Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

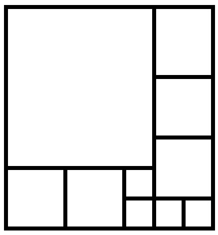
# Noch mehr zu Zerlegungen von Quadraten in Quadrate

***Lösungshinweise zu Aufgabe 1:*** Das Finden aller Zerlegungsmöglichkeiten eines 7x7-Quadrates in kleinere Quadrate erfordert ein fleißiges und systematisches Probieren. Eine Tabelle hilft, die Übersicht zu behalten. In jeder Zeile werden die Anzahlen der verwendeten Quadrate mit mehr als einem Einer-Quadrat angegeben. Unter „gesamt" berechnen wir die Anzahl der Einer-Quadrate, die durch diese Teilquadrate bedeckt werden. Dann können wir den Rest, der bis $7 \cdot 7 = 49$ fehlt, durch Einer-Quadrate auffüllen.

Beginnend mit einem 6x6-Quadrat bleibt keine andere Möglichkeit, als die freibleibende Fläche mit Einer-Quadraten aufzufüllen.

Beginnend mit einem 5x5-Quadrat passen theoretisch sechs 2x2-Quadrate in die Fläche, weil $5 \cdot 5 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = 25 + 24 = 49$. Aber beim Ausprobieren merkst du schnell – wie du die 2x2-Quadrate auch legst, am Ende passt kein sechstes 2x2-Quadrat mehr komplett auf die Fläche. Andererseits – jedes 2x2-Quadrat kann natürlich durch vier Einer-Quadrate ersetzt werden.

| 6x6 | 5x5 | 4x4 | 3x3 | 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | - | - | 6·6=36 | 13 |
| - | 1 | - | - | 5 | 5·5+5·2·2=45 | 4 |
| - | 1 | - | - | 4 | 5·5+4·2·2=41 | 8 |
| - | 1 | - | - | 3 | 5·5+3·2·2=37 | 12 |
| - | 1 | - | - | 2 | 5·5+2·2·2=33 | 16 |
| - | 1 | - | - | 1 | 5·5+1·2·2=29 | 20 |
| - | 1 | - | - | - | 5·5=25 | 24 |

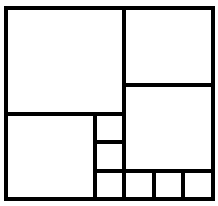
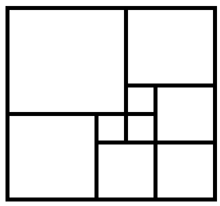
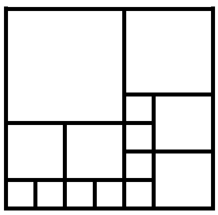
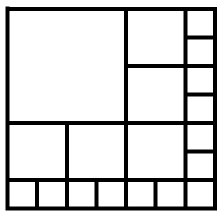


Ist das größte Teilquadrat ein 4x4-Quadrat, dann passen höchsten drei 3x3-Quadrate dazu. Wieder kannst du jedes 3x3-Quadrat durch Einer-Quadrate ersetzen.

Allerdings kannst du auch die 3x3-Quadrat durch 2x2-Quadrate ersetzen.

Ohne 3x3-Quadrate passen maximal fünf 2x2-Quadrate hinzu.

| 4x4 | 3x3 | 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | - | 4·4+3·3·3=43 | 6 |
| 1 | 2 | - | 4·4+2·3·3=34 | 15 |
| 1 | 1 | - | 4·4+1·3·3=25 | 24 |
| 1 | - | - | 4·4=16 | 33 |
| 1 | 2 | 3 | 4·4+2·3·3+3·2·2=45 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 4·4+2·3·3+2·2·2=42 | 7 |
| 1 | 2 | 1 | 4·4+2·3·3+1·2·2=38 | 11 |
| 1 | 1 | 4 | 4·4+1·3·3+4·2·2=41 | 8 |
| 1 | 1 | 3 | 4·4+1·3·3+3·2·2=37 | 12 |
| 1 | 1 | 2 | 4·4+1·3·3+2·2·2=33 | 16 |
| 1 | 1 | 1 | 4·4+1·3·3+1·2·2=29 | 20 |
| 1 | - | 5 | 4·4+5·2·2=36 | 13 |
| 1 | - | 4 | 4·4+4·2·2=32 | 17 |
| 1 | - | 3 | 4·4+4·2·2=28 | 21 |
| 1 | - | 2 | 4·4+2·2·2=24 | 25 |
| 1 | - | 1 | 4·4+1·2·2=20 | 29 |

Setzen wir nun mit 2x2-Quadrate als größte Quadrate fort – es passen höchstens neun in das 7x7-Quadrat. Jedes der 2x2-Quadrate kann durch jeweils vier Einer-Quadrate ersetzt werden.

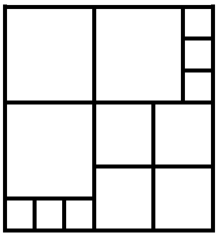
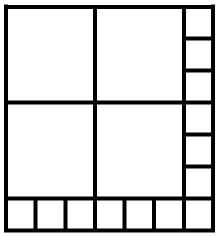
| 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|
| 9 | 9·2·2 = 36 | 13 |
| 8 | 8·2·2 = 32 | 17 |
| 7 | 7·2·2 = 28 | 21 |
| 6 | 6·2·2 = 24 | 25 |
| 5 | 5·2·2 = 20 | 29 |

| 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|
| 4 | 4·2·2 = 16 | 33 |
| 3 | 3·2·2 = 12 | 37 |
| 2 | 2·2·2 = 8 | 41 |
| 1 | 2·2 = 4 | 45 |
| - | 0 | 49 |

Nun bleiben nur noch die Fälle, bei denen das größte Quadrat ein 3x3-Quadrat ist. Es können maximal vier solche Quadrate verwendet werden. Dann passen nur noch Einer-Quadrate.

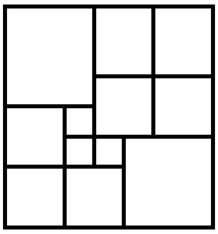
Nimmst du nur drei 3x3-Quadrate, findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten

| 3x3 | 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|---|
| 4 | - | 4·3·3 = 36 | 13 |
| 3 | 4 | 3·3·3+4·2·2 = 43 | 6 |
| 3 | 3 | 3·3·3+3·2·2 = 39 | 10 |
| 3 | 2 | 3·3·3+2·2·2 = 35 | 14 |
| 3 | 1 | 3·3·3+1·2·2 = 31 | 18 |
| 3 | - | 3·3·3 = 27 | 22 |

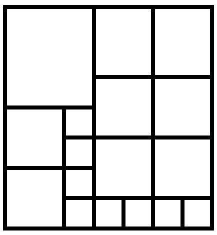
Nimmst du nur zwei 3x3-Quadrate, passen maximal sieben 2x2-Quadrate dazu. Also findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten, wenn du nacheinander jeweils ein 2x2-Quadrat durch vier Einer-Quadrate ersetzt.

| 3x3 | 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 2·3·3+7·2·2 = 46 | 3 |
| 2 | 6 | 2·3·3+6·2·2 = 42 | 7 |
| 2 | 5 | 2·3·3+5·2·2 = 38 | 11 |
| 2 | 4 | 2·3·3+4·2·2 = 34 | 15 |
| 2 | 3 | 2·3·3+3·2·2 = 30 | 19 |
| 2 | 2 | 2·3·3+2·2·2 = 26 | 23 |
| 2 | 1 | 2·3·3+1·2·2 = 22 | 27 |
| 2 | - | 2·3·3 = 18 | 31 |



Nun bleibt nur noch die Möglichkeit, ein 3x3-Quadrat als größtes Teilquadrat zu verwenden. Dann, passen maximal acht 2x2-Quadrate dazu. Also findest du folgende Zerlegungsmöglichkeiten

| 3x3 | 2x2 | gesamt | 1x1 |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 3·3+8·2·2 = 41 | 8 |
| 1 | 7 | 3·3+7·2·2 = 37 | 12 |
| 1 | 6 | 3·3+6·2·2 = 33 | 16 |
| 1 | 5 | 3·3+5·2·2 = 29 | 20 |
| 1 | 4 | 3·3+4·2·2 = 25 | 24 |
| 1 | 3 | 3·3+3·2·2 = 21 | 28 |
| 1 | 2 | 3·3+2·2·2 = 17 | 32 |
| 1 | 1 | 3·3+1·2·2 = 13 | 36 |
| 1 | - | 3·3 = 9 | 40 |

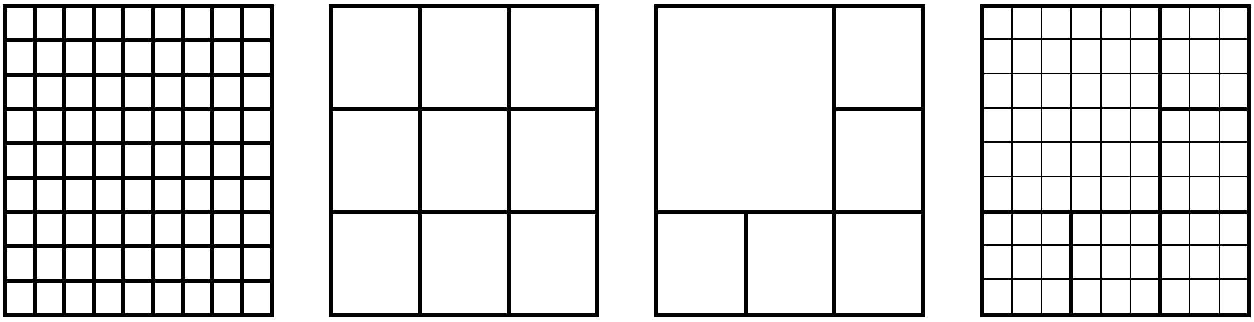


Jede Zeile ergibt eine andere Möglichkeit – insgesamt **55 Möglichkeiten**!

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de, c/o Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz

***Lösungshinweise zu Aufgabe 2:*** Da die Zahl 9 durch 3 teilbar ist, kannst du eine Zerlegung in neun 3x3-Quadrate finden. Wenn wir dabei aber die Zwischenlinien weglassen, sieht es aus, als hätten wir ein 3x3-Quadrat zu zerlegen. Es macht ja nichts, dass die Teilquadrate etwas größer aussehen. Nun wissen wir aber schon, dass wir für die Zerlegung eines 3x3-Quadrates mindestens sechs kleinere Quadrate benötigen. Wenn wir jetzt die Zwischenlinien wieder einzeichnen, sehen wir die Lösung für das 9x9-Quadrat:

Wir benötigen sechs Teilquadrate, nämlich ein 6x6-Quadrat und fünf 3x3-Quadrate:



Weil 3 ein Teiler der Zahl 111 ist (3 · 37 = 111), gelingt die gleiche Zerlegung wie eben:

Ein 111x111-Quadrat lässt sich in sechs kleinere Quadrate zerlegen, nämlich in ein 74x74-Quadrat und in fünf 37x37-Quadrate.

***Lösungshinweise zu Aufgabe 3:*** Jedes Quadrat mit einer geraden Anzahl von Einer-Quadraten je Seite lässt sich in der Mitte in vier Teil-Quadrate zerlegen.