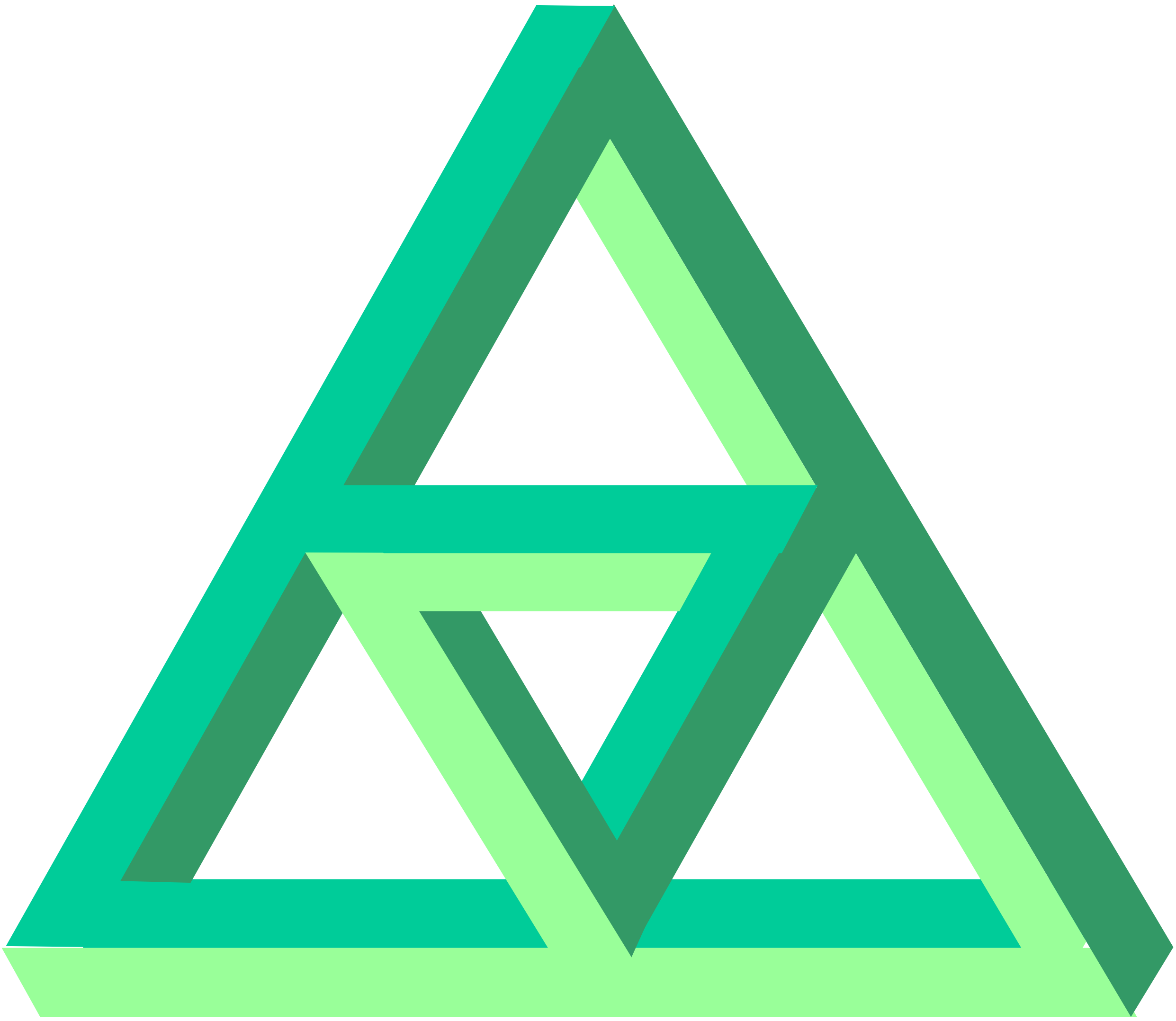
Mathematische Kostproben

Beiträge zur Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik

– zusammengestellt von Dr. Norman Bitterlich (Chemnitz) –



Heft 8+9/2023 (August/September 2023) 22. Jahrgang

Vorwort

Die „Mathematischen Kostproben“ sind ein Beitrag für die Interessen- und Begabtenförderung im Fach Mathematik, insbesondere für die Klassenstufen 9 und 10. Für eine intensive Vor- und Nachbereitung der Mathematik-Olympiaden werden anhand von aktuellen Wettbewerbsaufgaben[1] thematische Schwerpunkte ausgewählt. Die Sammlung von ähnlichen Aufgabenstellungen mit zugehörigen Lösungsdiskussionen wird durch weitere Aufgaben zur Thematik ergänzt.

Im Heft werden auch Beiträge veröffentlicht, die einen direkten Bezug zum sächsischen Korrespondenzzirkel Mathematik der Klassenstufen 9/10[2] haben. Diese sollen und können keine Lösungsdiskussion ersetzen, vertiefen aber die Aufgabenthematik und könnten weiterführende Anregungen geben.

Noch einmal knüpfen wir an die Aufgaben **MO620941/MO621041** an und erweitern die Thematik auf das Querprodukt einer Zahl. Die Idee, durch Austausch der Begriffe Quersumme und Querprodukt zu neuen Fragestellungen zu kommen, führt mitunter zu sehr komplexen Fallunterscheidungen, da die Nichtlinearität der Gleichungen über den Zusammenhang der Ziffern keine geschlossenen Lösungsansätze erlauben. Damit eignen sich derart generierte Aufgabe für das Trainieren eines Lösungsansatzes durch Fallunterscheidung. Aber es gibt auch Fragestellungen, die zu trivialen Problemen führen.

Im Rückblick auf die Aufgaben **MO620942/MO621042** betrachten wir kombinatorische Probleme aus der Wettbewerbs-Mathematik. Auch hier helfen oftmals Fallunterscheidungen, die Fragestellungen so zu gliedern, dass die zu bearbeitenden Fälle mit bekannten Methoden gelöst werden können. In den höheren Runden der MO erweisen sich die Lösungsdiskussionen als sehr anspruchsvoll.

Ein Auszug aus einem Lehrbuch von 1895 bietet den (damaligen) Einstieg in die Kombinatorik und zeigt die Herleitung der Formel zur Berechnung der Anzahl der Permutationen.

[1] www.mathematik-olympiaden.de
[2] https://www.cb.hs-mittweida.de/index.php?id=265743&no_cache=1

Thema 23.02 – Quersummen und Querprodukte

Mit Bezug zu den Aufgaben **MO620941/MO621041** fanden wir einen Zusammenhang zwischen der Summe der Quersummen zweier Zahlen und der Quersumme der Summe dieser Zahlen.

Aufgabe 23.08. Die beiden positiven ganzen Zahlen x und y haben die Summe z. Die Quersumme von x beträgt $Q(x) = 43$. Die Quersumme von y beträgt $Q(y) = 68$.

Wie groß ist Q(z), wenn bei der schriftlichen Addition in genau fünf Spalten jeweils ein Übertrag entsteht?

Lösungshinweise: Wir kennen den Zusammenhang $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) - 9k$, wobei k die Anzahl der Überträge bei der schriftlichen Addition angibt. Somit finden wir $Q(z) = 43 + 68 - 9 \cdot 5 = 43 + 68 - 45 = 66$. ❑

Aufgabe 23.09. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n, deren Querprodukt und Quersumme übereinstimmen?

Lösungshinweise: Da für zwei Ziffern $a, b > 1$ stets $a \cdot b \geq 2 \cdot max\{a, b\} \geq a + b$ gilt, können wir jede Zahl, deren Querprodukt größer als die Quersumme ist, durch zusätzliche Stellen „1“ erweitern, bis die Quersumme den Wert des (unveränderlichen) Querproduktes erreicht. Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft, z.B. betrachten wir für $n > 0$ die Zahlen

$$\underbrace{11\ldots11}_{k-mal}\underbrace{22\ldots22}_{n-mal}.$$

Wählen wir $k = 2^n - 2n$ (also 2, 22, 11222, 111111112222 usw.) so ist das Querprodukt gleich 2^n und die Quersumme $k \cdot 1 + n \cdot 2 = 2^n - 2n + 2n = 2^n$. ❑

Aufgabe 23.10. Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, die gleich der Summe ihrer Quersumme und ihres Querproduktes ist, also $n = QS(n) + QP(n)$!

Lösungshinweise: Unter den einstelligen natürlichen Zahlen kann es keine Zahl mit dieser Eigenschaft geben, denn in diesem Fall gilt stets $n = QS(n) = QP(n)$.

Es sei $n = 10a + b$ mit $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und $a > 0$. Dafür wird laut Aufgabenstellung gefordert, dass $10a + b = (a + b) + (a \cdot b)$, also $9a = a \cdot b$ und wegen $a \neq 0$ nach Division durch a sogar $9 = b$ gilt. Also können unter den zweistelligen Zahlen nur alle Zahlen der Form 19, 29, …, 99 Lösung der Aufgabe sein. Dies bestätigen wir durch eine Probe: Sei a eine Ziffer 1, 2, …, 9, so erhalten wir

$$10a + 9 = a + 9 + 9 \cdot a = QS(10a + 9) + QP(10a + 9)$$

Es sei nun n echt k-stellig ($k > 2$) mit den Ziffern $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0$ mit $a_{k-1} \geq 1$. Dann finden wir folgende Abschätzung:

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i + \prod_{i=0}^{k-1} a_i = n \geq 10^{k-1} \cdot a_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} a_i \,.$$

Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\sum_{i=0}^{k-2} a_i$ und teilen anschließend beide Seiten durch $a_{k-1} \neq 0$, so erhalten wir

$$1 + \prod_{i=0}^{k-2} a_i \geq 10^{k-1}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber (wenn alle anderen Ziffern den Wert 9 haben) höchstens $1 + 9^{k-1}$, was aber offensichtlich für $k > 2$ kleiner als 10^{k-1} ist. Es kann also keine weiteren Lösungen der Aufgabenstellung geben. ❑

Hinweis: Die Argumentation für mindestens dreistellige Zahlen lässt sich auch auf zweistellige Zahlen übertragen, also für $k = 2$. Dann untersuchen wir die Abschätzung $1 + a_0 \geq 10$ und erkennen, dass diese nur für $a_0 = 9$ erfüllt werden kann.

Aufgabe 23.11 – MO440924. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihrer Quersumme $QS(n)$ beträgt 2004.

Lösungshinweise: Die Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist n kleiner als 2004. Also probiere man die Zahlen 2003, 2002, ..., bis man sicher sein kann, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann. Da die Quersumme einer Zahl kleiner als 2004 höchstens $1 + 9 + 9 + 9 = 28$ ergeben kann, genügt es die Zahlen bis $(2004 - 28 =)1976$ zu probieren. Dies wurde in den Lösungshinweisen zur Aufgabe als vollständige Lösungsdarstellung akzeptiert.

Doch wie immer bei solchen „Probier"-Aufgaben wollen wir durch Vorüberlegungen die Menge der zu probierenden Zahlen einschränken.

Fall 1: Es gelte $n \geq 2000$. Es gibt also eine Einerziffer e mit $QS(n) = 2 + e$ und damit $(2000 + e) + (2 + e) = 2004$, also $2002 + 2 \cdot e = 2004$. Daraus folgt $e = 1$. Tatsächlich erfüllt $n = 2001$ die Gleichung $2001 + QS(2001) = 2001 + 3 = 2004$.

Fall 2: $n < 2000$: Für $n > 1975$ gibt es eine Ziffer z (mit $z = 7, 8, 9$) und eine Ziffer e mit $QS(n) = 1 + 9 + z + e$ und $1900 + 10 \cdot z + e + 1 + 9 + z + e = 2004$, also $11 \cdot z + 2 \cdot e = 94$. Damit muss z eine gerade Zahl sein, d.h. $z = 8$, und deshalb finden wir $e = 3$. Die Probe $1983 + QS(1983) = 1983 + 21 = 2004$ bestätigt $n = 1983$ als Lösung. ❑

Aufgabe 23.12. Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus der Zahl n und ihres Querproduktes $QP(n)$ beträgt 2015.

Lösungshinweise: Auch diese Aufgabenstellung verleitet zum Probieren. Sicher ist $n = 2015$ eine Lösung, weil $2015 + QP(2015) = 2015 + 0 = 2015$ erfüllt ist. Weitere Lösungen dürfen keine Ziffer 0 enthalten und müssen folglich kleiner als 2000 sein. Also probieren wir die Zahlen 1999, 1998, ..., bis wir sicher sein können, dass es für kleinere als die probierten Zahlen keine Lösung mehr geben kann.

Wegen $QP(n) \leq 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ geht der Suchbereich bis höchstens $(2015 - 729 =)\ 1286$. In einem Klausurwettbewerb ist ein systematisches Probieren in einem so großen Bereich ohne weitere Vorüberlegungen nicht realistisch. In einer Hausarbeit ist Computertechnik für die Lösungsfindung hilfreich, die Lösungsdarstellung muss aber ohne Verweis auf die Rechnergebnisse gelingen.

Wir nennen die Ziffer an der Hunderterstelle h, an der Zehnerstelle z und an der Einerstelle e. Dann soll laut Aufgabenstellung gelten:

$$1000 + 100h + 10z + e + h \cdot z \cdot e = 2015.$$

Wir können zunächst die Hunderterstelle einschränken: Für $n = 1599$ gilt $1599 + QP(1599) = 1599 + 405 = 2004 < 2015$. Weil jede kleinere Zahl n zu einer kleineren Summe führt, finden wir die Abschätzung $h > 5$.

Fall 1: $e = 1$, also $100h + 10z + h \cdot z = 1014$. Wir finden $h = \frac{1014-10z}{100+z} \geq \frac{924}{109} > 8$. Wenn es Lösungen mit $e = 1$ gibt, muss $h = 9$ gelten. Dies bedeutet

$$900 + 10z + 9z = 1014,\ \text{d.h. } 19 \cdot z = 114,\ \text{also } z = 6.$$

Die Probe bestätigt $n = 1961$ wegen $1961 + 1 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 1 = 1961 + 54 = 2015$ als Lösung.

Fall 2: Wir erkennen, dass e nicht geradzahlig sein kann, weil dann in der Gleichung $100h + 10z + e + h \cdot z \cdot e = 1015$ die linke Seite als Summe von geraden Zahlen geradzahlig ist, im Widerspruch zur rechten Seite.

Fall 3: $e = 3$, also $100h + 10z + 3 \cdot h \cdot z = 1012$. Wir finden $h = \frac{1012-10z}{100+z\cdot 3} \geq \frac{922}{127} > 7$. Wenn es Lösungen mit $e = 3$ gibt, muss $h = 8$ oder 9 gelten. Dies bedeutet

$$h = 9 \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 3 = 1012,\ \text{d.h. } 37 \cdot z = 112,$$
$$h = 8 \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 3 = 1012,\ \text{d.h. } 34 \cdot z = 212.$$

In beiden Fällen führt dies zu keiner ganzen Zahl für z.

Fall 4: $e = 5$, also $100h + 10z + 5 \cdot h \cdot z = 1010$. Wir finden $h = \frac{1010-10z}{100+z\cdot 5} \geq \frac{920}{145} > 6$. Wenn es Lösungen mit $e = 5$ gibt, muss $h = 7$, 8 oder 9 gelten. Dies bedeutet

$$h = 9 \ \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 5 = 1010, \text{ d.h. } 55 \cdot z = 110, \text{ d.h. } z = 2,$$
$$h = 8 \ \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 5 = 1010, \text{ d.h. } 50 \cdot z = 210,$$
$$h = 7 \ \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 5 = 1010, \text{ d.h. } 45 \cdot z = 310.$$

Während die beiden letzte Gleichung zu keiner ganzen Zahl z führen, können wir $n = 1925$ wegen $1925 + 1 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 1925 + 90 = 2015$ als Lösung bestätigen.

Fall 5: $e = 7$, also $100h + 10z + 7 \cdot h \cdot z = 1008$. Wir finden $h = \frac{1008-10z}{100+z\cdot 7} \geq \frac{918}{163} > 5$. Wenn es also Lösungen mit $e = 7$ gibt, muss $h = 6$, 7, 8 oder 9 gelten. Dies bedeutet

$$h = 9 \ \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 7 = 1008, \text{ d.h. } 73 \cdot z = 108,$$
$$h = 8 \ \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 7 = 1008, \text{ d.h. } 66 \cdot z = 208,$$
$$h = 7 \ \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 7 = 1008, \text{ d.h. } 59 \cdot z = 308,$$
$$h = 6 \ \Rightarrow 600 + 10z + 6 \cdot z \cdot 7 = 1008, \text{ d.h. } 52 \cdot z = 408.$$

In allen diesen Fällen führt es zu keiner ganzen Zahl für z.

Fall 6: $e = 9$, also $100h + 10z + 9 \cdot h \cdot z = 1006$. Wir finden $h = \frac{1006-10z}{100+z\cdot 9} \geq \frac{916}{181} > 5$. Wenn es Lösungen mit $e = 9$ gibt, muss $h = 6$, 7, 8 oder 9 gelten. Dies bedeutet

$$h = 9 \ \Rightarrow 900 + 10z + 9 \cdot z \cdot 9 = 1006, \text{ d.h. } 91 \cdot z = 106.$$
$$h = 8 \ \Rightarrow 800 + 10z + 8 \cdot z \cdot 9 = 1006, \text{ d.h. } 82 \cdot z = 206,$$
$$h = 7 \ \Rightarrow 700 + 10z + 7 \cdot z \cdot 9 = 1006, \text{ d.h. } 73 \cdot z = 306,$$
$$h = 6 \ \Rightarrow 600 + 10z + 6 \cdot z \cdot 9 = 1006, \text{ d.h. } 64 \cdot z = 406,$$

In allen diesen Fällen führt es zu keiner ganzen Zahl für z.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. Die Gleichung wird also nur für $n = 1925, 1961, 2015$ erfüllt. ❑

Hinweis: Die eingangs gefundene Abschätzung für h zeigt, dass die Gleichung $n + QP(n) = 2004$ mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt. Man untersuche, ob weitere Lösungen neben $n = 1599$ und $n = 2004$ existieren.

Aufgabe 23.13 – MO450944. Bestimmen Sie die Anzahl aller neunstelligen natürlichen Zahlen n, die im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 = QS(QS(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler, mit QS die Quersumme abgekürzt.

Lösungshinweise: Da der ggT zweier Zahlen mindestens 1 ist, gilt

$$(1 + ggT(n; 90))^4 \geq (1 + 1)^4 = 16.$$

Somit gilt $QS(QS(n)) \geq 16$. Da n neunstellig ist, gilt $QS(n) \leq 81$. Zwischen 1 und 81 ist die Zahl mit der größten Quersumme 79. Für alle neunstelligen Zahlen n gilt folglich $1 \leq QS(QS(n)) \leq 16 = Q(79)$. Insgesamt erhalten wir daraus $QS(QS(n)) = 16$.

Daher kommen nur neunstellige Zahlen mit $QS(n) = 79$ als Lösung in Frage. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich:

a) Achtmal die Ziffer 9 und einmal die Ziffer 7.
b) Siebenmal die Ziffer 9 und zweimal die Ziffer 8.

Bei a) lassen sich genau 9 und bei b) genau $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ solche neunstelligen Zahlen bilden. Es gibt also (9 + 36 =) 45 neunstellige Zahlen mit der Quersumme 79.

Zur Lösung der Aufgabe muss aber zusätzlich $ggT(n;\ 90) = 1$ gelten. Die Primteiler von 90 sind 2, 3 und 5. Keine der gefundenen neunstelligen Zahlen ist durch 3 oder 5 teilbar. Es müssen somit nur diejenigen Zahlen eliminiert werden, die durch 2 teilbar sind. Das sind die 8 Zahlen aus b), die auf 8 enden. Also ergibt sich als Anzahl aller neunstelligen Zahlen mit der geforderten Eigenschaft (45 – 8 =) 37. ❑

Aufgabe 20.14. Bestimmen Sie die Anzahl aller dreistelligen natürlichen Zahlen *n*, die im Zehnersystem geschrieben wurden und für die gilt

$$(1 + ggT(n;\ 90))^4 = QP(QP(n)).$$

Mit ggT wird der größte gemeinsame Teiler, mit QP das Querprodukt abgekürzt.

Lösungshinweise: Wie oben finden wir $(1 + ggT(n;90))^4 \geq (1+1)^4 = 16$. Somit gilt $QP(QP(n)) \geq 16$. Da n dreistellig ist, gilt $QP(n) \leq 9^3 = 729$. Die Zahl zwischen 1 und 729 mit dem größten Querprodukt ist 699 mit $QP(699) = 486$. Für alle dreistelligen Zahlen n gilt folglich $0 \leq QP(QP(n)) \leq 486$.

Daher kommen nur dreistellige Zahlen als Lösung in Frage, deren Querprodukt vom Querprodukt die vierte Potenz einer Zahl zwischen 2 und 4 ergibt (wegen $2^4 = 16$ und $4^4 = 64$, aber $5^4 = 625$). Zudem kann $QP(n)$ höchsten $9^3 = 729$ sein. Als Ziffern von n sind folglich nur folgende Kombinationen möglich.

- $QP\big(QP(n)\big) = 2^4$ und $ggT(n;\ 90) = 1$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 2 (ggf. einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen $QP(n)$ als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.
-
    - $QP(n) = 128 = 4 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 8 \cdot 8$ alle möglichen Zahlen haben 2 als Teiler, d.h. $ggT(n;\ 90) > 1$
    - $QP(n) = 144 = 4 \cdot 4 \cdot 9 = 2 \cdot 8 \cdot 9$ nur für 9 als Einerstelle ist $ggT(n;\ 90) = 1 \Rightarrow$ 2 Zahlen

- $QP(n) = 182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 224 = 4 \cdot 7 \cdot 8$ nur für 7 als Einerstelle ist $ggT(n;\ 90) = 1 \Rightarrow$ 2 Zahlen
- $QP(n) = 242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 422 = 2 \cdot 211$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 218 = 2 \cdot 109$ keine Möglichkeit
- $QP(n) = 281 = 1 \cdot 281$ keine Möglichkeit

- $QP\big(QP(n)\big) = 3^4$ und $ggT(n;\ 90) = 1$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 3 (ggf. einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen QP(n) als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.
  - $QP(n) = 199 = 1 \cdot 199$ keine Möglichkeit
  - $QP(n) = 339 = 3 \cdot 113$ keine Möglichkeit
  - $QP(n) = 393 = 3 \cdot 131$ keine Möglichkeit
- $QP\big(QP(n)\big) = 4^4 = 2^8$ und $ggT(n;\ 90) = 3$. Die Ziffern von $QP(n)$ sind somit sämtlich Potenzen von 2 (einschließlich des Exponenten 0). Wir untersuchen die möglichen Kombinationen, inwieweit sich diese Zahlen $QP(n)$ als Produkt von drei einstelligen Faktoren darstellen lassen.
  - $QP(n) = 488 = 8 \cdot 61$ keine Möglichkeit

Die Zahlen 289, 829, 487 und 847 sind Lösungen der Aufgabe, wie die Proben bestätigen:

$$QP\big(QP(289)\big) = QP(2 \cdot 8 \cdot 9) = QP(144) = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;\ ggT(289; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(829)\big) = QP(8 \cdot 2 \cdot 9) = QP(144) = 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16;\ ggT(829; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(487)\big) = QP(4 \cdot 8 \cdot 7) = QP(224) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16;\ ggT(487; 90) = 1$$
$$QP\big(QP(847)\big) = QP(8 \cdot 4 \cdot 7) = QP(224) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16;\ ggT(847; 90) = 1$$

❑

Aufgabe 20.15. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, so dass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $QS(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir mit 12 die erste Zahl mit dieser Eigenschaft: $QS(12) = 3 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form 12; 1212; 12121212; 1212121212121212 usw. diese Eigenschaft. Denn aus einer solchen Zahl a erhält man durch Multiplikation mit einem Faktor der Form 100...001 die nächste Zahl. Damit verdoppelt sich aber die Quersumme. Gleichzeitig erhöht sich auch die Anzahl der Teiler mindestens auf das

Doppelte, denn mit jedem Teiler t von a ist auch 100...001 $\cdot\, t$ ein Teiler der neu gebildeten Zahl. ❑

Die Übertragung der Fragestellung auf das Querprodukt führt zu der trivialen

Aufgabe 23.16. Gibt es unendlich viele natürliche Zahlen n ohne Null in ihrer Dezimaldarstellung, sodass die Teileranzahl $T(n)$ größer als die Quersumme $QP(n)$ ist?

Lösungshinweise: Einstellige Zahlen haben diese Eigenschaft nicht, da die Teileranzahl einer Zahl nicht größer als die Zahl selbst sein kann. Durch systematisches Probieren finden wir mit 12 eine Zahl mit dieser Eigenschaft: $QP(12) = 2 < 5 = T(12)$. Damit hat auch jede Zahl der Form 11…112 die geforderte Eigenschaft, denn deren Querprodukte sind stets 2 und mit 1, 2, 4 gibt es mindestens 3 Teiler. ❑

Aufgabe 23.17. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit der Quersumme q?

Lösungshinweise: Wir suchen zunächst Beispiele für solche Zahlen n.

Für $q = 1$ ist $n = 1$ trivialerweise eine geeignete Lösung.
Für $q = 4$ könnte $n = 121 = 11^2$ gewählt werden.
Für $q = 9$ erfüllt $n = 12321 = 111^2$ die Bedingungen.

Dies lässt sich bis $q = 81$ fortsetzen – doch für größere Zahlen q gelingt dieses Prinzip nicht mehr.

Lässt sich mit diesen Beispielen schon der folgenden Ansatz erklären? Für $p^2 = q$ erfüllt die Zahl $n = k^2$ mit $k = \sum_{j=1}^{p} 10^{2^j}$ die Bedingungen der Aufgabe. Wir müssen „nur“ noch zeigen, dass k^2 außer Nullen p-mal die Ziffer 1 und $p(p-1)/2$-mal die Ziffer 2 enthält, also die Quersumme q hat. ❑

Aufgabe 20.18. Gibt es zu jeder natürlichen Quadratzahl q eine natürliche Quadratzahl n mit dem Querprodukt q?

Lösungshinweise: Diese Frage ist zu verneinen. Zwar gibt es für kleine q triviale Lösungen, nämlich $n = 1$ für $q = 1$, $n = 4$ für $q = 4$ und $n = 9$ für $q = 9$.

Für $q = 16$ müssten n in der Dezimaldarstellung die Ziffern 1, …, 1, 2, 8 oder die Ziffern 1, …, 1, 4, 4 vorkommen. Aber der Nachweis, dass aus diesen Ziffern keine Quadratzahl kombiniert werden kann, ist sicherlich aufwendig, oder?

Dagegen müsste für $q = 121 = 11^2$ die Zahl n in der Dezimaldarstellung die Ziffern 1, …, 1, 11, 11 haben – im Widerspruch dazu, dass Ziffern einstelligen Zahlen sind. ❑

Thema 24 – Kombinatorik

Aufgabe 24.01 – MO620942/MO621042. Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man durch Umordnen der sieben Buchstaben des Worts KLAUSUR bilden, bei denen keiner der Buchstaben mehr an der vorherigen Stelle steht, also K nicht an der ersten Stelle, L nicht an der zweiten, A nicht an der dritten, U weder an der vierten noch an der sechsten, S nicht an der fünften und R nicht an der siebenten Stelle?

Lösungshinweise: Wir finden die Platzierungsmöglichkeiten durch eine systematische Untersuchung. Dazu nehmen wir an, dass nach der Umordnung die zwei Buchstaben U auf den Plätzen 1 und 2 stehen (also auf den Plätzen von K und L).

Für den Buchstaben A gibt es nunmehr 4 Möglichkeiten der Umordnung

Fall 1: A steht nach der Umordnung auf dem Platz von S (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben S 4 Möglichkeiten der Umordnung.

Fall 1.1: S steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, U, U). Der Fall 1.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ Möglichkeiten.

Fall 1.2: S steht nach dem Umordnen nicht auf dem Platz von R (3 Möglichkeiten, Plätze A, U, U). Dann verbleiben für den Buchstaben R noch zwei Möglichkeiten. Der Fall 1.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 2: A steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit).

Fall 2.1: R steht nach der Umordnung auf dem Platz von S (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben S nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, U, U). Der Fall2.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$ Möglichkeiten.

Fall 2.2: R steht nach dem Umordnen nicht auf dem Platz von S (3 Möglichkeiten, Plätze A, U, U). Dann verbleiben für den Buchstaben S noch zwei Möglichkeiten. Der Fall 2.1 ergibt insgesamt $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 3: A steht nach der Umordnung auf einem Platz von U (2 Möglichkeit).

Fall 3.1: S steht nach der Umordnung auf dem Platz von R (1 Möglichkeit). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 3 Möglichkeiten (Plätze A, S, U). Der Fall 3.1 ergibt insgesamt $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 3.2: S steht nach der Umordnung nicht auf dem Platz von R (2 Möglichkeiten). Dann gibt es für den Buchstaben R nach dem Umordnen noch 2 Möglichkeiten (Plätze S, A oder U). Der Fall 3.1 ergibt insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Alle Fälle ergeben zusammen $3 + 6 + 3 + 6 + 6 + 8 = 32$ Möglichkeiten. Nun sind noch zwei Plätze frei, auf die K und L zu platzieren sind. Da diese Wahl unabhängig von der Verteilung der Buchstaben A, S und R erfolgt, finden wir insgesamt $2 \cdot 32 = 64$ Buchstabenreihenfolgen mit UU am Anfang.

Nun gibt es $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ verschiedene Verteilungen der zwei Buchstaben U auf die Plätze 1, 2, 3, 5 und 7. Für jede dieser Verteilung finden wir mit einer ähnlichen Argumentation wie eben 64 Buchstabenreihenfolgen der geforderten Art. Alle diese Buchstabenreihenfolgen sind paarweise verschieden, so dass es insgesamt $10 \cdot 64 = 640$ Verteilungen gibt. ❑

„Traditionelle" Wettbewerbsaufgaben mit kombinatorischen Fragestellungen beziehen sich auf die Ermittlung der Anzahl von Permutationen (also der Anordnung von Objekten in einer Reihenfolge). Es darf in der Lösungsdarstellung verwendet werden, dass es für n paarweise verschiedene Objekte (also Permutationen ohne Wiederholungen) insgesamt $n!$ verschiedene Anordnungen gibt.

Aufgabe 24.02.

a) Wie viele verschiedene Wörter kann man aus den Buchstaben des Wortes KLAUSUR bilden (wobei auch unsinnige und unaussprechliche Wörter zugelassen sind)?
b) Wie viele Wörter gemäß Aufgabe a) kann man bilden, wenn die Buchstaben U nicht nebeneinander stehen dürfen?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a) An erster Stelle können wir einen von 7 Buchstaben auswählen, an zweiter Stelle einen von 6 Buchstaben usw. bis wir an siebenter Stelle nur noch einen Buchstaben zur Verfügung haben. Das sind insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$ Möglichkeiten. Jedoch führt das Vertauschen der Buchstaben U in einem Wort nicht zu einem davon verschiedenen Wort, so dass jedes Wort doppelt auftritt. Somit verbleiben (5040 : 2 =) 2520 verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b) Wir legen zunächst die Platzierungen der Buchstaben U fest. Es gibt insgesamt $\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten, die zwei Buchstaben zu platzieren, jedoch stehen davon 6 Möglichkeiten nebeneinander. Somit verbleiben für die Aufgabenstellung (21 – 6 =) 15 verschiedene Möglichkeiten, die Buchstaben zu platzieren. Nun stehen noch 5 freie Plätze zur Verfügung, die anderen 5 (paarweise verschiedenen) Buchstaben zu platzieren, was mit $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ Möglichkeiten erreicht werden kann. Somit gibt es $(15 \cdot 120 =)\ 1800$ verschiedene Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wir berechnen zunächst die Anzahl der verschiedenen Wörter, in denen die zwei Buchstaben U nebeneinander stehen. Dafür können wir die Buchstabengruppe UU als einen eigenständigen Buchstaben auffassen, so dass es

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ Möglichkeiten gibt, verschiedene Wörter zu bilden. Mit dem Ergebnis der Teilaufgabe a) erhalten wir somit für die Fragestellung (2520 – 720 =) 1800 Möglichkeiten. ❑

Erstmalig wurden Permutationen in einer Aufgabenstellung der 3. MO thematisiert.

Aufgabe 24.03 - MO030922. Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuss auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuss hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Lösungshinweise: Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es folgende Möglichkeiten:

1. 7, 7, 7, 9, 10; 2. 7, 7, 8, 8, 10; 3. 7, 7, 8, 9, 9; 4. 7, 8, 8, 8, 9; 5. 8, 8, 8, 8, 8

und nur diese. Die Beobachtung der Reihenfolge führt zur Berechnung der Anzahl von sogenannten Anordnungen (Permutationen) mit Wiederholung.

1. Wären alle 5 Zahlen verschieden, so gäbe es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ verschiedene Möglichkeiten der Anordnung. Da jedoch die 7 dreimal auftritt, fallen $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten in eine einzige zusammen, so dass $120 : 6 = 20$ Möglichkeiten übrig bleiben.

2./3. Analoge Überlegungen führen zu $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 120 : 4 = 30$ Möglichkeiten.

4. Diese Konstellation entspricht der Variante 1 (20 Möglichkeiten).
5. Hierfür gibt es genau 1 Möglichkeit.

Insgesamt gibt es also 20 + 30 + 30 + 20 + 1 = 101 Möglichkeiten. ❑

Dieses Prinzip, die Aufgabe durch Fallunterscheidung in jeweils einfachere Situationen zu gliedern, hat sich als Lösungsstrategie vielfach bewährt, so auch in

Aufgabe 24.04 – MO490941/MO491941. Die Klasse 10b plant einen zweitägigen Ausflug zur DRK-Hütte in Altenfeld. In der Klasse 10b sind 13 Schuler (8 Jungen und 5 Mädchen). Es gibt keine Geschwisterkinder in dieser Klasse. Um die Kosten zu minimieren, haben sich fünf Väter bereit erklärt, die Schüler mit ihren Autos zur DRK-Hütte zu fahren. Die Mathematiklehrerin Frau Lustig notiert sich auf dem Elternabend die Namen der fünf Väter.

Frau Lustig stellt ihrer Klasse folgende Knobelaufgabe: Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Schüler auf die fünf Fahrzeuge gibt es, wenn man davon ausgeht, dass in jedem Auto genau drei Plätze für Schüler zur Verfügung stehen und in jedem Auto das Kind des Vaters sitzt, der das Auto fährt?

Lösungshinweise: Die fünf Fahrer und fünf Kinder sind schon platziert, so dass in jedem Auto noch zwei Plätze frei sind. Es müssen also nur noch die restlichen 8 Personen auf diese Plätze in den fünf Autos verteilt werden. Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

Fall 1: Es gibt ein Auto, in dem zwei Plätze frei bleiben. Dies ist genau dann möglich, wenn alle anderen Autos voll besetzt sind. Um alle solchen Möglichkeiten zu erfassen, wählen wir zunächst das Auto aus, in dem zwei Plätze frei bleiben; dafür gibt es fünf Möglichkeiten. Nun legen wir für die verbleibenden Fahrzeuge eine Reihenfolge fest. Dann werden für jedes dieser Fahrzeuge zwei der noch zu verteilenden Mitfahrer ausgewählt. Beim ersten Fahrzeug sind noch 8 Personen zu verteilen; dafür gibt es $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ Möglichkeiten. Entsprechend wird bis zum letzten Auto verfahren. Anwenden der Produktregel liefert

$$5\cdot\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2} = 5\cdot\frac{8!}{2^4} = 12600$$

Möglichkeiten für diesen Fall.

Fall 2: Es gibt kein Auto, in dem zwei Plätze frei bleiben. Da es für die verbleibenden zehn freien Plätze nur acht Mitfahrer gibt, sind in diesem Fall drei Fahrzeuge voll zu besetzen, während in den anderen beiden Fahrzeugen jeweils ein Platz frei bleibt. Zunächst werden diese zwei Fahrzeuge ausgewählt, dafür gibt es $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ Möglichkeiten. Dann werden diese zwei Autos in eine Reihenfolge gebracht; nun wird der weitere Mitfahrer für das erste dieser zwei Fahrzeuge gesucht (8 Möglichkeiten), dann der weitere Mitfahrer für das zweite (7 Möglichkeiten).

Die drei Autos, die jeweils voll zu besetzen sind, werden nun in eine Reihenfolge gebracht; dann werden für das erste dieser drei Fahrzeuge zwei weitere Mitfahrer ausgewählt. Dafür gibt es $\frac{6\cdot 5}{2}$ Möglichkeiten. Entsprechend wird bis zum letzten Auto verfahren. Anwenden der Produktregel liefert

$$\frac{5\cdot 4}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2} = 20\cdot\frac{8!}{2^4} = 50400$$

Möglichkeiten für diesen Fall.

Da es keine weiteren Fälle gibt und die beiden Fälle sich gegenseitig ausschließen, erhalten wir insgesamt 12 600 + 50 400 = 63 000 Möglichkeiten. ❑

Aufgabe 24.05 – MO370931. Zur Gestaltung einer Schulfeier will die Klasse 9a ein Glücksrad bauen. Es soll 5 im Kreis angeordnete Plätze zum Aufkleben von Bildern haben. Für die Bilder sind 5 Motive vorhanden, jedes Motiv in genügend vielen Exemplaren. Unter den Bildern auf dem Glücksrad soll es mindestens zwei geben, die voneinander verschiedene Motive zeigen, und für höchstens vier der Bilder soll gelten, dass je zwei voneinander verschiedene Motive zeigen.

Bei insgesamt wie vielen verschiedenen Verteilungen von Motiven auf die Plätze sind diese Bedingungen erfüllt? Dabei gelten zwei Verteilungen genau dann als einander gleich, wenn nach einer geeigneten Drehung des Glücksrades an jeder Stelle des Rades bei der einen Verteilung dasselbe Motiv zu sehen ist wie bei der anderen Verteilung.

Lösungshinweise: Wir können zunächst den Plätzen Nummern von 1 bis 5 reihum vergeben. Für jeden Platz haben wir 5 Motive zur Auswahl. Es gibt also bzgl. dieser Unterscheidung $5^5 = 3125$ Verteilungen.

Von ihnen haben 5 Verteilungen die Eigenschaft, auf allen Plätzen das gleiche Motiv zu zeigen. Diese erfüllen nicht die Bedingung, dass es mindestens zwei Plätze mit verschiedenen Motiven geben soll.

Außerdem gibt es unter ihnen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Verteilungen mit 5 unterschiedlichen Motiven. Diese erfüllen nicht die Bedingung, dass für höchstens vier der Bilder gelten soll, dass je zwei voneinander verschiedene Motive zeigen.

Somit erfüllen nur $(3125 - 5 - 120 =)\ 3000$ Verteilungen die Bedingungen. Jedoch sind darunter je 5 Verteilungen in dem Sinn gleich, dass sie durch Drehung ineinander überführt werden können (indem wir die Platznummer 1 durch Drehung auf die Plätze 1 bis 5 bringen). Somit gibt es $3000 : 5 = 600$ verschiedene Verteilungen für die Bilder auf dem Glücksrad. ❑

Die Aufgabe **MO371031** entsprach der Aufgabe MO370931, nur dass hier 7 Motive anstelle 5 Motiven zur Verfügung standen. Mit dieser Voraussetzung gibt es also $7^5 = 16807$ Verteilungen. Davon zeigen 7 Verteilungen das gleiche Motiv. Außerdem zeigen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2320$ Verteilungen paarweise verschiedene Motive. Somit erfüllen $(16807 - 7 - 2320 =)\ 14280$ Verteilungen die Bedingungen. Unter Berücksichtigung, dass darunter je 5 durch Drehung ineinander überführt werden können, verbleiben $14280 : 5 = 2856$ verschiedene Verteilungen.

Aufgabe 24.06 - MO570931/MO571031. Wir betrachten in dieser Aufgabe Wörter, die aus genau 11 Buchstaben bestehen; jeder dieser Buchstaben ist ein A oder ein B. Dabei ist es unerheblich, ob diese Wörter Sinn ergeben.

a) Wie viele solche Wörter gibt es?
b) Wie viele solche Wörter gibt es, die weder mit 8 gleichen Buchstaben beginnen noch mit 8 gleichen Buchstaben enden?

Lösungshinweise zu Teilaufgabe a) Da es für jeden Buchstaben genau zwei Möglichkeiten gibt und diese Möglichkeiten unabhängig voneinander gewählt werden können, gibt es insgesamt $2^{11} = 2048$ solche Wörter.

Lösungshinweise zu Teilaufgabe b) Wenn in einem solchen Wort die ersten acht Buchstaben gleich sein sollen, dann gibt es für diese Buchstaben genau 2 Möglichkeiten und für jeden der letzten drei Buchstaben auch 2 Möglichkeiten. Es gibt also 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben beginnen. Analog gibt es genau 2^4 Wörter, die mit acht gleichen Buchstaben enden. Wörter, die sowohl mit acht gleichen Buchstaben beginnen als auch mit acht gleichen Buchstaben enden, sind nur diejenigen, die aus elf gleichen Buchstaben bestehen, also genau 2. Damit ist die Anzahl der gesuchten Wörter (nach dem Prinzip von Inklusion und Exklusion) gleich $2^{11} - 2^4 - 2^4 + 2 = 2018$. ❑

Aufgabe 24.07 – MO500941/MO501041. Wie viele verschiedene achtbuchstabige Wörter (auch sinnlose oder unaussprechliche Wörter sind erlaubt) kann man aus drei Buchstaben A, drei Buchstaben B und zwei Buchstaben C bilden, bei denen gleiche Buchstaben nie nebeneinander stehen?

Lösungshinweise: Wir nehmen eine Fallunterscheidung nach der Position der C vor und betrachten die Anzahl und die Länge der (nichtleeren) Zwischenräume zwischen den Rändern oder den C. In jedem dieser Zwischenräume haben wir höchstens zwei Möglichkeiten zur Verwendung von A und B, nämlich entweder abwechselnd beginnend mit A oder abwechselnd beginnend mit B.

Fall 1: Es gibt genau einen Zwischenraum, d. h. die C stehen am Rand. Es ergeben sich genau die zwei Möglichkeiten CABABABC und CBABABAC.

Fall 2: Es existieren genau zwei Zwischenräume, d. h. ein C steht am Rand, das andere nicht. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein C am linken Rand steht. Wir unterscheiden nun nach der Größe des ersten Zwischenraumes, die Größe des zweiten ist dadurch eindeutig bestimmt:

Fall 2.1: Wenn der erste Zwischenraum ungerade Länge hat, ergibt sich aus der Wahl seines Anfangsbuchstabens zwingend die Belegung beider Zwischenräume und für diese Wahl gibt es zwei Möglichkeiten. Weiterhin gibt es drei Möglichkeiten für die Länge des ungeraden Zwischenraumes, nämlich 1, 3 und 5. Dieser Unterfall liefert also $2 \cdot 3 = 6$ Möglichkeiten.

Fall 2.2: Wenn der erste Zwischenraum gerade Länge hat, können wir in beiden Zwischenräumen den Anfangsbuchstaben frei wählen – für diese Wahl ergeben sich also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Darüber hinaus gibt es für die Länge des ersten Zwischenraumes zwei Möglichkeiten, nämlich 2 und 4. Dieser Unterfall liefert also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Für den Fall, dass ein C am rechten Rand steht, erhalten wir analog die gleichen Anzahlen von Möglichkeiten. Damit liefert der 2. Fall insgesamt $2 \cdot (6+8) = 28$ Möglichkeiten.

Fall 3: Es gibt genau drei Zwischenräume. Wir unterscheiden nach der größten der Zwischenraumlängen, welche höchstens $6-1-1=4$ sein darf und mindestens 2 sein muss:

Fall 3.1: Der größte Zwischenraum hat die Länge 4. Die anderen Zwischenräume haben dann beide die Länge 1. Bei dem größten Zwischenraum können wir den Anfangsbuchstaben frei wählen, die verbleibenden unterschiedlichen Buchstaben (ein A und ein B) können wir frei auf die kleinen Zwischenräume verteilen – hierfür gibt es zusammen $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten.

Außerdem gibt es genau drei unterscheidbare Möglichkeiten, eine Zwischenraum der Länge vier und zwei Zwischenräume der Länge 1 anzuordnen. Dieser Unterfall liefert also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.

Fall 3.2: Der größte Zwischenraum hat die Länge 3. Ein weiterer muss dann die Länge 1 und einer die Länge 2 haben. Die Wahl des Anfangsbuchstabens im längsten Zwischenraum legt den Buchstaben im Einer-Zwischenraum fest, während der Anfangsbuchstabe im Zweier-Zwischenraum frei gewählt werden kann; insgesamt gibt es also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten.

Die Zwischenräume haben alle verschiedene Längen und können daher auf 3! = 6 verschiedene Arten angeordnet werden. Es gibt also in diesem Unterfall $6 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

Fall 3.3: Die größte Zwischenraumlänge ist 2. Dann haben alle Zwischenräume die Länge 2 und der jeweilige Anfangsbuchstabe kann frei gewählt werden. Hierfür gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Da die Zwischenräume gleiche Länge haben, gibt es keine voneinander unterscheidbaren Möglichkeiten, diese Zwischenräume anzuordnen.

Der 3. Fall liefert also $12 + 24 + 8 = 44$ Möglichkeiten.

Insgesamt ergeben sich damit $2 + 28 + 44 = 74$ Möglichkeiten der Verteilung. ❑

Wettbewerbsaufgaben, die den Begriff „Wahrscheinlichkeit" enthalten, erfordern zunächst die Ermittlung der Anzahl aller günstigen Fälle, die zu dem beschriebenen Ereignis passen. Mitunter ist die Berechnung der konkreten Wahrscheinlichkeiten zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich.

Aufgabe – MO491034. An einem Lift stehen fünf Männer und drei Frauen, um nach oben zu fahren. Mit dem Lift können immer nur zwei Personen (ein Paar) befördert werden, so dass genau vier Fahrten benötigt werden. Die acht Personen steigen in zufälliger Reihenfolge in den Lift ein. Dabei können sowohl gleichgeschlechtliche Paare (zwei Männer oder zwei Frauen) als auch verschiedengeschlechtliche Paare (je ein Mann und eine Frau) entstehen.

a) Welche Wahrscheinlichkeit ist größer, dass mehr gleichgeschlechtliche Paare auftreten oder dass mehr verschiedengeschlechtliche Paare auftreten?
b) Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die vier zuerst oben angelangten Personen alles Männer sind, größer als 1die Wahrscheinlichkeit, dass unter den vier zuerst oben angelangten alle drei Frauen sind?

Lösungshinweise – Vorbemerkungen: Zunächst betrachten wir nur das Geschlecht und untersuchen, wie viele Möglichkeiten es gibt, verschiedene achtbuchstabige Wörter aus fünf Buchstaben M (für Männer) und drei Buchstaben F (für Frauen) zu bilden. Wir können für F $8 \cdot 7 \cdot 6$ Positionen auswählen, wobei sich aber jeweils $3 \cdot 2 \cdot 1$ nicht unterscheiden. Insgesamt gibt es also $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ verschiedene Möglichkeiten, drei F auf acht Plätze festzulegen. Für die Buchstaben M sind die Plätze dann eindeutig festgelegt.

Zu jeder dieser Reihenfolge gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten, die Frauen auf die Plätze F zu verteilen. Zu jeder dieser Reihenfolge gibt es $5! = 120$ Möglichkeiten, die Männer auf die Plätze M zu verteilen. Also entspricht jede dieser Reihenfolgen genau $6 \cdot 120 = 720$ gleichwahrscheinliche Reihenfolgen der Personen. Es genügt also zur Beantwortung der Fragen jeweils die oben genannten 56 Möglichkeiten der achtbuchstabigen Wörter zu betrachten.

Teilaufgabe a) Es gibt $4 \cdot 2^3 = 32$ Verteilungen mit drei verschiedengeschlechtlichen Paaren (nämlich 4 verschiedene Positionen für das MM-Paar und für die anderen Paare je 2 Positionen für das F). Wegen 56 – 32 = 24 < 32 gibt es mehr Fälle mit mehr verschiedengeschlechtlichen Paaren als Fälle mit mehr gleichgeschlechtlichen Fällen.

Teilaufgabe b) Wir betrachten alle Möglichkeiten, dass die ersten vier Personen alles Männer sind. Dann sind in diesen Fällen unter den letzten vier Personen die drei Frauen. Da wir die Möglichkeiten umkehren können, gibt es also gleichviele Reihenfolgen beider Sorten. ❑

64. Internationale Mathematik-Olympiade

Die diesjährige Internationale Mathematik-Olympiade fand vom 2. bis 13. Juli 2023 in Chiba (Japan) statt. Mit 67 teilnehmenden Schülerinnen und 550 Schülern aus 112 Ländern lag die Teilnahme nahe an den bisherigen Rekordwerten von 2019 (621 Teilnehmende aus 112 Ländern).

Insgesamt wurden 303 Medaillen vergeben, somit erhielten 48,9% aller Teilnehmer einen Preis. Mit drei Silber- und drei Bronzemedaillen schnitten die deutschen Teilnehmer wieder sehr erfolgreich ab. Sie konnten mit insgesamt 156 Punkten von 252 möglichen Punkten (61,9%) in der (inoffiziellen, auf der Punktsumme der sechs Mannschaftsmitglieder basierenden) Länderwertung den **20. Platz** erreichen (2021: 129 Punkte/12. Platz; 2022: 192 Punkte/7. Platz). Angeführt wird diese Länderliste erneut von der Volksrepublik China (240 Punkte, sechs Goldmedaillen), den USA (222 Punkte, fünf Gold- und eine Silbermedaille) und der Republik Korea (215 Punkte, vier Gold- und zwei Silbermedaillen). Von den europäischen Ländern liegen nur Rumänien, das Vereinigte Königreich und Italien vor Deutschland.

Vielfältige Informationen sind unter http://www.imo-official.org/ zu finden!

Aufgaben der 64. IMO[3]

Aufgabe 1. Man bestimme alle zusammengesetzten ganzen Zahlen $n > 1$ mit der folgenden Eigenschaft: Sind $d_1, d_2, \dots d_k$ mit $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ alle positiven Teiler von n, dann ist d_i ein Teiler von $d_{i+1} + d_{i+2}$ für alle $1 \leq i \leq k-2$.

Aufgabe 2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei Ω der Umkreis von ABC. Ferner sei S der Mittelpunkt des Bogens CB von Ω, der A enthält. Die Senkrechte von A auf BC schneide BS in D und Ω nochmals in $E \neq A$. Die Parallele zu BC durch D schneide die Gerade BE in L. Der Umkreis des Dreiecks BDL sei mit ω bezeichnet. Der zweite Schnittpunkt von ω mit Ω sei $P \neq B$.

Man beweise, dass die Tangente an ω in P die Gerade BS auf der inneren Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ schneidet.

Aufgabe 3. Man bestimme für jede ganze Zahl $k \geqslant 2$ alle unendlichen Folgen positiver ganzer Zahlen $a_1, a_2, \dots$, für die ein Polynom P der Gestalt

$$P(x) = x^k + c_{k-1} \cdot x^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot x + c_0$$

mit nichtnegativen ganzzahligen $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ existiert, sodass

$$P(a_n) = a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_{n+k}$$

für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ gilt.

Aufgabe 4. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_{2023}$ paarweise verschiedene positive reelle Zahlen, sodass

[3] *Hinweis: Die Arbeitszeit betrug zweimal 4 Stunden und 30 Minuten. Für jede Aufgabe waren 7 Punkte erreichbar.*

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

für alle $n = 1, 2, \dots, 2023$ ganzzahlig ist. Man beweise, dass $a_{2023} \geqslant 3034$ gilt.

Aufgabe 5. Sei *n* eine positive ganze Zahl. Ein *Japanisches Dreieck* besteht aus $1 + 2 + \cdots + n$ Kreisen, die in Form eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet sind, sodass für jedes $i = 1, 2, \dots, n$ die i −te Zeile genau i Kreise enthält, von denen genau einer rot gefärbt ist. Ein *Ninja-Pfad* in einem Japanischen Dreieck ist eine Folge von n Kreisen, bei der man, beginnend in der obersten Reihe, wiederholt von einem Kreis zu einem der beiden unmittelbar darunterliegenden Kreise geht, bis die unterste Reihe erreicht ist. Das Bild zeigt ein Japanisches Dreieck mit $n = 6$ und einen Ninja-Pfad mit zwei roten Kreisen in diesem Dreieck.

Man bestimme, in Abhängigkeit von n, das größte k, sodass es in jedem Japanischen Dreieck einen Ninja-Pfad mit mindestens k roten Kreisen gibt.

Aufgabe 6. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen im Inneren von *ABC*, sodass

$$BA_1 = A_1C, CB_1 = B_1A, AC_1 = C_1B$$

und

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480°$$

gilt. Die Geraden BC_1 und CB_1 schneiden sich in A_2, die Geraden CA_1 und AC_1 in B_2, die Geraden AB_1 und BA_1 in C_2.

Man beweise: Wenn das Dreieck $A_1B_1C_1$ nicht gleichschenklig ist, dann enthalten die drei Umkreise der Dreiecke AA_1A_2, BB_1B_2 und CC_1C_2 zwei gemeinsame Punkte.

Sicherlich ist der Schwierigkeitsgrad sehr hoch, so dass für die Klassenstufen 9/10 im Allgemeinen keine vollständigen Lösungen erwartet werden. Dennoch könnte man sich mit diesen Aufgaben beschäftigen, beispielsweise

zu Aufgabe 1:	Man finde (einige) Zahlen mit der geforderten Eigenschaft.
zu Aufgabe 2:	Man veranschauliche die Fragestellung in einer Zeichnung.
zu Aufgabe 3:	Man löse die Aufgabe für $k = 2$.
zu Aufgabe 4:	Man suche für kleine n geeignete Zahlen $x_1, \dots, x_n$, so dass alle $a_1, \dots, a_n$ ganzzahlig sind.
zu Aufgabe 5:	Man bestimme für $n = 3, 4, 5, 6$ die jeweils größten k.
zu Aufgabe 6:	Man untersuche die Fragestellung für gleichseitige und gleichschenklige Dreiecke.

In alten Mathe-Büchern geblättert

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Übungs-Aufgaben für höhere Lehranstalten

Professor Dr. Th. Spieker

Verlag von August Stein, Potsdam 1895[4].

Zweiter Cursus

Abschnitt XVII – Die Combinationslehre

§ 259

Die Combinationslehre enthält die Gesetze, nach welchen aus beliebigen, nicht notwendig gleichartigen Einzelheiten, Gesamtheiten gebildet werden, die sich durch Form oder Inhalt unterscheiden. Die gegebenen Einzelheiten heißen *Elemente*, die auf ihnen gebildeten Gesamtheiten *Complexionen*. Die gegebenen Elemente haben eine bestimmte Reihenfolge, und werden demgemäß durch die Ordnungszahlen oder die Buchstaben in ihrer alphabetischen Reihenfolge bezeichnet, und als höhere oder niedrigere unterschieden. Gleich hohe werden mit denselben Zeichen belegt. Der Inbegriff der gegebenen Elemente in ihrer natürlichen Folge heißt der *Zeiger*.

Es gibt drei Arten von Complexionen:

1. *Permutationen*. Diese unterscheiden sich bei gleichbleibendem Inhalt nur durch die Form, d. h. durch die Anordnung aller im Zeiger enthaltenen Elemente.
2. *Combinationen*. Diese unterscheiden sich ohne Rücksicht auf die Form nur durch ihren Inhalt, d. h. durch die darin vorkommenden Elemente.
3. *Variationen*. Diese sind sowohl an Inhalt, wie in der Form, verschieden.

Beispiel. Die sämtlichen Variationen des Zeigers a, b, c sind folgende:

a, b, c	ab, ac, bc	abc
	ba, ca, cb	acb
		bac
		bca
		cab
		cba

In der obersten Zeile stehen sämtliche Combinationen, und die letzte Columne enthält die Permutationen dieses Zeigers.

a. Permutationen.

§ 260.

Ableitung sämtlicher Permutationen eines gegebenen Zeigers in lexicographischer Ordnung

Die erste Permutation ist der geordnete Zeiger selbst. Um jede folgende aus der je vorhergehenden abzuleiten, durchläuft man die letztere von rechts nach links, bis man zu

[4] Die Rechtschreibung und Zeichensetzung der historischen Schrift wurde weitgehend beibehalten, in Anlehnung an das Original wurde der Schrifttyp Mainzer Fraktur verwendet.

einem Element (der Lücke) kommt, das niedriger ist, als das rechts von ihm stehende. Für dies Element setzt man das nächst höhere der durchlaufenen, während man die vor ihm stehenden unverändert, und die noch übrigen Elemente in natürlicher Ordnung folgen läßt. Die letzte Permutation ist der umgekehrte Zeiger.

Den Inbegriff sämtlicher Permutationen eines gegebenen Zeigers abcd…n bezeichnet man mit P(abcd…n).

Alle Permutationen, welche mit demselben Element anfangen, bilden eine Ordnung, Der Inbegriff der Permutationen jedes Zeigers zerfällt daher in so viele Ordnungen, als Elemente vorhanden; jede Ordnung aber, wenn man von den unveränderlichen Anfangselemente absieht, wieder in so viele Unterordnungen, als noch verschiedene Elemente da sind, u. s. w. Diese Bemerkung kommt beim praktischen Permutieren zu statten, indem man niemals in eine höhere Ordnung eintreten darf, ehe alle Permutationen der Unterordnungen vollendet sind.

Enthält der Zeiger einige gleiche Elemente, so bleibt das Permutationsverfahren dasselbe, nur die Zahl der Permutationen ist eine geringere.

§ 261.

Berechnung der Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen.

Die gesuchte Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen soll mit P(n) bezeichnet werden. Nach dem vor. § besteht der Inbegriff aller Permutationen eines Zeigers von n Ordnungen in der jedes Mal (n – 1) verschiedene Element permutiert sind. Da nun

$P(1) = 1$, so ist daher

$P(2) = 2.\ P(1) = 2.\ 1.$

$P(3) = 3.\ P(2) = 3.\ 2.\ 1.$

$P(4) = 4.\ P(3) = 4.\ 3.\ 2.\ 1.$

$\quad\ldots\qquad\ldots$

$P(n) = n.\ P(n-1) = n.\ (n-1)\ .\ .\ .\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.$

Also $\quad P(n) = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ .\ .\ .\ n.$

Das Produkt der Faktoren-Folge aller ganzen Zahlen von 1 bis n nennt man „n“ Fakultät, und bezeichnet dieselbe mit n! Es ist daher P(n) = n!

§ 262.

Berechnung der Anzahl der Permutationen eines Zeigers von n Elementen, unter denen α einander gleiche vorkommen.

Wären alle Elemente verschieden, so wäre die Anzahl ihrer Permutationen = P(n) = n!. Da nun aber α Elemente einander gleich sind, so ist die Anzahl der wirklich verschiedenen Complexionen, die mit x bezeichnet werden möge, geringer. Man müßte nämlich in jeder dieser x Complexionen jene α Elemente, indem man sie als verschieden denkt, erst unter sich permutieren, um die P(n) Permutationen zu erhalten. Da hierdurch aus jeder der x nun $P(\alpha) = \alpha!$ Complexionen entstehen, so ist

$x.\ P(\alpha) = P(n)$; daher

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{P}(\alpha)} = \frac{\mathrm{n}!}{\alpha!}\,.$$

Kommen in einem Zeiger von n Elementen, α gleiche einer Art, β gleiche einer anderen Art, γ gleiche einer dritten Art, ſo iſt:

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{P(n)}}{\mathrm{P}(\alpha)\cdot\mathrm{P}(\beta)\cdot\mathrm{P}(\gamma)} = \frac{\mathrm{n}!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,.$$

Lösungshinweise zur Monatsaufgabe 6/23.

Beweisen Sie: Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es von Null verschiedene natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$, für die $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ gilt.

Lösungshinweise: Zur Erfüllung der Aufgabe genügt es, geeignete Zahlenbeispiele (ohne Herleitung) anzugeben und die Richtigkeit der Gleichung zu prüfen. So ist es möglich, die Zahlen für jedes $n \geq 2$ wie folgt zu wählen:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-2}, a_{n-1} = 2, a_n = n.$$

Dann gilt:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (n-2)\cdot 1 + 2 + n = 2n = \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{n-2}\cdot 2\cdot n \qquad \square$$

Hinweis: Diese Aufgabe wurde als Aufgabe **MO221041** gestellt. Sie hatte einen thematischen Vorgänger.

Aufgabe MO201031. Ermitteln Sie alle diejenigen Quintupel (x, y, z, u, v) aus natürlichen Zahlen, für die $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$ und

$$x + y + z + u + v = x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$$

gilt!

Lösungshinweise: Wenn ein Quintupel natürlicher Zahlen die geforderte Eigenschaft hat, so folgt $x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v = x + y + z + u + v \leq 5 \cdot v$, also wegen $v > 0$

$$x \cdot y \cdot z \cdot u \leq 5$$

Wäre $y \geq 2$, so wären auch $z \geq 2$ und $u \geq 2$ und damit $x \cdot y \cdot z \cdot u \geq 8 \cdot x \geq 8$. Also finden wir $x = y = 1$ und $z \cdot u \leq 5$.

Wäre $z \geq 3$, so wären auch $u \geq 3$ und damit $z \cdot u \geq 9$. Also gilt stets $z = 1$ oder $z = 2$ sowie $u \leq 5$.

Durch systematisches Probieren finden wir alle Quintupel:

z	u	$x+y+z+u+v$	$x \cdot y \cdot z \cdot u \cdot v$	v
1	1	$4+v$	v	$4=0$ Widerspruch
1	2	$5+v$	$2v$	$v=5$
1	3	$6+v$	$3v$	$2v=6 \Rightarrow v=3$
1	4	$7+v$	$4v$	$3v=7 \Rightarrow v \notin \mathbb{N}$
1	5	$8+v$	$5v$	$4v=8 \Rightarrow v<u$ Widerspruch
2	2	$6+v$	$4v$	$3v=6 \Rightarrow v=2$

Somit haben wir insgesamt drei Quintupel mit der geforderten Eigenschaft gefunden:

$$1+1+1+2+5=10=1\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5$$
$$1+1+1+3+3=9=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3$$
$$1+1+2+2+2=8=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$

❑

Ergänzung: Wenden wir die Lösungsstrategie auf die Aufgabe **MO221041** an, so können wir o.B.d.A. $0<a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ voraussetzen und erhalten zunächst $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \leq n$. Für die natürliche Zahl k mit $2^{k-1} \leq n < 2^k$ finden wir die Werte $a_1=a_2=\cdots=a_{n-k}=1$, weil anderenfalls das Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ mindestens gleich 2^k und damit größer als n ist. Nun muss auch $a_{n-k+1} \leq 2$ gelten, weil sonst der Wert des Teilproduktes $a_{n-k+1} \cdot a_{n-k+2} \cdot \ldots \cdot a_{n-1}$ mindestens gleich 3^k und damit größer als n ist.

Durch systematisches Probieren finden wir für $a_1=a_2=\cdots=a_{n-4}=1$ verschiedene Lösungstupel. Da aber – bis auf Zeile 2 – Nebenbedingungen an n zu stellen sind (rechte Spalte), gelingt es damit nicht, allgemeingültige Regeln für alle n zu generieren.

a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$\prod_{i=1}^{n} a_i$	a_n
1	1	1	$(n-1)\cdot 1+a_n$	a_n	$(n-1)\cdot 1=0$ $\Rightarrow$ Widerspruch
2	1	1	$(n-2)\cdot 1+2+a_n$	$2\cdot a_n$	n
3	1	1	$(n-2)\cdot 1+3+a_n$	$3\cdot a_n$	$2\cdot a_n=n+1$ $\Rightarrow 2\|(n+1)$, $n \geq 2\cdot 3-1$
p	1	1	$(n-2)\cdot 1+p+a_n$	$p\cdot a_n$	$(p-1)\cdot a_n=n+p-2$ $\Rightarrow (p-1)\|(n-1)$, $n \geq (p-2)\cdot p+2$
2	2	1	$(n-3)\cdot 1+4+a_n$	$4\cdot a_n$	$3\cdot a_n=n+1$ $\Rightarrow 3\|(n+1)$ $n \geq 3\cdot 2-1$
3	2	1	$(n-3)\cdot 1+5+a_n$	$6\cdot a_n$	$5\cdot a_n=n+2$ $\Rightarrow 5\|(n+2)$ $n \geq 5\cdot 32$

2	2	2	$(n-4)\cdot 1+6+a_n$	$8\cdot a_n$	$7\cdot a_n = n+2$ $\Rightarrow 7\|(n+2)$ $n \geq 7\cdot 2-2$

Beispiele:

Zeile 2: n beliebig $\quad \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-2}+2+n=2\cdot n$

Zeile 3: $n=5$ $\quad 1+1+1+3+3=9=1\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 3$

Zeile 3: $n=7$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{5}+3+4=12=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{5}\cdot 3\cdot 4$

Zeile 4: $p=5, n=17$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{15}+5+5=25=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{15}\cdot 5\cdot 5$

Zeile 5: $n=5$ $\quad 1+1+2+2+2=8=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Zeile 5: $n=8$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{5}+2+2+3=12=1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

Zeile 6: $n=18$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{15}+2+3+4=24=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{15}\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

Zeile 7: $n=12$ $\quad \underbrace{1+\cdots+1}_{8}+2+2+2+2=16=\underbrace{1\cdot\ldots\cdot 1}_{8}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$

Da in der Aufgabenstellung zwei Terme aus dem Wurzelsatz von VIETA verwendet werden, wollen wir dessen Anwendung zur Lösung prüfen. Wir nehmen also an, die gesuchten Variablen sind die n reellwertigen Lösungen eines Polynoms n-ten Grades.

Im Fall $n=2$ finden wir für die natürliche Zahl $t=a_1+a_2=a_1\cdot a_2$ die zu lösende Gleichung in der Form $a^2-ta+t=0$. Nach der Lösungsformel erhalten wir

$$a_{1,2}=\frac{t}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}\cdot(t^2-4t)}=\frac{1}{2}\cdot\left(t\pm\sqrt{t^2-4t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(t\pm\sqrt{(t-2)^2-4}\right)$$

Damit die Wurzel einen ganzzahligen Wert ergibt, muss $(t-2)^2-4$ das Quadrat einer natürlichen Zahl sein. Dies gelingt nur für $t=4$, denn für $t = 0,1,2,3$ erhalten wir keine Quadratzahl und für $t>4$ ist der Abstand von $(t-2)^2$ zur nächstgelegenen Quadratzahl mindestens 5.

Somit ist für $n=2$ die einzige Lösung der Aufgabenstellung $(2,2)$ mit $2+2=2\cdot 2$.

Im Fall $n=3$ finden wir für die natürliche Zahl $t=a_1+a_2+a_3=a_1\cdot a_2\cdot a_3$ die zu lösende Gleichung in der Form $a^3-ta^2+sa-t=0$. Nehmen wir an, eine der drei Lösungen sei $a_1=1$. Wir führen die Partialdivison aus und erhalten die Faktorenzerlegung:

$$a^3-ta^2+sa-t=(a-1)\cdot(a^2+a\cdot(s-1+t)+s+1-t)+\frac{-2t+s+1}{a-1}$$

Nur im Fall $s=2t-1$ kann die Division ohne Rest ausgeführt werden. Damit finden wir die Faktorenzerlegung

$$a^3-ta^2+sa-t=(a-1)\cdot(a^2+a\cdot(1-t)+t).$$

Durch systematisches Probieren finden wir, dass die quadratische Funktion im rechten Klammerausdruck für $t = 3, 4, 5$ keine reellwertigen Nullstellen hat. Für $t = 6$ finden wir $a_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$, also $a_2 = 2$ und $a_3 = 3$. Für $t > 6$ gilt $(t-1)^2 - 4t = t^2 - 6t + 1 = (t-3)^2 - 8$, aber der Abstand von $(t-3)^2$ zur nächstgelegenen Quadratzahl ist 7 oder mindestens 9.

Somit ist für $n = 3$ die einzige Lösung der Aufgabenstellung $(1,2,3)$ mit $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Auch für $n > 3$ lassen sich die gegebenen Terme mit ähnlicher Argumentation auswerten mit Hilfe des Wurzelsatzes von VIETA auswerten. Aber der Aufwand wird hoch, selbst wenn man die Anzahl der Variablen mit Wert 1 richtig errät.

Monatsaufgabe[5] 9/23.

Von einer fünfstelligen ganzen Zahl wird eine bestimmte Ziffer gestrichen, so dass eine vierstellige Zahl übrig bleibt. Die fünfstellige und die neue vierstellige Zahl werden addiert und ergeben die Summe 52713.

Wie groß ist die Quersumme der ursprünglichen fünfstelligen Zahl?

Termine

Online-Seminar des Bundeswettbewerbs Mathematik 2023
13.09.2023, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Verein Bildung & Begabung e.V. Bonn
Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10121

Online-Auftaktveranstaltung 59. Wettbewerbsrunde „Jugend forscht“
13.09.2023, 17:00 bis 18:00 Uhr, Veranstalter: Jugend-forscht-Team Sachsen
Einwahl: https://jufo-sc01-greenlight01.x-net.at/b/jug-hkq-mbe-cgq

Online-Seminar Mathematik-Olympiade in Deutschland
14.09.2023, 17:30 bis 18:30 Uhr, Veranstalter: Verein Bildung & Begabung e.V. Bonn
Anmeldung: https://secure.bildung-und-begabung.de/workshops/?event=10122

Präsenzseminar zu den „Mathematischen Kostproben“: Nach der 1. Runde der 63. MO mit Aufgabenanalysen zur Vorbereitung der 2. Runde.
21.10.2023, 09:00 bis 12:30 Uhr, Veranstalter: Dr. Norman Bitterlich, zu Gast an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz (09126 Chemnitz, Reichenhainer Str. 39)
Formlose Anmeldung an bino@krz.tu-chemnitz.de

[5] Lösungseinsendungen an norman.bitterlich@t-online.de sind bis 31.10.2023 willkommen und werden kommentiert und bewertet zurückgesandt.

Inhalt

Aufgabenbezogene Themen (Schuljahr 2023/24)

Ausgabe	Nr.	Thema	Aufgabe
8+9/2023 (Aug./Sep. 2023)	Thema 24	Kombinatorik	MO621042 MO620942
8+9/2023 (Aug./Sep. 2023)	Thema 23	Quersummen und Querprodukte	MO621041, MO620941

Alle Hefte sind ab Heft 9/2020 als pdf-Dokumente auf Anfrage (norman.bitterlich@t-online.de) oder unter https://mathematikalpha.de/mathematische-kostproben erhältlich.

´

Impressum
Redaktion: Dr. Norman Bitterlich
Anschrift: Draisdorfer Str. 21, 09114 Chemnitz
E-Mail: norman.bitterlich@t-online.de
www.kzm-sachsen.de
Auflage: digital, auf Anfrage auch Papierausdruck lieferbar

Mit freundlicher Unterstützung des Fördervereins „Mathematik zu Chemnitz“ e.V. an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz, VR1380 am Amtsgericht Chemnitz