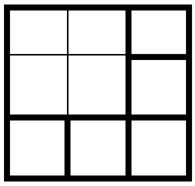
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2016



Ein Quadrat aus 3 x 3 – Kästchen kann man in kleinere Quadrate zerlegen. Zwei Zerlegungen sollen als nicht verschieden gelten, wenn für jede Größe der Quadrate die gleiche Anzahl verwendet wird. So gibt es 4 Anordnungen mit einem 2x2-Quadrat und fünf 1x1-Quadraten, die aber in diesem Sinn die gleiche Zerlegung darstellen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1.

Fall 1: In der Zerlegung gibt es ein Quadrat der Größe 4 x 4. Egal wie es angeordnet ist (d.h., in welcher Ecke des Ausgangsquadrates es anliegt), es kann nur durch 9 Quadrate der Größe 1 x 1 ergänzt werden. In diesem Fall gibt es also nur eine Möglichkeit (Abbildung 1)

Fall 2: In der Zerlegung gibt es ein Quadrat der Größe 3 x 3. Nun hängen die Zerlegungen von der Lage dieses Quadrates ab.

Fall 2a: Das Quadrat der Größe 3 x 3 sei in der Mitte angeordnet. Dann kann man die Zerlegung nur ringsherum durch 16 Quadrate der Größe 1 x 1 ergänzen (Abbildung 2).

Fall 2b: Das Quadrat der Größe 3 x 3 habe mit dem Ausgangsquadrat einen Eckpunkt gemeinsam. Dann kann man weitere 16 Quadrate der Größe 1 x 1 ergänzen – allerdings ergibt dies keine neue Zerlegung im Sinne der Aufgabe, denn die Anzahlen der verwendeten Quadrate stimmen in jeder Größe überein (Abbildung 3).

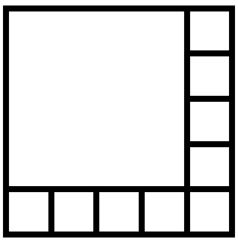


Abbildung 1

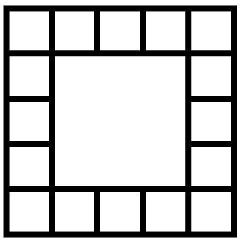


Abbildung 2

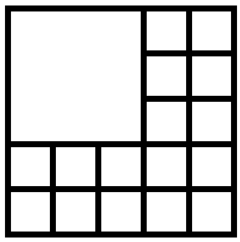


Abbildung 3

Fall 2c: Um also eine neue Möglichkeit zu finden, müssen auch Quadrate der Größe 2 x 2 verwendet werden. Dies ist mit einem, mit zwei oder mit drei erfüllbar (Abbildung 4a bis 4c). Dabei spielt es keine Rolle, wie diese Quadrate angeordnet sind – die restliche Fläche wird durch 1x1-Quadrate ausgefüllt.

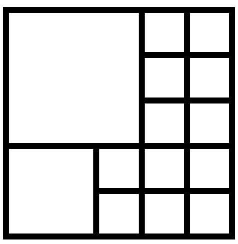


Abbildung 4a

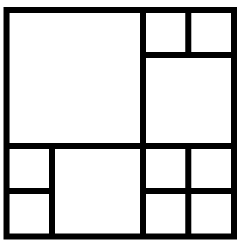


Abbildung 4b

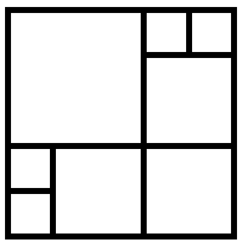


Abbildung 4c

Obwohl das Quadrat der Größe 3 x 3 insgesamt 9 und jedes Quadrat der Größe 2 x 2 jeweils 4 kleine Quadrate umfasst, und deshalb zu dem größeren Quadrat vier Quadrate der Größe 2 x 2 flächenmäßig passen würden ($9 + 4 \cdot 4 = 25$), gelingt eine solche Anordnung nicht: Egal wie man „unter“ dem 3 x 3 – Quadrat zwei 2 x 2 – Quadrate anordnet, es bleiben immer vier kleine Teilquadrate übrig, die sich nicht zu einem 2 x 2 – Quadrat ergänzen lassen.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

Fall 3: Die Zerlegung besteht nur aus Quadraten der Größe 2 x 2 und der Größe 1 x 1. Es passen nur maximal vier solche 2 x 2 – Quadrate hinein, denn es gibt nur höchsten zweimal zwei zusammenhängende Zeilen oder Spalten (Abbildung 5a bis 5d)

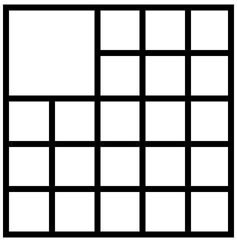


Abbildung 5a

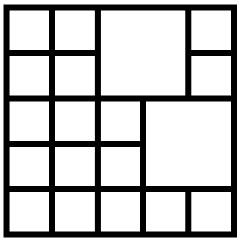


Abbildung 5b

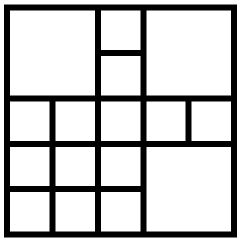


Abbildung 5c

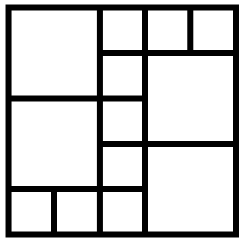


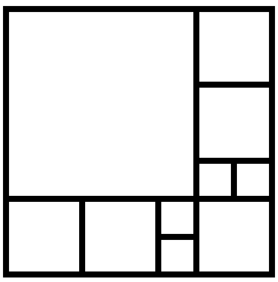
Abbildung 5d

Fall 4: Die Zerlegung nur in Teilquadrate der Größe 1 x 1 ist natürlich auch möglich.

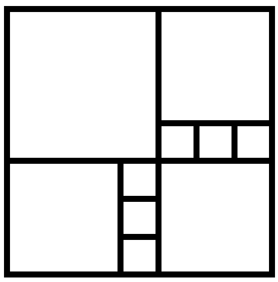
Ingesamt gibt es also nur folgende 10 Möglichkeiten der Zerlegung:

Anzahl der Quadrate der Größen:				**Bemerkung**	**Probe** (25 Teilquadrate)
4 x 4 (16)	3 x 3 (9)	2 x 2 (4)	1 x 1 (1)		
1	0	0	9	Fall 1: Abb. 1	$1 \cdot 16 + 9 \cdot 1 = 25$
0	1	0	16	Fall 2a: Abb. 2; Fall 2b: Abb. 3	$1 \cdot 9 + 16 \cdot 1 = 25$
0	1	1	12	Fall 2c: Abb. 4a	$1 \cdot 9 + 1 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 25$
0	1	2	8	Fall 2c: Abb. 4b	$1 \cdot 9 + 2 \cdot 4 + 8 \cdot 1 = 25$
0	1	3	4	Fall 2c: Abb. 4c	$1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 25$
0	0	1	21	Fall 3: Abb. 5a	$1 \cdot 4 + 21 \cdot 1 = 25$
0	0	2	17	Fall 3: Abb. 5b	$2 \cdot 4 + 17 \cdot 1 = 25$
0	0	3	13	Fall 3: Abb. 5c	$3 \cdot 4 + 13 \cdot 1 = 25$
0	0	4	9	Fall 3: Abb. 5d	$4 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 25$
0	0	0	25	Fall 4	$25 \cdot 1 = 25$

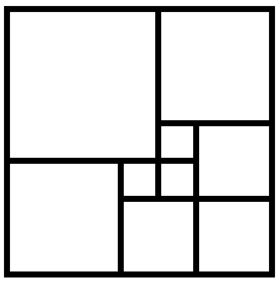
Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Es war nur gefordert, eine Zerlegung des 7 x 7 – Quadrates in möglichst wenige kleinere Quadrate zu finden. Wer es mit 10 solchen kleineren Quadraten schafft, ist schon gut. Es geht aber auch mit **9 kleineren Teilquadraten** – und mit wenigeren Quadraten gelingt es nicht!



10 Teilquadrate



10 Teilquadrate



9 Teilquadrate