

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2017

Wir erinnern uns an folgende Spielregeln: Wir umranden ein Feld mit 4x4-Kästchen. Wir bilden ein Startmuster: Einige Kästchen färben wir grau, die anderen bleiben weiß. Im Beispiel sollen die mit a, b und c bezeichneten Kästchen grau sein, alle anderen Kästchen sind weiß

| | | | |
|--|---|--|---|
| | | | |
| | a | | b |
| | | | |
| | | | c |

Zwei Kästchen sind benachbart, wenn sie eine Seite oder eine Ecke gemeinsam haben. Das Kästchen a hat also 8 Nachbarn, das Kästchen b hat 5 Nachbarn und das Kästchen c hat nur 3 Nachbarn.

Wir zählen für jedes Kästchen, wie viele benachbarte Kästchen grau sind, und schreiben diese Zahlen in die Kästchen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Nun färben wir die Kästchen nach folgenden Regeln um:

- Alle grauen Kästchen, in denen die Zahl 2 oder 3 steht, werden weiß. Alle anderen grauen Kästchen bleiben grau.
- Alle weißen Kästchen, in denen die Zahl 3 steht, werden grau. Alle anderen weißen Kästchen bleiben weiß.

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Nun sieht unser neues Muster so aus:

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Es gelingt sicher, mehr als 10 Kombinationen von 4 grauen Feldern zu finden, die sich regelgerecht nicht umfärben lässt. Wir tragen dafür in jeder gefundenen Lösung in die Felder ein, wie viele Nachbarfelder grau sind. Dann prüfen wir, ob in einem weißen Feld eine 3 steht (dann könnten wir dieses weiße Feld umfärben) oder ob in einem grauen Feld eine 2 oder 3 steht (dann könnten wir dieses graue Feld umfärben). Hier einige Beispiele, die die Aufgabenstellungen erfüllen – es gibt viel mehr:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 |

Um aber mehr als 100 solcher Belegungen zu finden, genügt einfaches Probieren nicht – wir müssen systematisch probieren.

Fall 1: Wir probieren, in eine Reihe 4 Felder nebeneinander grau zu färben. Egal welche Reihe wir nehmen, es gibt immer mindestens ein weißes Feld, das 3 graue Nachbar hat.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 2 | 3 |
| 0 | 3 | 2 | 3 |
| 0 | 2 | 1 | 2 |

Fall 2: Wir probieren, in die oberste Reihe 3 Felder grau zu färben. Liegen sie nicht alle direkt nebeneinander, finden wir dafür 2 verschiedene Möglichkeiten. Wir können bei jeder dieser Möglichkeiten eines der vier Felder der untersten Reihe grau färben (ein Beispiel ist links gezeigt). Das ergibt $(2 \cdot 4 =)$ 8 Möglichkeiten für Muster mit 4 grauen Feldern, die sich nicht umfärben lassen. Zudem können wir jede dieser Möglichkeiten um die Ecke kippen und erhalten insgesamt 4 Varianten dieses Musters (die vier rechten Muster zeigen es in einem

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Beispiel). Insgesamt können wir auf diese Weise ($8 \cdot 4 =$) **32 verschiedene Muster** erklären, die mindestens in einer Reihe 3 graue Felder haben und sich nicht umfärben lassen.

| | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 1 2 0 | 0 2 1 1 | 1 1 1 0 | 0 1 0 1 | 1 2 0 0 |
| 2 2 2 1 | 1 2 2 2 | 0 1 2 2 | 0 1 1 1 | 1 2 1 1 |
| 1 1 0 0 | 1 1 1 0 | 1 1 2 1 | 2 2 2 1 | 2 2 1 0 |
| 0 1 0 0 | 1 0 1 1 | 0 0 2 1 | 1 1 2 0 | 0 1 1 1 |

Fall 3: Wir wollen nun in der oberen Reihe 2 Felder grau färben (es werden einige Beispiele gezeigt). Dafür finden wir 6 verschiedene Möglichkeiten. Zusätzlich können wir auch auf der untersten Reihe in 6 verschiedenen Möglichkeiten 2 Felder grau färben. Die zwei verwendeten Reihen sind so weit auseinander, dass sich die Nachbarschaften der grauen Felder nicht beeinflussen. Insgesamt gibt es also ($6 \cdot 6 =$) 36 verschiedene Muster. Zudem können wir jede dieser Möglichkeiten um die Ecke kippen und erhalten insgesamt 2 Varianten dieses Musters (die zwei rechten Muster zeigen es in einem Beispiel). Allerdings führt das linke Muster beim Kippen nicht zu einem neuen Muster. Insgesamt können wir auf diese Weise also ($36 \cdot 2 - 1 =$) **71 verschiedene Muster** erklären, in zwei Reihen 2 graue Felder haben und sich nicht umfärben lassen.

| | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0 1 1 0 | 0 2 0 1 | 1 1 1 0 | 1 0 1 0 | 0 1 1 1 |
| 1 1 1 1 | 1 2 1 1 | 2 2 1 0 | 1 1 2 1 | 2 2 1 0 |
| 1 1 1 1 | 1 1 2 1 | 1 2 2 1 | 1 2 1 1 | 0 1 2 2 |
| 0 1 1 0 | 1 0 2 0 | 1 1 1 1 | 0 2 0 1 | 1 1 1 0 |

Insgesamt haben wir mit diesen drei Fällen bereits ($0 + 32 + 71 =$) 103 Möglichkeiten erklärt. Es gibt also über 100 Muster der geforderten Art. Dabei stellen wir fest, dass es sogar noch weitere Möglichkeiten gibt, die wir noch nicht erfasst haben, zum Beispiel:

| | | |
|---------|---------|---------|
| 1 1 1 0 | 0 1 1 0 | 0 1 1 0 |
| 2 2 2 1 | 1 1 2 2 | 1 2 2 2 |
| 0 0 2 1 | 0 1 2 1 | 1 2 0 1 |
| 0 0 2 1 | 0 1 1 2 | 0 2 1 1 |

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Es genügt, geeignete Beispiele anzugeben. Wir finden Muster mit 5 grauen Feldern und sogar Muster mit 6 grauen Feldern, die sich nach den Regeln nicht umfärben lassen. Dabei können wir uns an die Untersuchungen in den Fällen 2 und 3 von Aufgabe 1 halten und erweiterte Muster finden, zum Beispiel:

| | | | | | |
|---------|---|---------|---------|---|---------|
| 0 1 1 0 | → | 0 1 1 0 | 1 1 2 0 | → | 1 1 2 0 |
| 1 1 1 1 | | 1 2 2 2 | 2 2 2 1 | | 2 2 2 1 |
| 1 1 1 1 | | 1 2 1 2 | 1 1 1 0 | | 2 2 2 1 |
| 0 1 1 0 | | 0 2 2 1 | 1 0 1 0 | | 1 1 2 0 |

5 graue Felder 6 graue Felder

Lösungshinweise zu Aufgabe 3. Bestimmt hast du das Spiel in deiner Familie oder mit deinen Freundinnen oder Freunden gespielt. Dabei ist dir sicher nach wenigen Versuchen aufgefallen, wer immer gewinnen kann. So ausführlich wie im Folgenden musst du natürlich deine Beobachtungen nicht aufschreiben – aber stimmst du diesen Erklärungen zu?

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Teil 1) Für den Spielverlauf nach den ersten Regeln färbt Anna ein Feld, was kein Randfeld ist. Tragen wir für jedes Feld die Anzahlen der benachbarten grauen Felder ein, so stehen nur 0 und 1 auf allen Feldern.

Färbt Bert ein beliebiges Feld mit der Zahl 0 grau, so findet Anna immer ein 3x3-Quadrat, in dem sich zwei graue Felder befinden, aber dessen Mittelfeld weiß ist (Beispiele a oder b). Färbt Anna nun ein weiteres Feld auf dem Rand dieses 3x3-Quadrates, trägt das weiße Mittelfeld dieses 3x3-Quadrates die 3 – es kann umgefärbt werden.

Färbt Bert dagegen ein beliebiges Feld mit der Zahl 1 grau, so findet Anna immer ein 2x2-Quadrat, in dem sich zwei graue Felder befinden (Beispiele c oder d). Färbt Anna nun ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrates, trägt das letzte weiße Feld dieses 2x2-Quadrates die 3 – es kann umgefärbt werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Annas Zug

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |

Berts Zug a)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |

Berts Zug b)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Berts Zug c)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Berts Zug d)

Teil 2) Für den Spielverlauf nach den geänderten Regeln färbt Anna ein Eckfeld. Tragen wir für jedes Feld die Anzahlen der benachbarten grauen Felder ein, so stehen nur 0 und 1 auf allen Feldern.

Färbt Bert ein beliebiges Feld mit der Zahl 0 grau (Beispiele e oder f), so denkt sich Anna ein 3x3-Quadrat, das ihr grau gefärbtes Eckfeld enthält. Färbt sie nun ein beliebiges Feld außerhalb dieses 3x3-Quadrates, so hat kein weißes Feld mehr als zwei graue Nachbarn und kein graues Feld mehr als einen grauen Nachbarn – es kann nicht umgefärbt werden.

Färbt Bert dagegen ein beliebiges Feld mit der Zahl 1 grau (Beispiele g oder h), so färbt Anna das gegenüberliegende Eckfeld grau. Kein weißes Feld hat mehr als zwei graue Nachbarn und kein graues Feld hat mehr als einen grauen Nachbarn – es kann nicht umgefärbt werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Annas Zug

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Berts Zug e)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

Berts Zug f)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Berts Zug g)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Berts Zug h)

Teil 3) Wenn Bert noch einen weiteren Zug ausführen darf, kann Bert immer gewinnen. Färbt nämlich Anna ein beliebiges Feld, so kann Bert ein 2x2-Quadrat um dieses Feld legen, das auch ein Eckfeld enthält und färbt ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrat (Beispiel i).

Färbt Anna ein weiteres weißes Feld in diesem 2x2-Quadrat (Beispiel j), erhält das verbleibende weiße Feld die Zahl 3. Färbt abschließend Bert ein Feld grau, das noch die 0 trägt, bleibt die 3 erhalten und es kann umgefärbt werden.

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Färbt Anna jedoch ein weiteres weißes Feld außerhalb dieses 2x2-Quadrats (Beispiel k), dann färbt Bert abschließend ein weißes Feld im 2x2-Quadrat und erzeugt damit eine 3 und es kann umgefärbt werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

Annas Zug

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 1 |

Berts Zug i)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 3 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |

Annas Zug j)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 1 |
| 0 | 2 | 2 | 2 |
| 0 | 1 | 2 | 2 |

Annas Zug k)

Lösungshinweise zu Aufgabe 4) Es genügt wieder, geeignete Muster anzugeben und durch Eintragen der Anzahlen benachbarter grauer Felder zu bestätigen, dass diese Muster die geforderten Eigenschaften erfüllen.

Nach Umfärben entstehen nur weiße Felder:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 2 |
| 2 | 2 | 2 | 2 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Hinweis: Sind nach dem Umfärben lauter weiße Felder entstanden, bricht das Umfärben ab, da für das Umfärben nur die Anzahl der grauen Nachbarfelder wichtig sind.

Nach Umfärben entstehen nur graue Felder:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 4 | 3 |
| 4 | 7 | 7 | 4 |
| 4 | 7 | 7 | 4 |
| 3 | 4 | 4 | 3 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 5 | 3 |
| 5 | 8 | 8 | 5 |
| 5 | 8 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 5 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | 1 |
| 3 | 4 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 4 | 3 |
| 1 | 3 | 3 | 1 |

→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 5 | 3 |
| 5 | 8 | 8 | 5 |
| 5 | 8 | 8 | 5 |
| 3 | 5 | 5 | 3 |

Hinweis: Sind nach dem Umfärben lauter graue Felder entstanden, kann das Umfärben in den Eckfeldern fortgesetzt werden und wir erhalten wieder das linke Muster mit den vier weißen Eckfeldern.