + 2	
1	3	5	1 + 5 = 6	6 : 2 = 3	1 + 3 = 4	5 + 2 = 7	4 < 7
2	4	6	2 + 6 = 8	8 : 2 = 4	2 + 4 = 6	6 + 2 = 8	6 < 8
3	5	7	3 + 7 = 10	10 : 2 = 5	3 + 5 = 8	7 + 2 = 9	8 < 9
4	**6**	**8**	**4 + 8 = 12**	**12 : 2 = 6**	**4 + 6 = 10**	**8 + 2 = 10**	**10 = 10**
5	7	9	5 + 9 = 14	14 : 2 = 7	5 + 7 = 12	9 + 2 = 11	12 > 11
6	8	10	6 + 10 = 16	16 : 2 = 8	6 + 8 = 14	10 + 2 = 12	14 > 12

Nur wenn Quadrato 4 Steinpilze sammelte, ist auch die Aussage von Kreisa richtig.

Da auch Kreisas Anzahl in allen Aussagen vorkommt, können wir auch systematisch die möglichen Anzahlen von Kreisa probieren. Da Kreisa 2 Steinpilze abgeben könnte, beginnen wir mit der Anzahl K = 3.

	Aussage Quadrato		Aussage Herr Raute		Aussage Kreisa		Vergleich
K	K – 2 = Q + 2	Q	Q + K	R	Q + R	K + 2	
3	1	X					
4	2	0	0 + 4 = 4	4 : 2 = 2	0 + 2 = 2	4 + 2 = 6	2 < 6
5	3	1	1 + 5 = 6	6 : 2 = 3	1 + 3 = 4	5 + 2 = 7	4 < 7
6	4	2	2 + 6 = 8	8 : 2 = 4	2 + 4 = 6	6 + 2 = 8	6 < 8
7	5	3	3 + 7 = 10	10 : 2 = 5	3 + 5 = 8	7 + 2 = 9	8 < 9
8	**6**	**4**	**4 + 8 = 12**	**12 : 2 = 6**	**4 + 6 = 10**	**8 + 2 = 10**	**10 = 10**
9	7	5	5 + 9 = 14	14 : 2 = 7	5 + 7 = 12	9 + 2 = 11	12 > 11

Nur wenn Kreisa 8 Steinpilze sammelte, ist auch die Aussage von Kreisa richtig.

Lösungsvariante: Aus der Aussage von Herrn Raute erkennen wir, dass die Gesamtzahl der gesammelten Pilze Q + K + R durch 3 teilbar ist, denn es gilt

$$Q + K + R = 2 \cdot R + R = 3 \cdot R$$

Die Anzahl R ist dabei der dritte Teil von der Gesamtanzahl.

Aus der Aussage von Kreisa erkennen wir, dass die Gesamtanzahl eine gerade Zahl ist, denn es gilt

$$Q + R + K = 2 \cdot K + 2$$

Wir können also systematisch alle durch (3 · 2 =) 6 teilbaren Zahlen prüfen, ob damit alle Aussagen erfüllt werden können. Dabei verwenden wir, dass Kreise 4 Pilze mehr als Quadrato sammelte.

Gesamt	R	Q + K	Q	K	Q + R	K + 2	Vergleich
6	6 : 3 = 2	6 – 2 = 4	0	4	0 + 2 = 2	4 + 2 = 6	2 < 6
12	12 : 3 = 4	12 – 4 = 8	2	6	2 + 4 = 6	6 + 2 = 8	6 < 8
18	**18 : 3 = 6**	**18 – 6 = 12**	**4**	**8**	**4 + 6 = 10**	**8 + 2 = 10**	**10 = 10**
24	24 : 3 = 8	24 – 8 = 16	6	10	6 + 8 = 14	10 + 2 = 12	14 > 12

Nur wenn die Gesamtzahl 18 beträgt, werden alle drei Aussagen erfüllt. In der Tabelle ist die Probe bereits enthalten.

Lösungsvariante:

Wir betrachten zuerst die Aussage von Quadrato.	Q + 2 = K – 2
Wir erkennen aus dieser Gleichung, dass Kreisa 4 Steinpilze mehr als Quadrato fand.	Q + 4 = K
Wir können in der Aussage von Kreisa die Variable K durch (Q + 4) ersetzen	Q + R = (Q + 4) + 2 = Q + 6
Damit finden wir die Anzahl für R.	R = 6
Nun können wir in der Aussage von Herrn Raute die Variable K durch (Q + 4) ersetzen.	Q + (Q + 4) = 2 · R, also 2 · Q + 4 = 2 · R
Setzen wir die Anzahl R = 6 ein, finden wir die Anzahl für Q.	2 · Q + 4 = 12, also Q = 4
Schließlich finden wir die Anzahl für K.	4 + 4 = 8

Bei Lösung mittels Gleichungen solltest du immer eine Probe durchführen, um sicherzustellen, dass beim Lösen kein Fehler auftrat.

****

Aufgabe 2. Alle vier freuen sich auf ein leckeres Pilzgericht. Sie wollen pünktlich um 18:00 Uhr essen. Frau Dreieck denkt, dass die Zubereitung der Pilze 20 min dauern wird. Es ist bereits 17:30 Uhr. Doch erst müssen die Pilze vorbereitet werden, also geputzt und geschnitten werden.

Frau Dreieck schätzt, dass sie für das Vorbereiten weitere 20 min benötigt. Wann könnte das Essen beginnen, wenn Frau Dreieck die Pilze alleine vorbereitet?

Frau Dreieck bittet Kreisa, beim Vorbereiten zu helfen. Kreisa vermutet, dass sie 30 min benötigen würde, um alle Pilze allein vorzubereiten. Gern hilft sie Frau Dreieck und so bereiten sie beide gleichzeitig die Pilze vor. Wann könnte nun das Essen beginnen? Begründe deine Antwort.

Quadrato ist noch nicht so geschickt beim Vorbereiten der Pilze. Würde er alle Pilze alleine vorbereiten, benötigt er 60 min dafür. Doch er will gern helfen. So bereiten Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato gleichzeitig die Pilze vor und sind nach 10 min fertig. Nun kann Frau Dreieck die Pilze zubereiten und sie können pünktlich um 18:00 Uhr das Essen beginnen. Begründe, warum sie zusammen nur 10 min zum Vorbereiten der Pilze benötigen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2.
Teilaufgabe 1: Da die Zubereitung 20 min dauert und Frau Dreieck 20 min für die Vorbereitung benötigt, dauert es insgesamt 40 min, bevor das Essen beginnen kann. Das Essen kann also erst 10 min nach 18 Uhr beginnen (um 18:10 Uhr).

Teilaufgabe 2: Wenn Kreisa Frau Dreieck hilft, müssen wir zunächst berechnen, wie lange Frau Dreiecke und Kreisa zusammen für die Vorbereitung benötigen, wenn es Frau Dreieck allein in 20 min und Kreisa allein in 30 min schaffen.

Dafür überlegen wir uns:

- Frau Dreieck würde in einer Stunde die 3-fache Menge schaffen.
- Kreisa würde in einer Stunde die 2-fache Menge schaffen.
- Zusammen würden sie in einer Stunde die (3 + 2 =) 5-fache Menge schaffen.

Also würden sie zusammen die 1-fache Menge im 5. Teil einer Stunde schaffen. Somit benötigen Frau Dreieck und Kreisa (60 : 5 =) 12 min für die Vorbereitung. Da die Zubereitung noch 20 min dauert, ist das Essen nach (20 + 12 =) 32 min fertig. Das Essen kann nun 2 min nach 18 Uhr beginnen (um 18:02 Uhr).

Teilaufgabe 3: Wenn nun Kreisa und Quadrato Frau Dreieck helfen, müssen wir berechnen, wie lange alle drei zusammen für die Vorbereitung benötigen, wenn es Frau Dreieck allein in 20 min, Kreisa allein in 30 min und Quadrato allein in 60 min schaffen.

Wir überlegen uns wieder:

- Frau Dreieck würde in einer Stunde die 3-fache Menge schaffen.
- Kreisa würde in einer Stunde die 2-fache Menge schaffen.
- Quadrato schafft in einer Strunde die 1-fache Menge.
- Zusammen würden sie in einer Stunde die (3 + 2 + 1 =) 6-fache Menge schaffen.

Also würden sie zusammen die 1-fache Menge im sechsten Teil einer Stunde schaffen. Somit benötigen Frau Dreieck, Kreisa und Quadrato (60 : 6 =) 10 min für die Vorbereitung. Das Essen kann pünktlich um 18:00 Uhr beginnen.

Lösungsvariante: Wenn wir die Menge der Pilze kennen würden, könnten wir es auch direkt ausrechnen. Nehmen wir beispielsweise an, es wären (wie in Aufgabe 1) **18 gleichgroße Steinpilze**.

Teilaufgabe 2:

- Da Frau Dreieck die gesamte Menge Pilze in 20 min vorbereiten kann, schafft sie in 10 min (18 : 2 =) 9 Pilze.
- Da Kreisa die gesamte Menge Pilze in 30 min vorbereiten kann, schafft sie in 10 min (18 : 3 =) 6 Pilze.
- Zusammen schaffen sie in 10 min insgesamt (9 + 6 =) 15 Pilze. Somit schaffen sie in (10 : 5 =) 2 min genau (15 : 5 =) 3 Pilze. Allerdings bedeutet es nicht, dass in zwei Minuten Frau Dreieck 2 Pilze und Kreisa 1 Pilz vorbereiten. Vielmehr teilen sie sich die Arbeit „gerecht“ auf.
- Um alle (3 · 6 =) 18 Pilze vorzubereiten, benötigen sie also (2 · 6 =) 12 min.

Teilaufgabe 3:

- Da Frau Dreieck die gesamte Menge Pilze in 20 min vorbereiten kann, schafft sie in 10 min (18 : 2 =) 9 Pilze.
- Da Kreisa die gesamte Menge Pilze in 30 min vorbereiten kann, schafft sie in 10 min (18 : 3 =) 6 Pilze.
- Da Quadrato die gesamte Menge Pilze in 60 min vorbereiten kann, schafft er in 10 min (18 : 6 =) 3 Pilze.
- Zusammen schaffen sie in 10 min insgesamt (9 + 6 + 3 =) 18 Pilze.

Noch einfacher wird es mit den Zahlen, wenn wir annehmen, es wären **60 gleichgroße Pilze**.

Teilaufgabe 2:

- Da Frau Dreieck die gesamte Menge Pilze in 20 min vorbereiten kann, schafft sie in 1 min (60 : 20 =) 3 Pilze.
- Da Kreisa die gesamte Menge Pilze in 30 min vorbereiten kann, schafft sie in 1 min (60 : 30 =) 2 Pilze.
- Zusammen schaffen sie in 1 min insgesamt (3 + 2 =) 5 Pilze. Somit schaffen sie in 12 min insgesamt (5 · 12 =) 60 Pilze.

Teilaufgabe 3:

- Da Frau Dreieck die gesamte Menge Pilze in 20 min vorbereiten kann, schafft sie in 1 min (60 : 20 =) 3 Pilze.
- Da Kreisa die gesamte Menge Pilze in 30 min vorbereiten kann, schafft sie in 1 min (60 : 30 =) 2 Pilze.
- Da Quadrato die gesamte Menge Pilze in 60 min vorbereiten kann, schafft er in 1 min (60 : 60 =) 1 Pilz.
- Zusammen schaffen sie in 1 min insgesamt (3 + 2 + 1 =) 6 Pilze. Somit schaffen sie in 10 min insgesamt (6 · 10 =) 60 Pilze.

****

Aufgabe 3. Alle waren mit dem Decken des Tisches beschäftigt, als ein lautes Klirren zu hören war. Frau Dreieck erschrak und sah, dass eine Schüssel zersprungen auf dem Boden lag. Sie fragte, wem dieses Missgeschick passierte. Sie erhielt folgende Antworten:

- Herr Raute: „Quadrato war es.“
- Quadrato: „Ich war es nicht und Kreisa war es auch nicht.“
- Kreisa: „Quadrato war es nicht.“

Frau Dreieck bemerkte, dass genau eine dieser Antworten nicht wahrheitsgemäß war. Warum können nicht alle Aussagen wahr sein? Wem passierte das Missgeschick, wenn genau eine Antwort falsch und die beiden anderen Aussagen wahr waren? Begründe.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz. Herrn Raute passierte das Missgeschick.

Herleitung: Herr Raute behauptet das Gegenteil von Kreisa, und Kreisa behauptet das Gegenteil von Herrn Raute. Damit können beide Aussagen nicht gleichzeitig wahr sein. Da genau eine Antwort falsch war, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: Wir suchen nach einer Lösung, wenn die Aussage von Herrn Raute falsch war. Da nur eine falsche Aussage gab, sind die beiden anderen Aussagen wahr. Also ist die Antwort von Quadrato richtig: Quadrato war es nicht und Kreisa war es auch nicht. Dann kann es nur Herr Raute gewesen sein. Wenn das Missgeschick Herrn Raute passierte, ist auch die Aussage von Kreisa wahr.

Möglichkeit 2: Wir suchen nach einer Lösung, wenn die Aussage von Kreisa falsch war. Da es nur eine falsche Aussage gab, ist sowohl die Antwort von Herrn Raute wahr („Quadrato war es“) als auch die Aussage Quadrato wahr (“Quadrato war es nicht“). Doch es können diese Antworten von Herrn Raute und Quadrato nicht gleichzeitig wahr sein. Deshalb führt die Möglichkeit 2 zu keiner Lösung.

****

Aufgabe 4. Kreisa zeichnet gern. Sie hat deshalb von drei Pilzsorten Bilder gezeichnet: 1 Bild mit Steinpilzen, 2 Bilder mit Rotkappen und 2 Bilder mit Maronen. Sie hängt die 5 Bilder in einer Reihe nebeneinander.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen kann Kreisa festlegen, wenn sie die 2 Bilder mit den Rotkappen nebeneinander hängt und auch die 2 Bilder mit den Maronen nebeneinander hängt? Gib alle möglichen Reihenfolgen an.

Wie viele verschiedene Reihenfolgen kann Kreisa festlegen, wenn sie an keiner Stelle Bilder mit der gleichen Pilzsorte nebeneinander hängt? Begründe deine Antwort.

Quadrato hat noch 5 Bilder mit Steinpilzen gezeichnet. Nun wollen sie alle 10 Bilder so aufhängen, dass an keiner Stelle Bilder mit der gleichen Pilzsorte nebeneinander hängen. Doch es gelingt nicht. Begründe, warum es nicht gelingen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz. Kreisa hat 6 verschiedene Möglichkeiten, die Bilder so anzuordnen, dass gleiche Motive nebeneinander hängen. Es gibt 12 verschiedene Möglichkeiten, die Bilder so anzuordnen, dass gleiche Motive nicht nebeneinander hängen.

Herleitung: Wir kürzen die Bildmotive mit dem Anfangsbuchstaben der Pilzsorte ab: Maronen M, Rotkappe R und Steinpilze S.

Teilaufgabe 1: Zunächst will Kreisa die Bilder mit gleichen Pilzsorten nebeneinander hängen. Sie kann deshalb nur die drei Gruppen S, MM und RR anordnen. Dafür gibt es 6 Möglichkeiten:

S MM RR,   S RR MM,   MM S RR,   RR S MM,   MM RR S,   RR MM S

Teilaufgabe 2: Sollen die Bilder mit gleichen Pilzsorten nicht nebeneinander hängen, gibt es insgesamt 12 Möglichkeiten.

Wenn sie mit S beginnt, kann sie mit M oder R fortsetzen. In beiden Fällen ist die weitere Reihenfolge festgelegt, nämlich:

S M R M R oder S R M R M

Wenn sie mit M beginnt, kann sie mit S oder R fortsetzen. Danach gibt es 5 verschiedene Reihenfolgen:

M S R M R, oder M R M R S, M R M S R, M R S M R, M R S R M

Auch wenn sie mit R beginnt, gibt es 5 Möglichkeiten, denn sie kann M durch R und R durch M ersetzen:

R S M R M oder R M R M S, R M R S M, R M S R M, R M S M R

Somit hat Kreisa insgesamt (2 + 5 + 5 =) 12 Möglichkeiten, die zweite Aufgabenstellung zu erfüllen.

Lösungsvariante zu den Teilaufgaben 1 und 2: Beide Aufgaben können wir auch lösen, wenn wir zunächst alle möglichen Reihenfolgen der 5 Bilder aufschreiben, ohne auf zusätzliche Bedingungen zu achten. Dafür gibt es 30 Möglichkeiten. Wir finden nämlich 6 Möglichkeiten, die Bilder mit R und M anzuordnen:

M M R R, M R M R, M R R M, R M M R, R M R M, R R M M

Nun können wir bei jeder dieser Reihenfolgen das Bild S an 5 verschiedenen Plätzen einordnen:

S an 1. Stelle S M M R R, **S M R M R**, S M R R M, S R M M R, **S R M R M**, S R R M M

S an 2. Stelle M S M R R, **M S R M R**, M S R R M, R S M M R, **R S M R M**, R S R M M

S an 3. Stelle M M S R R, **M R S M R**, **M R S R M**, **R M S M R**, **R M S R M**, R R S M M

S an 4. Stelle M M R S R, **M R M S R**, M R R S M, R M M S R, **R M R S M**, R R M S M

S an 5. Stelle M M R R S, **M R M R S**, M R R M S, R M M R S, **R M R M S**, R R M M S

Nur bei den unterstrichenen Reihenfolgen hängen sowohl RR als auch MM direkt nebeneinander – das sind 6 Möglichkeiten.

Nur bei den fett geschriebenen Reihenfolgen hängen weder RR noch MM direkt nebeneinander – das sind 12 Möglichkeiten.

Teilaufgabe 3: Nun wollen wir sechs Bilder S verteilen. Damit nicht zwei Bilder mit S nebeneinander hängen, muss zwischen je zwei Bilder mit S mindestens ein Bild mit M oder R hängen. Wir benötigen deshalb 5 andere Motive für diese Zwischenräume. Wir haben aber nur 4 Bilder mit M oder R. Deshalb hängen mindestens zwei Bilder mit S direkt nebeneinander. Beispiel:

S	M/R	S	M/R	S	M/R	S	M/R	S	S

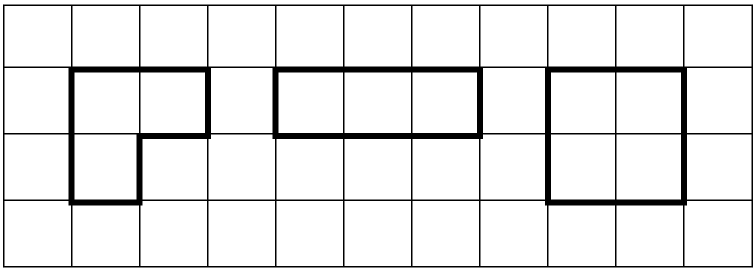
Es ist also nicht möglich, für diese 10 Bilder die Bedingungen der Aufgabenstellung zu erfüllen.

****

Runde 2 Noch einmal gut aufgelegt (Teil B)

Quadrato und Kreisa spielen wieder mit Legestäbchen. Alle Legestäbchen sind gleich lang. Sie legen damit verschiedene Figuren und achten darauf, dass dabei keine Legestäbchen übereinander liegen.

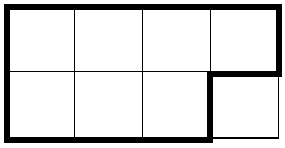
Diesmal haben sie Gitternetze gezeichnet, die aus vielen kleinen Quadraten bestehen, deren Seiten jeweils so lang wie ein Legestäbchen sind. Durch Auflegen von Legestäbchen können sie einige Quadrate umzäunen. Mit 8 Legestäbchen können sie zum Beispiel 3 oder 4 Quadrate umzäunen (siehe Abbildung).



Aufgabe 1a. Quadrato hat 12 Legestäbchen. Er möchte insgesamt 7 Quadrate umzäunen. Zeige, wie er die Legestäbchen anordnen muss, damit es gelingt.

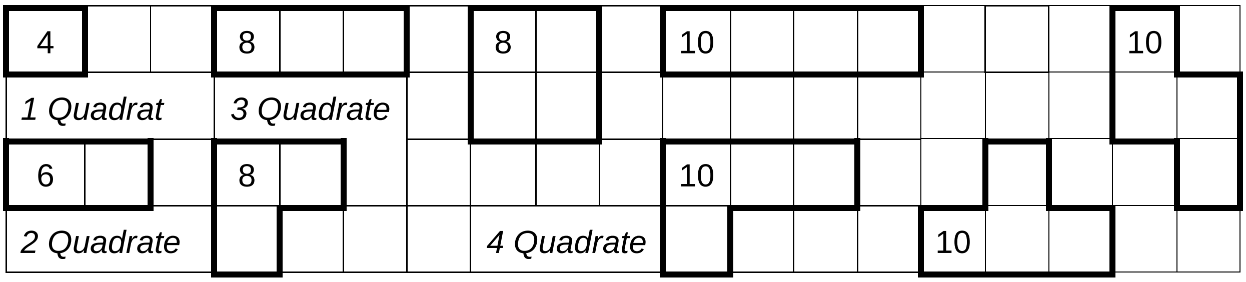
Aufgabe 1b. Finde die kleinste und die größte Anzahl von Quadraten, die Quadrato mit 12 Legestäbchen umzäunen kann. Zeige, wie er jeweils die Legestäbchen anordnen muss.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a). Bei dieser Aufgabe genügt es, ein korrektes Beispiel anzugeben:



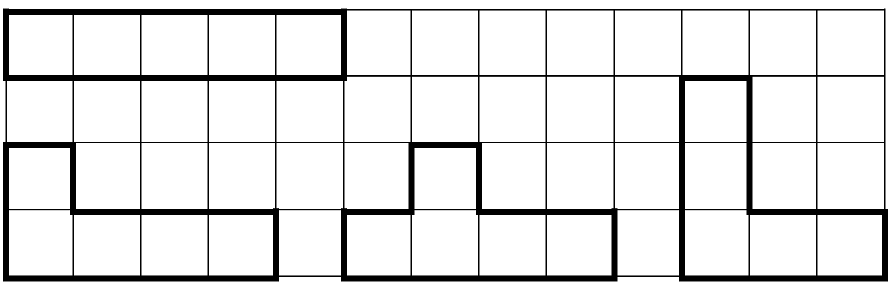
Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Mit 12 Legestäbchen können mindestens 5 Quadrate und höchstens 9 Quadrate umzäunt werden.

Herleitung: Wir probieren zunächst, möglichst wenige Quadrate zu umzäunen. Wir stellen fest, dass wir für maximal 4 umzäunte Quadrate höchstens 10 Legestäbchen benötigen. (In der Abbildung ist in jeder Fläche die Anzahl der verwendeten Legestäbchen angegeben.)

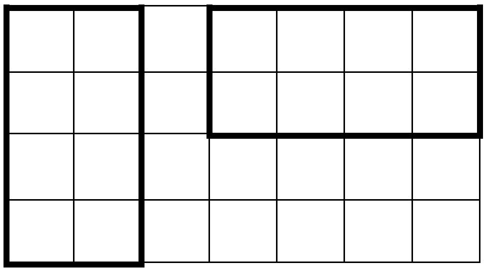


Somit werden wir mit 12 Legestäbchen stets mehr als 4 Quadrate umzäunen.

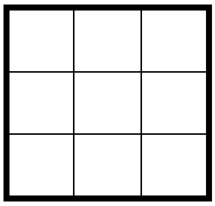
Wir probieren nun, ob wir mit 12 Legestäbchen 5 Quadrate umzäunen können. Dies gelingt uns und wir finden verschiedene Möglichkeiten. Zur Lösung der Aufgabe genügt es, eine Möglichkeit anzugeben.



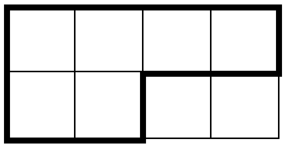
In Aufgabe 1a haben wir ein Beispiel gezeigt, wie mit 12 Legestäbchen 7 Quadrate umzäunt werden können. Schnell finden wir zwei Möglichkeiten, auch 8 Quadrate zu umzäunen:



Es ist sogar möglich, 9 Quadrate mit 12 Legestäbchen zu umzäunen:



Hinweis: Aus der Lösung mit 7 umzäunten Quadraten können wir leicht eine Lösung mit 6 umzäunten Quadraten bilden:



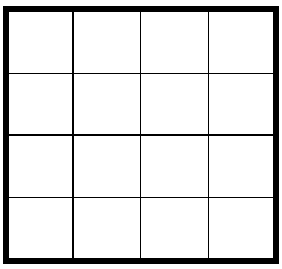
Somit haben wir sogar gefunden: Mit 12 Legestäbchen lassen sich alle Anzahlen von Quadraten zwischen 5 und 9 umzäunen.

****

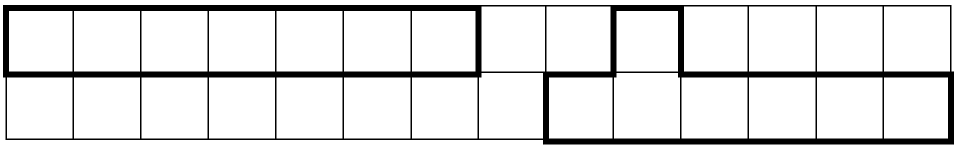
Aufgabe 2a). Kreisa nimmt 16 Legestäbchen und möchte eine möglichst große Anzahl von Quadraten umzäunen. Finde auch du eine möglichst große Anzahl umzäunter Quadrate und zeige, wie du die Legestäbchen dafür anordnen musst.

Aufgabe 2b). Kreisa behauptet, mit 16 Legestäbchen auch genau 7 Quadrate umzäunen zu können. Hat Kreisa recht und wie muss sie dafür die Legestäbchen anordnen? Oder hat Kreisa unrecht – in diesem Fall begründe, warum es nicht gelingen kann.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a): Wenn Kreisa die 16 Legestäbchen um eine Fläche mit 4x4-Quadraten legt, erreicht sie die maximale Anzahl von Quadraten, die sie umzäumen kann.



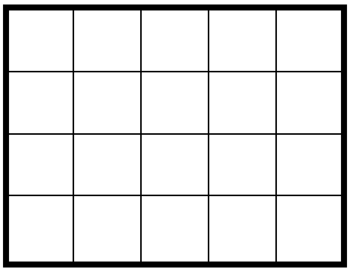
Lösungshinweise zu Aufgabe 2b): Kreisa hat recht, sie kann mit 16 Legestäbchen 7 Quadrate umzäunen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten. Zwei Beispiele sind:



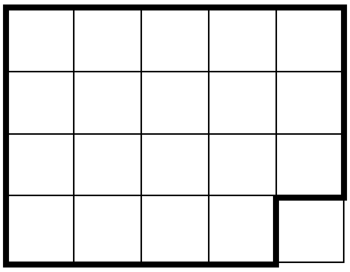
****

Aufgabe 3. Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa, wenn sie 19 Quadrate umzäunen möchte? Dabei versucht Kreisa möglichst wenige Legestäbchen zu verwenden. Zeige, wie Kreisa die Legestäbchen anordnen muss.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Wir haben in den Aufgaben 1b und 2a gesehen, dass besonders viele Quadrate umzäunt werden können, wenn diese Quadrate in einem Rechteck oder in einem Quadrat angeordnet sind. Wählen wir ein Gitter mit 5 x 4 - Quadraten, so benötigen wir 18 Legestäbchen, um diese 20 Quadrate zu umzäunen. „Knicken“ wir eine Ecke ein, so können wir mit diesen 18 Legestäbchen auch 19 Quadrate umzäunen:



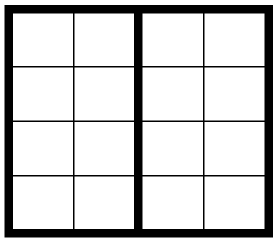
20 umzäunte Quadrate



19 umzäunte Quadrate

****

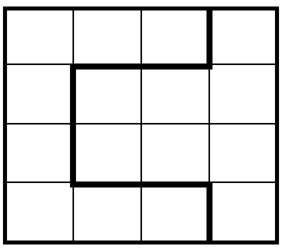
Aufgabe 4a. Kreisa und Quadrato haben eine quadratische Fläche mit 16 Quadraten markiert. Sie wollen in diese Fläche eine Trennlinie aus Legestäbchen legen, die diese Fläche in zwei Teile mit jeweils 8 Quadraten teilt. Mit 4 Legestäbchen ist es ganz einfach. Können sie es auch mit 8 Legestäbchen schaffen, eine Trennlinie in die Fläche zu legen, so dass beide Teile gleich viele Quadrate enthalten?

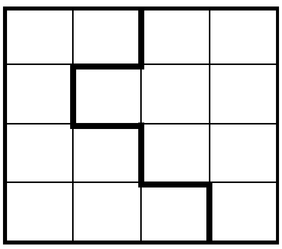


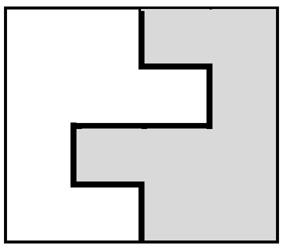
Finde zwei verschiedene Möglichkeiten für solche Trennlinien mit jeweils 8 Legestäbchen.

Aufgabe 4b. Kreisa und Quadrato haben wieder eine quadratische Fläche mit 16 Quadraten markiert. Sie wollen in diese Fläche eine Trennlinie aus Legestäbchen legen, die diese Fläche in zwei Teile mit jeweils 8 Quadraten teilt. Sie möchten nun eine möglichst lange Trennlinie legen. Was meinst du, wie viele Legestäbchen sie verwenden können? Zeichne eine Teilung, bei der möglichst viele Legestäbchen erforderlich sind.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a): Bei dieser Aufgabenstellung genügt es, zwei verschiedene Möglichkeiten für Trennlinien mit jeweils 8 Legestäbchen anzugeben, beispielsweise:

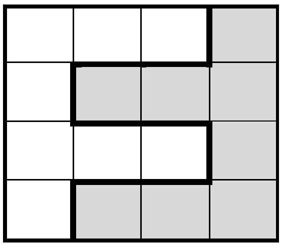


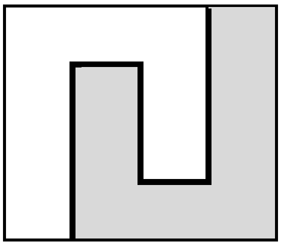




Hinweis. Bei allen drei Möglichkeiten umfasst jede Teilfigur wie gefordert genau 8 Quadrate. Aber nur bei dem rechten Beispiel sind die zwei Teilfiguren deckungsgleich. Wir können nämlich die graue Teilfigur so drehen, dass sie genau auf die weiße Teilfigur passt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b. Kreisa und Quadrato können eine quadratische Fläche mit 16 Quadraten so zerlegen, dass sie 10 Legestäbchen verwenden.





Hinweis. Bei beiden Möglichkeiten erzeugt die Teilung deckungsgleiche Teilfiguren.

****

Runde 3 So viele Frühlingsblumen (Teil A)

Aufgabe 1. Im Garten der Familie Geometrie stehen viele Krokusse. Sie leuchten weiß, gelb, blau und violett. Sie zählen die Blüten und stellen fest:

Frau Dreieck: „Es sind doppelt so viele gelbe wie weiße Krokusse.“
Kreisa: „Es sind fünf blaue Krokusse mehr als weiße Krokusse.“
Quadrato: „Die blauen und weißen Krokusse sind zusammen so viele wie die gelben und violetten Krokusse zusammen.“
Herr Raute: „Die Anzahl der blauen Krokusse ist so groß wie die Anzahl der gelben Krokusse.“

Wie viele Blüten jeder Farbe sind es? Begründe dein Ergebnis!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Es sind 5 weiße, 5 violette, 10 gelbe und 10 blaue Krokusblüten.

Wir kürzen die Farben der Krokusblüten mit ihren Anfangsbuchstaben ab:
w … weiß, g … gelb, b … blau, v …. violett.

Probe: Schreibe die gegebenen Aussagen als Gleichungen und setze die Werte ein.

Frau Dreieck:	$g = 2 \cdot w$	$10 = 2 \cdot 5$
Kreisa:	$b = w + 5$	$10 = 5 + 5$
Quadrato:	$b + w = g + v$	$10 + 5 = 10 + 5$
Herr Raute:	$b = g$	$10 = 10$

Alle Aussagen sind mit den gefundenen Werten erfüllt.

Herleitung: Die Lösung dieser Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren finden. Nutze dafür eine Tabelle und trage ein, wie viele Krokusse jeder Farbe es sind, wenn die Anzahl der weißen Krokusse bekannt ist.

Anzahl der Krokusse			
weiß	gelb: Aussage von Frau Dreieck	blau: Aussage von Kreisa	Vergleich Aussage von Herr Raute
w	g = 2 · w	b = w + 5	b = g ?
1	2 · 1 = 2	1 + 5 = 6	6 > 2
2	2 · 2 = 4	2 + 5 = 7	7 > 4
3	2 · 3 = 6	3 + 5 = 8	8 > 6
4	2 · 4 = 8	4 + 5 = 9	9 > 8
5	**2 · 5 = 10**	**5 + 5 = 10**	**10 = 10**
6	2 · 6 = 12	6 + 5 = 11	11 <12

Nur wenn es 5 weiße Krokusse sind, ist die Aussage von Herrn Raute richtig. Nun kannst du aus der Aussage von Quadrato noch die Anzahl der violetten Krokusse bestimmen: Wenn es gleich viele blaue wie gelbe Krokusse sind, müssen es auch gleich viele weiße wie violette Krokusse sein. Deshalb sind es 5 violette Krokusse.

Lösungsvariante: Verwende die Aussagen von Frau Dreieck und Kreisa:

$g = 2 \cdot w \qquad\qquad b = w + 5$

Wegen der Aussage von Herrn Raute ($b = g$) kannst du beide Gleichungen zusammenführen:

$2 \cdot w = w + 5$

Wenn du nun auf jeder Seite dieser Gleichung w subtrahierst, erhältst du das Ergebnis $w = 5$. Nun ist es einfach, die Anzahl der anderen Krokusblüten zu berechnen:

$g = 2 \cdot w = 2 \cdot 5 = 10$; $b = w + 5 = 5 + 5 = 10$; $v = w = 5$.

****

Aufgabe 2. Im Garten stehen viele Narzissen. Über die Anzahl der gelben Blüten werden folgende Aussagen gegeben:

Quadrato: „Es sind mehr als 23 Blüten.“
Kreisa: „Es sind weniger als 28 Blüten.“
Frau Dreieck: „Nein, es sind mehr als 27 Blüten.“
Herr Raute: „Es sind weniger als 25 Blüten.“

Doch etwas kann nicht stimmen – es können nicht alle vier Aussagen richtig sein. Welche Aussage muss falsch sein? Begründe es. Wenn bekannt ist, dass nur eine Aussage falsch ist und die anderen drei Aussagen wahr sind – wie viele Narzissen-Blüten im Garten zu sehen sind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Frau Dreieck gab eine falsche Aussage. Es sind 24 Blüten.

Begründung: Die Aussagen von Kreisa und Herrn Raute widersprechen der Aussage von Frau Dreieck – sie können also nicht gleichzeitig richtig sein. Da nur eine Aussage falsch ist, muss es die von Frau Dreieck sein. (Denn wäre die Aussage von Frau Dreieck wahr, gäbe es zwei falsche Aussagen, nämlich von Kreisa und von Herrn Raute.)

Trage die drei wahren Aussagen auf einem Zahlstrahl auf und markiere, ob dazu die Aussagen wahr (✓) oder falsch (×) sind:

	Aussage	Anzahl Blüten						
		23	**24**	25	26	27	28	29
Kreisa	< 28	✓	✓	✓	✓	✓	×	×
Quadrato	> 23	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Herr Raute	< 25	✓	✓	×	×	×	×	×

Nur wenn es 24 Blüten sind, sind die drei Aussagen alle wahr.

Lösungsvariante: Auch diese Aufgabe kannst du durch systematisches Probieren lösen. Prüfe für jede Anzahl von Blüten, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

Anzahl Blüten	Quadrato	Kreisa	Frau Dreieck	Herr Raute
	> 23 Blüten	< 28 Blüten	> 27 Blüten	< 25 Blüten
23	falsch	wahr	falsch	wahr
24	**wahr**	**wahr**	**falsch**	**wahr**
25	wahr	wahr	falsch	falsch
26	wahr	wahr	falsch	falsch
27	wahr	wahr	falsch	falsch
28	wahr	falsch	wahr	falsch

Nur wenn es 24 Blüten sind, sind genau drei Antworten wahr und genau eine Antwort falsch. Die falsche Antwort hat Frau Dreieck gegeben.

****

Aufgabe 3. Herr Raute hat Tulpenzwiebeln gekauft. Kreisa und Quadrato wollen diese in einer Reihe nebeneinander in die Erde stecken und dabei auf die Farbe der Tulpen achten, die auf den Verpackungen stehen: 3 weiße, 2 gelbe und 2 rote.

Aufgabe 3 (a). Kreisa möchte, dass es ganz bunt aussehen wird, Sie beginnt die Reihe mit rot und achtet darauf, dass an keiner Stelle zwei Tulpen einer Farbe nebeneinander stehen werden. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, die diese Bedingungen erfüllen? Gib alle möglichen Reihenfolgen an!

Aufgabe 3 (b). Quadrato möchte, dass immer links und rechts von einer roten Tulpe gleichfarbige Tulpen zu sehen sind. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, die diese Bedingungen erfüllen? Gib alle möglichen Reihenfolgen an!

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – Antwortsatz: Es gibt insgesamt 9 Möglichkeiten, die Tulpen so zu stecken, dass keine Tulpen gleicher Farbe nebeneinander stehen.

Kürze die Farben mit ihren Anfangsbuchstaben ab: w … weiß, g … gelb, r … rot. Schreibe nun alle Möglichkeiten auf.

Herleitung: Kreisa will insgesamt (3 + 2 + 2 =) 7 Zwiebeln stecken. Sie beginnt mit r. Schreibe dafür r??????.

Suche zunächst alle Möglichkeiten, wenn sie an die zweite Stelle g steckt (rg?????).

- Sie kann nicht mit g fortsetzen, weil dann gg nebeneinander steht (rgg????).
- Setzt sie mit r fort (rgr????), kann sie die 3 w und 1 g Tulpen nicht wie gewünscht stecken, weil auf vier Plätzen 3 w gesteckt werden müssten.
- Setzt sie mit w fort (rgw????), gibt es zwei Möglichkeiten, die Bedingungen zu erfüllen:

rgw gwrw   rgw rwgw

Suche nun alle Möglichkeiten, wenn sie an die zweite Stelle w steckt (rw?????).

- Sie kann nicht mit w fortsetzen, weil dann ww nebeneinander steht (rww????).
- Setzt sie mit r fort (rwr????), gibt es zwei Möglichkeiten, die Bedingungen zu erfüllen:

rwr wgwg   rwr gwgw

- Setzt sie mit g fort (rwg????), gibt es fünf Möglichkeiten, die Bedingungen zu erfüllen:

rwg wrwg   rwg wrgw   rwg wgwr
rwg wgrw   rwg rwgw

Insgesamt sind es also (2 + 2 + 5 =) 9 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Schreibe alle Möglichkeiten auf, die weißen Blüten aufzuteilen (so dass keine zwei w nebeneinander stehen), ohne auf die anderen Bedingungen zu achten:

(1)	r	w		w		w	
(2)	r	w		w			w
(3)	r	w			w		w
(4)	r		w		w		w

In Zeile (1) gibt es 3 Möglichkeiten: rwrwgwg   rwgwrwg   rwgwgwr
In Zeile (2) gibt es 2 Möglichkeiten: rwgwrgw   rwgwgrw
In Zeile (3) gibt es 2 Möglichkeiten: rwgrwgw   rwrgwgw
In Zeile (4) gibt es 2 Möglichkeiten: rgwrwgw   rgwgwrw

Insgesamt sind es also (3 + 2 + 2 + 2 =) 9 Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (b) – Antwortsatz: Es gibt insgesamt 9 Möglichkeiten, die Tulpen so zu stecken, dass links und rechts von einer roten Tulpe gleichfarbige Tulpen zu sehen sind.

Herleitung: Eine rote Tulpe kann nicht ganz links stehen, weil dann diese Tulpe keinen linken Nachbarn hat. Eine rote Tulpe kann auch nicht ganz rechts stehen, weil dann diese Tulpe keinen rechten Nachbarn hat. Es können auch beide roten Tulpen nicht nebeneinander stehen, weil dann eine Nachbartulpe rot ist und die andere Nachbartulpe eine andere Farbe hat.

Somit können die roten Tulpen nur wie in der Tabelle angegeben auf den sieben Plätzen verteilt sein:

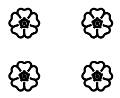
(1)		r		r			
(2)		r			r		
(3)		r				r	
(4)			r		r		
(5)			r			r	
(6)				r		r	

In Zeile (1) gibt es 1 Möglichkeit: wrwrwgg
In Zeile (2) gibt es 2 Möglichkeiten: wrwgrgw   grgwrww
In Zeile (3) gibt es 2 Möglichkeiten: wrwwgrg   grgwwrw
In Zeile (4) gibt es 1 Möglichkeit: gwrwrwg
In Zeile (5) gibt es 2 Möglichkeiten: wwrwgrg   wgrgwrw
In Zeile (6) gibt es 1 Möglichkeit: ggwrwrw

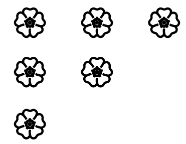
Also sind es insgesamt (1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 =) 9 Möglichkeiten.

****

Aufgabe 4. Frau Dreieck und Quadrato pflanzen Primel in ihre Beete.



Frau Dreieck möchte ihre Pflanzen in Dreiecks-form anordnen und hat bereits 6 Primel gepflanzt. Quadrato ordnet seine Pflanzen in quadratischer Form an und hat schon 4 Primel gepflanzt.

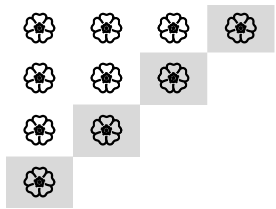


Aufgabe 4a). Kreisa bringt 9 weitere Primel-Pflanzen. Frau Dreieck und Quadrato teilen sich diese Pflanzen so, dass nach deren Einpflanzung die Primel wieder in Dreiecks- und Quadratform angeordnet waren. Wie viele Pflanzen haben nun Frau Dreieck und Quadrato jeweils in ihren Beeten?

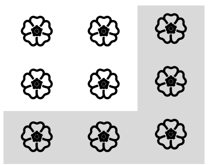
Aufgabe 4b). Kreisa bringt noch mehr Pflanzen, so dass insgesamt 25 Primel auf den Beeten gepflanzt werden können. Können Frau Dreieck und Quadrato diese Pflanzen so aufteilen, dass sie die Dreiecks- und Quadratform einhalten können?

Aufgabe 4c). Herr Raute behauptet, er könne so viele Pflanzen bringen, dass auf den zwei Beeten gleich viele Primel stehen, jedoch bei Frau Dreieck in Dreiecksform und bei Quadrato in Quadratform. Hat Herr Raute recht? Wie viele Pflanzen hätten dann Frau Dreieck und Quadrato jeweils in ihren Beeten?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Frau Dreieck hat nun 10 Primel und Quadrato hat 9 Primel gepflanzt.



Herleitung: Frau Dreieck hat bereits 6 Primel gepflanzt. Wenn sie noch weitere 4 Primel pflanzt (grau markiert), kann sie wieder die Dreiecksform einhalten.



Quadrato hat bereits 4 Primeln gepflanzt. Wenn er weitere 5 Primel pflanzt (grau markiert), kann er wieder die Quadratform einhalten.

Insgesamt können also beide gemeinsam entsprechend den gestellten Bedingungen weitere (4 + 5 =) 9 Primel pflanzen.

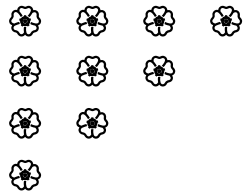
Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Quadrato kann 4 Primel in Quadratform pflanzen. Frau Dreieck kann 21 Pflanzen in Dreiecksform pflanzen.

Herleitung: Untersuche zuerst, wie viele Primel Quadrato pflanzen könnte, wenn 25 Pflanzen zur Verfügung stehen und er die Quadratform einhält.

Anzahl Pflanzen je Seite	1	2	3	4	5
Anzahl Pflanzen im Quadrat	$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 2 = 4$	$3 \cdot 3 = 9$	$4 \cdot 4 = 16$	$5 \cdot 5 = 25$

Wenn Quadrato seine Primel in Quadratform pflanzt, kann er also 1, 4, 9, 16 oder 25 pflanzen.

Nun untersuche, wie viele Primel Frau Dreieck pflanzen kann, wenn 25 Pflanzen zur Verfügung stehen und sie die Dreiecksform einhält.



Es könnte 1 Primel sein. Wenn sie eine zweite Reihe pflanzt, sind es 2 Primel mehr. Wenn sie eine dritte Reihe pflanzt, sind es 3 Primel mehr. Wir setzen diese Berechnung fort:

Anzahl Reihen	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Pflanzen im Dreieck	1	1 + 2 = 3	3 + 3 = 6	6 + 4 = 10	10 + 5 = 15	15 + 6 = 21	21 + 7 = 28

Wenn Frau Dreieck ihre Primel in Dreiecksform pflanzt, kann sie 1, 3, 6, 10, 15 oder 21 Primel pflanzen.

Probiere nun, ob eine Aufteilung von 25 Primel gelingt, wenn Quadrato bereits eine Quadratform gepflanzt hat:

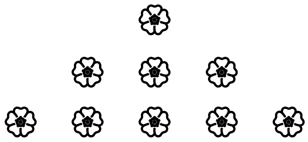
Quadrato	1	4	9	16	25
Anzahl Pflanzen für Frau Dreieck	25 - 1 = 24	25 - 4 = 21	25 - 9 = 16	25 - 16 = 9	25 - 25 = 0
Ist Dreiecksform erfüllbar?	nein	ja	nein	nein	ja

Wenn Quadrato 4 Primel pflanzt, kann Frau Dreieck 21 Primel in Dreiecksform pflanzen.

Allerdings hast du bestimmt festgestellt, dass dafür Quadrato von seiner Bepflanzung nach Aufgabe (a) wieder Primel umpflanzen muss.

Quadrato könnte auch 25 Primel in Quadratform pflanzen und dafür alle Primel von Frau Dreieck mit verwenden. Dann hätte aber Frau Dreieck keine Primel für ihr Beet. Diese Aufteilung ist deshalb keine Lösung der Aufgabe.

Auch wenn in der nebenstehenden Abbildung die Pflanzen wie in einem Dreieck stehen, so ist es eine andere Dreiecksform, wie sie Frau Dreieck geplant hat.



Quadrato soll seine Pflanzen auch nicht in zwei (oder mehr) Quadrate pflanzen, weil es insgesamt nicht mehr nach einer Quadratform aussieht.

Wenn diese Abweichungen zulässig wären, gibt es auch Lösungen – prüfe es!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4c) – Antwortsatz: Herr Raute hat recht. Frau Dreieck und Quadrato können jeweils 36 Primeln Pflanzen.

Herleitung: Setze die Berechnung der Anzahlen der Pflanzen in Quadratform fort:

Anzahl Pflanzen je Seite	6	7	8
Anzahl Pflanzen im Quadrat	**6 · 6 = 36**	7 · 7 = 49	8 · 8 = 64

Setze auch die Berechnung der Anzahlen der Pflanzen in Dreieckform fort:

Anzahl Reihen	7	8	9
Anzahl Pflanzen im Dreieck	21 + 7 =28	**28 + 8 = 36**	36 + 9 = 45

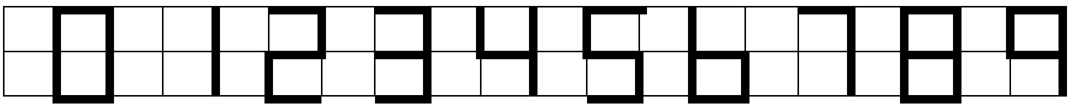
Du erkennst, dass für 36 Pflanzen sowohl die Quadratform als auch die Dreiecksform für die Pflanzung möglich ist.

****

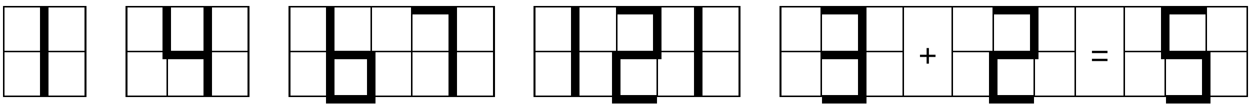
Runde 3 Zahlen legen (Teil B)

Wieder spielen Quadrato und Kreisa mit gleichlangen Legestäbchen und denken sich verschiedene Aufgaben aus. Kreisa schlägt vor, Zahlen zu legen. Da mit Legestäbchen keine Rundungen gelegt werden können, gibt sie vor, wie die Ziffern von 0 bis 9 aussehen sollen:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9



Nun legen sie einstellige oder mehrstellige Zahlen. Mehrstellige Zahlen sollen nicht mit 0 beginnen. Sie können mit den Zahlen auch Additionsaufgaben legen, wobei jedoch das Plus-Zeichen und das Gleichheitszeichen geschrieben werden (also nicht mit Legestäbchen zu legen sind). *Beispiele:*

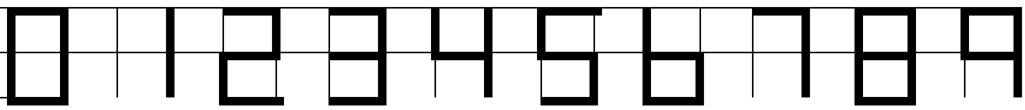


einstellig (1 , 4) *zweistellig (67)* *dreistellig (121)* *Additionsaufgabe (3 + 2 = 5)*

Aufgabe 1 (a). Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa insgesamt, um alle zehn Zahlen von 0 bis 9 gleichzeitig aufzulegen?

Aufgabe 1 (b). Wie viele Legestäbchen benötigt Kreisa mindestens, damit sie jede zweistellige Zahl, die sich Quadrato aussucht, legen kann? (Natürlich muss sie für manche Zahlen nicht alle Legestäbchen verwenden.)

Hinweis zu Aufgabe 1: Um die Aufgaben zu lösen, zähle zuerst, wie viele Legestäbchen für jede einstellige Zahl (auch Ziffer genannt) erforderlich sind:



Zahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Legestäbchen	6	2	5	5	4	5	5	3	7	5

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a) Antwortsatz: Kreisa benötigt insgesamt 47 Legestäbchen, um alle zehn Ziffern von 0 bis 9 gleichzeitig aufzulegen.

Herleitung: Addieren die 10 Anzahlen der Legestäben.

$$6 + 2 + 5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 3 + 7 + 5 = 47.$$

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b) – Antwortsatz: Kreisa benötigt mindestens 14 Legestäbchen, damit sie jede zweistellige Zahl, die sich Quadrato aussucht, legen kann.

Begründung: Für die Zahl 8 werden die meisten Legestäbchen benötigt, nämlich 7 Legestäbchen. Deshalb sind für Kreisa so viele Legestäbchen erforderlich, damit sie die Zahl 88 legen kann: 7 + 7 = 14. Für alle anderen zweistelligen Zahlen bleiben Legestäbchen übrig.

****

Aufgabe 2 (a). Welche Zahlen kann Quadrato mit sechs Legestäbchen legen, wenn er für jede dieser Zahlen jeweils alle sechs Legestäbchen verwenden soll?

Aufgabe 2 (b). Kreisa behauptet, es gibt mehr als 15 Zahlen, die mit sieben Legestäbchen dargestellt werden. Hat sie Recht? Begründe deine Antwort.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a) – Antwortsatz: Quadrato kann mit 6 Legestäbchen die Zahlen 0, 14, 41, 77, 111 legen.

Herleitung: Unter den Ziffern benötigt nur die Zahl 0 genau 6 Legestäbchen.

Will Quadrato eine zweistellige Zahl legen, muss er die 6 Legestäbchen auf zwei Anzahlen aufteilen. Das geht nur mit

6 = 1+ 5 = 5 + 1 = 2 + 4 = 4 + 2 = 3 + 3.

- Es gibt keine Ziffer mit nur einem Legestäbchen.
- Nur die Ziffer 1 kann mit zwei Legestäbchen gelegt werden. Dazu passt, dass die Ziffer 4 mit vier Legestäbchen gelegt werden kann (14, 41).
- Schließlich gibt es nur die Ziffer 7, die mit drei Legestäbchen gelegt werden kann (77).

Will Quadrato eine dreistellige Zahl legen, muss er die Anzahl 6 in drei Summanden aufteilen. Da es aber keine Ziffer gibt, die nur ein Legestäbchen benötigt, gelingt diese Aufteilung nur mit 6 = 2 + 2 + 2. Nur die Ziffer 1 kann mit zwei Legestäbchen gelegt werden (111).

Mehr als drei Ziffern kann er mit 6 Legestäbchen nicht gleichzeitig legen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b) – Antwortsatz: Kreisa hat Recht. Sie findet 16 Zahlen, die sie mit 7 Legestäbchen legen kann: 8, 12, 21, 13, 31, 15, 51, 16, 61, 19, 91, 47, 74, 117, 171, 711.

Begründung: Es genügt, 16 geeignete Zahlen anzugeben, und zu zeigen, dass diese jeweils mit genau 7 Legestäbchen gelegt werden können.

Zahl	8	12; 21	13; 31	15; 51	16; 61	19; 91
Legestäbchen	7	2 + 5 = 7	2 + 5 = 7	2 + 5 = 7	2 + 5 = 7	2 + 5 = 7

Zahl	47; 74	117; 171; 711
Legestäbchen	4 + 3 = 7	2 + 2 + 3 = 7

****

Aufgabe 3. Kreisa stellt fest, dass es richtig gerechnete Additionsaufgaben gibt, bei denen auch die Anzahl der aufzulegenden Legestäbchen übereinstimmt.

Ein Beispiel: 7 + 7 = 14. Sie benötigt auf der linken Seite der Gleichung zweimal drei Legestäbchen (für jede 7 drei) und auf der rechten Seite zwei Legestäbchen für die 1 und vier Legestäbchen für die 4. Links und rechts vom Gleichheitszeichen liegen also sechs Legestäbchen.

Aufgabe 3 (a). Gib zwei andere Additionsaufgaben an, die diese Eigenschaft haben.

Aufgabe 3 (b). Gib eine Additionsaufgabe mit dieser Eigenschaft an, bei der sowohl links als auch rechts vom Gleichheitszeichen zwei Summanden stehen. Jedoch soll keine der Zahlen mehrfach verwendet werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a). Es gibt viele Beispiele für Additionsaufgaben, bei denen auch die Anzahl der aufzulegenden Legestäbchen übereinstimmt. Hier nur eine kleine Auswahl:

Additionsaufgabe	Anzahl der Legestäbchen
3 + 7 = 10	5 + 3 = 8 = 2 + 6
4 + 16 = 20	4 + (2 + 5) = 11 = 5 + 6
5 + 17 = 22	5 + (2 + 3) = 10 = 5 + 5
6 + 14 = 20	5 + (2 + 4) = 11 = 5 + 6
7 + 19 = 26	3 + (2 + 5) = 10 = 5 + 5
9 + 19 = 28	5 + (2 + 5) = 12 = 5 + 7
11 + 14 = 25	(2 + 2) + (2 + 4) = 10 = 5 + 5
17 + 21 = 38	(2 + 3) + (5 + 2) = 12 = 5 + 7

Aufgaben mit zweistelligen Summanden kannst du leicht zu neuen Aufgaben verändern, indem du eine Hunderterstelle einfügst:

Additionsaufgabe	Anzahl der Legestäbchen
211 + 14 = **2**25	(5 + 2 + 2) + (2 + 4) = 15 = 5 + 5 + 5
117 + 21 = **1**38	(2 + 2 + 3) + (5 + 2) = 14 = 2 + 5 + 7

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b). Es gibt viele Beispiele für Additionsaufgaben, bei der sowohl links als auch rechts vom Gleichheitszeichen zwei Summanden stehen und die Anzahlen der aufzulegenden Legestäbchen übereinstimmen. Hier nur eine kleine Auswahl:

Additionsaufgabe	Anzahl der Legestäbchen
1 + 8 = 9 = 4 + 5	2 + 7 = 9 = 4 + 5
2 + 9 = 11 = 5 + 6	5 + 5 = 10 = 5 + 5
3 + 15 = 18 = 5 + 13	5 + (2 + 5) = 12 = 5 + (2 + 5)
7 + 0 = 7 = 3 + 4	3 + 6 = 9 = 5 + 4
10 + 4 = 14 = 6 + 8	(2 + 6) + 4 = 12 = 5 + 7

Weitere Additionsaufgaben findest du, wenn die links und rechts vom Gleichheitszeichen Zehner- oder Hunderterstellen einfügst, zum Beispiel:

Additionsaufgabe	Anzahl der Legestäbchen
11 + 8 = 19 = **1**4 + 5	(2 + 2) + 7 = 9 = (2 + 4) + 5
2 + **3**9 = 41 = **3**5 + 6	5 + (5 + 5) = 10 = (5 + 5) + 5

****

Aufgabe 4. Quadrato hat 15 Legestäbchen.

Aufgabe 4 (a). Wie lautet die kleinste dreistellige Zahl, die Quadrato legen kann, wenn er alle 15 Legestäbchen verwenden soll, aber die drei Ziffern dieser Zahl unterschiedlich sind?

Aufgabe 4 (b). Wie lautet die größte vierstellige Zahl, die Quadrato legen kann, wenn er alle 15 Legestäbchen verwenden soll, aber die vier Ziffern dieser Zahl unterschiedlich sind?

Lösungshinweise zu Aufgabe 4a) – Antwortsatz: Die kleinste dreistellige Zahl mit 15 Legestäbchen ist 108.

Probe: Für die Zahl 108 benötigt Quadrato (2 + 6 + 7 =) 15 Legestäbchen. Alle kleineren dreistelligen Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern können nicht mit 15 Legestäbchen gelegt werden:

102: 2 + 6 + 5 = 13;	103: 2 + 6 + 5 = 13;	104: 2 + 6 + 4 = 12;
105: 2 + 6 + 5 = 13;	106: 2 + 6 + 5 = 13;	107: 2 + 6 + 5 = 11.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4b) – Antwortsatz: Die größte vierstellige Zahl mit 15 Legestäbchen ist 9761.

Probe: Für die Zahl 9761 benötigt Quadrato (5 + 3 + 5 + 2 =) 15 Legestäbchen. Alle größeren vierstelligen Zahlen mit unterschiedlichen Ziffern können nicht mit 15 Legestäbchen gelegt werden:

Wenn die vierstellige Zahl mit 98?? beginnt, benötigt Quadrato für beide Ziffern bereits (5 + 7 =) 12 Legestäbchen. Es ist nicht möglich, mit den verbleibenden 3 Legestäbchen zwei weitere Ziffern zu legen.
Wenn die vierstellige Zahl mit 978? beginnt, benötigt Quadrato für diese drei Ziffern bereits (5 + 3 + 7 =) 15 Legestäbchen. Es sind deshalb keine Legestäbchen für die vierte Ziffer übrig.

Wenn die vierstellige Zahl mit 976? beginnt, benötigt Quadrato für diese drei Ziffern bereits (5 + 3 + 5 =) 13 Legestäbchen. Es sind deshalb nur zwei Legestäbchen für die vierte Ziffer übrig. Nur die Ziffer 1 kann mit zwei Legestäbchen gelegt werden. Bei jeder anderen Ziffer würde Quadrato mehr Legestäbchen benötigen.