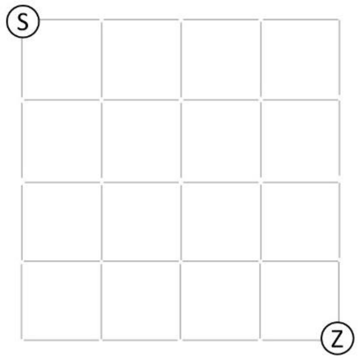
Mathe macht Spaß – ist doch LOGO

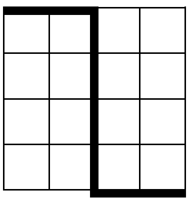
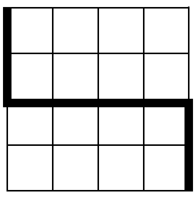
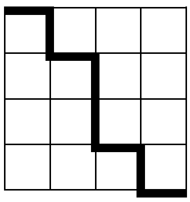
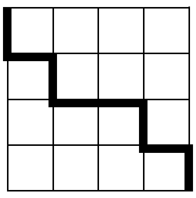
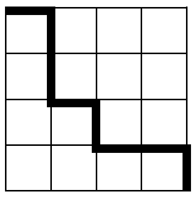
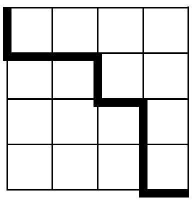
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Lösungshinweise zu den Sommeraufgaben 2023

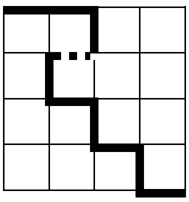
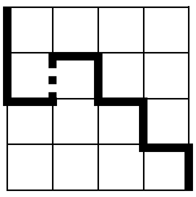
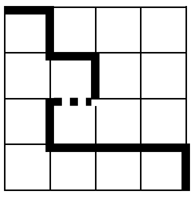
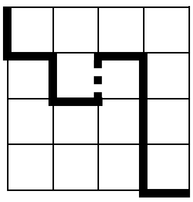
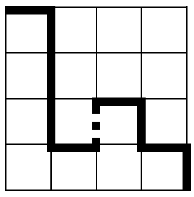
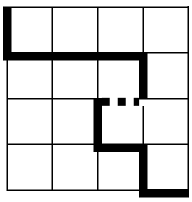


Kreisa und Quadrato spielen gern mit Legestäbchen. Sie wollen mit den Legestäbchen Wege legen, und zwar von links oben (Gitterpunkt **S**tart) nach rechts unten (Gitterpunkt **Z**iel). Dabei sollen die Legestäbchen genau auf den Gitterlinien zwischen zwei Gitterpunkten liegen, jedoch nie zwei oder mehr Legestäbchen übereinander. Der Weg soll sich nirgends kreuzen. Wir merken uns die Position von S und Z und geben diese in den folgenden Abbildungen nicht mehr an.

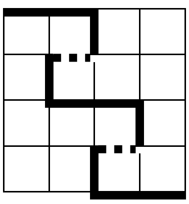
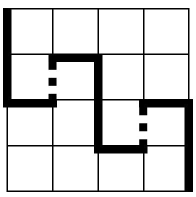
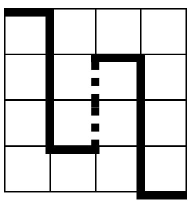
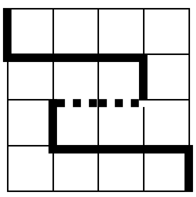
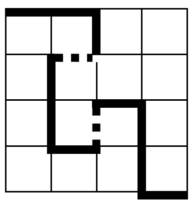
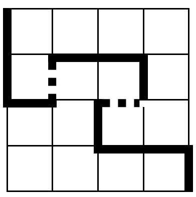
Lösungshinweise zu Aufgabe 1: Wenn diese Wege das Gitternetz mit 16 Quadraten jeweils in zwei Teile zerlegen, die gleich viele Quadrate enthalten, so müssen in jedem Teil genau 8 Quadrate sein. Für einen Weg benötigst du mindestens 8 Legestäbchen, denn der Weg führt mindestens viermal nach rechts und viermal nach unten. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Weg mit 8 Legestäbchen zu legen. Es genügte laut Aufgabenstellung, eine Möglichkeit anzugeben. Hier findest du einige Beispiele:

Es sind aber auch Wege möglich, für die 10 Legestäbchen benötigt werden. Dies ist möglich, wenn du auf dem Weg ein Legestäbchen nach links (oder nach oben) legst (gestrichelt gezeichnet). Dann muss ja an einer anderen Stelle ein zusätzliches Legestäbchen nach rechts (oder nach unten) gelegt werden. Es genügte laut Aufgabenstellung, eine Möglichkeit anzugeben. Hier findest du einige Beispiele:

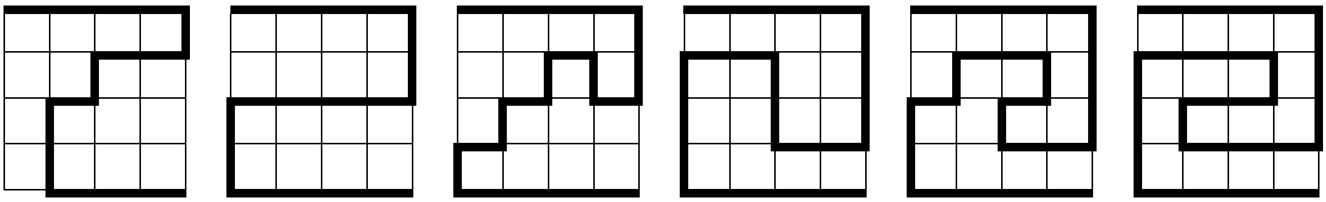
     

Es sind aber auch Wege möglich, für die 12 Legestäbchen benötigt werden. Dies ist möglich, wenn du auf dem Weg zwei Legestäbchen nach links (oder nach oben) legst (gestrichelt gezeichnet). Dann muss ja an einer anderen Stelle zwei zusätzliches Legestäbchen nach rechts (oder nach unten) gelegt werden. Hier findest du einige Beispiele:

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Es geht aber auch mit noch mehr Legestäbchen. Es sind 14, 16, 18, 20, 22 und 24 Legestäbchen möglich:



14 Stäbchen 16 Stäbchen 18 Stäbchen 20 Stäbchen 22 Stäbchen 24 Stäbchen

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 – Antwortsatz: Es gibt keinen Weg, der das Gitternetz so zerlegt, dass der eine Teil doppelt so viele Quadrate enthält wie der andere Teil.

Begründung: Du kannst versuchen, die Aufteilung mit Hilfe einer Tabelle zu finden. Legst du eine Anzahl für den kleineren Teil fest, kennst du die erforderliche Anzahl für den größeren Teil (der doppelt so viele Quadrate wie der kleinere Teil enthält). Eine Teilung wie gefordert ist nur möglich, wenn die Gesamtanzahl aller Quadrate 16 ergibt.

Anzahl der Quadrate im Teil 1	Anzahl der Quadrate im Teil 2	Gesamtanzahl der Quadrate	Vergleich
1	$2 \cdot 1 = 2$	$1 + 2 = 3$	$3 < 16$
2	$2 \cdot 2 = 4$	$2 + 4 = 6$	$6 < 16$
3	$2 \cdot 3 = 6$	$3 + 6 = 9$	$9 < 16$
4	$2 \cdot 4 = 8$	$4 + 8 = 12$	$12 < 16$
5	$2 \cdot 5 = 10$	$5 + 10 = 15$	$15 < 16$
6	$2 \cdot 6 = 12$	$6 + 12 = 18$	$18 > 16$

Setzt du die linke Spalte fort, werden es immer mehr Quadrate. In keinem Fall findest du insgesamt 16 Quadrate.

Lösungsvariante: Sicher hast du es auch bemerkt – in der Spalte „Gesamtanzahl der Quadrate“ stehen nur Zahlen, die ein Vielfaches von 3 sind. Diese Beobachtung kannst du auch ohne Tabelle finden. Bezeichne mit X die Anzahl der Quadrate im Teil 1, dann müssen im Teil 2 doppelt so viele Quadrate sein, also $2 \cdot X$. Die Gesamtanzahl der Quadrate beträgt damit

$$X + 2 \cdot X = 3 \cdot X$$

Da aber 16 nicht durch 3 teilbar ist, kann es keine Lösung der Aufgabe geben.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3: Ermittle zuerst, wie viele Quadrate im kleineren Teil sein müssen, damit die Aufgabe gelöst werden kann. Du kannst wie in Aufgabe 2 wieder versuchen, die Aufteilung mit Hilfe einer Tabelle zu finden. Legst du eine Anzahl für den kleineren Teil fest, kennst du die erforderliche Anzahl für den größeren Teil (der dreimal so viele Quadrate wie der kleinere Teil enthält). Eine Teilung wie gefordert ist nur möglich, wenn die Gesamtanzahl aller Quadrate 16 ergibt.

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

Anzahl der Quadrate im Teil 1	Anzahl der Quadrate im Teil 2	Gesamtanzahl der Quadrate	Vergleich
1	$3 \cdot 1 = 3$	$1 + 3 = 4$	$4 < 16$
2	$3 \cdot 2 = 6$	$2 + 6 = 8$	$8 < 16$
3	$3 \cdot 3 = 9$	$3 + 9 = 12$	$12 < 16$
4	$\mathbf{3 \cdot 4 = 12}$	$\mathbf{4 + 12 = 16}$	$\mathbf{16 = 16}$
5	$3 \cdot 5 = 15$	$5 + 15 = 20$	$20 > 16$

Setzt du die linke Spalte fort, werden es immer mehr Quadrate. Nur die Aufteilung mit 4 Quadraten und 12 Quadraten kann die Aufgabenstellung erfüllen.

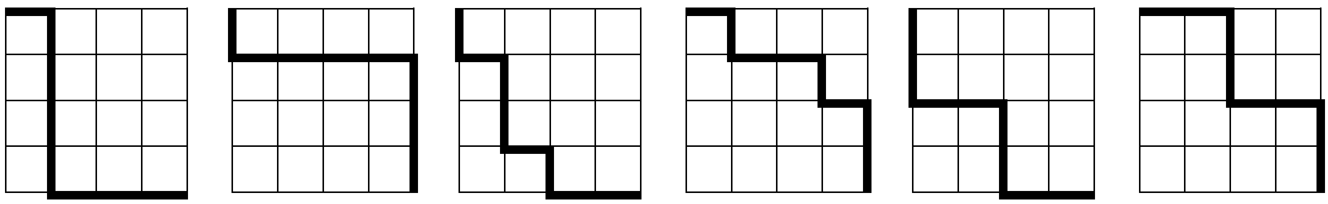
Lösungsvariante: Sicher hast du es auch bemerkt – in der Spalte „Gesamtanzahl der Quadrate“ stehen nur Zahlen, die ein Vielfaches von 4 sind. Diese Beobachtung kannst du auch ohne Tabelle finden. Bezeichne mit X die Anzahl der Quadrate im Teil 1, dann müssen im Teil 2 dreimal so viele Quadrate sein, also $3 \cdot X$. Die Gesamtanzahl der Quadrate beträgt damit

$$X + 3 \cdot X = 4 \cdot X$$

Da aber die Gesamtanzahl 16 beträgt, muss der kleinere Teil (16 : 4 =) 4 Quadrate umfassen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a) – Antwortsatz: Der kürzeste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 8 Legestäbchen lang.

Herleitung: Um von S zu Z zu gelangen, sind mindestens 8 Legestäbchen erforderlich, denn es werden mindestens 4 Legestäbchen nach unten und mindestens 4 Legestäbchen nach rechts benötigt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Aufgabe mit 8 Legestäbchen zu erfüllen, zum Beispiel:



Lösungshinweise zu Aufgabe 3b) – Antwortsatz: Der längste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 16 Legestäbchen lang.

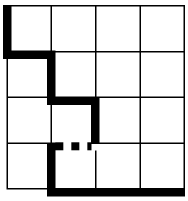
Herleitung: Um von S zu Z zu gelangen, kannst du mehr als 8 Legestäbchen verwenden, wenn du auf einem Weg mit 8 Legestäbchen zusätzlich

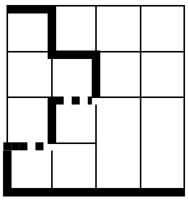
- ein Legestäbchen nach links legst (10 Legestäbchen),
- oder zwei Legestäbchen nach links legst (12 Legestäbchen),
- oder drei Legestäbchen nach links legst (14 Legestäbchen),
- oder vier Legestäbchen nach links legst (16 Legestäbchen),
- oder drei Legestäbchen nach links und ein Legestäbchen nach oben legst (16 Legestäbchen),

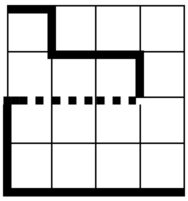
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

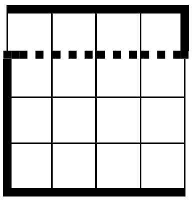
- oder zwei Legestäbchen nach links und zwei Legestäbchen nach oben legst (16 Legestäbchen).

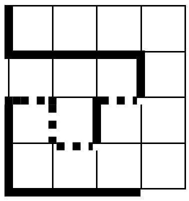
Der längste Weg, um das Gitternetz wie gefordert aufzuteilen, ist 16 Legestäbchen lang.

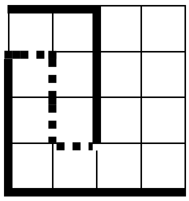

10 Stäbchen


12 Stäbchen


14 Stäbchen


16 Stäbchen


16 Stäbchen


16 Stäbchen

Lösungshinweise zu Aufgabe 4: In Aufgabe 1 haben wir schon 24 verschiedene Wege gezeigt, die das Gitternetz in zwei Teile zerlegt, die beide 8 Quadrate umfassen.

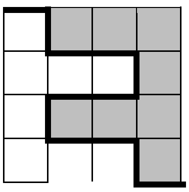
*Wenn du **über 20** verschiedene Wege gefunden hast, ist das ein **sehr gutes Ergebnis**!*

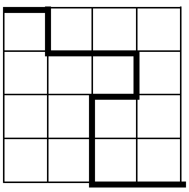
Eine Herleitung für die gefundenen Wege ist nicht erforderlich. Um aber noch mehr Beispiele zu finden, ist eine übersichtliche Systematik hilfreich, um möglichst keine Möglichkeiten zu übersehen. Die folgenden Erklärungen sind für die Lösung der Aufgabe nicht notwendig – sie dienen nur als eine Ergänzung zu diesem Thema.

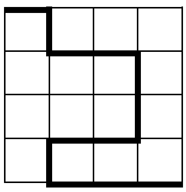
Wir bezeichnen die Richtung der Legestäbchen entsprechend der Wegrichtung von S nach Z mit rechts, links, unten und oben und kürzen die Richtungen mit **r, l, u** und **o** ab. Auf diese Weise können wir den Weg 1 so beschreiben: r-u-r-r-u-l-l-u-r-r-u-r.

Wir beginnen unsere Systematik mit **r-u-r** (wie beim Weg 1). Wir können nicht mit o fortsetzen (weil dann ein Teil aus einem Quadrat entsteht).

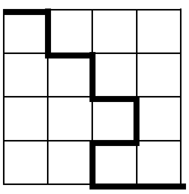
- Wir können aber mit r fortsetzen und müssen dann u anschließen (weil sonst ein Teil mit drei Quadraten entsteht). Nun finden wir 3 Wege (Weg 1, Weg 2, Weg 3) , so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

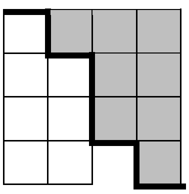

Weg 1

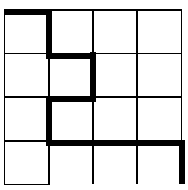

Weg 2


Weg 3

- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 3 Wege (Weg 4, Weg 5, Weg 6),


Weg 4

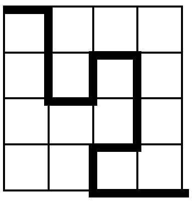
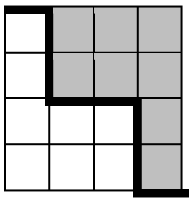
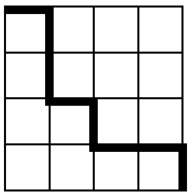
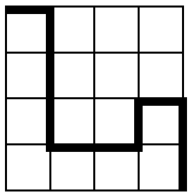
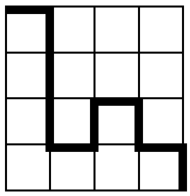

Weg 5


Weg 6

Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

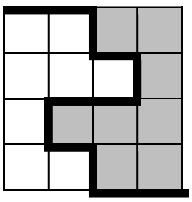
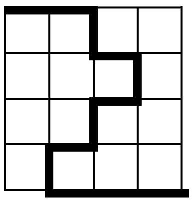
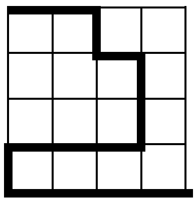
Wir setzen unsere Systematik mit **r-u-u** fort (wie beim Weg 7). Wir können nicht mit l fortsetzen (weil dann ein Teil aus zwei Quadraten entsteht).

- Wir können aber mit r fortsetzen und dann o anschließen. Nun finden wir 1 Weg (Weg 7), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.
- Wir können aber auch mit r fortsetzen. Dafür finden wir 2 Wege (Weg 8, Weg 9), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.
- Wir können schließlich auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 2 Wege (Weg 10, Weg 11), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

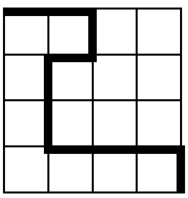
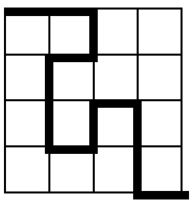
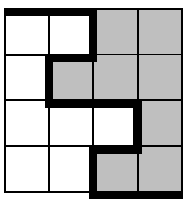
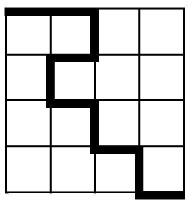

Weg 7

Weg 8

Weg 9

Weg 10

Weg 11

Wir setzen unsere Systematik mit **r-r-u** fort (wie beim Weg 12).

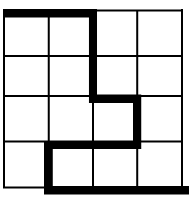
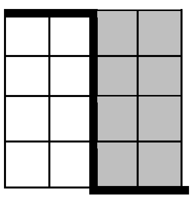
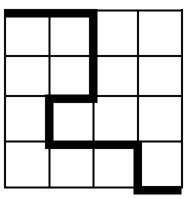
- Wir können mit r fortsetzen und dann u anschließen. Nun finden wir 3 Wege (Weg 12, Weg 13, Weg 14), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.


Weg 12

Weg 13

Weg 14

- Wir können aber auch mit l fortsetzen. Dafür finden wir sogar 4 Wege (Weg 15, Weg 16, Weg 17, Weg 18), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.


Weg 15

Weg 16

Weg 17

Weg 18

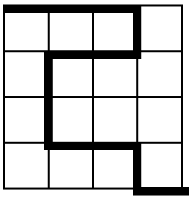
- Schließlich können aber auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir 3 Wege (Weg 19, Weg 20, Weg 21), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

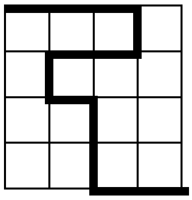

Weg 19

Weg 20

Weg 21

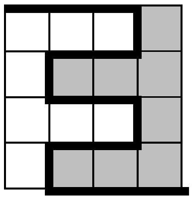
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

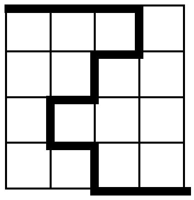
Wir setzen unsere Systematik mit **r-r-r-u** fort (wie beim Weg 22).

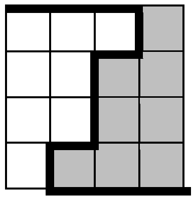
- Wir können nicht mit r fortsetzen (weil dann ein Teil aus einem Quadrat entsteht).
- Wir können aber mit l fortsetzen. Dafür finden wir 6 Wege (Weg 22 bis Weg 27), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

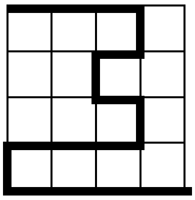

Weg 22


Weg 23

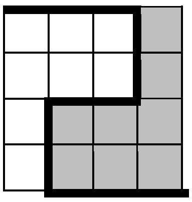

Weg 24

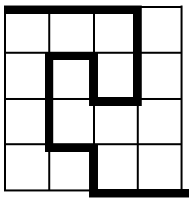

Weg 25

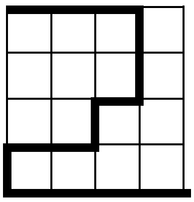

Weg 26

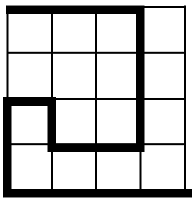

Weg 27

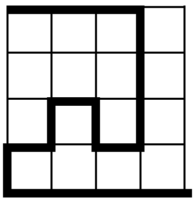
- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Auf diese Weise finden wir ebenfalls 6 Wege (Weg 28 bis Weg 33), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

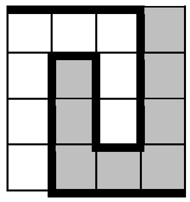

Weg 28


Weg 29


Weg 30

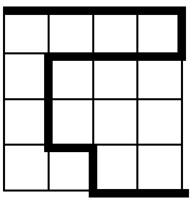

Weg 31

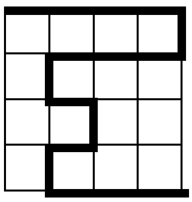

Weg 32

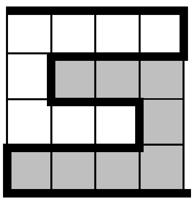

Weg 33

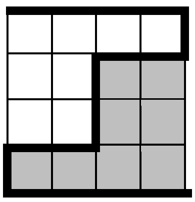
Wir schließen unsere Systematik mit **r-r-r-r-u** ab (wie beim Weg 34).

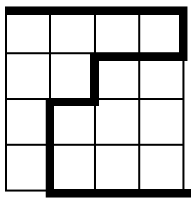
- Wir können mit l fortsetzen und finden 11 Wege (Weg 34 bis Weg 44), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

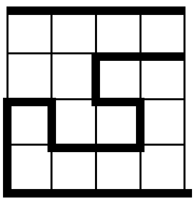

Weg 34

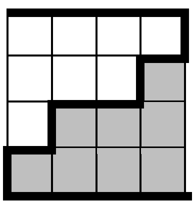

Weg 35

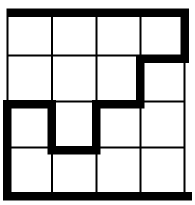

Weg 36

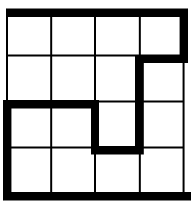

Weg 37

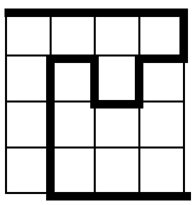

Weg 38

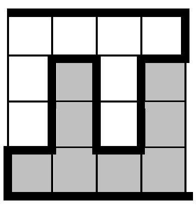

Weg 39


Weg 40


Weg 41

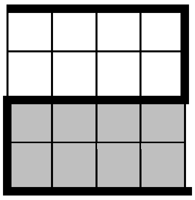

Weg 42

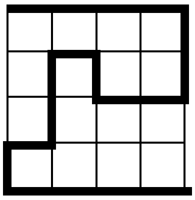

Weg 43

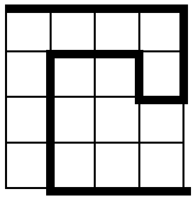

Weg 44

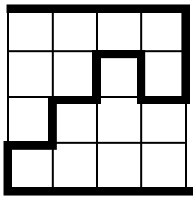
Dr. Norman Bitterlich
Kontakt: Draisdorfer Str. 21 ° 09114 Chemnitz ° norman.bitterlich@t-online.de

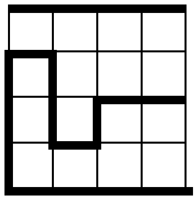
- Wir können aber auch mit u fortsetzen. Dafür finden wir ebenfalls 11 Wege (Weg 45 bis weg 55), so dass ein Teil acht Quadrate umfasst.

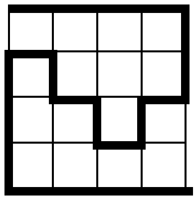

Weg 45

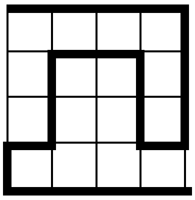

Weg 46

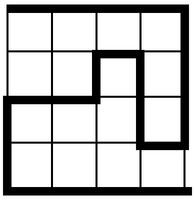

Weg 47

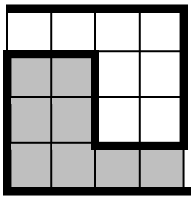

Weg 48

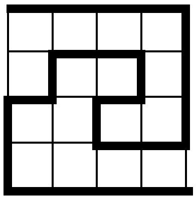

Weg 49

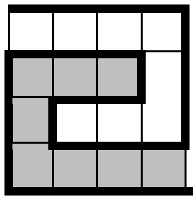

Weg 50


Weg 51


Weg 52

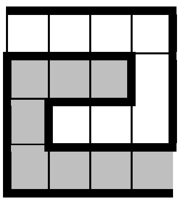

Weg 53


Weg 54

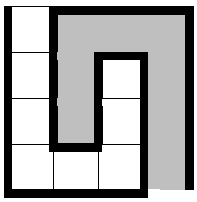

Weg 55

Wir haben also bereits 55 verschiedene Wege gefunden. Aber alle unsere Wege beginnen mit **r**. Wenn wir Wege jedoch mit **u** beginnen lassen, finden wir noch einmal so viele verschiedene Wege.

Diese erhalten wir, wenn wir die Wege 1 bis 55 an der Diagonalen S-Z kippen, zum Beispiel


Weg 55

→


Weg 55 (gekippt)

Lösungshinweise zu Aufgabe 5: Bei den Wegen in Aufgabe 4 kannst du alle Teile markieren, die deckungsgleich zum zweiten Teil sind. In der Darstellung hier sind das 17 Wege.