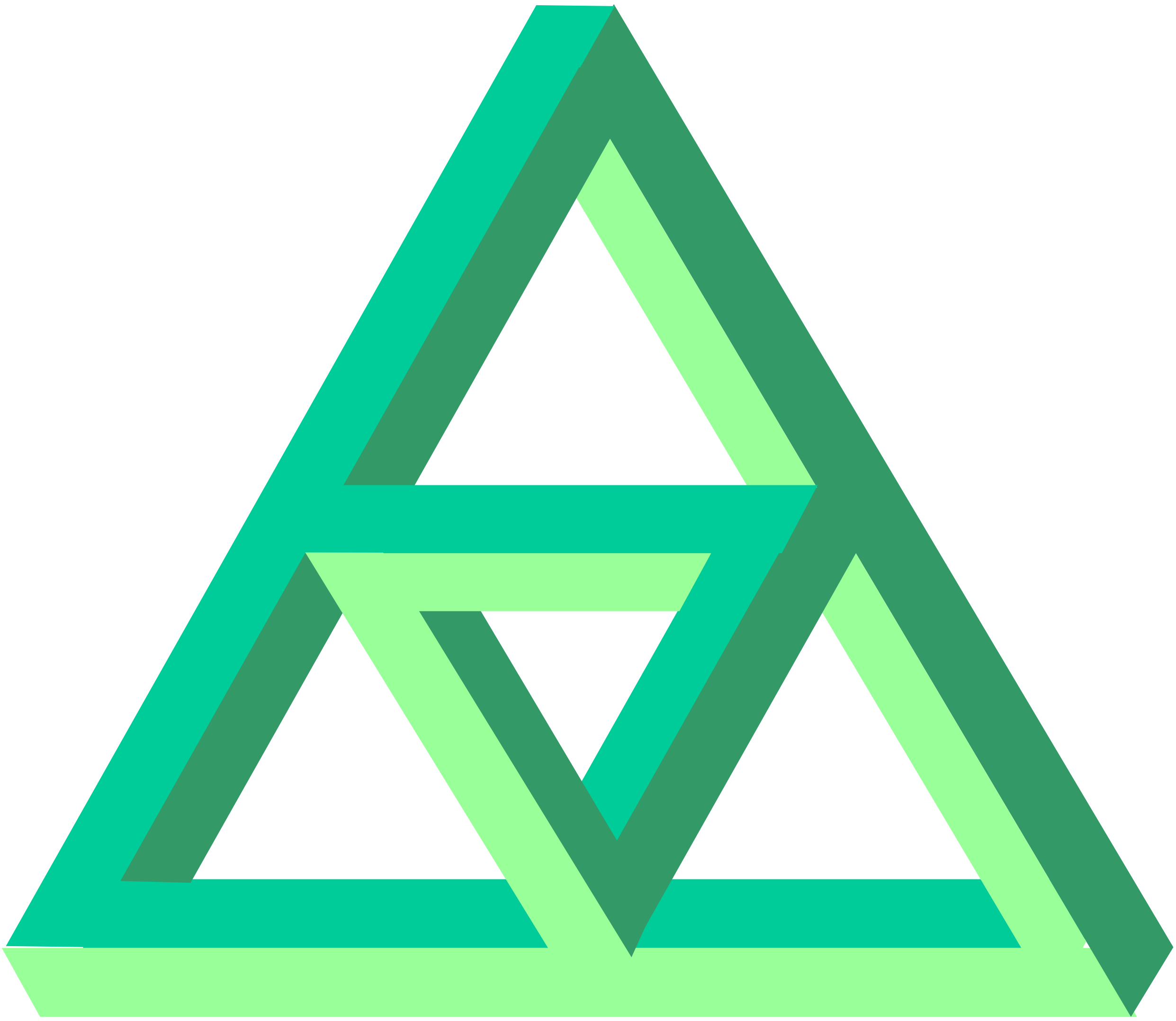
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 7/2023 (Juli/August 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Mit Bezug auf die Aufgaben **MO620941/MO621041** beginnen wir die Diskussion um Quersummen und Querprodukte, wie sie in MO-Aufgaben häufig zu finden sind. Im Allgemeinen lassen sie sich prägnant formulieren, und es werden keine mathematischen Sätze zur Lösung benötigt – ideal für einen erfolgversprechenden Wettbewerbseinstieg.

Im Beitrag zur Approximation von π bieten wir Unterhaltungsmathematik für die Ferienzeit. Mit einem Ansatz zur Konstruktion solcher Terme könnten aber Anregungen für selbständiges Forschen gegeben werden – auch wenn dabei keine elegant wirkenden Darstellungen entstehen. Aber vielleicht findet jemand eigene Zugänge zu dieser Fragestellung?

Wir beschreiben anhand von Aufgabenstellungen die Schwerpunkte der mathematischen Interessen- und Begabtenförderung: **Korrespondenzzirkel Mathematik** zur Vorbereitung der **Mathematik-Olympiaden**, **Bundeswettbewerb Mathematik** und **Bundeswettbewerb „Jugend forscht“.** Gern vertiefen wir diese Diskussion in weiteren zentralen Seminaren oder auf Anfrage an Gymnasien.

[1] www.mathematik-olympiaden.de

[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23.01 – Quersummen und Querprodukte

Der Einstieg zu den Aufgaben der Bundesrunde der 62. MO beinhaltete die Thematik „Quersummen". Für solche Fragestellungen lassen sich meist ohne Vorkenntnisse Lösungsansätze finden. Nicht zum ersten Mal in der Aufgabengeschichte wurde nach der Quersumme einer Summe von Zahlen gefragt.

Aufgabe 23.01 - MO620941/MO621041.

(a) Es seien a und b positive ganze Zahlen, jeweils mit Quersumme $Q(a) = Q(b) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $a + b$ annehmen?

(b) Es sei a eine positive ganze Zahl mit Quersumme $Q(a) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $2 \cdot a$ annehmen?

Es sei zunächst folgende Aufgabe betrachtet.

Aufgabe 23.02. Man beweise für alle natürlichen Zahlen *m* und *n* die Ungleichung

$$Q(m+n) \;\leq\; Q(m) \;+\; Q(n)$$

(dabei bezeichnet $Q(x)$ die Quersumme der natürlichen Zahl x).

Lösungshinweise: Anschaulich scheint die Behauptung einfach. Wir beobachten die Eigenschaft $Q(m+1) = Q(m) + 1$, falls für den Nachfolger von m kein Übertrag in der Einerstelle entsteht. Bei einem Übertrag verringert sich die Quersumme. Durch n-malige Addition von 1, also $Q(m + n \cdot 1)$, ist die Ungleichung schrittweise bewiesen, denn nach dem ersten Übertrag bei der Summenbildung verringert sich die Quersumme, ohne es wieder ausgleichen zu können.

In den Lösungshinweisen zur MO-Aufgabe wird ein algorithmischer Weg vorgeschlagen: Es seien $a_0, \ldots, a_k$ die Ziffern der Zahl m und $b_0, \ldots, b_k$ die Ziffern der Zahl n und $c_0, \ldots, c_k, c_{k+1}$ die Ziffern der Summe $m + n$ (wobei führende Nullen zugelassen sind). Der Algorithmus der Addition erfordert für jede Dezimalstelle

$$\begin{aligned}
&c_0 = a_0 + b_0 - 10 \cdot u_0\\
&c_1 = a_1 + b_1 + u_0 - 10 \cdot u_1\\
&\ldots\\
&c_{k+1} = u_k
\end{aligned}$$

Dabei sind u_i die bei der zifferweisen Addition entstehenden Überträge, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können. Wir addieren alle Zeilen und bestätigen die Behauptung:

$$\begin{aligned}
&Q(m+n) = c_0 + \ldots + c_{k+1} \;=\\
&a_0 + \cdots + a_k + b_0 + \cdots + b_k - 9 \cdot (u_0 + \cdots + u_k) \leq Q(m) + Q(n)
\end{aligned}$$

❑

Zur Lösung der aktuellen MO-Aufgabe verwenden wir den hergeleiteten Zusammenhang $Q(m+n) = Q(m) + Q(n) - 9 \cdot k$. Für die Teilaufgabe (a) ergibt sich daraus, dass wir für $Q(a+b)$ nur die Zahlenwerte $124 - 9k$ für nichtnegative ganze Zahlen k erhalten können.

Lösungshinweise zu MO620941 (a): Es gilt $Q(a) + Q(b) - 9k$, wobei k die Anzahl der Überträge in der schriftlichen Addition $a + b$ bezeichnet. Wegen $Q(a+b) \leq Q(a) + Q(b) = 124$ gilt $Q(a+b) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$.

Wir setzen $a = 5 \dots 51 \dots 1$ und $b = a$ mit k Fünfen und $62 - 5k$ Einsen (mit den Quersummen $Q(a) = Q(b) = 62$) für $k = 0, \dots, 12$. Für die Summe erhalten wir $a + b = 1 \dots 102 \dots 2$ mit k Einsen, $62 - 5k$ Zweien und eine 0. Die Quersumme beträgt $2 \cdot (62 - 5k) + k + 0 = 124 - 9k$ (es treten k Überträge auf).

Für den Fall mit $k = 13$ Überträgen setzen wir $a = 34444445555555$ und $b = 35555554444445$ mit je sechs Vieren und sieben Fünfen als Ziffern. Wir finden für beide Zahlen die Quersummen $Q(a) = Q(b) = 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 62$. Die Summe $a + b = 70000000000000$ hat die Quersumme 7.

$Q(a+b)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ annehmen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b): Im Teil (a) haben wir bereits die möglichen Quersummenwerte des Doppelten einer Zahl mit $Q(2 \cdot a) = 124 - 9k$ charakterisiert und für ganzzahliges k und $0 \leq k \leq 12$ Zahlenbeispiele angegeben.

Es bleibt zu zeigen, dass für $Q(2 \cdot a)$ die Quersumme 7 (also $k = 13$) nicht angenommen werden kann. In der Zifferndarstellung der Zahl a kann nur eine Ziffer $z \geq 5$ einen Übertrag hervorrufen. Für 13 Überträge müssen aber 13 solche Ziffern in dieser Zifferndarstellung vorkommen, woraus sich $Q(a) \geq 65$ ergibt.

$Q(2 \cdot a)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 12$ annehmen, also 7, 16, 25, …, 124. ❑

Aufgabe 23.03 – MO411023. Für jede natürliche Zahl n sei $q(n)$ die Quersumme von n und $d(n) = |q(n+1) - q(n)|$. Bestimmen Sie die Menge aller Werte, die $d(n)$ annimmt, wenn n alle natürlichen Zahlen durchläuft.

Lösungshinweise: Es sie n eine natürliche Zahl. Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. Die Zahl n endet nicht auf die Ziffer 9. In diesem Fall ist die letzte Ziffer von $n + 1$ um 1 größer als die letzte Ziffer von n. In allen vorangehenden Ziffern (falls es solche gibt) stimmen $n + 1$ und n überein. Also erhöht sich die Quersumme um 1, es ist $q(n+1) = q(n) + 1$ und folglich gilt $d(n) = 1$.

2. Die Zahl n endet auf genau k Ziffern 9 ($k > 0$). Vor den k Ziffern 9 steht eine von 9 verschiedene Ziffer. Wir bilden deren Summe $s(n)$. (Steht vor den k Ziffern 9 keine Ziffer mehr, so gilt $s(n) = 0$.) Damit finden wir $q(n) = s(n) + k \cdot 9$ und $q(n+1) = s(n) + 1$. Folglich gilt $d(n) = 9k - 1$.

Die gesuchte Menge aller Zahlen $d(n)$ enthält also genau die Zahl 1 und alle positiven Zahlen der Form $9k - 1$ mit ganzzahligem k. ❑

Aufgabe 23.04. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als die Quersumme ihres Nachfolgers $Q(n+1)$ durch 11 teilbar sind.

Lösungshinweise: Unter Verwendung des Ergebnisses aus Aufgabe 23.03 suchen wir die kleinste durch 11 teilbare Zahl m der Form $m = 9k - 1$. Durch systematisches Probieren finden wir dafür mit $k = 5$ den Wert $m = 44$. Daraus folgt, dass die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft auf fünf Ziffern 9 enden muss. Ist die Quersumme der vor diesen Ziffern 9 stehenden Ziffern gleich a (offenbar gilt $a > 0$), so erhalten wir $Q(n) = Q(a) + 5 \cdot 9 > 45$. Es muss also $a \geq 10$ gelten. Die Ziffernfolge 19 entfällt, weil dann n auf sechs Ziffern 9 enden würde. Die Ziffernfolge 28 erfüllt aber alle Bedingungen. Eine Probe bestätigt, dass 2899999 die Bedingungen erfüllt: $Q(2899999) = 2 + 8 + 5 \cdot 9 = 55$ und $Q(2900000) = 11$. ❑

Aufgabe 23.05. Finden Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die das Quadrat der Quersumme gleich der Quersumme des Quadrates ist, also $(Q(n))^2 = Q(n^2)$ gilt.

Lösungshinweise: Es sei n eine solche gesuchte Zahl mit $(Q(n))^2 = Q(n^2)$. Wir verwenden die Eigenschaft $Q(n) \leq n$ und die für positive ganze Zahlen r und s oben bewiesene Ungleichung $Q(r+s) \leq Q(r) + Q(s)$.

Betrachten wir einstellige Zahlen n, so gilt $Q(n) = n$ und deshalb muss auch $n^2 = Q(n^2)$ gelten. Das ist aber nur für $n^2 < 10$ möglich, also $n = 1, 2, 3$.

Setzen wir für eine zweistellige Zahl $n = 10a + b$ mit den Ziffern a und b ($a > 0$), so finden wir einerseits

$$Q(n)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

und andererseits

$$Q(n^2) = Q(100a^2 + 20ab + b^2) \leq Q(a^2) + Q(2ab) + Q(b^2) \leq a^2 + 2ab + b^2$$

Damit das Gleichheitszeichen gilt, müssen alle Summanden jeweils kleiner als 10 sein. Das bedeutet aber, nur die Zahlen 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30 und 31 genügen der geforderten Gleichung.

Sind nun $a_k, \dots, a_1, a_0$ die Ziffern der $(k+1)$-stelligen Zahl n, also $n = \sum_{i=0}^{k} 10^i \cdot a_i$ mit $Q(n) = a_k + \ \dots + \ a_1 + a_0$, so lässt sich die Aussage verallgemeinern: Alle Zahlen n, deren Ziffern die folgenden Bedingungen erfüllen, sind Lösung der geforderten Gleichung: $a_i^2 < 10$ für alle $i = 0, \dots, k$ und $2 \cdot a_i \cdot a_j < 10$ für alle $i, j = 0, \dots, k$ mit $i \neq j$. ❑

Aufgabe 23.06. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, so dass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $Q(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: Es gilt $Q(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form

12; 1212; 12121212; 1212121212121212; ...

diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhalten wir durch Multiplikation mit einem Faktor der Form (in geeigneter Länge) 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch $100\ldots001 \cdot t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Aufgabe 23.07. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen n.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ (d.h. $n = \underbrace{1 \dots 1}_{9-mal}$) fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr. Kommen wir mit diesen Beispielen schon auf einen geeigneten Ansatz? Wohl eher nicht!

Ohne Herleitung sei hier nur angegeben: Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Gemeint sind also folgende Zahlen:

$$p = 1 \Rightarrow k = 100 \qquad \Rightarrow n = 10000$$
$$p = 2 \Rightarrow k = 10100 \qquad \Rightarrow n = 102010000$$
$$p = 3 \Rightarrow k = 100010100 \Rightarrow n = 10002020102010000$$

Wir müssten nun „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$-mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Wettbewerbe: Bundesrunde der 62. Mathematik-Olympiade

Die Bundesrunde der 62. Mathematik-Olympiade fand vom 11. bis 14. Juni 2023 in Berlin statt. Die Veranstaltung stand unter der Schirmherrschaft der Senatorin für Bildung, Jugend und Familie des Landes Berlin, Katharina Günther-Wünsch. Der Verein Mathematikolympiaden in Berlin e.V. (http://www.mathematikolympiaden-berlin.de/) organisierte den Wettbewerb und gestaltete nach letztmalig 2000 erneut das Treffen der rund 200 Teilnehmenden. Unter www.mo2023.de sind vielfältige Informationen und Impressionen verfügbar.

Am Sonntag, dem Anreisetag, traf man sich in der Jugendherberge Berlin-Ostkreuz. Die beiden Klausuren wurden am Montag und Dienstag im Immanuel-Kant-Gymnasium geschrieben. An beiden Tagen bot ein reichhaltiges Freizeitprogramm den Teilnehmenden am Nachmittag bzw. den Korrektoren am Vormittag viel Sehenswertes in Berlin. Am Dienstag trafen sich alle zum Begegnungsabend im Stadion „An der Alten Försterei“, der Heimat des Bundesligisten FC 1. Union Berlin. Die Abschlussveranstaltung mit der feierlichen Siegerehrung fand im Emil-Fischer-Hörsaal der Humboldt-Universität zu Berlin statt.

Wie üblich gingen 192 Jugendliche aus allen 16 Bundesländern sowie weiteren Jugendliche aus deutschen Auslandsschulen an den Start. Der Freistaat Sachsen war mit 12 Schülerinnen und Schülern dabei.

Es wurden in den Olympiadeklassen 8 bis 12 insgesamt 78 Preise[3] vergeben. Dies entspricht einem Anteil von 38% aller Teilnehmenden. Dazu kommen noch 26 Anerkennungsurkunden[4]. Die sächsische Mannschaft konnte wieder in der (inoffiziellen) Länderwertung eine vordere Position erreichen. Gemessen an der Summe der erreichten Wertungspunkte[5] belegte sie mit 19 Punkten gemeinsam mit Bremen und Hessen den 5. Platz. Niedersachsen mit 36 Wertungspunkten und Bayern mit 35 Wertungspunkten führen die Länderliste souverän an, gefolgt von Nordrhein-Westfalen (27 Wertungspunkte) und Sachsen-Anhalt (21 Wertungspunkte). Nach der bei Olympischen Spielen oft verwendeten Wertung entsprechend der Anzahl I., II. und III. Preise bedeuten für Sachsen zwei I. Preise, ein II. Preis und drei III. Preise den Platz 4 (insgesamt 6 Preise). Auch hier führen Niedersachsen (vier I. Preise, insgesamt 13 Preise), Bayern (drei I. Preise, insgesamt 13 Preise) und Nordrhein-Westfalen (zwei I. Preise, insgesamt neun Preise).

Den sächsischen Preisträgern unser ***herzlicher Glückwunsch*!**

[3] Ein weiterer 3. Preis wurde an einen Schüler (Kl. 8) von der Auslandschule in Warschau (Polen) vergeben.

[4] Die vollständige Liste ist unter www.mo2023.de verfügbar (Stand: 26.06.2023).

[5] I. Preis: 4 Punkte; II. Preis: 3 Punkte; III. Preis: 2 Punkte; Anerkennung: 1 Punkt.

I. Preis	TILMAN FERCHLAND (Kl. 8, Oswald-Gymn. Leipzig)
	OLIVER ECKSTÄDT (Kl. 9, Nexö-Gymn. Dresden)
II. Preise	TOBIAS PÖTZSCH (Kl. 9, Scholl-Gymn. Taura)
III. Preise	JIEOH AHN (Kl. 10, Nexö-Gymn. Dresden)
	Lukas Grinz (Kl. 10, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	TIM THIEME (Kl. 11, Kepler-Gymn. Chemnitz)
Anerkennung:	DAVID MAUERSBERGER (Kl. 8, Kepler-Gymn. Chemnitz)
	THEODOR LUDWIG SEIDEL (Kl. 8, Oswald-Gymn. Leipzig)

Die Bundesrunde 2024 wird vom 6. bis 9. Juni 2024 in Flensburg stattfinden.

Ferienkost – Kuriose Aufgabenstellungen der MO-Geschichte

Aufgabe MO201014.

Ein Würfelkörper ganz aus Glas
(10 Zentimeter Kantenmaß),
drin viele Punkte eingeschlossen.
Der Franz probiert schon unverdrossen,
sie allesamt genau zu zählen.
Der Peter sagt: ”Musst dich nicht quälen!
’s sind 26 mehr als 100,
und wenn es dich vielleicht auch wundert,
ich sag’ dir, dass es nicht gelingt,
dass man sie so drin unterbringt,
dass nicht ein Pärchen existier’
des Abstand kleiner ist als vier”
(Er meint natürlich Zentimeter.)
”Und dies beweis mir mal!” sagt Peter:
”Und ich verlange dann auch nicht
die Lösung dafür als Gedicht.”

Lösungshinweise:

Zehn Zentimeter ist das Kantenmaß
des Würfelkörpers ganz aus purem Glas.
Das heißt, es gibt dann immer 5^3
der Würfel von der Kantenlänge 2,
in die der Würfel sei zerlegt gedacht,
was in Gedanken keine Mühe macht.
Da 126 dargestellt
als $5^3 + 1$, weiß alle Welt,
dass zwei der Punkte letztlich man zum Schluss
im gleichen kleinen Würfel finden muss.
Nun fragt man nach dem Abstand maximal

in einem kleinen Würfel dieser Wahl.
Das muss die Raumdiagonale sein,
die nach Pythagoras man findet fein
als $2 \cdot \sqrt{3}$; und jetzt ist klar,
dass der Beweis schon fast vollendet war.
Denn $2 \cdot \sqrt{3}$ liegt unter 4,
und dies zu zeigen, überlass ich dir.

❑

Ferienkost – Approximation[6] von π

Es sind viele Möglichkeiten zur angenäherten Berechnung der Kreiskonstanten π bekannt. Ziel ist hierbei immer, eine hohe Genauigkeit der Näherung zu erreichen. Häufig wird zusätzlich diskutiert, wie schnell diese Annäherung erfolgt, d.h. beispielsweise, wie viele Summanden einer unendlichen Reihe oder wie viele Iterationen eines Verfahrens zur Berechnung notwendig sind.

Eine etwas ungewohnte Gütebewertung von Approximationen besteht im folgenden Ansatz:

Es sei X ein Term, der genau b Ziffern enthält und dessen numerischer Wert in den ersten c Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt. Dann bezeichnet der Quotient $G = \frac{b}{c}$ die Aufwandsgüte G von X für π.

Je kleiner der Gütewert G ist, um so geringer ist also der Ziffernaufwand zur Annäherung von

$$\pi \approx 3{,}1415926535\ 8979323846\ .$$

Beispiele:

(1) Die bereits von ARCHIMEDES VON SYRAKUS (ca. 287 - 212 v.u.Z.) benutzte Näherung $P_1 = \frac{22}{7} = 3{,}14|285\ldots$[7] erreicht mit 3 Ziffern eine Genauigkeit von 2 Nachkommastellen, also $G = 1{,}50$.

(2) Der Wert $P_2 = \sqrt{51} - 4 = 3{,}141|428\ldots$ erreicht mit 3 Ziffern bereits die Übereinstimmung in 3 Nachkommastellen ($G = 1{,}00$).

(3) In China war um 500 u.Z. die Näherung $P_3 = \frac{355}{113} = 3{,}141592|920\ldots$ bekannt. Mit 6 Ziffern wird eine Genauigkeit von 6 Nachkommastellen erreicht ($G = 1{,}00$). Den Gütewert können wir durch eine einfache Umformung verbessern: Stellen wir den

[6] Nach: Schwarz, St.: Aufgabe ι28. In: Wurzel (2003), Heft 1, S. 16-20.

[7] Der Strich | steht nach der letzten mit π übereinstimmenden Nachkommastelle.

Bruch mittels $P_4 = \frac{355}{5!\ -7}$ dar, genügen bereits 5 Ziffern und die Aufwandsgüte G sinkt auf 0,83.

(4) Auf Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920) geht die Näherung $P_5 = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{\frac{1}{4}} = 3{,}14159265|258\ldots$ zurück. Mit 9 Ziffern wird damit eine Genauigkeit von 8 Nachkommastellen erreicht ($G\ =\ 1{,}13$). Formen wir den Term zu $P_6 = \sqrt{\sqrt{97\frac{9}{22}}}$ um, so genügen dafür bereits 5 Ziffern ($G\ =\ 0{,}63$).

Bei den letztgenannten Umformungen zu P_4 bzw. P_6 erkennen wir das Potenzial, durch einstellige Operatoren wie Wurzelzeichen oder Fakultäten Ziffern zu sparen. So finden wir für

$$P_7 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}}}}}}}^{\sqrt{9!}} = 3{,}141|603\ldots$$

eine Aufwandsgüte von $G = 0{,}67$, oder für

$$P_8 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{7}}}}}}}}}}^{\sqrt{9!\ -\sqrt{\sqrt{4!}}}} = 3{,}1415926|308\ldots$$

sogar eine Güte von $G\ =\ 0{,}43$.

Ob folgendes Verfahren zu Näherungen mit beliebig kleiner Aufwandsgüte führt, ist nicht bekannt: Wir legen uns einen Fundus von Zahlen zwischen 2 und 4 an, die sich aus nur einer Ziffer bilden lassen.

- Das sind natürlich die Ziffern 2, 3 und 4.
- Hinzu kommen $\sqrt{5} \approx 2.23607, \sqrt{6} \approx 2.44949, \sqrt{7} \approx 2.64575, \sqrt{8} \approx 2.82843$.
- Mit zwei Wurzelzeichen gehören zu diesem Zahlenfundus auch $\sqrt{\sqrt{4!}} \approx 2.21336, \sqrt{\sqrt{5!}} \approx 3.30975$.
- Dies setzen wir fort. Beispielsweise nehmen wir dazu

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{6!}}} \approx 2.27597, \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9!}}}} \approx 2.22580 \text{ oder } \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4!!}}}}}} \approx 2.35375$$

usw. Wie sich solcherart konstruierte Zahlen auf dem Intervall [2; 4] verteilen, ist noch nicht untersucht. Vielleicht können wir damit jede reelle Zahl beliebig genau annähern?

Haben wir nun einen Term T_n, der n Ziffern enthält und mit π in mindestens n Nachkommastellen übereinstimmt, so bilden wir für $T_n > \pi$ den Quotienten $q = \frac{T_n}{\pi} > 1$ (andernfalls bilden wir den Kehrwert). Durch ausreichend häufiges Quadrieren erhalten wir einen Wert zwischen 2 und 4, etwa $2 \leq q^{2^k} < 4$. Für diesen suchen wir aus dem Fundus eine nahe gelegene Zahl w, ziehen entsprechend oft daraus die Quadratwurzel und finden eine neue Näherung $T_{n+1} = T_n / \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{w}}}}_{k\ Wurzeln}$

Diese enthält $n + 1$ Ziffern (weil ja mit w nur eine Ziffer dazukommt). Doch erhöht sich hierbei immer die Anzahl der übereinstimmenden Nachkommastellen?

Beispiel: Wir starten mit der Näherung $P_4 = \frac{355}{5!-7}$.

$$T_1 = \frac{355}{5!\ -7} \approx 3{,}141592|920 > \pi \ \Rightarrow q = \frac{T_1}{\pi} \approx 1.000000084914.$$
$$q^{2^{23}} \approx 2.038690181726$$

Wir wählen $w = 2$ und verwenden $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{23\ Wurzeln} \approx 1.000000082630$ für den nächsten Term[8]:

$$T_2 = \frac{355}{(5! - 7) \cdot \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{23\ Wurzeln}} \approx 3.1415926|60765$$

Würden wir jedoch $w = \sqrt{5}$ und entsprechend $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}}_{24\ Wurzeln} \approx 1.000000095930$ für den nächsten Term verwenden, also

[8] Die Ziffern der Zahl 23 gehören nicht zur Darstellung sondern dienen lediglich zur Abkürzung der Wurzeltürme.

$$T_2' = \frac{355}{(5!-7)\cdot\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{5}}}}_{24\ Wurzeln}} \approx 3.1415926|18981$$

erhalten wir ebenfalls einen Term mit 6 Ziffern, der in 7 Nachkommastellen mit der Zahl π übereinstimmt.

Wer findet mit diesem Verfahren (oder mit anderen Lösungsansätzen) eine Näherung mit besonders kleiner Aufwandsgüte?[9]

Beim Anblick der obigen „Wurzeltürme" erscheinen Zweifel an der Aufwandsbewertung berechtigt. Alternativ sollte deshalb vereinbart werden, dass neben den Ziffern auch jedes Operationszeichen (also sowohl die Zeichen der Grundrechenarten $+, -, \cdot, :$ bzw. Bruchstrich als auch Wurzel- und Fakultätszeichen) gezählt wird. Mit dieser neuen Zählweise benötigen zum Beispiel

P_1 insgesamt 4 Ziffern/Zeichen,	2 Nachkommastellen	$(G^* = 2{,}00)$,
P_3 insgesamt 6 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 1{,}00)$,
$P_4 = T_1$ insgesamt 8 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 1{,}33)$,
T_2 insgesamt 32 Ziffern/Zeichen,	6 Nachkommastellen	$(G^* = 5{,}33)$,
P_8 insgesamt 19 Ziffern/Zeichen	7 Nachkommastellen	$(G^* = 2{,}71)$.

Damit werden die derart modifizierten Aufwandsgüten G^* wesentlich höher! Aber dennoch gelingen interessante Approximationen:

$$P_9 = \sqrt[5]{306 + \frac{5}{254}} = 3{,}14159265|411\ldots \qquad \text{(11 Zeichen, 8 Stellen, } G^* = 1{,}38\text{)},$$

$$P_{10} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3{,}14159265|258\ldots \qquad \text{(9 Zeichen, 8 Stellen, } G^* = 1{,}13\text{)},$$

$$P_{11} = \sqrt[18]{888582403} = 3{,}1415926535|758\ldots \quad \text{(12 Zeichen, 10 Stellen, } G^* = 1{,}20\text{)}.$$

Gibt es für diese modifizierte Aufwandsgüte Darstellungen mit einer Aufwandsgüte unter 1,00?

Seminar „Mathematik in Wettbewerben"

Eine Zusammenfassung des Seminarinhaltes vom 1. Juli 2023. Wir bedanken uns sehr herzlich bei der Wuttke Ingenieure GmbH Chemnitz[10] für die Unterstützung.

[9] Vorschläge werden gern unter bino@hrz.tu-chemnitz.de entgegengenommen.
[10] https://www.wuttke-ingenieure.de/

Sächsischer Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM) zur Vorbereitung auf die Wettbewerbe der Mathematik-Olympiade (MO): Die MO gilt in Sachsen als das Kernstück der Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik. Jährlich werden in vier Runden in jeder Klassenstufe 22 Wettbewerbsaufgaben gestellt – ein wahrer Fundus an Übungsmaterial! An Beispielen können wir erklären, wie mit den Aufgaben des KZM in sieben Serien pro Schuljahr sowohl das effiziente Finden eines Lösungsansatzes als auch die vollständige Lösungsdarstellung trainiert werden kann.

Grundsätzlich sollte davon ausgegangen werden, dass ab der 3. Stufe der MO (Landesausscheid) alle Teilnehmenden für die gestellten Aufgaben erfolgversprechende Lösungsstrategien finden und zu richtigen Ergebnissen kommen. Die Differenzierung des Starterfeldes wird also wesentlich durch die Lösungsdarstellung erfolgen. Es ist deshalb ein Anliegen des KZM, anhand von Aufgaben vergangener MO-Jahrgänge die Formulierungen zu trainieren. Die ersten beiden Aufgaben jeder Serie haben „Einstiegs-Charakter“: Die erste Aufgabe einer MO sollte im Allgemeinen den Einstieg in einen erfolgreichen Wettbewerb erleichtern. Die Aufgabenstellungen sind häufig kurz und knapp. Die Musterlösungen für die Korrektoren sind es meist ebenso, woraus zu schließen ist, dass keine wesentlichen Probleme erwartet werden.

Aufgabe. Entscheiden Sie, ob 99^{20} kleiner, gleich oder größer als 9999^{10} ist.

Lösungshinweise: Mit Anwendung der Potenzgesetze gilt

$9999^{10} = (99 \cdot 101)^{10} > (99 \cdot 99)^{10} = 99^{20}$, also finden wir $99^{20} < 9999^{10}$. ❑

Aufgabe KZM22/23-A1-2[11]. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $a^b + 7 = c$, wobei a, b und c Primzahlen sind.

Lösungshinweise: Da für Primzahlen a und b stets $a^b > 0$ gilt, ist die Primzahl $c > 7$ ungeradzahlig. Da 7 eine ungerade Zahl ist, muss folglich a^b geradzahlig sein, was $a = 2$ bedingt. Somit vereinfacht sich die Aufgabe zu $2^b + 7 = c$.

Für *b* = 2 erhalten wir mit $2^2 + 7 = 11$ eine Primzahl. Damit ist (2, 2, 11) eine Lösung der Aufgabe.

Es sei $b > 2$ und damit eine ungerade (Prim-) Zahl. Dann lässt sich *b* mit einer Zahl z ($z \geq 0$) darstellen als $b = 2 \cdot z + 1$ und somit gilt $2^{2z+1} = 2 \cdot 4^z$. Weil 4 bei Division durch 3 den Rest 1 lässt, lässt auch jede Potenz von 4 bei Division durch 3 den Rest 1. Somit lässt 2^b bei Division durch 3 den Rest 2. Nach Addition von 7 bleibt bei Division durch 3 der Rest 9, d.h. der Ausdruck $2^b + 7$ ist durch 3 teilbar und folglich keine Primzahl.

Es kann außer (2, 2, 11) keine weitere Lösung für die Aufgabenstellung geben. ❑

---

[11] Notation: **KZM**Schuljahr-**A**Serie-Aufgabennummer

Aufgabe MO390931[12]. Welche Paare (m, n) natürlicher Zahlen erfüllen die Gleichung $2^n + 1 = m^2$?

Lösungshinweise: Wir formen die gegebene Gleichung mithilfe der bekannten binomischen Formel um und erhalten

$$2^n = (m-1) \cdot (m+1)$$

Aufgrund der möglichen Faktorenzerlegung für 2^n (linke Seite der Gleichung) existieren zwei natürliche Zahlen $0 \leq n_1 < n_2$ mit $m - 1 = 2^{n_1}, m + 1 = 2^{n_2}, n_1 + n_2 = n$. Offenbar gilt $2^{n_2} - 2^{n_1} = 2$.

- Für $n_1 = 0$ gibt es keine natürliche Zahl n_2 mit $2^{n_2} = 2 + 2^0 = 3$.
- Für $n_1 = 1$ erfüllt $n_2 = 2$ die Gleichung $2^{n_2} = 2 + 2^1 = 4$.
- Ist $n_1 > 1$, so finden wir $4 \cdot (2^{n_2-2} - 2^{n_1-2}) = 2$ mit einem ganzzahligen Wert in der Klammer. Während die linke Seite dieser Gleichung durch 4 teilbar ist, ist die rechte Seite nicht durch 4 teilbar. Es kann also keine Lösung mit $n_1 > 1$ geben.

Somit finden wir als einzige Lösung $m = 3$ und $n = 3$. Die Probe bestätigt, dass (3, 3) tatsächlich Lösung ist, denn es gilt $2^3 + 1 = 9 = 3^2$. ❑

Aufgabe MO391031[13]. Untersuchen Sie, ob es Paare (a, b) natürlicher Zahlen gibt, die die Gleichung $\sqrt[3]{3^b + 1} = a$ erfüllen.

Lösungshinweise: Nach Einsetzen einiger Werte von b vermuten wir, dass es kein Lösungspaar gibt, denn wir finden für kleine b keine Kubikzahlen unter der Wurzel.

$$\sqrt[3]{3^0 + 1} = \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3^1 + 1} = \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3^2 + 1} = \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{3^3 + 1} = \sqrt[3]{28}.$$

Wenn es ein Lösungspaar (a, b) gäbe, so gilt für dieses $3^b = a^3 - 1$. Für die rechte Seite dieser Gleichung finden wir eine Faktorisierung, wie durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen nachgewiesen werden kann:

$$3^b = a^3 - 1 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1)$$

[12] *Hinweise zur Auswertung:* Die 34 Teilnehmer des Sächsischen Landesausscheides der Olympiadeklasse 9 erreichten bei dieser Aufgabe lediglich durchschnittlich 39,7% der möglichen Punkte, dagegen erhielten die 8 Preisträger durchschnittlich 72,9%.

[13] *Hinweise zur Auswertung:* Die 21 Teilnehmer des Sächsischen Landesausscheides der Olympiadeklasse 10 erreichten bei dieser Aufgabe lediglich durchschnittlich 33,3% der möglichen Punkte, dagegen erhielten die 6 Preisträger durchschnittlich 83,3%.

Aufgrund der möglichen Faktorenzerlegung für 3^b existieren zwei natürliche Zahlen $0 \leq b_1 < b_2$ mit $a-1=3^{b_1}, a^2+a+1=3^{b_2}, b_1+b_2=b$. Offenbar müssen wir $a=3^{b_1}+1$ wählen. Damit erhalten wir für den zweiten Faktor die Gleichung

$$3^{b_2}=(3^{b_1}+1)^2+(3^{b_1}+1)+1=3^{2b_1}+3\cdot 3^{b_1}+3=3\cdot(3^{2b_1-1}+3^{b_1}+1)$$

- Für $b_1=0$ gibt es keine natürliche Zahl b_2 mit $3^{b_2}=3\cdot\frac{7}{3}=7$.
- Ist $b_1>0$, so ist der ganzzahlige Wert in der Klammer der rechten Seite dieser Gleichungskette größer als 1, aber nicht durch 3 teilbar. Deshalb ist die rechte Seite der Gleichung keine 3er-Potenz und es kann keine Lösungen (a, b) geben.

❑

Die Aufgaben 3 und 4 jeder KZM-Serie sind typische MO-Aufgaben (oder davon abgeleitet) und dienen vor allem der Übung zur Lösungsdarstellung. Dagegen sollen die Wahlaufgaben 5A und 5B zur vertiefenden Beschäftigung mit einer Thematik anregen. Die Teilfragen (a) bis (c) können dabei unabhängig voneinander sein und die Vielfalt möglicher Untersuchungen andeuten.

Aufgabe KZM22/23-1-5B. Es sind n Punkte ($n>1$) so in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu verteilen, dass ihr Mindestabstand möglichst groß wird. Unter Mindestabstand d_n zwischen n Punkten einer gegebenen Verteilung wird die kleinste Länge von den insgesamt $\frac{1}{2}\cdot(n-1)\cdot n$ möglichen Verbindungsstrecken zwischen je zwei Punkten verstanden. Für $n=2$ ist die Lösung der Aufgabe trivial und man findet $d_2=\sqrt{2}$. Für $n=4$ erscheint $d_4=1$ als naheliegend, aber dafür ist bereits ein Beweis notwendig.

(a) Man gebe für $n=3$ eine Verteilung mit möglichst großem Mindestabstand d_3 an und bestimme die Größe von d_3 für das gewählte Beispiel.
(b) Man beweise, dass es eine Verteilung von $n=6$ Punkten gibt, sodass der Mindestabstand d_6 größer als 0.58 wird.
(c) Man finde eine Verteilung von $n=5$ Punkten, sodass der Mindestabstand d_5 maximal wird. Man zeige, dass es keine Verteilung gibt, die einen größeren Mindestabstand erreicht.

Manchmal werden in den Teilaufgaben Spezialfälle formuliert, die entweder bei der vollständigen Lösungsdiskussion gesondert zu betrachten sind oder die für die Lösungsfindung hilfreich sein können.

Aufgabe KZM22/23-2-5A. Von einem Kreis sind zwei voneinander verschiedene Punkte A und B und eine Tangente g gegeben. Man konstruiere den Kreis, falls

(a) der Punkt A auf g liegt.
(b) die Gerade durch A und B parallel zu g ist.

(c) die Gerade durch A und B die Tangente g in einem Punkt S schneidet, der von A und B verschieden ist.

Organisatorische Hinweise: Für die Teilnahme am KZM ist eine Anmeldung unter https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1 erforderlich, die spätestens mit der ersten Einsendung von Lösungen erfolgen muss. Es wird ein Unkostenbeitrag erhoben.

Bundeswettbewerb Mathematik (BWM): Die Resonanz auf den BWM ist in Sachsen zahlenmäßig weiterhin gering. Dabei ist dieses dreistufige Angebot gerade in der 1. Runde besonders reizvoll: die dreimonatige häusliche Bearbeitungszeit lässt viel Freiraum für Recherchen, zudem ist Gruppenarbeit zugelassen. Wir zeigen anhand von Beispielen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieses Wettbewerbs mit der MO.

Die erste Runde des BWM hat als Hausaufgaben-Wettbewerb natürlich ein anderes Anspruchsniveau als ein Klausurwettbewerb – die verschiedensten Hilfsmittel sind zugelassen (wobei die selbständige Bearbeitung Ehrensache ist und recherchierte Teilergebnisse zitiert werden müssen!). „Selbständig“ schließt aber ausdrücklich eine Gruppenarbeit mit bis zu drei Teilnehmenden ein, in der natürlich eine gemeinsame Lösungsdiskussion erfolgen kann. Trotz dieser organisatorischen Unterschiede finden wir Aufgaben im BMW, die auch in der MO gestellt werden könnten.

Aufgabe BWM/2023-1-2[14]. Bestimme alle Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen, die die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 3$$

erfüllen. (*Anmerkung:* Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen).

Lösungshinweise[15]: Aus Aufgaben der MO, in denen Terme der binomischen Formeln wie $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ auftreten[16], ist bekannt, dass wir durch Bildung vollständiger Quadrate die Lösungsmenge einschränken können. So ist es naheliegend, die gegebene Gleichung mit 2 zu multiplizieren und dann äquivalent zu

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 6$$

umzuformen. Da x, y und z ganze Zahlen sind, sind auch die paarweisen Differenzen ganzzahlig. Da zudem die Quadrate reeller Zahlen stets nicht negativ sind, können die

[14] Notation: **BWM/**Jahrgang-Runde-Aufgabennummer

[15] In Anlehnung oder übernommen aus den alljährlich veröffentlichten Lösungshinweisen, in denen zudem Lösungvarianten dargestellt sind. Als Literatur empfehlenswert: E. Specht, E. Quaisser, P. Bauermann (Hrsg.). 50 Jahre Bundeswettbewerb Mathematik – Die schönsten Aufgaben (2. Auflage). Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2020. ISBN 978-3-662-61165-4.

[16] siehe Thema 2

Quadrate der Differenzen nur die Werte 0, 1 oder 4 annehmen. Wir erkennen, dass sich die Zahl 6 aus diesen Quadratzahlen nur als Summe 6 = 1 + 1 + 4 darstellen lässt.

Weil die gegebene Gleichung in x, y und z symmetrisch ist, können wir o.B.d.A. $x \leq y \leq z$ annehmen[17]. Somit finden wir als Lösung $y - x = 1$, $z - y = 1$ und $z - x = 2$. Dies ist gleichbedeutend zu $x = y - 1$ und $z = y + 1$, d.h., x, y und z sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen. Eine Probe bestätigt, dass diese Tripel tatsächlich Lösungen sind, denn es gilt:

$$(y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 - (y-1)y - y(y+1) - (y-1)(y+1) =$$
$$(y^2 - 2y + 1) + y^2 + (y^2 + 2y + 1) - (y^2 - y) - (y^2 + y) - (y^2 - 1) = 3$$

Somit sind alle Zahlentripel, die aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen oder deren Permutationen, Lösungen der gegebenen Gleichung. ❑

Aufgabe BWM/2020-2-2. Beweise: Es gibt keine rationalen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

Lösungshinweise: Da der Umgang mit rationalen Zahlen aus der MO bekannt ist, führt ein Lösungsansatz zur Darstellung der rationalen Zahlen zu Brüchen $x = \frac{a}{c}$ und $y = \frac{b}{c}$ mit ganzen Zahlen a, b, c $(c > 0)$, die durch Kürzen der Brüche so gefunden werden können, dass ihr größter gemeinsamer Teiler $ggT(a, b, c)$ gleich 1 ist. Wegen $x + y = -z$ finden wir nun die zu erfüllende Gleichung in der Form

$$a^2 + ab + b^2 = 2 \cdot (5c)^2.$$

Wir stellen fest: Wären a und b beide geradzahlig, dann ist c wegen $ggT(a, b, c) = 1$ ungeradzahlig. Dann wäre aber die linke Seite der Gleichung durch 4 teilbar, die rechte Seite aber nur durch 2 und nicht durch 4.

Wären a oder b (oder beide) jedoch ungeradzahlig, so stehen auf der linken Seite entweder eine oder drei ungerade Summanden und somit eine ungerade Summe, im Widerspruch zur Geradzahligkeit der rechten Seite.

Es kann also keine Lösungen wie gefordert geben. ❑

Ein Vorteil in der Heimarbeit besteht darin, dass zur Lösungsfindung Rechentechnik eingesetzt werden darf. Wir können also viele Beispiele rechnen (und sind hierbei nicht auf mühsame, zeitaufwendige manuelle Erstellung von tabellarischen Übersichten angewiesen). In folgender Aufgabe erscheint der Rechenaufwand aber selbst durch Kopfrechnen beherrschbar.

[17] Für jede andere Ungleichungskette können wir die Variablen entsprechend umbenennen.

Aufgabe BWM/2022-1-1. Fünf Eichhörnchen haben zusammen einen Vorrat von 2022 Nüssen. Am ersten Tag kommen 2 Nüsse hinzu, am zweiten Tag 4 Nüsse, am dritten 6 Nüsse und so weiter, d.h. an jedem weiteren Tag kommen jeweils 2 Nüsse mehr hinzu als am Tag zuvor.

Am Ende irgendeines Tages teilen die Eichhörnchen den Vorrat untereinander auf. Ist es möglich, dass dabei alle gleich viele Nüsse erhalten und keine Nuss übrigbleibt?

Anmerkung: Die Nüsse bleiben beim Verteilen ganz. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise: Wir erstellen eine Tabelle mit der Anzahl der Nüsse nach jedem weiteren Tag.

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Nüsse davor	2022	2022	2024	2028	2034	2042	2052	2064	…
+ Nüsse	0	2	4	6	8	10	12	14	…
Nüsse gesamt	2022	2024	2028	2034	2042	2052	2064	2078	..

Wir vermuten anhand dieser Berechnungen, dass die Anzahl der Nüsse an keinem Tag auf 5 oder 0 endet (und damit durch 5 teilbar ist). Aber natürlich kann eine solche Aussage nicht durch (noch so viele) Beispiele beweisen werden. Wir müssen deshalb eine Struktur erkennen, die sich verallgemeinern lässt. Offenbar wird die Endziffer der Nussanzahl allein durch die Endziffern in der Tabelle bestimmt.

Tag		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
End-	Nüsse davor	2	2	4	8	4	2	2	4	8	4	2	…
ziffer	+ Nüsse	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	0	…
der	Nüsse gesamt	2	4	8	4	2	2	4	8	4	2	2	..

Jetzt erkennen wir die Regelmäßigkeit in den Spalten. Da die Angaben zu den Endziffern am Tag 5 mit den Angaben zu den Endziffern am Tag 0 vollständig übereinstimmen, wiederholen sich die Spalten in den Folgetagen immer wieder. Es tritt also in der unteren Zeile niemals eine 0 oder 5 auf. ❑

Aufgabe BWM/2020-1-4. Die Folge $\{a_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ ist rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 3, a_n = \max_{0<d<n} a_n \cdot a_{n-d} \;\; (n \geq 4)$$

Bestimme die Primfaktorenzerlegung von $a_{19702020}$.

Hinweis: Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise: Der Hinweis am Ende der Aufgabenstellung bedeutet, dass es nicht genügt, mittels eines Computerprogramms das Folgenglied $a_{19702020}$ zu berechnen und die zugehörige Primfaktorenzerlegung anzugeben. Da aber das Besondere am

Index (außer dass es zum Bezug „50 Jahre BWM von 1970 – 2020“ steht) nicht erkennbar ist, könnte eine Auflistung der nächsten Folgeglieder hilfreich sein. Dies wäre ohne Rechentechnik sehr aufwändig. Wir erhalten:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0	2	3	4	6	9	12	18	27	36
		2^1	3^1	2^2	$2^1 3^1$	3^2	$2^2 3^1$	$2^1 3^2$	3^3	$2^2 3^2$
					$3 \cdot a_2$	$3 \cdot a_3$	$3 \cdot a_4$	$3 \cdot a_5$	$3 \cdot a_6$	$3 \cdot a_7$

Die vierte Zeile der Tabelle finden wir erst, wenn wir einige Glieder ermittelt haben. Jetzt können wir vermuten: Für alle m gilt $a_{3m} = 3^m$ (entweder explizit aufgrund der dritten Zeile oder rekursiv aufgrund der vierten Zeile). Diese Vermutung ist aber nun noch ohne Verwendung von Rechentechnik zu beweisen, beispielsweise mit der Methode der vollständigen Induktion.

Schließlich kommen wir wegen $19702022 = 3 \cdot 6567340$ zu dem Ergebnis $a_{19702020} = 3^{6567340}$. ❑

Aufgabe BWM-2017-2-4. Eine natürliche Zahl nennen wir heinersch, wenn sie sich als Summe einer positiven Quadratzahl und einer positiven Kubikzahl darstellen lässt. Beweise: Es gibt unendlich viele heinersche Zahlen, deren Vorgänger und deren Nachfolger ebenfalls heinersch sind.

Lösungshinweise: Die sehr schwierige Aufgabe war ohne Computereinsatz wohl kaum lösbar, da zu Beginn nicht einmal gesichert scheint, dass es überhaupt solche Tripel gibt. Heinersche Zahlen finden wir aber schnell: $2 = 1^2 + 1^3$, $5 = 2^2 + 1^3$ oder $9 = 1^2 + 2^3$. Aber erst $126 = 1^2 + 5^3$, $127 = 10^2 + 3^3$, $128 = 8^2 + 4^3$ bilden das erste Tripel mit der geforderten Eigenschaft. Es folgen die Tripel 127, 128, 129 und 351, 352, 353.

Aus diesen und anderen gefundenen Beispielen eine allgemeine Konstruktionsvorschrift für (unendlich viele) Tripel zu generieren, war eine besondere Herausforderung. Aus der Beobachtung, dass es offenbar heinersche Tripel gibt, bei denen die Kubikzahlen aus aufeinanderfolgenden Zahlen bestehen, lässt sich ableiten: Für alle Lösungen (s, t) der Gleichung $s^2 - 13t^2 = 3$ (es gibt unendlich viele!) sind die drei Zahlen

$$H_1(t) = (4t^2 - 1)^3 + (10t^2)^2$$
$$H_2(t) = (4t^2)^3 + (2st)^2$$
$$H_3(t) = (4t^2 + 1)^3 + (2t^2)^2$$

heinersche Zahlen, die aufeinanderfolgend sind, was durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen noch zu beweisen ist. ❑

Aufgabe BWM/2021-1-2. Der Bruch $\frac{3}{10}$ kann auf genau zwei Arten als Summe zweier Stammbrüche[18] dargestellt werden: $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$.

a) Auf wie viele verschiedene Arten kann $\frac{3}{2021}$ als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden?
b) Gibt es eine nicht durch 3 teilbare positive ganze Zahl n mit der Eigenschaft, dass $\frac{3}{n}$ auf genau 2021 Arten als Summe zweier Stammbrüche dargestellt werden kann?

Erläuterung: Ein Stammbruch ist ein Bruch der Form $\frac{1}{z}$, wobei z eine positive ganze Zahl ist. Die Richtigkeit des Ergebnisses ist zu beweisen.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a): Wir suchen alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a \leq b$, für die $\frac{3}{2021} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$b = \frac{1}{\frac{3}{2021} - \frac{1}{a}} = \frac{2021a}{3a - 2021}.$$

Damit b eine positive ganze Zahl ist, muss a größer als 673 gewählt werden (wegen $3 \cdot 674 = 2022 > 2021$). Außerdem gilt für $a \leq b$ stets $\frac{3}{2021} \leq 2 \cdot \frac{1}{a}$, d.h. wir erhalten eine obere Abschätzung $a \leq \frac{4042}{3} < 1344$. Es genügt also, für alle ganzen Zahlen a mit $673 < a < 1344$ systematisch auszuprobieren, ob damit eine passende ganze Zahl b erhalten wird. Tatsächlich finden wir drei (bis auf Vertauschen der Reihenfolge der Summanden) verschiedene Arten der Darstellung mit zwei Stammbrüchen:

$$\frac{3}{2021} = \frac{1}{674} + \frac{1}{1362154} = \frac{1}{688} + \frac{1}{32336} = \frac{1}{1290} + \frac{1}{1410}.$$

Es genügt nun aber nicht, diese drei Darstellungsarten mit dem Hinweis anzugeben, dass keine weiteren Möglichkeiten gefunden wurden. Ein Quellcode für einen geeigneten Algorithmus oder ein ausführbares Programm zur Ermittlung solcher Darstellungen wird im BWM nicht als Lösung anerkannt, selbst wenn die Richtigkeit der Ergebnisse umfassend geprüft wurde. Wir müssen also die Lösungsmenge aus der äquivalent umgeformten Gleichung $(3a - 2021) \cdot (3b - 2021) = 2021^2$ über die Faktorenzerlegung von 2021^2 ermitteln. Es ist allerdings dafür hilfreich zu wissen, dass es nur drei Arten geben kann.

Für die Teilaufgabe b) hilft die Rechentechnik kaum. Obwohl es bei dieser Fragestellung genügt, eine Lösung ohne Herleitung anzugeben, und die 2021 Arten

[18] zu Stammbrüchen siehe Thema 15 – Stammbrüche

der Darstellung im Ergebnis der systematischen Suche aufgelistet und somit auf das Lösungsblatt übertragen werden könnten, ist die Richtigkeit der Lösungen nicht offensichtlich, weil die Probe aller 2021 Arten ohne rechentechnische Hilfsmittel nicht einfach möglich ist. Die kleinste Zahl n mit der geforderten Eigenschaft beträgt zudem $n = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 = 35388628000$, also praktisch durch systematisches Suchen nicht auffindbar. Aber wir werden in Spezialfällen Strukturen erkennen, die wir verallgemeinern können. So finden wir beispielsweise eine Lösung $n = 2^{4042}$, für die wir alle Darstellungen formal eindeutig angeben können. ❑

Organisatorische Hinweise: Die Aufgaben der jeweils 1. Runde werden im Internet unter https://www.mathe-wettbewerbe.de/ Anfang Dezember veröffentlicht und zudem an die Gymnasien als Papier-Flyer verteilt. Ansprechpartner können also alle Fachlehrerinnen und Fachlehrer für Mathematik sein. Für die Teilnahme genügt es, bis zum Einsendeschluss Anfang März des Folgejahres (Datum des Poststempels) seine Lösungsdarstellungen mit dem ausgefüllten Anmeldeformular auf dem Postweg einzusenden (eine elektronische Einsendung ist derzeit nicht möglich). Unabhängig vom erreichten Ergebnis erhalten alle Teilnehmenden die ausführlichen Lösungshinweise des BWM. Nach der ersten und zweiten Runde wird jeweils durch den Träger Bildung und Begabung e.V. ein online-Seminar angeboten. Das nächste Seminar findet am 13. September 2023 von 17:30 bis 18:30 Uhr statt, Anmeldung unter https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10121.

Fachgebiet Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb „Jugend forscht" (Jufo): Wer bereits ein mathematisches Thema untersucht hat oder es probieren möchte, sollte eine Teilnahme an Jufo in Erwägung ziehen. Ein attraktiver Wettbewerb wartet. Dieser bietet – neben vielen Preisen – die Chance, mit Jugendlichen sowie Vertretern aus Wirtschaft und Wissenschaft ins fachliche Gespräch zu kommen. Wir diskutieren an Beispielen den Weg von einer ersten Idee zum erfolgreichen Wettbewerbsbeitrag.

Im Gegensatz zu KZM und BWM steht im Wettbewerb Jufo der Lösungsprozess im Mittelpunkt. Dies setzt zunächst eine Idee voraus, was untersucht werden könnte, weil keine zentralen Aufgabenstellungen vorgegeben werden. Vorab: Es muss nicht unbedingt ein bislang ungelöstes Problem gefunden werden. Es können auch bekannte Fragestellungen aufgegriffen und selbständig bearbeitet werden – wichtig ist vor allem, diesen Forschungsprozess deutlich werden zu lassen. Zugegeben – die Themenfindung ist die erste (und vielleicht größte) Herausforderung. Aber da lassen sich Partner aus Universität[19] und Wirtschaft[20] für interessante Anregungen

[19] siehe https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/schule/index.de.php, Kontakt: Dr. Frank Göring (frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de)
[20] Kontakt: MINT-Region, Bianka Albrecht (B.Albrecht@icm-chemnitz.de)

vermitteln. Doch selbst wenn die ersten Ideen eher spielerisch wirken, können sich daraus (Zwischen-) Ergebnisse ergeben, die zu weiteren Untersuchungen anregen.
So wurde 2022 in Sachsen ein Projekt „Mathematik mit Kacheln“ eingereicht, dass es bis zu einem 2. Preis im FG Mathematik/Informatik im Bundeswettbewerb geschafft hat. Ausgangspunkt war das 1974 vom späteren Physik-Nobelpreisträger ROGER PENROSE (geb. 1931) entdeckte mathematische Verfahren, eine Fläche lückenlos mit gewissen Kacheln zu parkettieren, ohne dabei ein Grundschema zu wiederholen. Dennoch finden sich Muster - bestimmte Strukturen finden sich im Großen ebenso wie im Kleinen. Darüber hinaus ist jedes sogenannte PENROSE-Parkett als eine Folge von Nullen und Einsen darstellbar. Eigentlich alles erforscht? Der Jungforscher kehrte diesen Ansatz um und konnte mathematisch beweisen, dass sich aus jeder Folge, in der keine zwei Einsen direkt aufeinanderfolgen, ein PENROSE-Parkett konstruieren lässt.

Die oben beschriebene Aufgabe KZM22/23-1-5B könnte ebenfalls Ausgangspunkt eines Jufo-Projektes werden. Zunächst ist zu recherchieren, was alles bereit bekannt ist – es geht ja nicht darum, Bekanntes nachzuvollziehen. Für kleine Punktanzahlen sind konstruktive Verfahren bekannt. Was ist davon verallgemeinerungsfähig? Nun kann es ein eigenständiger Forschungsprozess werden, neue Wege zu gehen, die auf vergleichbare Ergebnisse führen. Wie können Sie – anders als andere – computer-gestützt Verteilungen von n Punkten mit möglichst großem Mindestabstand erzeugen – und wie können Sie nachweisen, dass es keine besseren Verteilungen gibt? Und wenn es gelöst erscheint – welche praktischen Anwendungen könnte es dafür geben?

Oder haben Sie Lust auf **NMBR9**? Bei diesem Spiel geht es darum, zwei Sätze der nebenstehend abgebildeten 10 Zahlenplättchen gemäß den Spielregeln (z.B. unter www.brettspiele-magazin.de/nmbr9-number9/) aneinander und übereinander zu legen, so dass die summarische Bewertung aller Produkte „Zahlenwert · Ebene“ möglichst groß wird. Die Reihenfolge der zu legenden Zahlenplättchen wird zufällig durch Ziehen einer Zahlenkarte festgelegt. Da stellen sich doch viele Fragen, zuallererst: Was ist die höchste erreichbare Bewertung? (Im Internet ist dafür 198 zu finden.)

Der Forschungsprozess könnte mit Spielen beginnen (gut geeignet für eine Gruppenarbeit!). Durch experimentelles Vorgehen (bei dem zunächst der Zufall ausgeschaltet wird – also die Karten offen ausliegen und optimal ausgewählt werden dürfen) lässt sich sicher eine Struktur erkennen, bei der eine möglichst hohe Bewertung entsteht. Wie kann nachgewiesen werden, dass es keine höhere Bewertung geben kann? Wenn nun der Zufall gemäß Regelwerk mitspielt – mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese höchste Bewertung erreichbar? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man mindestens 100 Bewertungspunkte erreichen? Wir erkennen: Bis auf die Zahl 1 können alle Zahlen mit einem 3×4-Rechteck umschrieben werden – hilft dieses grobe Modell bereits, sich der Lösung zu nähern, vielleicht durch eine Zusatzforderung, dass die übergeordnete Ebene nur einen bestimmten Prozentsatz der darunter liegenden Ebene umfassen darf? Wie gut kann damit der Höchstwert erreicht werden? Lassen sich aus den originalen Zahlenfiguren Teilflächen vorstrukturieren, die den Spielverlauf vereinfachen?

Sicher entstehen beim Forschen noch viele andere Fragen. Vielleicht finden Sie auch abgewandelte Spielvarianten, die mathematisch interessant sind. (Für die Bearbeitung der Thematik wird ein Spiel bereitgestellt – eine formlose Anfrage genügt.)

Organisatorische Hinweise: Unter www.jugend-forscht.de und www.jugend-forscht-sachsen.de wird der Wettbewerb und seine Geschichte ausführlich erklärt. Dort finden wir auch Teilnahmebedingungen und viel Informationsmaterial zum Download. Die Anmeldung mit einem Projekt muss bis 30. November online erfolgen. Bis zu diesem Zeitpunkt sollte das Projekt schon in seiner Bearbeitung fortgeschritten sein, denn nun muss bis Januar des Folgejahres eine Projektbeschreibung eingereicht werden. Dieser Text ist Grundlage für die Bewertung des Projektes im Regionalwettbewerb[21], der Anfang März durchgeführt wird. Die Regionalsieger (dies können auch mehrere oder keine pro Fachgebiet sein) qualifizieren sich für den Sächsischen Landeswettbewerb.

[21] In Sachsen werden Regionalwettbewerbe in Chemnitz, Dresden und Leipzig durchgeführt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2022/23)

Ausgabe[22]	**Nr.**	**Thema**	**Aufgabe**
7/2023 (Juli 2023)	Thema 23.01	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941
6/2023 (Juni 2023)	Thema 22.02	Zahlenverteilungen auf Körpern	
5/2023 (Mai 2023)	Thema 22.01	Zahlenverteilungen auf ebene Figuren	MO620936
4/2023 (Apr. 2023)	Thema 21	Mischungsverhältnisse	MO621034, MO620934
1+2/2023 (Jan./Feb. 2023)	Thema 20	Rechnen mit großen Zahlen	MO620923
12/2022 (Dez. 2022)	Thema 19	Maximale Flächeninhalte	MO620924
03/2023 (März 2023)	Thema 18.02	Satz des Thales	MO621024
10/2022 (Okt. 2022)	Thema 18.01	Satz des Thales	MO621014
09/2022 (Sep. 2022)	Thema 17	Der größte gemeinsame Teiler	MO610931
11/2022 (Nov. 2022)	Thema 09.2	Pythagoreische Zahlentupel	MO621012

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz

[22] Alle Hefte sind als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter http://www.kzm-sachsen.de/html/mathekost.html erhältlich.