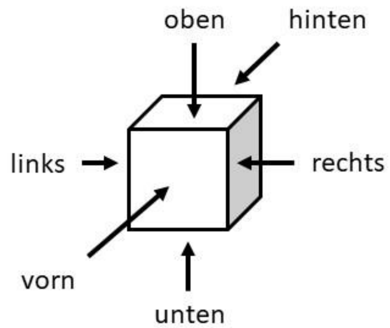
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zur Sommeraufgabe 2022

Zur Beschreibung von Würfelkörpern und deren Punktverteilungen verwenden wir die Richtungsangaben so wie in der neben stehenden Abbildung. Sichtbar sind alle Seitenflächen, die wir von vorn oder hinten, von rechts oder links sowie von oben sehen können. Wir wissen, dass die Summe gegenüber liegender Punktzahlen beim Würfel stets 7 ist.



Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz. Quadrato hat insgesamt 4 Möglichkeiten, aus 3 Würfeln verschiedene Würfelkörper zu bauen.

Begründung: Um alle möglichen Würfelkörper zu finden, die Quadrato aus drei Würfeln auf einem Tisch bauen könnte, unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen nur ein Würfel den Tisch berührt: Dies ist nur möglich, wenn die beiden anderen Würfeln übereinandergestapelt werden. Es gibt in diesem Fall also nur **1 Möglichkeit**!

Fall 2: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen zwei Würfel den Tisch berühren: Diese beiden Würfel müssen an eine Würfelseite aneinanderstoßen. Den dritten Würfel setzen wir einem der Würfel obendrauf. Dabei ist es egal, auf welchen Würfel wir den dritten Würfel setzen, denn wir können jeden dieser Würfelkörper so drehen, dass wir auf dem Tisch zwei Würfel sehen und auf dem linken Würfel der dritte Würfel zu sehen ist. Es gibt also auch in diesem Fall nur **1 Möglichkeit**!

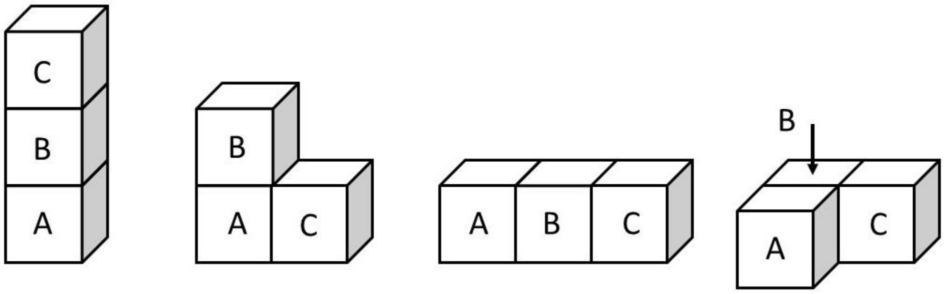
Fall 3: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen drei Würfel den Tisch berühren: Wir erkennen nun **2 Möglichkeiten**!

(a) Die drei Würfel liegen in einer Reihe nebeneinander.

(b) Die drei Würfel liegen in einem Winkel. (Dabei können wir diesen Würfelkörper immer so drehen, dass vorn zwei Würfel in einer Reihe zu sehen sind und der dritte Würfel hinter dem linken Würfel liegt.)

Insgesamt kann Quadrato (1 + 1 + 2 =) 4 verschiedene Würfelkörper aus drei Würfel bauen. Wir bezeichnen für weitere Erklärungen die Würfel mit A, B und C, wie in der Abbildung ersichtlich.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



Fall 1 Fall 2 Fall 3a Fall 3b

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Um die Aufgabe zu lösen, müssen wir für jeden der vier möglichen Würfelkörper eine Punktverteilung angeben, bei der wir auf allen sichtbaren Würfelseiten insgesamt die Punktsumme 46 sehen.

Fall 1: Vom Würfel A sehen wir die Punkte von vorn und hinten (mit Summe 7) sowie von rechts und links (mit Summe ebenfalls 7). Vom Würfel A sehen wir also insgesamt immer 14 Punkte. Auch vom Würfel B sehen wir insgesamt immer 14 Punkte. Vom Würfel C sehen wir ebenfalls 14 Punkte (vorn/hinten, rechts/links) und zusätzlich die Punkte auf der Würfelseite oben. Sehen wir oben eine 4, so sind es insgesamt (14 + 14 + 14 + 4 =) 46 Punkte.

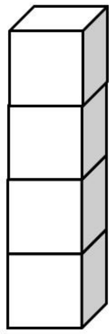
Fall 2: Von allen drei Würfel sehen wir die Punkte von vorn und hinten, also insgesamt 3 · 7 = 21 Punkte. Vom Würfel B sehen wir die Punkte von rechts und links (mit Summe 7). Weil die Würfel A und C mit der gleichen Punktzahl aneinanderstoßen, sehen wir am Würfel A links die gleiche Punktzahl wie am Würfel C von rechts. Wir können die Würfel so legen, dass wir dabei 6 sehen. Insgesamt sehen wir nun schon 3 ·7 + 7 + 2 · 6 = 40 Punkte. Nun sehen wir zusätzlich die Punkte am Würfel B oben und am Würfel C oben. Wenn wir beide Würfel so drehen, dass oben jeweils 3 zu sehen ist, erreichen wir insgesamt 40 + 2 · 3 = 46 Punkte.

Fall 3a: Von den Würfeln A, B und C sehen wir jeweils die Punkte von vorn und hinten, also insgesamt 3 · 7 = 21 Punkte. Da die Würfel A und B und die Würfel B und C mit der gleichen Punktzahl aneinanderstoßen, ergibt die Punktzahl am Würfel A links und die Punktzahl am Würfel C rechts die Summe 7, so dass wir schon 3 · 7 + 7 = 28 Punkte sehen. Drehen wir alle drei Würfel so, dass oben jeweils 6 zu sehen ist, erreichen wir 28 + 3 · 6 = 46 Punkte.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Fall 3b: Drehen wir den Würfel B so, dass hinten 6 und links 5 zu sehen sind, so sehen wir vom Würfel C rechts ebenfalls 5 und vom Würfel A vorn ebenfalls 6. Außerdem sehen wir vom Würfel A links/rechts die Punktsumme 7 und vom Würfel C vorn/hinten die Punktsumme 7. Das sind schon $2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 36$ Punkte. Sehen wir vom Würfel B oben 4, drehen wir die Würfel A und C so, dass oben jeweils 3 zu sehen sind. Sehen wir vom Würfel B oben eine 3, drehen wir den Würfel A so, dass oben 3 zu sehen ist, und den Würfel C so, dass oben 4 zu sehen ist. In jedem Fall erreichen wir $36 + 4 + 3 + 3 = 46$ Punkte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 - Antwortsatz. Kreisa kann 15 verschiedene Würfelkörper bauen.



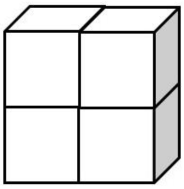
Begründung: Wir gliedern unsere Suche wieder so wie bei Aufgabe 1.

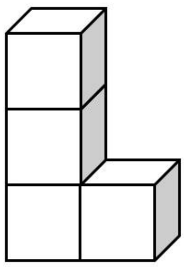
Fall 1: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen nur ein Würfel den Tisch berührt: Dies ist nur möglich, wenn die drei anderen Würfel übereinandergestapelt werden. Es gibt in diesem Fall also nur **1 Möglichkeit**!

Fall 2: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen zwei Würfel den Tisch berühren: Es gibt jetzt **2 Möglichkeiten**!

(a) Wir legen die beiden anderen Würfel nebeneinander obendrauf.

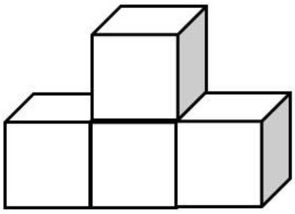
(b) Wir stapeln die beiden anderen Würfel über dem linken Würfel.



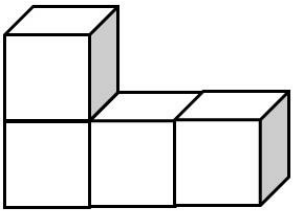


Fall 3: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen drei Würfel den Tisch berühren. Wir wissen aus Aufgabe 1, dass es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, drei Würfel auf den Tisch zu legen.
Untersuchen wir zunächst die Variante, dass die drei Würfel nebeneinander liegen. Dafür gibt es **2 Möglichkeiten**, den vierten Würfel obendrauf zu legen: Entweder auf den mittleren Würfel dieser Reihe (Fall 3a) oder auf den linken Würfel dieser Reihe (Fall 3b). Liegt der Würfel auf dem rechten Würfel dieser Reihe, können wir den Würfelkörper so drehen, dass er nach der Drehung auf dem linken Würfel dieser Reihe erscheint, ergibt also keine neue Möglichkeit.
Untersuchen wir nun die Variante, dass die drei Würfel im Winkel liegen. Dafür gibt es **3 Möglichkeiten**. Wir können nämlich den vierten Würfel auf jeden der drei anderen Würfel obendrauf legen Fälle (3c, 3d und 3e).

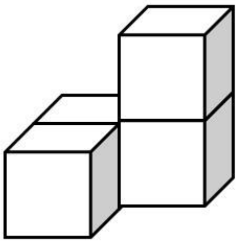
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



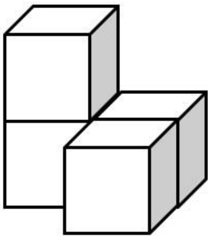
Fall 3a



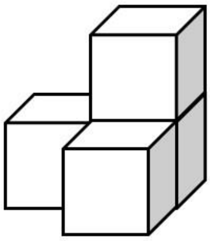
Fall 3b



Fall 3c



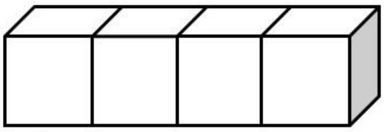
Fall 3d



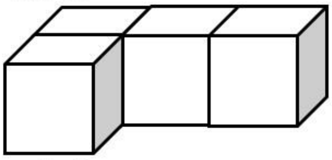
Fall 3e

Fall 4: Wir suchen alle Würfelkörper, bei denen alle vier Würfel den Tisch berühren. Dafür gibt es **7 Möglichkeiten**:

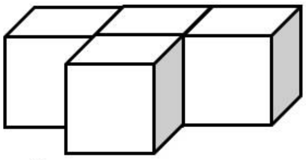
Wir können die vier Würfel nebeneinanderlegen (Fall 4a).
Wir können aber auch drei Würfel nebeneinanderlegen und den vierten Würfel vorn an den linken, mittleren oder rechten Würfel dieser Reihe anlegen (Fälle 4b, 4c und 4d). Wenn wir den vierten Würfel hinten anlegen, können wir den Würfelkörper so drehen, dass es wie vorn angelegt aussieht. Das wären also keine weiteren Möglichkeiten.
Wir können aber auch zwei Würfel in eine Reihe legen und dann die beiden anderen Würfel vorn anlegen, oder einen Würfel vorn und den anderen diagonal davon hinten anlegen (Fälle 4e, 4f und 4g).



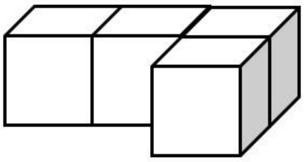
Fall 4a



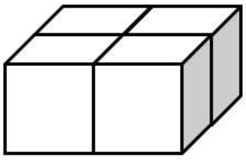
Fall 4b



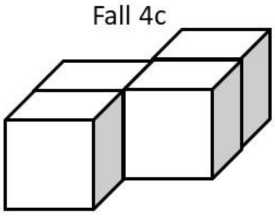
Fall 4c



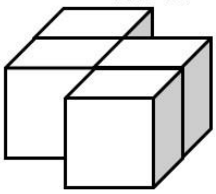
Fall 4d



Fall 4e



Fall 4f



Fall 4g

Insgesamt kann Kreisa 1 + 2 + 5 + 7 = 15 Würfelkörper aus 4 Würfel bauen.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 4. Zur Beantwortung genügt es, für jede geforderte Anzahl der sichtbaren Seitenflächen ein Beispiel anzugeben. Zur Vervollständigung der Lösung erinnern wir uns auch an die Ergebnisse aus der Runde 3.

Wir haben schon für verschiedene Anzahlen Beispiele für Würfelkörper abgebildet, die wir jetzt noch einmal übersichtlich in der Tabelle aufschreiben.

Beispiel	Abbildung	Anzahl sichtbare Seitenflächen					
		vorn	oben	hinten	links	rechts	gesamt
W11	Fall 3a Aufgabe 1	3	3	3	1	1	11
W12	Fall 4e Aufgabe 3	2	4	2	2	2	12
W13	Fall 1 Aufgabe 3	3	1	3	3	3	13
W14	Fall 4a Aufgabe 3	4	4	4	1	1	14
W15	Fall 3e Aufgabe 3	3	3	3	3	3	15
W16	Fall 2b Aufgabe 3	4	2	4	3	3	16
W17	Fall 1 Aufgabe 3	4	1	4	4	4	17
W18	Abbildung 4a	5	4	5	2	2	18
W19	Abbildung 4b	4	3	4	4	4	19

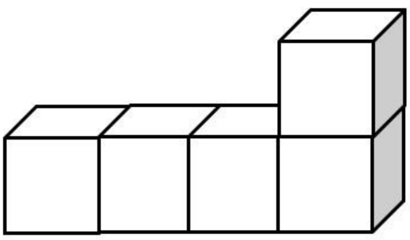


Abbildung 4a

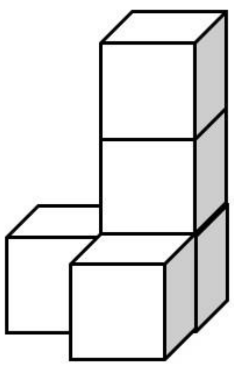


Abbildung 4b

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu Aufgabe 5. Wenn Kreisa bereits einen Würfelkörper gebaut hat, dann kann sie einen weiteren Würfel so obendrauf legen, dass er an den bestehenden Würfelkörper mit einer Seitenfläche anstößt. Dann steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen um 4. Es könnten nämlich 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 2 Seitenflächen werden durch das Aufeinandersetzen unsichtbar.

- Beginnt sie mit Würfelkörper W16, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 20 sichtbaren Seitenflächen bauen (W20).

- Beginnt sie mit Würfelkörper W17, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 21 sichtbaren Seitenflächen bauen (W21).

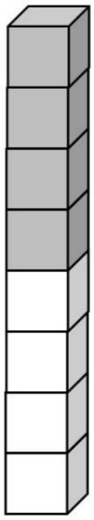
- Beginnt sie mit Würfelkörper W18, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 22 sichtbaren Seitenflächen bauen (W22).

- Beginnt sie mit Würfelkörper W19, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 23 sichtbaren Seitenflächen bauen (W23).

- Beginnt sie mit Würfelkörper W20, kann sie durch Drauflegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 24 sichtbaren Seitenflächen bauen (W24). Das ist aber das Gleiche, als würde sie mit dem Würfelkörper W16 beginnen und zwei weitere Würfel als Turm obendrauf legen, 16 + 4 + 4 = 24 Seitenflächen.

Um für eine beliebige Zahl N einen Würfelkörper mit N sichtbaren Seitenflächen zu bauen, prüft Kreisa, welche der Zahl N – 16, N – 17, N – 18 oder N – 19 durch 4 teilbar ist. Wenn sie die Differenz gefunden hat, die durch 4 teilbar ist, beginnt sie mit dem entsprechenden Würfelkörper und legt die erforderliche Anzahl Würfel obendrauf.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de



Beispiel: Kreis will einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen bauen. Sie erkennt, dass 33 – 17 = 16 durch 4 teilbar ist. Deshalb beginnt sie mit dem Würfelkörper W17 und stapelt 4 weitere Würfel als Turm obendrauf. Es sind dann wirklich 17 + 4 · 4 = 33 Seitenflächen sichtbar.

Andere Variante: Wenn Kreisa bereits einen Würfelkörper gebaut hat, dann kann sie einen weiteren Würfel aber auch so anlegen, dass er an den bestehenden Würfelkörper mit einer Seitenfläche anstößt und den Tisch berührt. Dann steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen um 3. Es könnten nämlich 6 Seitenflächen hinzukommen, aber 3 Seitenflächen werden durch das Aufeinandersetzen unsichtbar.

- Beginnt sie mit Würfelkörper W17, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 20 sichtbaren Seitenflächen bauen (W20).

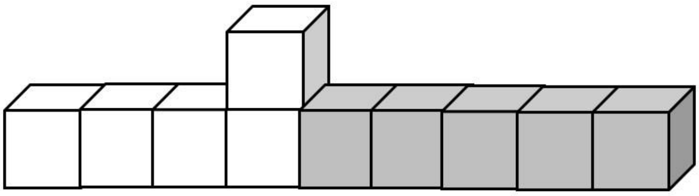
- Beginnt sie mit Würfelkörper W18, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 21 sichtbaren Seitenflächen bauen (W21).

- Beginnt sie mit Würfelkörper W19, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 22 sichtbaren Seitenflächen bauen (W22).

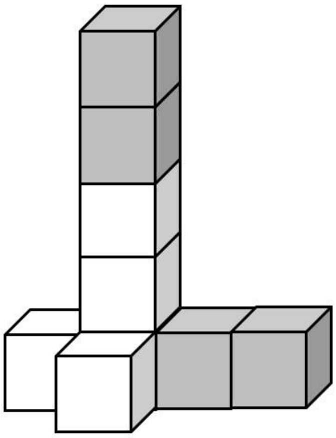
- Beginnt sie mit Würfelkörper W20, kann sie durch Anlegen eines weiteren Würfels einen Würfelkörper mit 23 sichtbaren Seitenflächen bauen (W23). Das ist aber das Gleiche, als würde sie mit dem Würfelkörper W17 beginnen und zwei weitere Würfel anlegen, 17 + 3 + 3 = 23 Seitenflächen.

Um für eine beliebige Zahl N einen Würfelkörper mit N sichtbaren Seitenflächen zu bauen, prüft Kreisa, welche der Zahl N – 17, N – 18 oder N – 19 durch 3 teilbar ist. Wenn sie die Differenz gefunden hat, die durch 3 teilbar ist, beginnt sie mit dem entsprechenden Würfelkörper und legt die erforderliche Anzahl Würfel an.

Beispiel: Kreis will einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen bauen. Sie erkennt, dass 33 – 18 = 15 durch 3 teilbar ist. Deshalb beginnt sie mit dem Würfelkörper W18 und legt 5 weitere Würfel an. Es sind dann wirklich 18 + 5 · 3 = 33 Seitenflächen sichtbar.



Natürlich kann Kreisa auch Würfel obendrauf legen und andere Würfel in der Tischebene anlegen, um eine gewünschte Zahl von sichtbaren Seitenflächen zu erhalten. Beginnt sie mit dem Würfelkörper W19, erhält sie auch einen Würfelkörper mit 33 sichtbaren Seitenflächen, wenn sie zwei Würfel obendrauf legt und zwei Würfel auf Tischebene anlegt, insgesamt $19 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 33$ sichtbare Seitenflächen.



Lösungshinweise zu Aufgabe 6 - Antwortsatz. Es ist nicht möglich, einen Würfelkörper mit 10 sichtbaren Seitenflächen zu bauen.

Begründung:

- Bei einem Würfel sind 5 Seitenflächen sichtbar.
- Bei zwei nebeneinander liegenden Würfeln sind 8 Seitenflächen sichtbar. Bei zwei übereinander liegenden Würfeln sind 9 Seitenflächen sichtbar.
- Verwenden wir 3 Würfel, so haben alle möglichen Würfelkörper mindestens 11 sichtbare Seitenflächen, wie wir an den 4 Möglichkeiten der Aufgabe 1 erkennen.
- Nehmen wir weitere Würfel dazu, steigt die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen.

Es kann also keine Würfelkörper mit 10 sichtbaren Seitenflächen geben.