*Dr. Norman Bitterlich*
*Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de*

## Lösungshinweise zum Nachtrag zur Sommeraufgabe 2019

**Aufgabe 1.** ***Antwortsatz:*** Alle Startkombinationen mit 4 Murmeln sind STOPP-Kombinationen.

***Begründung:*** Wir untersuchen alle möglichen Fälle für die Farbe mit den meisten Murmeln.

Fall 1: Sind alle 4 Murmeln gleichfarbig, ist bereits eine Stopp-Kombination gegeben.

Fall 2: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die vierte Murmel von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBBR, so kann im ersten Schritt BR → GG getauscht werden. Die neue Situation BBGG lässt sich nun aber mit zwei Tauschaktionen BG → RR in RRRR tauschen.

Fall 3.1: Sind 2 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel verschiedenfarbig von den anderen Farben, zum Beispiel BBRG, so lässt sich diese Kombination mit einer Tauschaktionen RG→ BB in BBBB tauschen.

Fall 3.2: Sind 2 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel gleichfarbig von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBRR, so lässt sich diese Kombination mit zwei Tauschaktionen BR→ GG in GGGG tauschen.

Weitere Fälle gibt es nicht.

*****************************************************

**Aufgabe 2.** ***Antwortsatz:*** Alle Startkombinationen mit 5 Murmeln sind STOPP-Kombinationen.

***Begründung:*** Wir verwenden die gleiche Systematik wie in Aufgabe 1.

Fall 1: Sind alle 5 Murmeln gleichfarbig, ist bereits eine Stopp-Kombination gegeben.

Fall 2: Sind 4 Murmeln von einer Farbe und die fünfte Murmel von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBBBR, so kann im ersten Schritt BR → GG getauscht werden. Die neue Situation BBBGG lässt sich nun aber mit der Tauschaktionen BG → RR in BBRRG tauschen. Diese lässt sich mit zwei Tauschaktionen BR→ GG in GGGGG tauschen.

Fall 3.1: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel verschiedenfarbig von den anderen Farben, zum Beispiel BBBRG, so lässt sich diese Kombination mit einer Tauschaktionen RG→ BB in BBBBB tauschen.

Fall 3.2: Sind 3 Murmeln von einer Farbe und die beiden anderen Murmel gleichfarbig von einer anderen Farbe, zum Beispiel BBBRR, so lässt sich diese mit

*Dr. Norman Bitterlich*
*Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de*

der Tauschaktionen BR → GG in BBGGR tauschen. Diese lässt sich jedoch mit zwei Tauschaktionen BG→ RR in RRRRR tauschen.

Fall 4: Sind je zwei Murmeln gleichfarbig und die dritte Murmel hat die dritte Farbe, zum Beispiel BBRRG, so lässt sich diese mit zwei Tauschaktionen BR → GG in GGGGG tauschen.

Weitere Fälle gibt es nicht.

*******************************************************

**Aufgabe 3**. ***Antwortsatz:*** Die Aussage ist für Kombinationen richtig, in der zwei Murmeln unterschiedliche Farbe haben und es eine dritte Murmel in einer dieser Farbe gibt.

***Begründung:*** Eine Tauschaktion ist nur dann möglich, wenn zwei Murmeln verschiedene Farben haben, zum Beispiel BR. Gibt es nun eine weitere blaue Murmel B, so sind folgende Tauschaktionen möglich (dabei spielen weitere Murmeln in der Ausgangskombination keine Rolle):

BBR → (BR → GG): BGG → (BG → RR): RRG → (RG → BB): RBB.

Die Ausgangssituation ist wieder erreicht.

***Hinweis:*** Für BRG gilt die Aussage nicht, denn nach der Durchführung einer Tauschaktion entsteht stets eine STOPP-Kombination. Für Kombinationen mit mindestens 4 Murmel ist die Aussage aber immer richtig, weil es dann mindestens 2 Murmeln in gleicher Farbe gibt.

*******************************************************

**Aufgabe 4**. ***Antwortsatz:*** In allen Fällen a) bis e) gibt es Kombinationen, die STOPP-Kombinationen sind. Jedoch gibt es keine Kombination zu f), die STOPP-Kombination ist.

***Begründung:*** Wir suchen für jede Anforderung eine geeignete Kombination.

a) Am Anfang ist keine Murmel blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

RRRGGG: drei Tauschaktionen RG → BB.

b) Am Anfang ist genau eine Murmel blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BRRRRG: Zunächst wird BR → GG getauscht zu RRRGGG. Dies ist nach a) eine STOPP-Kombination.

*Dr. Norman Bitterlich*
*Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de*

c) Am Anfang sind genau zwei Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBRRGG: zwei Tauschaktionen RG → BB.

d) Am Anfang sind genau drei Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBBGGG: zwei Tauschaktionen BG → RR führen zur Kombination BRRRRG, die nach b) eine STOPP-Kombination ist.

e) Am Anfang sind genau vier Murmeln blau.

Es gibt solche Startkombinationen, die STOPP-Kombinationen sind, zum Beispiel

BBBBGR: eine Tauschaktionen GR → BB.

f) Am Anfang sind genau fünf Murmeln blau.

Es gibt keine solche Startkombination, die STOPP-Kombination ist. Wir untersuchen, welche Kombinationen durch Tauschaktionen möglich sind. Wir beginnen mit der Kombination (0):

(0) BBBBBR: Es ist nur die Tauschaktion BR → GG möglich. Sie führt zu (1).

(1) BBBBGG: Es ist nur die Tauschaktion BG → RR möglich. Sie führt zu (2).

(2) BBBRRG: Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten zu tauschen.

(2.1) Jedoch führt RG → BB zu BBBBBR, also zur Kombination (0).
(2.2) Deshalb ist die Tauschaktion BR → GG durchzuführen. Sie führt zu (3).

(3) BBRGGG: Jetzt gibt es drei Möglichkeiten zu tauschen.

(3.1) Es führt RG → BB zu BBBBGG, also zur Kombination (1).
(3.2) Es führt BR → GG zu BGGGGG, also zu einer Kombination wie (0), nur mit anderen Farben.
(3.3) Es führt BG → RR zu BRRRGG, also zu einer Kombination wie (2), nur mit anderen Farben.

Das Beispiel zeigt, dass diese Tauschaktionen stets zu vorherigen Kombinationen führen. Damit ist keine STOPP-Kombination möglich.