

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2021

Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Angenommen, Quadrato hat zwei Domino-Steine gefunden, mit denen er das 2x2-Feld bedecken möchte. Wenn Zeilen- und Spaltensumme übereinstimmen, muss $A + B = A + C$, also $B = C$ gelten. Es muss aber auch $A + B = B + D$, also $A = D$ gelten.

A	B
C	D

Seine Bedeckung sieht also wie abgebildet aus. Das geht aber nur mit zwei gleichen Domino-Steinen A-B, doch die gibt es im Domino-Spiel nicht.

A	B
B	A

Lösungshinweise zu Aufgabe 2: Bei der Bedeckung eines 3x3-Feldes sind $3 \cdot 3 = 9$ Felder zu bedecken. Da aber jeder Domino-Stein jeweils 2 Felder bedeckt, kann insgesamt nur eine gerade Anzahl von Feldern vollständig bedeckt werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a: Es genügt, korrekte Beispiele anzugeben. Achte darauf, dass keine Augen-Kombination doppelt vorkommt, da es in einem Domino-Spiel keine zwei Steine mit der gleichen Kombination gibt. Prüfe deshalb deine Vorschläge am besten durch Auflegen von Domino-Steinen: Es gibt sehr viele Möglichkeiten, zum Beispiel

3	2	0	0
0	1	1	3
2	1	2	0
0	1	2	2

Summe 5

6	2	0	0
0	4	1	3
2	1	5	0
0	1	2	5

Summe 8

3	2	0	5
0	1	6	3
2	6	2	0
5	1	2	2

Summe 12

4	2	6	3
4	5	3	3
4	6	1	4
3	2	5	5

Summe 15

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b: Für die Bedeckung eines 4x4-Feldes benötigt Quadrato insgesamt acht Domino-Steine. Wählt er dafür die Domino-Steine mit den kleinsten Augensummen aus, so sind dies 0-0, 0-1, 1-1, 0-2, 1-2, 2-2, 0-3, 1-3. Die Summe aller dieser Augenzahlen beträgt 19. Damit aber alle vier Zeilensummen gleich groß sind, muss die Gesamtsumme ein Vielfaches von 4 sein. Wir könnten zum Beispiel den Stein 1-3 durch den Stein 2-3 ersetzen und erhalten als Gesamtsumme 20. Wir versuchen nun, eine Bedeckung zu finden, deren Zeilen- und Spaltensummen genau $(20 : 4 =) 5$ betragen. In der Zeile (oder in der Spalte), die den Stein 2-3 enthält, können die verbleibenden zwei Felder nur mit 0 bedeckt sein. Wir finden tatsächlich korrekte Bedeckungen (Abbildung 3.1). Wenn wir dafür Domino-Steine eines Domino-Spiels verwenden, können wir sicher sein, dass kein Stein doppelt verwendet wird (weil es ja für jede Augen-Kombination nur genau einen Stein gibt).

Wenn wir für die maximal mögliche Zeilensumme die acht Domino-Steine mit den größten Augensummen wählen, sind es 6-6, 6-5, 6-4, 6-3, 5-5, 5-4, 5-3, 4-4. Die Gesamtsumme beträgt 77. Wenn die vier Zeilensummen gleich groß sein sollen, muss die Gesamtsumme ein Vielfaches von 4 sein. Wir tauschen deshalb den Stein 5-3 in 4-3 um, erhalten als Gesamtsumme 76 und suchen damit eine korrekte Bedeckung mit der Zeilensumme $(76 : 4 =) 19$. Wir finden ein Beispiel (Abbildung 3.2):

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

3	2	0	0
0	1	1	3
2	1	2	0
0	1	2	2

Abb. 3.1

3	4	6	6
6	5	5	3
4	5	4	6
6	5	4	4

Abb. 3.2

Hinweis: Wenn wir in der Abbildung 3.1 jeden Domino-Stein A-B durch einen Domino-Stein (6 – A)-(6 – B) umkehren (also zum Beispiel links oben statt 3-2 den Stein (6 – 3)-(6 – 2), also 3-4 wählen), erhalten wir das Ergebnis aus Abbildung 3.2.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3c: Wir suchen nach einem Zusammenhang der Felder, die wir mit A, B und C markiert haben. Wenn die Zeilensummen und Spaltensummen alle gleich groß sind, gilt insbesondere auch

C			
6	5		
A	B	2	1
4	3		

$$A + B + 1 + 2 = C + 6 + A + 4,$$

also $A + B + 3 = A + C + 10$

Wir können diese Gleichung umformen zu

$$B = C + 7.$$

Es gibt aber keine Augenzahl B einer Domino-Hälfte, die um 7 größer ist als eine Augenzahl C einer anderen Domino-Hälfte. Quadrato kann also sein Bedeckung nicht erfolgreich ergänzen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: Wenn alle Zeilen- und Spaltensummen gleich groß sein sollen, muss die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten sein. Denn bezeichnen wir mit S die Summe und haben wir X Zeilen und Y Spalten, so muss $X \cdot S = Y \cdot S$ gelten, weil die Gesamtsumme aller aufgelegten Augen gleich ist. Also muss $X = Y$ gelten. Quadrato kann deshalb nur quadratische Felder bedecken.

Aus Aufgabe 2 wissen wir, dass mit Domino-Steinen nur Felder mit einer geraden Anzahl von Teilquadraten bedeckt werden können.

Das Domino-Spiel umfasst 28 Domino-Steine. Damit kann ein Feld von maximal 56 Quadraten bedeckt werden. Da das Feld quadratisch sein soll und eine gerade Anzahl von Quadraten beinhalten muss, ist das 6x6-Feld das größtmögliche. Ob es wirklich eine solche Bedeckung gibt, kann nur durch Angabe eines korrekten Beispiels bestätigt werden. Da wir 18 Domino-Steine verwenden müssen, können wir wie bei Aufgabe 3b) die kleinste und die größte Zeilen- bzw. Spaltensumme ermitteln. Zuerst ermitteln wir die Gesamtaugenzahl aller 28 Dominosteine:

Steine mit 0:	$0+0+0+1+0+2+0+3+0+4+0+5+0+6 = 21$
Steine mit 1, aber ohne 0:	$1+1+1+2+1+3+1+4+1+5+1+6 = 27$
Steine mit 2, aber ohne 0, 1:	$2+2+2+3+2+4+2+5+2+6 = 30$
Steine mit 3, aber ohne 0, 1, 2:	$3+3+3+4+3+5+3+6 = 30$
Steine mit 4, aber ohne 0, 1, 2, 3:	$4+4+4+5+4+6 = 27$
Steine mit 5, aber ohne 0, 2, 2, 3, 4:	$5+5+5+6=21$
Steine nur mit 6:	$6+6 = 12$

Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich

Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Die Gesamtsumme beträgt also $(21+27+30+30+27+21+12=)$ 168.

Lassen wir wie in Aufgabe 3b) die 8 Domino-Steine mit den größten Augenzahlen sowie 4-3 und 3-3 weg, wird die Gesamtsumme um 90 kleiner. Es verbleibt $(168 - 90 =)$ 78. Da es 6 Zeilen sind, muss die Zeilensumme mindestens 13 betragen (wegen $6 \cdot 13 = 78$).

Lassen wir wie in Aufgabe 3b) die 8 Domino-Steine mit den kleinsten Augenzahlen sowie 2-3 und 1-4 weg, wird die Gesamtsumme um 29 kleiner. Es verbleibt $(168 - 29 =)$ 129. Da es 6 Zeilen sind, muss die Zeilensumme höchstens 21 betragen (wegen $6 \cdot 21 = 126 < 129$).

Da heißt es nun mit viel Geduld probieren, probieren, probieren, ... Hier ein Beispiel mit der Zeilen- und Spaltensumme 13:

2	6	2	2	1	0
3	1	2	3	0	4
4	1	4	2	2	0
0	0	3	3	6	1
1	5	1	1	0	5
3	0	1	2	4	3