Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

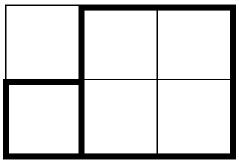
Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2018

Wir wollen mit Quadraten experimentieren. Wenn wir kariertes Papier verwenden, bei dem die Kästchen wie Quadrate aussehen, können wir verschieden große Quadrate ausmalen oder ausschneiden. So gibt es beispielsweise

- das 1x1-Quadrat, das nur aus einem Kästchen besteht,
- das 2x2-Quadrat, das aus vier Kästchen besteht,
- das 3x3-Quadrat, das aus neun Kästchen besteht und so weiter.

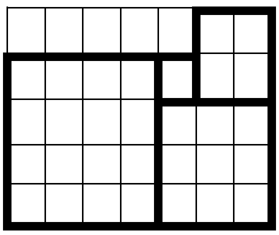
Es ist nicht schwer, das kleinste Rechteck zu finden, in das gleichzeitig ein 1x1-Quadrat und ein 2x2-Quadrat hineinpassen, ohne dass sich die beiden Quadrate überlappen. „Klein“ soll dabei bedeuten: Das Rechteck soll möglichst wenige Kästchen enthalten. Folgende Überlegungen führen zum Ziel:

- Insgesamt sind mindestens 1 + 4 = 5 Kästchen erforderlich.
- Mit einem 5x1-Rechteck (mit 5 Kästchen) ist es nicht möglich, weil das 2x2-Quadrat zwei Zeilen erfordert.
- Wie in der Abbildung erkennbar, ist es mit einem 3x2-Rechteck mit 6 Kästchen möglich. Ein Kästchen bleibt frei.



Aufgabe 1. Wie viele Kästchen bleiben im kleinsten Rechteck frei, in das ein 1x1-Quadrat, ein 2x2-Quadrat, ein 3x3-Quadrat und ein 4x4-Quadrat gleichzeitig hineinpassen, ohne sich gegenseitig zu überlappen? Zeichne eine Möglichkeit, die vier Quadrate anzuordnen. Begründe, warum es kein kleineres Rechteck als in deiner Zeichnung geben kann.

Lösungshinweise: Durch systematisches Probieren finden wir ein Rechteck mit 5x7-Kästchen (also insgesamt 35 Kästchen), in das die vier Quadrate hineinpassen. Als Beweis dafür zeichnen wir eine Möglichkeit (es gibt natürlich weitere Anordnungsmöglichkeiten):



Wir wollen nun begründen, warum es kein kleineres Rechteck mit dieser Eigenschaft geben kann. Dabei genügt es nicht darauf zu verweisen, dass beim Probieren keine Anordnung in einem kleineren Rechteck gelungen ist. Natürlich könnten wir alle Versuche durch Zeichnungen dokumentieren – erwischen wir dabei wirklich alle Möglichkeiten? Versuchen wir es also mit einer Analyse.

Wir wissen, dass die 4 Quadrate zusammen 1 + 4 + 9+ 16 = 30 Kästchen umfassen. Wenn es ein kleineres Rechteck gäbe, kann es nur aus insgesamt 30, 31, 32, 33 und 34 Kästchen bestehen.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Wir wissen auch, dass jede Seite des Rechtecks mindestens 4 Kästchen lang sein muss, denn es soll ja das 4x4-Quadrat hineinpassen. Deshalb kann es für die Rechtecke mit 1 · 31 = 31 Kästchen, 3 · 11 = 33 Kästchen und 2 · 17 = 34 Kästchen keine Lösung geben.

Beim Probieren haben wir bemerkt, dass das 3x3-Quadrat vollständig neben dem 4x4-Quadrat liegen muss. Also ist eine Seite des Rechtecks mindestens (4 + 3 =) 7 Kästchen lang. Damit kann auch das Rechteck mit 5 · 6 = 30 Kästchen keine Lösung sein.

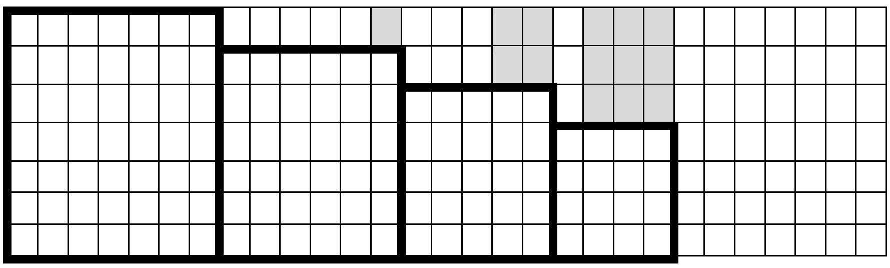
Untersuchen wir nun das 4x8-Rechteck. Wir zeichnen einen Streifen mit 4 Kästchen Höhe, in den das 4x4-Quadrat hineinpasst. Nun erkennen wir: Auch die 3x3- und 2x2-Rechtecke müssen daneben angeordnet werden. Damit muss das Rechteck mindestens (4 + 3 + 2 =) 9 Kästchen lang sein. Also kann auch das 4x8-Rechteck keine Lösung sein.

Damit haben wir bewiesen, dass das 5x7-Rechteck tatsächlich das kleinste Rechteck ist, in das die 4 Quadrate hineinpassen,

Aufgabe 2. Finde das kleinste Rechteck, in das ein 1x1-Quadrat, ein 2x2-Quadrat, ein 3x3-Quadrat, ein 4x4-Quadrat, ein 5x5-Quadrat, ein 6x6-Quadrat und ein 7x7-Quadrat gleichzeitig hineinpassen, ohne sich gegenseitig zu überlappen! Zeichne eine Möglichkeit, die sieben Quadrate in diesem Rechteck anzuordnen.

Lösungshinweise: Natürlich könnten wir wieder probieren. Am besten schneiden wir uns dafür die sieben Quadrate aus und puzzeln sie solange zusammen, bis wir ein möglichst kleinstes Rechteck gefunden haben. Doch das Probieren können wir etwas einschränken:

Die 7 Quadrate haben insgesamt 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140 Kästchen. Da eine Seite mindestens 7 Kästchen lang sein muss, zeichnen wir einen Streifen, der 7 Kästchen hoch ist. Da passt das 7x7-Quadrat hinein.

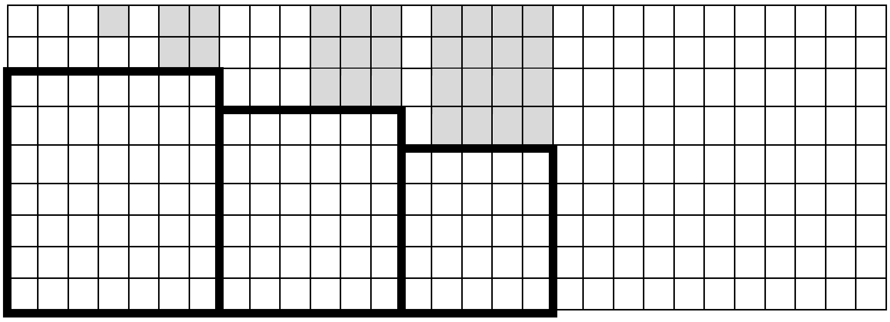


Wir erkennen, dass die 4x4-, 5x5- und 6x6-Quadrate nur nebeneinander und nicht übereinander in den Streifen gelegt werden können, ohne herauszuragen. Insgesamt wird das zugehörige passende Rechteck (7 + 6 + 5 + 4 =) 22 Kästchen lang sein und insgesamt 7 · 22 = 154 Kästchen umfassen. Gibt es ein kleineres Rechteck?

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

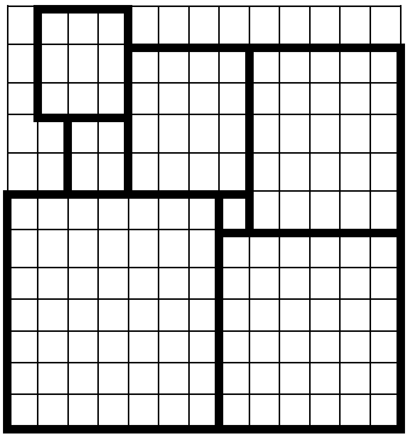
Versuchen wir es mit einem Streifen, der 8 Kästchen hoch ist. Hier ändert sich an der Argumentation aber nichts. Wieder muss die andere Seite 22 Kästchen lang sein und das Rechteck umfasst $8 \cdot 22 = 192$ Kästchen, ist also viel größer.

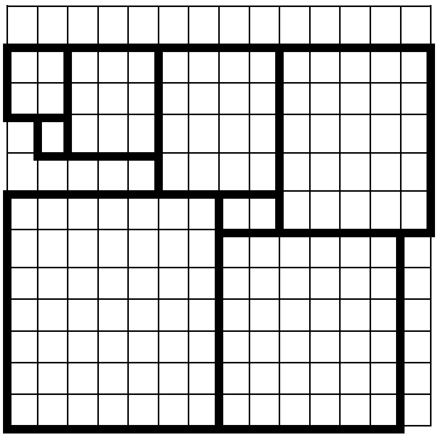
Mit einem Streifen mit der Höhe von 9 Kästchen entsteht eine neue Situation. Jetzt müssen nur die drei größten Quadrate nebeneinanderliegen, die anderen passen in die darüberliegenden Kästchen. Damit umfasst das zugehörige passende Rechteck $9 \cdot 18 = 162$ Kästchen – dies ist ebenfalls größer als das zuerst gefundene!



Wir erkennen, dass ein kleineres Rechteck nur entstehen kann, wenn nur das 7x7- und das 6x6-Rechteck nebeneinander liegen. Tatsächlich passen in ein 13x12-Rechteck alle 7 Quadrate. Mit $13 \cdot 12 = 156$ Kästchen ist es aber immer noch größer als das bereits gefundene Rechteck.

Wir können aber auch nach rechts verbreitern: Wie die Zeichnung beweist, passen auch in ein 14x11-Rechteck alle sieben Quadrate. Wir erhalten $14 \cdot 11 = 154$ Kästchen, also so groß wie das schon gefundene kleinste Rechteck.



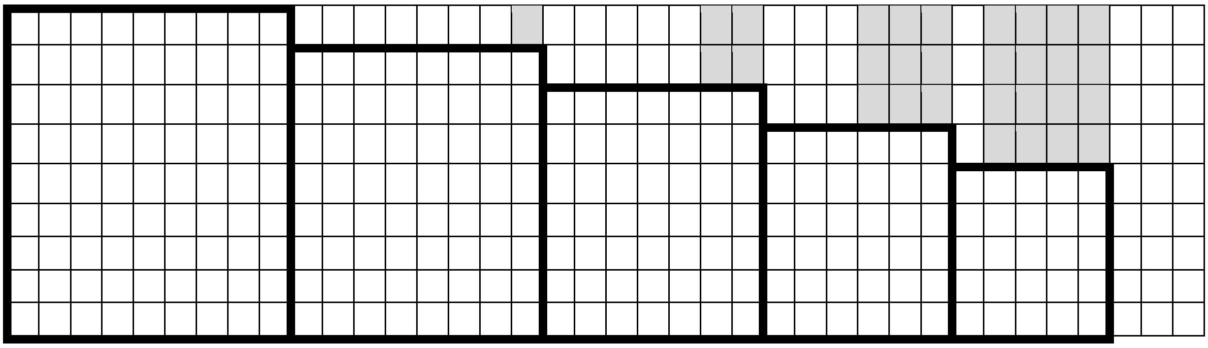


Weiter müssen wir nun nicht suchen. Denn wenn wir ein schmaleres Rechteck untersuchen, können wir es um 90° drehen und wir haben wieder die Situationen wie zu Beginn.

Aufgabe 3. Finde ein Rechteck mit weniger als 350 Kästchen, in das neun unterschiedlich große Quadrate hineinpassen, ohne dass sie sich gegenseitig überlappen. Zeichne eine solche Möglichkeit.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise: Wir verwenden natürlich die 9 kleinsten Quadrate. Wenn wir zunächst einen Streifen mit einer Höhe von 9 Kästchen zeichnen, können wir so viele Quadrate nebeneinanderlegen, bis eine Breite von 38 Kästchen erreicht wird (es gilt: 9 · 38 = 342 < 350). Die Quadrate mit 9x9, 8x8, 7x7, 6x6 und 5x5 Kästchen erreichen eine Breite von (9 + 8 + 7 + 6 + 5 =) 35 Kästchen. Wir haben Glück: Es passen die restlichen Quadrate hinein, so dass ein Rechteck mit 9x35=325 Kästchen existiert.



Aufgabe 4. Untersuche, ob es ein Rechteck mit genau 300 Kästchen gibt, in das neun unterschiedlich große Quadrate hineinpassen, ohne dass sie sich gegenseitig überlappen. Wenn du ein solches gefunden hast, zeichne die Lösung. Andernfalls begründe, warum es ein solches Rechteck nicht geben kann.

Lösungshinweise: Wir wollen es wieder mit den 9 kleinsten Quadraten versuchen. Damit ist jede Seite des gesuchten Rechtecks mindestens 9 Kästchen lang. Es gibt nur drei Möglichkeiten, die Zahl 300 als Produkt zweier Zahlen darzustellen, bei dem beide Faktoren mindestens 9 betragen: 10 · 30, 12 · 25 und 15 · 20.

Wir verwenden wieder unsere Streifenmethode und erkennen, dass es keine Lösung für Streifen der Höhe 10 oder 12 geben kann. Wenn es eine Lösung gibt, so muss eine Seite dieses Rechtecks genau 15 Kästchen lang sein. Es könnte also das 9x9- und das 6x6-Quadrat nebeneinander liegen. Und tatsächlich, nach einigem Probieren haben wir es gefunden – alle 9 Quadrate passen in dieses Rechteck mit genau 300 Kästchen: